

NDËRTIMI DHE ANALIZA E NJË MODELI MATEMATIK TË
KOMBINIMIT TË METODAVE STATISTIKORE ME METODAT
GIS

Endri Raço

Universiteti Politeknik i Tiranës

2013

Prof.Dr. Shpëtim Leka
Udhëheqës Shkencor

ABSTRAKT

NDËRTIMI DHE ANALIZA E NJË MODELI MATEMATIK TË KOMBINIMIT
TË METODAVE STATISTIKORE ME METODAT GIS

Endri Raço

Prof.Dr. Shpëtim Leka, Udhëheqës Shkencor

Figurat

3.1	Histograma e intervaleve kohore për T_{S2}	12
3.2	Histograma e intervaleve kohore për T_{S3}	13
3.3	Histograma për madhësinë e rastit X_{S1}	15
3.4	Histograma për madhësinë e rastit X_{S2}	16
3.5	Histograma për madhësinë e rastit X_{S3}	17
3.6	Grafiku Q-Q për madhësinë e rastit T_{S2}	21
3.7	Grafiku Q-Q për madhësinë e rastit T_{S3}	21
6.1	Harta e Unazës të Tiranës	59
6.2	Harta e Unazës të Tiranës me stacionet	61
6.3	Pozicioni 1-Simulimi Puason	73
6.4	Pozicioni 2-Simulimi Puason	74
6.5	Pozicioni 3-Simulimi Puason	75

FIGURAT

6.6	Pozizioni 4-Simulimi Puason	76
6.7	Pozizioni 5-Simulimi Puason	77
6.8	Pozizioni 6-Simulimi Puason	78
6.9	Pozizioni 7-Simulimi Puason	79
6.10	Pozizioni 8-Simulimi Puason	80
6.11	Pozizioni 9-Simulimi Puason	81
6.12	Pozizioni 10-Simulimi Puason	82
6.13	Pozizioni 11-Simulimi Puason	83
6.14	Pozizioni 1-Simulimi normal	84
6.15	Pozizioni 2-Simulimi normal	85
6.16	Pozizioni 3-Simulimi normal	86
6.17	Pozizioni 4-Simulimi normal	87
6.18	Pozizioni 5-Simulimi normal	88
6.19	Pozizioni 6-Simulimi normal	89
6.20	Pozizioni 7-Simulimi normal	90
6.21	Pozizioni 8-Simulimi normal	91
6.22	Pozizioni 9-Simulimi normal	92
6.23	Pozizioni 10-Simulimi normal	93
6.24	Pozizioni 11-Simulimi normal	94
6.25	Pozizioni 12-Simulimi normal	95

FIGURAT

6.26	Pozicioni 13-Simulimi normal	96
6.27	Pozicioni 14-Simulimi normal	97
6.28	Pozicioni 15-Simulimi normal	98
H.1	Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S1 . . .	139
H.2	Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S2 . . .	139
H.3	Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S3 . . .	140
L.1	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S1 -Algoritmi 1 . .	151
L.2	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S1 -Algoritmi 2 . .	151
L.3	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S2 -Algoritmi 1 . .	152
L.4	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S2 -Algoritmi 2 . .	152
L.5	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S3 -Algoritmi 1 . .	153
L.6	Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S3 -Algoritmi 2 . .	153
M.1	Simulimi i mbërritjeve të autobusëve në stacionin S2	155
M.2	Simulimi i mbërritjeve të autobusëve në stacionin S3	155
N.1	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S1- Algoritmi 1)	157
N.2	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S1- Algoritmi 2)	158

FIGURAT

N.3	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2- Algoritmi 1)	159
N.4	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2- Algoritmi 2)	160
N.5	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3- Algoritmi 1)	161
N.6	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3- Algoritmi 2)	162
P.1	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2)	172
P.2	Krahasimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3)	174
Q.1	Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit (Stacioni S2)	176
Q.2	Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit -krahasimi i mesatareve (Stacioni S2)	177
R.1	Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit (Stacioni S2)	179
R.2	Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit -krahasimi i mesatareve (Stacioni S2)	180

Tabelat

3.1	Parametrat statistikorë të vrojtimeve për T_{S2}	13
3.2	Parametrat statistikorë të vrojtimeve për T_{S3}	14
3.3	Parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësinë e rastit X_{S1} . . .	15
3.4	Parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësinë e rastit X_{S2} . . .	16
3.5	Parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësinë e rastit X_{S3} . . .	17
3.6	Rezultatet e testit Pirson për 3 stacionet	38
A.1	Të dhënat për mbërritjen e autobusëve	111
B.1	Të dhënat për mbërritjen e pasagjerëve	113
C.1	Tabela e grupimit të të dhënave për intervalet kohore T_{S2}	115
C.2	Tabela e grupimit të të dhënave për intervalet kohore T_{S3}	116
C.3	Tabela e grupimit të të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve në S1 . .	117

TABELAT

C.4	Tabela e grupimit të të dhënave për mbë rritjet e pasagjerëve në S2	117
C.5	Tabela e grupimit të të dhënave për mbë rritjet e pasagjerëve në S3	118
E.1	Tabelë ndihmëse për llogaritjen e momenteve(intervalet kohore T_{S2})	123
E.2	Momentet qendrorë dhe statistikat $\sqrt{b_1}$, b_2 për ligjin probabilitar të zgjedhjes(intervalet kohore T_{S2})	124
E.3	Tabelë ndihmëse për llogaritjen e momenteve(intervalet kohore T_{S3})	124
E.4	Momentet qendrorë dhe statistikat $\sqrt{b_1}$, b_2 për ligjin probabilitar të zgjedhjes(intervalet kohore T_{S3})	124
F.1	Tabela e koeficientëve δ dhe $1/\lambda$	126
F.2	Mesatarja dhe dispersioni i saktë dhe asimptotik për shpërndarjen e statistikës b_2	127
F.3	Kuantilet e shpërndarjes normale të normuar	130
F.4	Tabela e shpërndarjes X^2	131
G.1	Vlerat e koeficientit c_i për testin e modifikuar të Pirsonit	134
G.2	Vlerat kritike për testin e modifikuar të Pirsonit	134
G.3	Tabela e llogaritjes të testit të modifikuar χ^2 për T_{S2}	135
G.4	Tabela e llogaritjes të testit të modifikuar χ^2 për T_{S3}	136
H.1	Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S1	138
H.2	Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S2	138

TABELAT

H.3	Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S3	138
H.4	Tabela e shpërndarjes χ^2	140
I.1	Tabela e vlerave kritike për testin Kolmogorov-Smirnov	142
I.2	Testi Kolmogorov-Smirnov për T_{S2}	143
I.3	Testi Kolmogorov-Smirnov për T_{S3}	144
O.1	Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)	164
O.2	Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)	164
O.3	Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)	164
O.4	Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)	165
O.5	Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)	165
O.6	Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)	165
O.7	Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)	166
O.8	Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)	166
O.9	Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)	166
O.10	Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)	167
O.11	Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)	167
O.12	Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)	167
O.13	Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)	168
O.14	Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)	168
O.15	Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)	168

TABELAT

O.16 Statistika e çiftëve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)	169
O.17 Korrelacioni i çiftëve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)	169
O.18 Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)	169
P.1 Statistika e çiftëve të zgjedhjes	171
P.2 Korrelacioni i çiftëve të zgjedhjes	171
P.3 Testi T për çiftet e zgjedhjes	171
P.4 Statistika e çiftëve të zgjedhjes	173
P.5 Korrelacioni i çiftëve të zgjedhjes	173
P.6 Testi T për çiftet e zgjedhjes	173
Q.1 Testi T për krahasimin e modeleve të shërbimit	175
R.1 Testi T për krahasimin e modeleve të shërbimit	178

Përmbajta

I	Pjesa e parë	1
1	HYRJA	2
1.1	Hapat e krijimit të modelit	2
1.2	Përshkrimi i një sistemi me rradhë pritjeje	3
1.3	Procedura e vjeljes të të dhënave	4
2	PROCESET E RASTIT	6
2.1	Përshkrimi i procesit të mbërritjes të klientëve	6
2.2	Përshkrimi i procesit të shërbimit të klientëve	8
3	NDËRTIMI I MODELIT FILLESTAR	11
3.1	Ligji empirik i proceseve	12
3.1.1	Ligji empirik i kohës midis mbërritjeve të autobusit	12

3.1.2	Ligji empirik i mbërritjes të pasagjerëve	14
3.2	Vlerësimi i parametrave të proceseve të rastit	18
3.3	Kontrolli i hipotezave statistikore	19
3.4	Hipoteza për intervalet midis dy mbërritjeve të njëpasnjëshme të autobusëve në stacion	19
3.4.1	Metoda grafike	20
3.4.1.0.1	Grafiku Q-Q	20
3.4.2	Testet numerike	22
3.4.2.1	Testet e kontrollit të simetrisë	23
3.4.2.1.1	Testi i kontrollit të asimetrisë duke përdorur statistikën $\sqrt{\beta_1}$	25
3.4.2.1.2	Testi i kontrollit të eksessit duke përdorur statistikën $\sqrt{b_2}$	26
3.4.2.1.3	Testi i kombinuar K^2	27
3.4.2.2	Testi Pirson	29
3.4.2.3	Testi Kolmogorov-Smirnov	31
3.4.2.4	Testet e regresionit	34
3.4.2.4.1	Testi Shapiro-Wilk	34
3.5	Hipoteza për numrin e pasagjerëve që mbërrijnë në stacion	37

II	Pjesa e dytë	39
4	GJENERIMI I PROCESVE TË RASTIT	40
4.1	Gjenerimi i numrave të rastit me ligj probabilitar $U(0, 1)$	41
4.2	Gjenerimi i madhësive të rastit	42
4.3	Gjenerimi i proceseve Puason	42
4.4	Gjenerimi i proceseve normalë	44
5	KONTROLI I VLEFSHMËRISË TË MODELEVE ME NDIHMËN E SIMULIMIT	47
5.1	Kontrolli i vlefshmërisë të modelit për mbërritjen e pasagjerëve	48
5.2	Kontrolli i vlefshmërisë të modelit për kohët e shërbimit	50
5.3	Krahasimi i modeleve për kohën e shërbimit	51
6	VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METO- DAVE GIS	53
6.1	Kombinimi i gjuhës R me metodat GIS për paraqitjen vizuale të modelit matematik	53
6.2	Metodologjia e ndjekur për ndërtimin e sistemit	54
	6.2.0.4.2 Metodologjia e ndjekur në rastin e ligjit Puason	62
	6.2.0.4.3 Metodologjia e ndjekur në rastin e shpërn- darjes normale	68

6.3	Paraqitja grafike e rezultateve për procesin e simuluar Puason	72
6.4	Paraqitja grafike e rezultateve për procesin e simuluar Normal	84
7	KONKLUZIONE DHE REKOMANDIME	99
7.1	Rezultatet e punës	99
7.2	Rekomandime për kërkime të mëtejshme	101
	SHTOJCAT	109
A	Të dhënat për mbërritjen e autobusëve	110
B	Të dhënat për mbërritjen e pasagjerëve	112
C	Grupimi i të dhënave për mbërritjet	114
D	Metodat e vlerësimit pikësor	119
	D.0.0.4.4 Vlerësimi pikësor për parametrat μ dhe σ^2 .	119
	D.0.0.4.5 Vlerësimi pikësor për parametrin λ	121
E	Testi i kontrollit të asimetrisë duke përdorur statistikën $\sqrt{b_1}$ dhe statistikën β_2	123
F	Normimi i statistikave $\sqrt{\beta_1}$ dhe β_2. Llogaritja e statistikës K^2	125
G	Llogaritja e testit Pirson për intervalet e lëvizjes të autobusëve	132

H Llogaritja e testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve	137
I Testi Kolmogorov-Smirnov	141
J Algoritmi Box-Muller dhe Metoda e Koordinatave Polare	145
K Metodat e gjenerimit të proceseve të rastit Puason	147
L Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacione	150
M Simulimi i mbërritjeve të autobusëve	154
N Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale për procesin e mbërritjes të pasagjerëve	156
O Krahاسimi i mesatares për të dhënat reale dhe ato të simuluar. Testi T për të dhënat e mbërritjes të pasagjerëve	163
P Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale për procesin e shërbimit	170
Q Krahاسimi i modeleve për procesin e shërbimit	175
R Krahاسimi i modeleve për procesin e shërbimit	178

Pjesa I

Pjesa e parë

Kapitulli **1**

HYRJA

Qëllimi i dizertacionit është ndërtimi dhe analiza e një modeli matematiko-statistik duke përdorur metodat e simulimit dhe teknikat GIS të funksionimit të sistemit real. Si sistem real për të ilustruar idetë e procesit të modelimit, është përdorur një linjë transporti urban.

1.1 Hapat e krijimit të modelit

Hapat që propozojmë të ndiqen janë:

1. Ndërtimi i një modeli fillestar, si një përafrim i parë i procesit real.
2. Vlerësimi i shkallës së përafrimit të parametrave të procesit real nga ato të

modelit.

3. Përcaktimi i një funksioni që shpreh cilësinë e shërbimit që ofron procesi real
4. Përcaktimi i vlerave të parametrave që japin vlerën optimale të funksionit të cilësisë të shërbimit, përmes modelit.
5. Kontrolli i përputhshmërisë të zgjidhjes të përfutur nga modeli, me rezultatin e përfutur në një proces real të ngjashëm.

Për të konkretizuar hapat e mësipërm, po shtjellojmë rastin e funksionimit të një linje të transportit urban.

1.2 Përshkrimi i një sistemi me rradhë pritjeje

Një rradhë pritjeje mund të përshkruhet si një sistem në të cilin "klientët" dëshirojnë të marrin një shërbim dhe ju duhet të presin nëse shërbimi nuk është i menjëhershëm. Pasi merr shërbimin klienti largohet nga sistemi. Sistemi i rradhës të pritjes do të përcaktohet nga :

1. Procesi i mbërritjes të klientëve
2. Mekanizmi i shërbimit (disponueshmeria dhe numri i serverave, koha operative)
3. Disiplina e pritjes

Përshkrimi i sistemit nuk do të jetë i plotë, nëse ne nuk konsiderojmë ndërveprimet ndërmjet pjesëve të ndryshme të sistemit. Shpesh në probleme të ndryshme praktike ne nuk mund të mos konsiderojmë këto ndërveprime. Duke ju referuar shembullit të linjës të transportit urban në orët e pikut, kur në stacionet e autobuzit mbledhen më shumë njerëz duhet që edhe autobuzët të mbërrijnë më shpesh ose ndryshe njerëzit do vendosin të largohen, ose do të drejtohen mjeteve alternative të transportit.

Gjithashtu në qoftë se konsiderojmë numrin e njerëzve në stacion në lidhje me kohën e shërbimit do të shohim që sa me shumë klientë të shërbehen aq më e gjatë është koha e shërbimit. Në thelb, një sistem i pritjes përbëhet nga këta komponentë kryesorë:

1. Modeli i mbërritjes të klientëve
2. Modeli i shërbimit të klientëve
3. Disiplina e pritjes

1.3 Procedura e vjeljes të të dhënave

Për ndërtimin e modelit, kemi bërë vërtetime dhe kemi mbledhur të dhëna në 3 stacione të njëpasnjëshme të linjës urbane të unazës . Për thjeshtësi në punim këto stacione do të emërtojmë përkatësisht $S1, S2, S3$. Në secilin stacion kemi regjistruar

në një interval prej 2 orësh, çastet e mbërritjes dhe nisjes të autobusëve nga stacioni.

Për ta thjeshtuar arsyetimin, stacionet e përzgjedhura plotesojnë dy kushte:

1. shërbehet nga një linjë e vetme;
2. nuk mund jete stacioni i parë ose i fundit në linjë;

Qendra e qytetit shërbehet edhe nga linja të tjera autobusi ndaj do të kishte qenë tepër komplekse të bëhej e qartë lidhja pasagjerë - stacione. Prandaj, gjatë periudhave të pikut në mëngjes dhe pasdite, vëzhgimet janë bërë kryesisht në zonat e banuara afër qendrës së qytetit. Vëzhgimet janë bërë gjatë ditëve të javës në dy periudha kohore të ndryshme:

1. në mëngjes ora pik (07:00-09:00),
2. pasdite ora pik (15:30-17:30)

Kemi regjistruar gjithashtu edhe numrin e pasagjerëve që mbërrijnë në secilin stacion si dhe kohët e mbërritjes. Matjet janë realizuar gjatë një jave, në intervalet kohore të përmendura më sipër. Matjet nuk janë kryer në fundjavë (E Shtunë – E Dielë) sepse regjimi i sistemit urban në këto dy ditë është i ndryshëm nga ditët e tjera të javës . Të dhënat për mbërritjen e autobusëve në këto stacione janë paraqitur në Shtojcën A kurse të dhënat për mbërritjet e pasagjerëve janë paraqitur në Shtojcën B në fund të punimit.

Kapitulli 2

PROCESET E RASTIT

2.1 Përshkrimi i procesit të mbërritjes të klientëve

Shënojmë $X(t)$ numrin e pasagjerëve që mbërrijnë në stacion në intervalin e kohës $[0, t]$. $X(t)$ është madhësi e rastit. Le të vemë në dukje disa nga karakteristikat e madhësisë $X(t)$:

- (a) $X(t) \geq 0$. Duke shënuar çastin e fillimit të matjeve me $t=0$ do të supozojmë se në këtë moment nuk ka ndodhur akoma asnjë mbërritje, pra $X(t=0) = 0$.

Pas këtij momenti do kemi mbërritje në $t_1, t_2, \dots, t_n$

- (b) Për $t_1 \leq t_2$ kemi $X(t_1) \leq X(t_2)$. Duke filluar nga momenti t_1 pasagjerët fillojnë

të mbërrijnë pra numri i tyre në stacion do rritet.

- (c) Për $t_1 \leq t_2$, $X(t_2) - X(t_1) = N$ ku N është numri i mbërritjeve në intervalin $[t_1, t_2]$.

Procesi i mbërritjes të klientëve formon një proces numërimi.

1. Nuk kemi një orar të përcaktuar të autobusëve pra mbërritjet e pasagjerëve janë krejtësisht rastësore.
2. Mund të pranojmë supozimin thjeshtues e të natyrshëm, që për një interval $(t, t+h)$, ku $h \ll t$, mundësia që të ketë më shumë se një mbërritje për h , është madhësi p.m.v.
3. $X(t+h) - X(t)$ që përfaqëson numrin e mbërritjeve në intervalin e kohës $(t, t+h)$ nuk varet nga $X(u)$, $0 \leq u \leq t$
4. Shpërndarja $X(t+h) - X(t)$ nuk varet nga t për çdo t , $h \geq 0$.

Vetia 2 nuk do të jetë e vërtetë për rastet kur pasagjerët mbërrijnë në grupe.

Sidoqoftë për modelin tonë ne do supozojmë se nuk kemi mbërritje në grupe gjatë intervalit kohor, ku kemi realizuar matjet. Sipas vetisë 3, numri i mbërritjeve në intervalin $[t, t+h]$ nuk varet nga numri i mbërritjeve në intervalin $[0, t]$ dhe nga momentet kur ndodhin këto mbërritje. Kjo veti nuk është e vërtetë për rastin kur numri i madh i mbërritjeve në intervalin $[0, t]$ do të shkaktonte një mbingarkesë të

sistemit, pra do të shkaktonte largimin e pasagjerëve pa pritur shërbimin. Për modelin tonë nga vëzhgimet e kryera nuk kemi hasur në fenomenin e sipërpërmendur. Vetia 4 shpesh nuk është e vërtetë sepse intensiteti i mbërritjeve të pasagjerëve nuk është i njëjtë në çdo moment të ditës. Sidoqoftë koha në të cilën u realizuan matjet u zgjodh e tillë që sistemi të kishte ngarkesë maksimale, pra intensiteti i mbërritjeve të ishte praktikisht konstant. Pra procesin e mbërritjeve të klientëve mund ta konsiderojmë stacionar për periudhën kur kemi realizuar matjet.

Nga përfundimet e mësipërme shohim se madhësia diskrete $X(t) \sim P_o(\lambda)$. Sidoqoftë për vendimarrjen në lidhje me modelin që më mirë përshkruan procesin, rol të rëndësishëm luajnë matjet dhe forma e histogramës.

2.2 Përshkrimi i procesit të shërbimit të klientëve

Komponenti tjetër i rëndësishëm për përshkrimin e modelit është procesi i shërbimit të klientëve që mbërrijnë në sistem. Duke ju referuar modelit që kemi zgjedhur për ilustrim klienti konsiderohet i shërbyer kur ai hipën në autobus dhe nisët për në destinacionin e zgjedhur. Shënojmë me $t_0 = 0$ momentin fillestar të punës të sistemit. Në momentet kohore të njëpasnjëshme $t_1, t_2, t_3, \dots, t_n (t_i > 0)$ do të kemi n mbërritje të

autobusit në stacion. Autobusi mbërrin dhe merr një grup m pasagjerësh nga rradha e krijuar në stacion. Atëherë koha T_i që përfaqëson kohën e shërbimit të klientit përbëhet nga 2 komponentë:

- Intervali i kohës së qëndrimit të autobusit në stacion për zbritjen dhe hipjen e pasagjereve.
- Intervali i kohës nga çasti i nisjes nga stacioni S_i deri në çastin e ndalimit në stacionin S_{i+1}

Koha e shpenzuar në stacion nga autobusi përafrohet nga një funksion linear i numrit të pasagjerëve që hipin/zbresin. Koha midis dy ndalesave është koha e lëvizjes së autobusit pa kohën që autobusi shpenzon në stacion. Kjo varet nga shpejtësia e autobusit, trafiku, rruga, vonesat e rastit, etj. Pra intervalet midis dy mbërritjeve të njëpasnjëshme të autobusave janë ndryshore rasti të vazhduara dhe i shënojmë ato me T_s . Po japim disa argumenta pse pohojmë që $T_s \sim N(\mu, \sigma)$.

- Shpërndarja normale është një përafrim i parë i çdo ndryshoreje të rastit që përshkruan një fenomen me numër të madh përsëritjesh, meqënëse mesatarja e ndryshoreve të rastit ka limit shpërndarjen normale (Teorema qendrore limite).
- Nëse do të imagjinonim një linjë shërbimi urban ku nuk ndërhyjnë faktorët e rastit, lëvizja e autobusëve do të ishte një proces deterministik pa luhatje nga orari i përcaktuar. Për arsytet e sipër-përmendura, kjo saktësi nuk është e

mundur, gjë që e kthen procesin e studiuar në një proces rasti ku ndryshoret e rastit janë shmangiet nga një vlerë mesatare. Në praktikë, gabimet në vrojtime përgjithësisht përafrohen me shpërndarjen normale.

Për të saktësuar shpërndarjen, rol të rëndësishëm kanë vrojtimet në procesin real.

Kapitulli 3

NDËRTIMI I MODELIT FILLESTAR

Procesi i modelimit të një procesi të rastit kërkon një analizë të kujdesshme dhe një interpretim sa më korrekt të sjelljes të procesit. Në kontekste të ndryshme, shpërndarje të ndryshme statistikore mund të jenë të përshtatshme për të njëjtin model të marrë në studim. Si përgjigje ndaj kësaj situate të krijuar mjaft shpesh në praktikë, futen në përdorim metodat e analizës statistikore që bëjnë të mundur krahasimin dhe vendimarrjen në lidhje me zgjedhjen e modelit më të përshtatshëm.

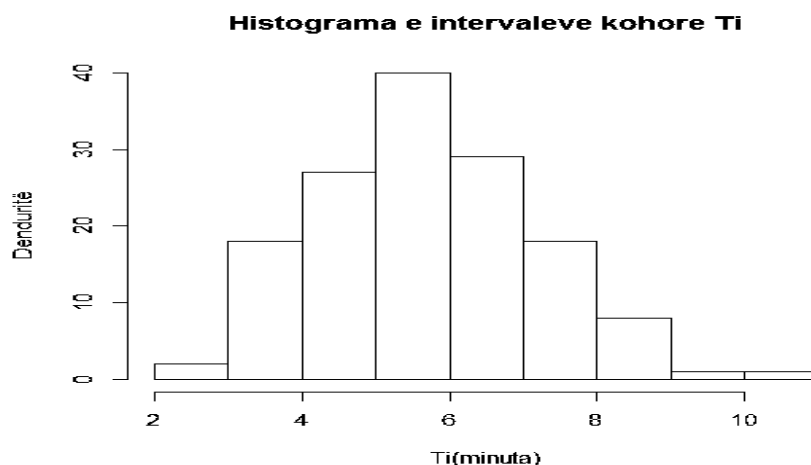
3.1 Ligji empirik i proceseve

3.1.1 Ligji empirik i kohës midis mbërritjeve të autobusit

Klasifikojmë të dhënat e mbledhura me anën e grupimit sipas metodologjisë të paraqitur në[13]. Përshkrimi i metodologjisë ndodhet në Shtojcën C e paraqitur në fund të punimit. Gjatë punimit madhësive të rastit që përfaqësojnë intervalet kohore midis dy mbërritjeve të njëpasnjëshme të autobusëve në stacionet $S2$ dhe $S3$ do ti referohemi përkatësisht si T_{S2} dhe T_{S3} . Tabelat C1 dhe C2 në shtojcën C paraqesin të dhënat e grupuara dhe denduritë absolute për madhësitë e rastit T_{S2} dhe T_{S3} .

Figura 3.1 paraqit histogramën e dendurive për T_{S2} . Siç shihet nga histograma ka

Figura 3.1: Histograma e intervaleve kohore për T_{S2}



bazë që të ngremë hipotezën se ndryshorja e rastit $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Në tabelën 3.1

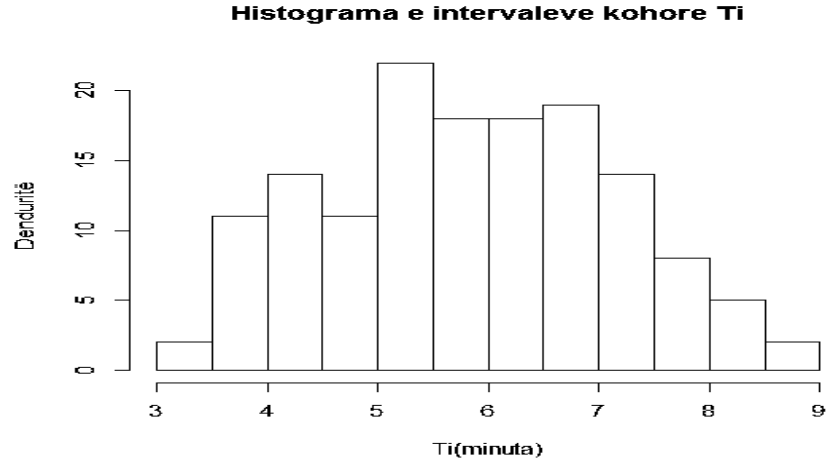
paraqitet parametrat statistikore të vrojttimeve. Duke ndjekur të njëjtën metodologji

Tabela 3.1: Parametrat statistikore të vrojttimeve për T_{S2}

Mesatarja	5.714492874
Mediana	5.586008861
Moda	5.421037484
Shmangia mesatare katrore	1.506659603
Dispersioni	2.270023159
Asimetria	0.309731335
Minimum	2.836665704
Maksimum	10.1599792
Vellimi	144

ndërtojmë histogramën dhe tabelën përmbledhëse të parametrave statistikore për T_{S3} . Histograma dhe parametrat statistikore për këto intervale kohore paraqiten tek Figura 3.2 dhe Tabela 3.2. Siç shihet nga histograma ka bazë që të ngremë hipotezën

Figura 3.2: Histograma e intervaleve kohore për T_{S3}



se ndryshorja e rastit $T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2)$

Tabela 3.2: Parametrat statistikorë të vrojttimeve për T_{S3}

Mesatarja	5.8582247
Mediana	5.796087547
Moda	5.6223425
Shmangia mesatare katrore	1.28590432
Dispersioni	1.653549
Asimetria	0.05149942
Minimum	3.26838216
Maksimum	8.69938206
Vellimi	144

3.1.2 Ligji empirik i mbërritjes të pasagjerëve

Duke ndjekur të njëjtën metodologji si në paragrafin 3.1 klasifikojmë të dhënat e mbledhura për mbërritjen e pasagjerëve në njësinë e kohës të shprehur në minuta me ndihmën e grupimit. Të dhënat e mbledhura janë paraqitur në Shtojcën B. Tabela C3 në Shtojcën C paraqet të dhënat e grupuara .Ndërtojmë histogramat dhe tabelat përmbledhëse të parametrave statistikorë për numrin e pasagjerëve që mbërrijnë në intervalet kohore për të cilat janë realizuar matjet përkatësisht në stacionet S1, S2 dhe S3. Madhësitë e rastit që përfaqësojnë këto mbërritje do ti shënojmë përkatësisht me X_{S1} , X_{S2} , X_{S3} . Histogramat e ndërtuara për këto madhësi paraqiten përkatësisht në figurat 3.3, 3.4 , 3.5. Siç shihet nga histogramat ka bazë që të ngremë hipotezat se ndryshoret e rastit:

$$X_{S1} \sim P(\lambda) \quad (3.1.1)$$

$$X_{S2} \sim P(\lambda) \quad (3.1.2)$$

$$X_{S3} \sim P(\lambda) \quad (3.1.3)$$

Në tabelat 3.3, 3.4, 3.5 paraqiten përkatësisht parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësitë e rastit X_{S1} , X_{S2} , X_{S3} .

Figura 3.3: Histograma për madhësinë e rastit X_{S1}

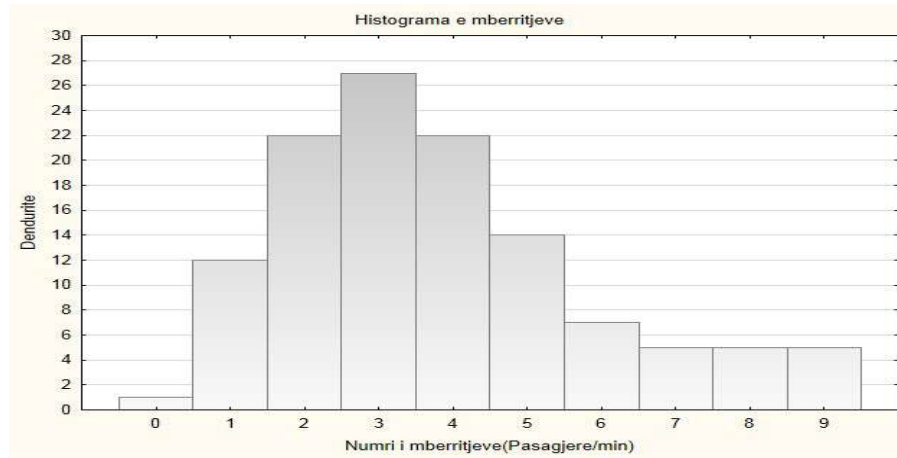


Tabela 3.3: Parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësinë e rastit X_{S1}

Mesatarja	3.8083
Mediana	3
Moda	3
Shmangia mesatare katrore	2.1036
Dispersioni	4.4251
Minimum	0
Maksimum	9
Vellimi	120

Figura 3.4: Histograma për madhësinë e rastit X_{S2}

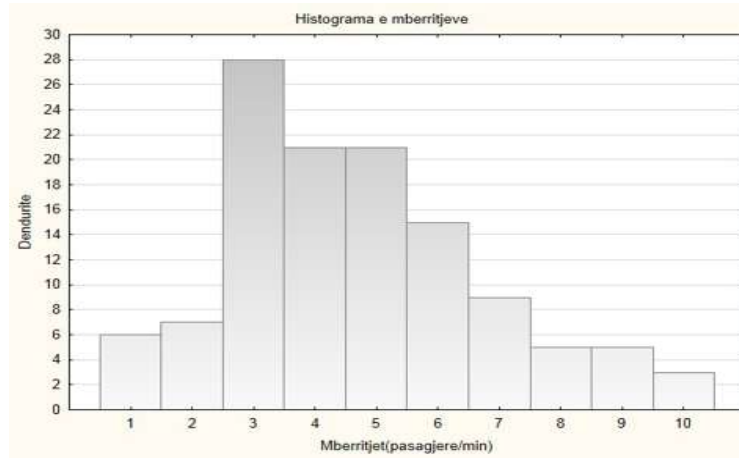


Tabela 3.4: Parametrat statistikorë të vrojttimeve për madhësinë e rastit X_{S2}

Mesatarja	4.6750
Mediana	4
Moda	3
Shmangia mesatare katrore	2.1110
Dispersioni	4.4565
Minimum	1
Maksimum	10
Vellimi	120

Figura 3.5: Histograma për madhësinë e rastit X_{S3}

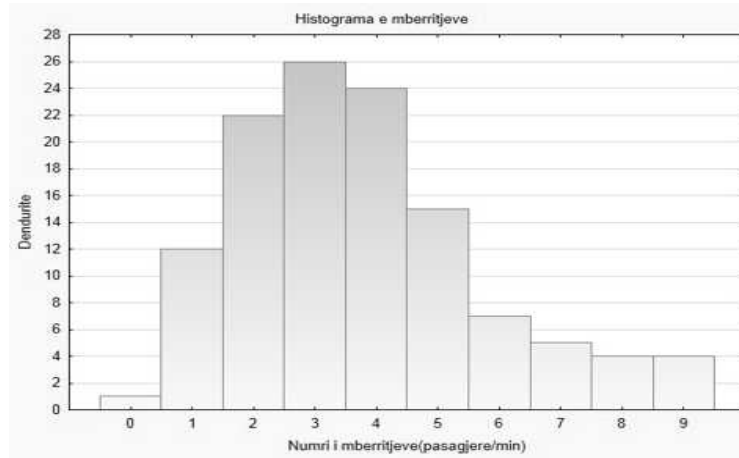


Tabela 3.5: Parametrat statistikorë të vrojtimeve për madhësinë e rastit X_{S3}

Mesatarja	3.75
Mediana	3
Moda	3
Shmangia mesatare katrore	20136
Dispersioni	4.0546
Minimum	0
Maksimum	9
Vellimi	120

3.2 Vlerësimi i parametrave të proceseve të rastit

Ka metoda të ndryshme, si numerike dhe grafike për vlerësimin e parametrave për një shpërndarje probabilitare. Për vlerësimin e parametrave të shpërndarjeve do konsiderojmë dy metoda[22]:

- Metoda e momemteve (MM)
- Metoda e përgjasisë maksimale (MLE)

Një përshkrim më i detajuar në lidhje me përdorimin e MM dhe MLE për të vlerësuar parametrat e shpërndarjeve mund të gjenden në Shtojcën D. Për shpërndarjen e Puasonit kemi: $\bar{\lambda} = \bar{\theta} = \bar{x}$ dhe nga vlerësimi do të kemi:

- vlera e $\bar{\lambda} = 3.8083$ për X_{S1}
- vlera e $\bar{\lambda} = 4.6750$ për X_{S2}
- vlera e $\bar{\lambda} = 3.750$ për X_{S3}

Për shpërndarjen normale kemi:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \quad (3.2.1)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (3.2.2)$$

dhe nga vlerësimi i parametrave:

- vlera e $\sigma^2 = 2.270$ dhe $\mu = 5.7144$ për T_{S2} .
- vlera e $\sigma^2 = 1.653$ dhe $\mu = 5.8582$ për T_{S3} .

3.3 Kontrolli i hipotezave statistikore

3.4 Hipoteza për intervalet midis dy mbërritjeve të njëpasnjëshme të autobusëve në stacion

Shqyrtojmë në fillim intervalet kohore T_{S2} . Shënojmë $T_1, T_2 \dots T_n$ zgjedhjen me vëllim N të nxjerrë nga popullata Ω ku është përcaktuar ndryshorja e rastit T_{S2} . Le të jenë $t_1, t_2 \dots t_n$ vlerat e vrojtuar me denduri absolute respektive $m_1, m_2 \dots m_n$. Nga të dhënat empirike si dhe nga histograma kemi arsye të supozojmë se $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Në këtë përfundim na çon dhe plotësimi i kushtit të 3-sigmave si dhe barazimi i vendndodhjes të karakteristikave. Pra ka bazë të ngremë hipotezën

$H_0 : T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$ Kontrollojmë hipotezën H_0 duke përdorur metodën grafike Q-Q (kuantil-kuantil). Në dallim nga histograma metoda Q-Q bën një vlerësim më

subjektiv të realitetit. Histograma vuan nga një element arbitrariteti në zgjedhjen e intervaleve. Forma e histogramës varet nga numri i intervaleve. Gjithashtu një mangësi tjetër e histogramës është se ajo nuk krijon një ide të qartë se çfarë mund të pritet brenda kufijve të dispersionit.[33]

3.4.1 Metoda grafike

3.4.1.0.1 Grafiku Q-Q Grafiku Q-Q krahason kuantilet empirike me kuantilet e ligjit normal të normuar që përfaqësohet nga një vijë e drejtë. Në qoftë se të dhënat e zgjedhjes ndjekin ligjin normal atëherë ato do të jenë vendosur në grafik përgjatë vijës të drejtë brenda një intervali besimi 95% .[17]

Le të jetë t_p kuantilja p nga zgjedhja $T_{S1} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Atëherë $P(T \leq t_p) = p$

Duket qartë se $P(Z \leq \frac{t_p - \mu}{\sigma}) = p$

Pra $t_p = \mu + t_p \sigma$

Kuantilet nga një popullatë $N(\mu, \sigma^2)$ duhet të jenë të lidhura në mënyrë lineare me kuantilet e ligjit normal të normuar.[5]. Shohim se kuantilet e të dhënave empirike shtrihen përgjatë grafikut të ligjit normal të normuar pra kemi arsye të mendojmë se $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Figura 3.6: Grafiku Q-Q për madhësinë e rastit T_{S2}

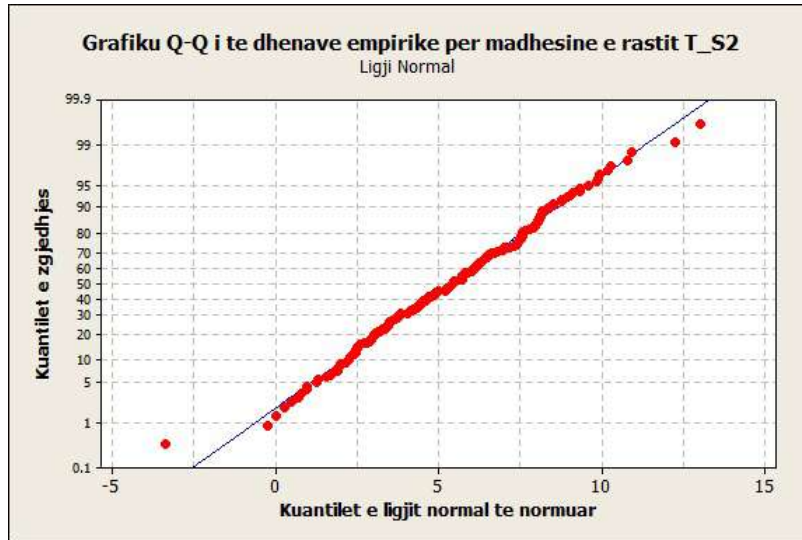
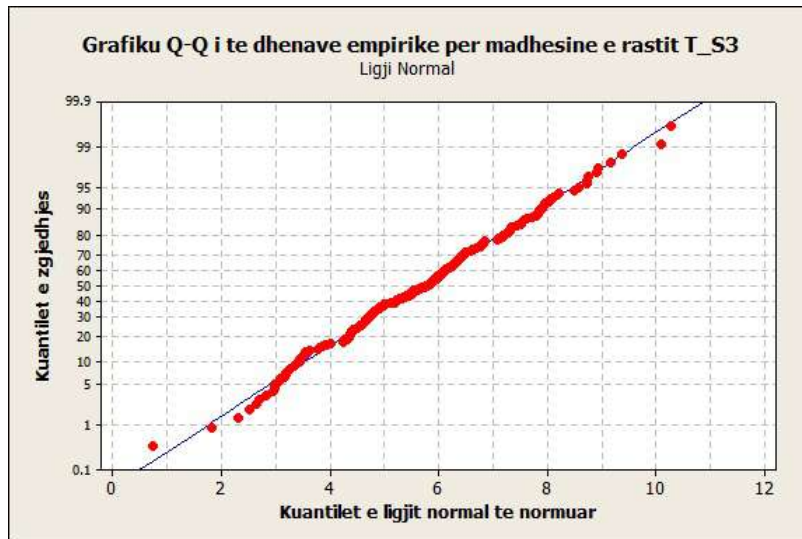


Figura 3.7: Grafiku Q-Q për madhësinë e rastit T_{S3}



Duke ndjekur të njëjtin arsyetim ngremë hipotezën $H_0 : T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Në figurën 3.7 paraqitet grafiku Q-Q për T_{S3} .Kemi arsye të mendojmë se $T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

3.4.2 Testet numerike

Testet grafike mund të mos interpretohen rigorozisht në shumë raste. Testimi grafik i ligjeve probabilitare me gjithë rëndësinë shumë të madhe nuk na lejon të bëjmë një vlerësim sasior të shmangies nga normaliteti. Për kontrollin e hipotezës $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dhe $T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2)$ me besueshmëri më të madhe ,në punim shihen edhe disa teste numerike. Testet e përdorura janë :

1. Testi i kontrollit të simetrisë.(Me përdorimin e statistikës $\sqrt{b_1}$).
2. Testi i kontrollit të eksedit.(Me përdorimin e statistikës $\sqrt{b_2}$).
3. Testi i kombinuar K^2 .
4. Testi Pirson
5. Testi Kolmogorov-Smirnov
6. Testet e regresionit.(Shapiro-Wilk dhe Shapiro-Francia)

3.4.2.1 Testet e kontrollit të simetrisë

Një mënyrë për kontrollin në qoftë se të dhënat e vrojtuar ndjekin ligjin normal të shpërndarjes, është duke përdorur momentet e zgjedhjes.

Le të jetë T -ndryshorja e rastit e përcaktuar në Ω me mesatare μ dhe variancë $\sigma^2 > 0$. Shënojmë me $f_T(t)$ densitetin e e probabiliteteve të ndryshores të rastit T .

Momenti i normuar i rendit k për ndryshoren e rastit T do të jetë[16] :

$$\psi_k(T) = \frac{\mu_k(T)}{(\mu^2(T))^{\frac{k}{2}}} \quad (3.4.1)$$

ku

$$\mu_k(T) = E((T - \mu)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - \mu)^k f_T(t) dt \quad (3.4.2)$$

quhet momenti qendror i rendit k për T . Momenti i rendit 3 i normuar për ndryshoren e rastit T quhet asimetri dhe shënohet:

$$\sqrt{\beta_1} = \psi_3(T) = \frac{E((T - \mu)^3)}{(E(T - \mu)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4.3)$$

Momenti i rendit 4 i normuar për ndryshoren e rastit T quhet eksses dhe shënohet:

$$\beta_2 = \psi_4(T) = \frac{E((T - \mu)^4)}{(E(T - \mu)^2)^2} \quad (3.4.4)$$

Në qoftë se $T \sim N(0, 1)$, do të kemi $\sqrt{\beta_1} = 0$ dhe $\beta_2 = 3$ [22][16]

Le të jenë $t_1 \dots t_n$ një zgjedhje e çfarëdoshme e shpërndarë në mënyrë të njëjtë nga madhësia e rastit T me $f_T(t)$. Për $k > 1$, momenti i normuar i rendit k , i zgjedhjes nga T , shënohet si:

$$g^k = \frac{m_k}{m_2^{\frac{k}{2}}} \quad (3.4.5)$$

ku

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^k \quad (3.4.6)$$

është momenti qendror i rendit k për zgjedhjen nga T .

Le të jenë $t_1 \dots t_n$ një zgjedhje e çfarëdoshme e shpërndarë në mënyrë të njëjtë nga madhësia e rastit T me $f_T(t)$. Momenti i normuar i rendit të tretë për $t_1 \dots t_n$ quhet asimetri e zgjedhjes dhe shënohet[16]:

$$\sqrt{b_1} = g_3 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^3}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.4.7)$$

Momenti i normuar i rendit të katërt për $t_1 \dots t_n$ quhet eksesi i zgjedhjes dhe shënohet[16]:

$$b_2 = g_4 = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^4}{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2\right)^2} \quad (3.4.8)$$

3.4.2.1.1 Testi i kontrollit të asimetrisë duke përdorur statistikën $\sqrt{\beta_1}$

Le të jetë T -madhësia e rastit me mesatare të panjohur μ dhe variancë të panjohur $\sigma^2 > 0$. Le të jetë $\sqrt{\beta_1}$ asimetria e $f_T(t)$ për madhësinë e rastit T . [8][10]

Kontrollojmë hipotezën:

$$H_0 : \sqrt{\beta_1} = 0 \text{ kundrejt hipotezës}$$

$$H_1 : \sqrt{\beta_1} > 0 \text{ (asimetri pozitive) ose}$$

$$H_1 : \sqrt{\beta_1} < 0 \text{ (asimetri negative) Në praktikë kryhen veprime për normimin e } \sqrt{\beta_1}.$$

Disa prej metodave që mund të përdoren për normimin e $\sqrt{\beta_1}$ janë paraqitur në

Shtojcën F. Transformimet e normuara lejojnë të përdoren vlerat tabelare të

shpërndarjes normale të normuar për vlerësimin e shmangies nga shpërndarja

normale. Nga llogaritjet e paraqitura në Shtojcën E (tabela E1 dhe E2), vlera e

$\sqrt{\beta_1} = 0.1943217$ për intervalet kohore T_{S2} . Njëlloj arsyetojmë edhe për intervalet

kohore T_{S3} . Nga llogaritjet e paraqitura në Shtojcën E (tabela E3 dhe E4),

$\sqrt{\beta_1} = 0.053$. Nga llogaritjet e kryera në Shtojcën F kemi për statistikën $\sqrt{\beta_1}$ vlerën

e normuar $z = 0.3324$. Me qenë se po përdorim kriter të dyanshëm për $\alpha = 0.90\%$

pranojmë $u_{\frac{1+\alpha}{2}} = u_{\frac{1+0.90}{2}} = u_{0.95}$ Për $\alpha = 0.90\%$ kemi $u_{0.95} = 1.645$ nga tabela F3 e

shpërndarjes normale të normuar. $z = 0.3324 < u_{0.95} = 1.645$ pra hipoteza e

normalitetit pranohet. Hipoteza pranohet edhe për intervalet kohore T_{S3} , meqënëse

$z = 0.0120 < u_{0.95} = 1.645$. Testet që përdorin statistikën $\sqrt{\beta_1}$, kontrollojnë vetëm

simetrinë e ligjit probabilitar. Përdorimi i këtyre testeve është i dobishëm për

kontrollin e normalitetit, por pranimi i hipotezës të simetrisë nuk mund të shërbejë si provë e normalitetit (një kusht i nevojshëm, por jo i mjaftueshëm). [3]

3.4.2.1.2 Testi i kontrollit të eksessit duke përdorur statistikën $\sqrt{b_2}$ Le të jetë T —madhësia e rastit me mesatare të panjohur μ dhe variancë të panjohur $\sigma^2 > 0$. Le të jetë $\sqrt{\beta_1}$ asimetria e $f_T(t)$ për ndryshoren e rastit T . [8][10] Kontrollojmë hipotezën:

$H_0 : \beta_2 = 3$ kundrejt hipotezës

$H_1 : \beta_2 > 3$ (ekses më i madh) ose

$H_1 : \beta_2 < 3$ (ekses më i vogël)

Kur vlerësojmë statistikën e testit, momentet qendrorë të përdorur llogariten sipas formulës:

$$\widehat{\mu}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^j \quad (3.4.9)$$

Nga llogaritjet e paraqitura në Shtojcën E (tabela E1 dhe E2), për intervalet kohore T_{S2} vlera e $\beta_2 = 3.048707$. Nga llogaritjet e paraqitura në Shtojcën E (tabela E3 dhe E4), për intervalet kohore T_{S3} , vlera e $\beta_2 = 2.1763$. Në praktikë kryhen veprime për normimin e β_2 . Disa prej metodave që mund të përdoren për normimin e β_2 janë paraqitur në Shtojcën F. Transformimet e normuara lejojnë të përdoren vlerat tabelare të shpërndarjes normale të normuar për vlerësimin e shmangies nga shpërndarja normale. Nga llogaritjet në Shtojcën F vlera e normuar e statistikës β_2

është $d = 0.0036$. Me qenë se po përdorim kriter të dyanshëm për $\alpha = 0.90\%$ pranojmë $u_{\frac{1+\alpha}{2}} = u_{\frac{1+0.90}{2}} = u_{0.95}$. Për $\alpha = 0.90\%$ kemi $u_{0.95} = 1.645$ nga tabela F3 e shpërndarjes normale të normuar. Kemi $d = 0.0036 < u_{0.95} = 1.645$ pra nuk kemi arsye të mos pranojmë se $T_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Hipoteza pranohet edhe për intervalet kohore T_{S3} , meqënëse $d = 0.0028 < u_{0.95} = 1.645$. E meta e këtij testi është varësia e madhe që testi ka nga vëllimi i të dhënave.[3]

3.4.2.1.3 Testi i kombinuar K^2 Në [9], tregohet se është e mundur llogaritja e katër momenteve të para për asimetrinë $\sqrt{\beta_1}$. Pritja matematike dhe varianca e $\sqrt{\beta_1}$ janë përkatësisht[4] :

$$E(\sqrt{\beta_1}) = 0 \quad (3.4.10)$$

$$D(\sqrt{\beta_1}) = \frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)} \approx \frac{6}{n} \left(1 - \frac{12}{2n+7}\right) \quad (3.4.11)$$

Momenti i katërt i shpërndarjes për $\sqrt{\beta_1}$ është :

$$\beta_2(\beta_1) = 3 + \frac{36(n+7)(n^2+2n-5)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} \quad (3.4.12)$$

Shpërndarja e statistikës $\sqrt{\beta_1}$ konvergjon shpejt drejt shpërndarjes normale.[9]. Për statistikën β_2 kemi[9] :

$$E(\beta_2) = \frac{3(n-1)}{n+1} \quad (3.4.13)$$

$$D(\beta_2) = \frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2((n+3)(n+5))} = \frac{24}{n} \left(1 - \frac{225}{15n+224}\right) \quad (3.4.14)$$

Momenti i tretë i shpërndarjes për β_2 është:

$$\sqrt{\beta_1}(\beta_2) = \sqrt{\frac{216}{n}} \left\{ \frac{(n+3)(n+5)}{(n-3)(n-2)} \right\}^{\frac{1}{2}} \frac{(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \quad (3.4.15)$$

Shpërndarja e statistikës β_2 konvergjon shumë ngadalë drejt shpërndarjes normale.

[9]. Konvergjencia bëhet më e qartë duke parë tabelën F2 në shtojcën F. Fuqia e testit të kontrollit të normalitetit mund të rritet duke përdorur testin e kombinuar K^2 . [19][10] Meqënëse $\sqrt{b_1}$ dhe b_2 janë asimptotikisht normale atëherë një zgjidhje do të ishte të merrnim shumën e dy testeve të normuar :

$$X^2 = \left(\frac{\sqrt{b_1} - E(b_1)}{D(\sqrt{b_1})} \right)^2 + \left(\frac{b_2 - E(b_2)}{D(b_2)} \right)^2 \quad (3.4.16)$$

Le të jenë $t_1 \dots t_n$ një zgjedhje e çfarëdoshme e shpërndarë në mënyrë të njëjtë nga madhësia e rastit T. Statistikën e testit do e shënojmë: [16]

$$K^2 = X^2(\sqrt{b_1}) + X^2(b_2) \quad (3.4.17)$$

ku $X^2(\sqrt{\beta_1})$ dhe $X^2(\beta_2)$ janë shpërndarjet normale të normuara të $\sqrt{\beta_1}$ dhe β_2 .

$X^2(\sqrt{\beta_1})$ llogaritet sipas transformimeve F01-F06 dhe $X^2(\beta_2)$ sipas transformimeve F07-F09 të paraqitura në shtojcën F. Statistika $K^2 \sim \chi^2(n)$ me $n=2$ shkallë lirie.

Transformimet për të llogaritur $X^2(\sqrt{\beta_1})$ dhe $X^2(\beta_2)$ paraqiten në Shtojcën F ku janë edhe llogaritjet e testit të kombinuar K^2 për nivelin e rëndësisë $\alpha = 0.95$. Kontrollojmë hipotezën me ndihmën e kriterit të kombinuar.

$$X^2(\sqrt{\beta_1}) = 0.0488 \quad (3.4.18)$$

$$X^2(\beta_2) = 0.00001 \quad (3.4.19)$$

Pra

$$K^2 = X^2(\sqrt{\beta_1}) + X^2(\beta_2) = 0.04881 \quad (3.4.20)$$

Nga tabela F4 me $f = 2$ gradë lirie kemi vlerën kritike $\chi_{0.9}^2(2) = 4.605$. Meqënëse $K^2 = 0.04881 < \chi_{0.9}^2(2) = 4.605$ nuk kemi arsye të mos pranojmë se $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$. Hipoteza pranohet edhe për intervalet kohore T_{S3} , meqënëse $K^2 = 1.5236 < u_{0.95} = 1.645$.

3.4.2.2 Testi Pirson

Le të jetë T–ndryshorja e rastit me ligj probabilitar të panjohur. Shënojmë $T_1, \dots, T_n$ zgjedhjen me vëllim n të nxjerrë nga popullimi Ω . Le të jenë $t_1, \dots, t_k$ vlerat e vrojtuar me denduri absolute respektive $m_1, \dots, m_k$ ($\sum_{i=1}^k m_i = n$). Nga testet grafike

dhe rregulla e 3 – *sigmave* ngremë hipotezën:

$$H_0 : T_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.4.21)$$

Për këtë Pirsoni ndërtoi statistikën[22]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} \quad (3.4.22)$$

për të matur devijimin midis shpërndarjes të densiteteve teorike p_i dhe dendurive të vrojtuar $\frac{m_i}{n} = f_i$ dhe tregoi se kur n është e madhe, statistika $\chi^2 \sim \lambda^2(k - r - 1)$, ku r është numri i parametrave të panjohur të ligjit $F(x)$ që vlerësohen nga zgjedhja dhe k -numri i klasave të vlerësuara nga zgjedhja. Për të siguruar përafrim të mirë duhet që $np_i > 5 \forall i = \overline{1, k}$. Për këtë test nuk mund të formulohet asnjë hipotezë alternative preçize por me nivel rëndësie α pranohet ose hidhet poshtë hipoteza H_0 : nuk ka asnjë diferencë midis shpërndarjes të dendurive teorike dhe atyre të vrojtuar. Vendimi statistik merret në këtë mënyrë[22]: Në qoftë se vlera e vrojtuar v_2 e testit χ^2 është e tillë që :

$$v_2 \geq \chi_{1-\alpha}^2(k - r - 1) \quad (3.4.23)$$

hipoteza H_0 hidhet poshtë, në të kundërt pranohet. Nganjëherë është më e përshtatshme që testi të përdoret në formën :

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{m_i^2}{np_i} - n \quad (3.4.24)$$

Në tabelën C1 janë paraqitur të dhënat e grumbulluara për intervalet kohore T_{S2} dhe në tabelën C2 janë paraqitur të dhënat e grumbulluara për intervalet kohore T_{S3} . Në shtojcën G janë paraqitur llogaritjet e testit të Pirsonit për këto zgjedhje. Nga tabela G2 gjejmë $d_k(\alpha) = 12.384$ për $k = 10$ dhe $\alpha = 0.1$. Për madhësinë e rastit T_{S2} kemi $\chi^2 = 17.25 > d_k(\alpha)$ pra nuk ka arsye të mos pranojmë se $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Për madhësinë e rastit T_{S3} kemi $\chi^2 = 4.74999 > d_k(\alpha)$ pra nuk ka arsye të mos pranojmë se $T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2)$.

3.4.2.3 Testi Kolmogorov-Smirnov

Le të jetë T ndryshorja e rastit që vrojtohet në popullimin Ω . Nga testet grafike dhe rregulla e 3 – *sigmave* ngremë hipotezën:

$$H_0 : T_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.4.25)$$

Shënojmë $T_1, \dots, T_n$ zgjedhjen me vëllim n të nxjerrë nga popullimi Ω dhe me $F_n(x)$ ligjin empirik të ndryshores T . Studimi i mënjanimet të ligjit empirik nga ai teoriku lejon të kontrollojmë hipotezën H_0 me nivel rëndësie α të dhënë. Kolmogorov ndërtoi statistikën [22]:

$$D_n = \sqrt{n} \max_x |F_n(x) - F(x)| \quad (3.4.26)$$

dhe tregoi se për $n \rightarrow \infty$ ligji i shpërndarjes i D_n nuk varet nga trajta e ligjit $F(x)$ të ndryshores T dhe konvergjon tek ligji Kolmogorov. Për vlera të dhëna të α , janë ndërtuar tabela ku gjenden vlera D_α të tilla që $P(D_n > D_\alpha) = \alpha$. Vlerat e D_α gjenden në shtojcën I (tabela I1). Testi Kolmogorov përdoret në rastin kur parametrat e ligjit teorik $F(x)$ përcaktohen jo nga vlerat e vrojtuar nga zgjedhja. Vendimi statistik merret në këtë mënyrë: Gjejmë ligjin empirik $F_n(x)$ të zgjedhjes dhe llogaritim vlerën D_n . Në qoftë se për nivelin e rëndësisë α , $D_n > D_\alpha$, hipoteza H_0 hidhet poshtë, në rast të kundërt pranohet si e vërtetë. Nga njëherë është më e përshtatshme që testi të përdoret në formën [22]:

$$D_n^+ = \max_{|x| < \infty} (F_n(x) - F(x)) \quad (3.4.27)$$

$$D_n^- = -\inf_{|x| < \infty} (F_n(x) - F(x)) \quad (3.4.28)$$

ku $\max, \inf$ janë kufijtë e sipërm dhe të poshtëm të diferencave përkatëse.

$$\max_x (F_n(x) - F(x)) \quad (3.4.29)$$

është më e madhja nga diferencat pozitive. Përparësia e statistikës D_n^+ në krahasim me D_n është se shpërndarja e saj limiteshpërndarjellimite është më e thjeshtë. [22]

Për të shmangur varësinë e pikave të përqindjes nga vëllimi i zgjedhjes në [32]

proponohen transformimet e statistikave $D_n^{+(-)}$ dhe D_n si më poshtë:

$$\widetilde{D}_n = D_n(\sqrt{n} + 0.275 - \frac{0.04}{\sqrt{n}}) \quad (3.4.30)$$

$$\widetilde{D}_n = D_n(\sqrt{n} + 0.12 - \frac{0.11}{\sqrt{n}}) \quad (3.4.31)$$

$$\widetilde{D_n^{+(-)}} = D_n^{+(-)}(\sqrt{n} + 0.12 + \frac{0.11}{\sqrt{n}}) \quad (3.4.32)$$

Për zgjedhjen $T_1, \dots, T_n$, nga ndryshoret e rastit T_{S2} dhe T_{S3} , është llogaritur statistika D_n . Llogaritjet për T_{S2} dhe T_{S3} paraqiten përkatësisht në tabelat I2 dhe I3 (Shtojca I). Për T_{S2} vlera e statistikës $D_n = 0.050$ kurse për T_{S3} kemi $D_n = 0.068$.

Nga tabela I1 vlera kritike e testit Kolmogorov-Smirnov për $\alpha = 0.10$ dhe $n = 144$ është 0.1016 pra nuk ka arsye të mos pranojmë se $T_{S2} \sim N(\mu, \sigma^2)$ dhe

$$T_{S3} \sim N(\mu, \sigma^2) .$$

3.4.2.4 Testet e regresionit

Testet e bazuara në statistikat ($\sqrt{\beta_1}$ dhe β_2) janë mjaft të mira për të përcaktuar tiparet e formës të ligjit probabilitar. Sidoqoftë këto teste janë mjaft të ndjeshme ndaj numrit të të dhënave. Në rastin kur të dhënat nuk kalojnë testin β_1 konkluzioni është se ligji probabilitar është asimetrik me një nivel rëndësie të caktuar. Por kjo nuk do të thotë se detyrimisht të dhënat nuk ndjekin një ligj probabilitar normal. Në punimet [24],[35] dhe [7] rekomandohet që për testimin e normalitetit të të dhënave krahas testeve ($\sqrt{\beta_1}$ dhe β_2) të përdoren edhe teste të tjera si për shembull testet e regresionit. Në studim ne do përdorim statistikën Shapiro-Wilk. Shapiro-Wilk përdoret në ato raste kur, si hipoteza alternative, mund të zgjedhim hipotezat e mëposhtme: $H_1 : T \sim$ Shpërndarje simetrike me $|\sqrt{\beta_1}| < 1/2$ dhe $\beta_2 < 3$ ose $H_1 : T \sim$ Shpërndarje simetrike me $|\sqrt{\beta_1}| > 1/2$ [3]

3.4.2.4.1 Testi Shapiro-Wilk Një përshkrim të detajuar të testit mund të gjejmë në punimet [16],[31] dhe [12]. Le të jenë $t_1, \dots, t_n$ n-vrojtime të pavarura dhe të shpërndara në mënyrë të njëtrajtshme të madhësisë të rastit $T \sim N(0, 1)$. Shënojmë $t_{(1)}, \dots, t_{(n)}$ vlerat e renditura të zgjedhjes rastësore t_i ku $i = 1, \dots, n$. Le të jetë $m' = (m_1, \dots, m_n)$ vektori i pritjeve matematike të t_i , $i = 1, \dots, n$ dhe $V = (v_{ij})$ -

matrica korresponduese e kovariancës me përmasa $n \times n$.

$$E(t_i) = m_i \quad i = 1 \dots n \quad (3.4.33)$$

$$Cov(t_i, t_j) = v_{ij} \quad i, j = 1 \dots n \quad (3.4.34)$$

Kontrollojmë hipotezën:

$$H_0 : T_i \sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.4.35)$$

kundrejt hipotezës

$$H_1 : T_i \not\sim N(\mu, \sigma^2) \quad (3.4.36)$$

Mesatarja μ dhe dispersioni σ^2 janë të panjohura. Për ndryshoren e rastit T_i kemi një zgjedhje të çfarëdoshme $t_1, \dots, t_n$ të përbërë nga n -vrojtime të pavarura dhe të shpërndara në mënyrë të njëtrajtshme të T_i . Le të jetë $t' = (t_{(1)}, \dots, t_{(n)})$ vektori i vlerave të renditura. Për të vërtetuar hipotezën H_0 ndërtohet një model i thjeshtë regresioni bazuar në vlerat e vrojtuar $t_{(n)}$. Me supozimin e shpërndarjes normale, shprehim

$$t_{(1)} = \mu + \sigma \cdot x_{(1)} \quad i = 1 \dots n \quad (3.4.37)$$

Le të jetë:

$$S_n^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2 \quad (3.4.38)$$

vlerësimi i pazhvendosur i $(n - 1)\sigma^2$ Statistika Shapiro-Wilk do të jetë :

$$W = \frac{(a't)^2}{S_n^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i t_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.4.39)$$

ku

$$a' = (a_1 \dots a_n) = \frac{m'V^{-1}}{(m'V^{-1}V^{-1}m)^{1/2}} \quad (3.4.40)$$

Nga formula (3.4.4) dhe (3.4.8)

$$E(t_i) = \mu + \sigma \cdot m_i \quad i = 1 \dots n \quad (3.4.41)$$

Pra grafiku i vrojttimeve t_i dhe pritjeve të tyre m_i do të ishte pothuajse linear, në qoftë se $T_i \sim N(\mu, \sigma^2)$. Testi Shapiro-Wilk në formën standarte kontrollon normalitetin për $N \leq 50$. Për $n \geq 50$ llogaritja e koeficientëve $a' = (a_1 \dots a_n)$ bëhet shumë e vështirë. Në punimin [30] vrojtmet $x_1, \dots, x_n$ u supozuan të pavarura, gjë që është e vërtetë për zgjedhje me vëllim të madh. Pra matrica V^{-1} u zëvendësua me matricën identike I_n me përmasa $n \times n$. Pra u kalua nga llogaritja e vijës së regresionit me metodën e përgjithshme të katrorëve të vegjël në llogaritjen e vijës së regresionit me metodën e thjeshtë të katrorëve të vegjël. Le të jenë $t_1, \dots, t_n$ një zgjedhje me n -vrojtme të çfarëdoshme dhe të renditura, të madhësisë të rastit T me mesatare të panjohur $\mu \in R$ dhe variancë të panjohur $\sigma^2 \in R$. Le të jetë

$S^2 = \sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2$. Atëherë statistika do jetë:

$$SF = \frac{b't^2}{S^2} = \frac{(\sum_{i=1}^n b_i t_i)^2}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \quad (3.4.42)$$

ku

$$b' = (b_1 \dots b_n) = \frac{m'}{m'm^{\frac{1}{2}}} \quad (3.4.43)$$

Zbatojmë testin Shapiro-Francia duke përdorur mundësitë që ofron gjuha R. Duke përdorur paketën *nortest*[15] për të madhësinë e rastit T_{S2} llogaritim statistikën $SF = 0.9871$ dhe $p = 0.124$. Në të njëjtën mënyrë llogarisim statistikën SF edhe për intervalet kohore T_{S3} . Për këto të dhëna $SF = 0.9843$ dhe $p = 0.08983$. Vlera e p është më e madhe se 0.05 pra nuk kemi arsye të mos pranojmë se $T_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

3.5 Hipoteza për numrin e pasagjerëve që mbërrijnë në stacion

Për ndryshoren X_{S1} duke gjykuar nga histograma ngritëm hipotezën:

$$H_0 : X_{S1} \sim P(\lambda) \quad (3.5.1)$$

kundrejt hipotezës:

$$H_1 : X_{S1} \approx P(\lambda) \quad (3.5.2)$$

Për kontrollin e hipotezës përdorim statistikën Pirson(formula 3.4.22).Tabela H1 e llogaritjes të testit është paraqitur në Shtojcën H. Nga tabela:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 10.1444. \quad (3.5.3)$$

Me nivelin $\alpha = 0.05$ të dhënë dhe numrin e shkallëve të lirisë $k-r-1=7$ në tabelën H4 të ligjit χ^2 gjejmë pikën kritike $\chi^2_k = 14.067$. Në të njëjtën mënyrë arsyetojmë për mbërritjet e pasagjerëve në stacionet S2 dhe S3. Llogaritjet e testit Pirson për këto stacione janë paraqitur përkatësisht në tabelat H2 dhe H3 (Shtojca H). Tabela e mëposhtme tregon rezultatet e testit Pirson për 3 stacionet, numrin e shkallëve të lirisë dhe vlerat përkatëse kritike.

Tabela 3.6: Rezultatet e testit Pirson për 3 stacionet

Stacioni	χ^2	α	$k - r - 1$	χ^2_k
S1	10.1444	0.05	7	14.067
S2	8.16811	0.05	8	15.507
S3	6.23078	0.05	7	14.067

Nga tabela duket se për të dhënat e mbërritjes të pasagjerëve në 3 stacionet S1 S2 dhe S3, $\chi^2 < \chi^2_k$ ndaj nuk ka arsye të mos pranojmë se të mbërritjet e pasagjerëve në këto 3 stacione ndjekin ligjin Puason.

Pjesa II

Pjesa e dytë

Kapitulli 4

GJENERIMI I PROCESEVE TË RASTIT

Kemi zgjedhur ligjet probabilitare që përfaqësojnë proceset e rastit (proçesin e mbërritjes të klientëve dhe kohën e shërbimit). Nga këto ligje probabilitare gjenerojmë madhësi të rastit që do na ndihmojnë të vemë në punë modelin.

Gjenerimi i madhësive të rastit kalon në dy shkallë:

1. Gjenerojmë seri me numra të rastit të pavarura që ndjekin ligjin probabilitar $U(0, 1)$.
2. Gjenerojmë madhësi të rastit duke përpunuar numrat e rastit me shpërndarje $U(0, 1)$.

4.1 Gjenerimi i numrave të rastit me ligj

probabilitar $U(0, 1)$

Ka dy mënyra për të gjeneruar numrat e rastit. Mënyra e parë është duke përdorur një listë me numra të rastit të hartuar nga dikush tjetër. Për shembull, një tabelë e tillë me 1 milion shifra u botua në vitin 1955 nga Korporata Rand[6]. Mënyra e dytë (dhe, deri tani, më e përdorura) është që të përdorim kompjuterin për të gjeneruar një seri të numrave të rastit. Realisht nuk mund të gjenerojmë numra vërtet të rastit në kompjuter. Në të vërtetë, gjenerojmë numra *pseudo-rastësorë*, që duken si numra të rastit por janë deterministikë. Duke qenë deterministikë numrat pseudo-rastësorë kanë një avantazh të rëndësishëm : çdo eksperiment që kryhet duke përdorur numra pseudo-rastësorë mund të përsëritet saktësisht. Për gjenerimin e numrave pseudo-rastësorë krijohen programe kompjuterike (gjeneratorë), që ekzekutohen. Aëdo herë që një seri e re me numra të rastit është e nevojshme. Një listë e zgjeruar e gjeneratorëve ekzistues dhe algoritmeve që ata përdorin mund të gjendet në [23][21][2]. Për gjenerimin e numrave të rastit ne do përdorim gjuhën R. Gjuha R përdor lloje të ndryshme gjeneratorësh por i parazgjedhuri është Mersenne-Twister. Mënyra e funksionimit të gjeneratorit Mersenne-Twister është si më poshtë :

Është dhënë një numër fillestar $X_0 \in 0, 1, \dots, m - 1$ dhe dy numra të mëdhenj A dhe

B.

$$X_{n+1} = (AX_n + B) \bmod m \quad (4.1.1)$$

përcakton një seri numrash: $X_n \in 0, 1, \dots, m-1$, $n = 0, 1, \dots$. Duke vendosur

$U_n = X_n/m$ përftojme një seri numrash $U_n \in 0, 1$, $n = 0, 1, \dots$. Në qoftë se m , A

dhe B janë zgjedhur me kujdes, atëherë seria $U_0, U_1 \dots$ është pothuajse e pamundur

të dallohet nga një seri numrash të rastit të pavarur me ligj probabilitar $U(0,1)$.[\[25\]](#).

4.2 Gjenerimi i madhësive të rastit

Për modelin që po studiojmë do gjenerojmë madhësi të rastit:

- Madhësi të rastit që ndjekin ligjin Puason.
- Madhësi të rastit që ndjekin ligjin Normal.

4.3 Gjenerimi i proceseve Puason

Duam të gjenerojmë mbërritjet e pasagjerëve gjatë 120 minutave si proces Puasonian me normë λ . Supozojmë se gjatë kësaj kohe numri i mbërritjeve në sistem do jetë n .

Për gjenerimin e mbërritjeve përdorim faktin se kohët midis mbërritjeve të

njëpasnjëshme janë madhësi rasti të pavarura me ligj probabilitar $E(\lambda)$. Pra një mënyrë për gjenerimin e procesit është të gjenerojmë këto intervale kohore midis mbërritjeve. Pra po të gjenerojmë n numra të rastit $U_1, U_2, \dots, U_n$, dhe të marrim $X_i = -\frac{1}{\lambda} \log(U_i)$, atëherë X_i është intervali midis mbërritjes i dhe $i - 1$ në procesin Puason. Duke qenë se shuma aktuale e j ngjarjeve do jetë e barabartë me shumën e j intervaleve midis mbërritjeve të para, atëherë vlerat e gjeneruara për n mbërritjet e para janë $\sum_{i=1}^j X_i \quad j = 1 \dots n$. Në qoftë se duam të gjenerojmë T njësitë e para kohore të procesit Puason, gjenerojmë intervalet kohore midis mbërritjeve të njëpasnjëshme derisa shuma e tyre të arrijë T . Një mënyrë tjetër për të gjeneruar T njësitë e para kohore të procesit Puason me normën λ , është duke gjeneruar $N(t)$ -numri total i mbërritjeve në kohën T . $N(T) \sim P(\lambda T)$, ndaj mund të gjenerohet duke përdorur një nga metodat e përshkruara në [21][29]. Në qoftë se vlera e simuluar e $N(T)$ është n , atëherë gjenerojmë n numra të rastit $U_1 \dots U_n$ dhe $TU_1 \dots TU_n$ formojnë një proces Puason në intervalin kohor T . Algoritmet e këtyre metodave dhe realizimet e tyre në gjuhën R përshkruhen në Shtojcën K. Për parametrat e vlerësuar λ gjenerojmë madhësinë e rastit që përfaqëson mbërritjen e pasagjerëve në stacion. Rezultatet e gjenerimit për stacionet S1, S2 dhe S3 duke përdorur algoritmin 1 dhe algoritmin 2 [26] paraqiten respektivisht në figurat L1-L6 Shtojca L.

4.4 Gjenerimi i proceseve normalë

Duke gjeneruar një seri me numra të rastit T me ligj normal $T \sim N(0, 1)$ mund të përftojme $T' \sim N(\mu, \delta^2)$ duke ndërtuar :

$$T' = \mu + \delta T \quad (4.4.1)$$

Ka dy metoda kryesore për gjenerimin e madhësive të rastit me ligj normal.

1. Metoda e parë bazohet në teoremën qendrore limite : Në qoftë se $E(T_i) = \mu$ dhe $Var(T_i) = \sigma^2$, atëherë çdo zgjedhje e pavarur dhe me shpërndarë të njëjtë $\tilde{T} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$, ku n është vëllimi i zgjedhjes.
2. Metoda e dytë përdor një transformim të drejtpërdrejtë. Kjo metodë quhet algoritmi i koordinatave polare [21][29]. Gjenerojmë madhësitë e pavarura me ligj probabilitar të njëjtë $X \sim N(0, 1)$ dhe $Y \sim N(0, 1)$. R dhe θ janë koordinatat polare të vektorit (X, Y) .

$$R^2 = X^2 + Y^2 \tan(\theta) = \frac{U_2}{U_1} \quad (4.4.2)$$

X dhe Y janë të pavarura. Densiteti probabilitar i vektorit (U_1, U_2) do jetë:

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}} \quad (4.4.3)$$

Për të llogaritur densitetin $f(d, \theta)$ të (R^2, θ) kryejmë transformimet:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) \quad (4.4.4)$$

Matrica Jakobiane e këtij transformimi $J = 2$ [29] pra nga ekuacioni 4.4.5 :

$$f(d, \theta) = \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{d}{2}} \quad 0 < d < \infty, 0 < \theta < 2\pi \quad (4.4.5)$$

Nga ekuacioni $f(d, \theta)$ është e barabartë me densitetin eksponencial me mesatare 2 $(\frac{1}{2}e^{-\frac{d}{2}})$ dhe me densitetin uniform në $(0, 2\pi)$ $(2\pi^{-1})$. Pra R^2 dhe θ janë të pavarura. $R^2 \sim E(2)$ dhe $\theta \sim U(\mu, \omega)$ në $(0, 2\pi)$ Duke përdorur këtë përfundim mund të gjenerojmë dy madhësi të rastit të pavarura:

$$U_1 \sim N(0, 1) U_2 \sim N(0, 1) \quad (4.4.6)$$

dhe pastaj ti transformojmë në koordinata karteziene. Ky quhet algoritmi

Box-Muller procedura e të cilit është përshkruar në shtojcën J.

Algoritmi Box-Muller nuk është shumë eficient sepse kërkon llogaritjen e sinusit dhe kosinusit. Në [21][29] propozohet metoda e koordinatave polare si modifikim i metodës Box-Muller. Procedura e metodës të koordinatave polare është përshkruar në shtojcën J. Për gjenerimin e madhësisë të rastit T në modelin tonë përdorim

metodën e koordinatave polare. Kjo metodë është e përfshirë në paketën *pgnorm* brenda gjuhës R. Për parametrat e vlerësuar μ dhe σ^2 gjenerojmë madhësinë e rastit T_{S_2} dhe T_{S_3} . Rezultatet e gjenerimit për stacionet S2 dhe S3 duke metodën e përshkruar [21] paraqiten respektivisht në figurat M1-M2 Shtojca M.

Kapitulli 5

KONTROLI I VLEFSHMËRISË TË MODELEVE ME NDIHMËN E SIMULIMIT

Pasi kryem simulimin e proceseve të rastit, hapi tjetër është kontrolli i vlefshmërisë të të dhënave të simuluar. Krahsojmë mesataren e të dhënave të simuluar me mesataren e të dhënave reale. Në këtë mënyrë krijojmë një ide të qartë nëse të dhënat e simuluar mund të shërbejnë si të dhëna hyrëse për modelin që duam të krijojmë.

5.1 Kontrolli i vlefshmërisë të modelit për mbërritjen e pasagjerëve

Simulimi i të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve sipas Algoritmit 1 dhe 2 respektivisht dhe krahasimi e tyre me të dhënat reale për 3 stacionet paraqitet në figurat N1-N6(Shtojca N). Procesin e simulojmë për kohën 120 minuta që të krijojmë një pamje sa më të përafërt me kohën reale të vëzhgimit. Hapi tjetër është ai i krahasimit të mesatareve për të dhënat reale dhe ato të simuluarat. Për qëllimin tonë përdorim testin T për mesataret e dy popullatave (dispersionet të panjohura dhe të ndryshme). Le të jetë T-ndryshorja e rastit me ligj probabilitar $T \sim P(\lambda)$. Shënojmë $T_1, \dots, T_n$ zgjedhjen me vëllim n të nxjerrë nga popullimi Ω . Le të jenë $t_1, \dots, t_k$ vlerat e vrojtuarat. Le të jetë X-ndryshorja e rastit e gjeneruar me ligj probabilitar $X \sim P(\lambda)$. Shënojmë $X_1, \dots, X_n$ zgjedhjen me vëllim n. Le të jenë $x_1, \dots, x_k$ vlerat e gjeneruara. Le të jenë $(t_1, x_1), \dots, (t_n, x_n)$ çiftet e formuara të vlerave nga dy ndryshoret e rastit.

Shënojmë diferencën për çdo çift:

$$D_i = t_i - x_i \quad i = \overline{1, n} \quad (5.1.1)$$

Supozojmë se diferencat janë madhësi të rastit të pavarura dhe me shpërndarje të

KAPITULLI 5. KONTROLLI I VLEFSHMËRISË TË MODELEVE ME NDIHMËN E SIMULIMIT

njëjtë. Për këto madhësi të rastit shënojmë mesataren μ_D dhe σ_D^2 . Testojmë

hipotezën :

$$H_0 : \mu_D = 0 \quad H_1 : \mu_D \neq 0 \quad (5.1.2)$$

Testi T për kontrollin e hipotezës H_0 është :

$$t_0 = \frac{\overline{D}}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \quad (5.1.3)$$

ku :

$$\overline{D} = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n} \quad (5.1.4)$$

dhe:

$$S_D^2 = \frac{\sum_{i=1}^n D_i^2 - \left[\frac{(\sum_{i=1}^n D_i)^2}{n} \right]}{n - 1} \quad (5.1.5)$$

janë mesatarja e zgjedhjes dhe varianca e diferencave. Do e hedhim poshtë hipotezën

$H_0 : \mu_D = 0$ që tregon se $\mu_1 \neq \mu_1$ në qoftë se $t_0 > t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$ ose $t_0 < -t_{\frac{\alpha}{2}, n-1}$.[18][14]

Realizimi i testit T për krahasimin e mesatares të të dhënave reale me ato të

simuluara për mbërritjet është paraqitur në shtojcën O.

Për stacionin S1 kemi vlerën e testit $T = 0.192 < t_{45, 119} = 0.848$ në rastin e

algoritmit të parë (tabela O3)dhe $T = -0.138 < t_{45,119} = 0.891$ (tabela O6). Për stacionin S2 kemi vlerën e testit $T = 0.452 < t_{45,119} = 0.652$ në rastin e algoritmit të parë (tabela O9) dhe $T = 0.143 < t_{45,119} = 0.216$ (tabela O12). Për stacionin S3 kemi vlerën e testit $T = 0.336 < t_{45,119} = 0.737$ në rastin e algoritmit të parë (tabela O15)dhe $T = 0.398 < t_{45,119} = 0.691$ (tabela O18). Për të gjitha rastet e mësipërme nuk ka arsye të mendojmë se hipoteza nuk është e vertetë. Kjo do të thotë se të dhënat e simuluar janë të përshtatshme për modelin që do të krijohet.

5.2 Kontrolli i vlefshmërisë të modelit për kohët e shërbimit

Në shtojcën P është paraqitur krahasimi midis vlerave të matura dhe atyre të simuluar për madhësinë e rastit T_i . Madhësia e rastit T_i përfaqëson mbërritjet e autobusëve në stacionin S2 (figura P1)dhe S3(figura P2) respektivisht. Hapi tjetër është ai i krahasimit të mesatareve për të dhënat reale dhe ato të simuluar. Për qëllimin tonë përdorim testin T për mesataret e dy popullatave (dispersionet të panjohura dhe të ndryshme). Realizimi i testit T për krahasimin e mesatares të të dhënave reale me ato të simuluar për mbërritjet është paraqitur në shtojcën P. Për stacionin S2 kemi vlerën e testit $T = -1.001 < t_{45,22} = 0.0.238$ në rastin e algoritmit të parë dhe $T = -0.138 < t_{45,119} = 0.891$ (tabela P3). Për stacionin S3 kemi vlerën e

testit $T = -1.438 < t_{45,22} = 0.165$ në rastin e algoritmit të parë dhe

$T = 0.143 < t_{45,119} = 0.216$ (tabela P6). Për të gjitha rastet e mësipërme nuk ka arsye të mendojmë se hipoteza nuk është e vertetë. Kjo do të thotë se të dhënat e simuluar janë të përshtatshme për modelin që do të krijohet.

5.3 Krahasimi i modeleve për kohën e shërbimit

Në literaturë ekzistojnë një numër i madh modelesh për madhësinë T_i . Në punimin tonë krijuam një model matematik të madhësisë T_i duke përdorur shpërndarjen normale. Gjithashtu ekzistojnë edhe studime të tjera [27] ku modeli eksponencial është përdorur për të modeluar madhësinë T_i . Duam të arrijmë në konkluzionin se cili prej modeleve është më i përshtatshëm për simulimin e kohëve të shërbimit në sistemin që po shqyrtojmë. Për këtë qëllim do të marrim rastin e madhësisë T_{S2} . Simulojmë procesin puason për madhësinë T_{S2} duke përdorur algoritmin 3 në shtojcën K. Për simulimin e procesit përdorim parametrin: $\bar{\lambda} = \bar{\theta} = \bar{x} = 5.71$. Nga figura Q1 dhe Q2 në shtojcën Q duket qartë se modeli normal është më i përshtatshëm për të modeluar kohët e shërbimit. Hapi tjetër është krahasimi i mesatareve, asaj të të dhënave empirike me mesataren e të dhënave të simuluar që të shikojmë nëse të dhënat e përdorura mund të përdoren për simulim. Egzistojnë shumë teste për

KAPITULLI 5. KONTROLI I VLEFSHMËRISË TË MODELEVE ME NDIHMËN E SIMULIMIT

krahasimin e mesatareve për dy popullime po ne do përdorim testin T për mesataren e dy popullimeve (variancat e panjohura dhe të pabarabarta)[14]. Vlera e testit T (tabela Q1 në shtojcën Q) dhe grafikët tregojnë që shpërndarja normale i përafron me mirë të dhënat tona.

Kapitulli 6

VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

6.1 Kombinimi i gjuhës R me metodat GIS për paraqitjen vizuale të modelit matematik

Kemi simuluar të dhënat për mbërritjet e autobusëve dhe kemi arritur në konkluzionin se këto të dhëna janë të përshtatshme për modelin mbi të cilin duam të eksperimentojmë. Hapi i rradhës është paraqitja vizuale e funksionalitetit të modelit. Programi që kemi krijuar mbledh pikat kohore të autobusit me vendndodhje hapësinore (koordinatat x dhe y). Këto pozicione do të paraqiten si pika në distanca

të llogaritura nga një stacion, nga i cili do të fillojë simulimi i lëvizjes së autobusit. Paraqitja e pozicioneve hapësinore të autobusit në momente të caktuara kohore, të simuluar sipas modelit të ndërtuar matematik, na ndihmon të krijojmë një ide të qartë për funksionimin e sistemit real dhe na lehtëson vendimmarrjen për përmirësimin e punës të sistemit. Procedurat e përdorura për përcaktimin e pozicioneve gjeografike të vendndodhjes të autobuzit dhe paraqitjen e tyre në hartë janë ndërtuar në gjuhën R. Gjuha R përfshin shumë funksione që mund të përdoren për leximin, vizualizimin, dhe analizimin e të dhënave hapësinore.

6.2 Metodologjia e ndjekur për ndërtimin e sistemit

Hapat e ndjekur për ndërtimin e sistemit janë si më poshtë:

1. Krijimi i një ndërfaqeje në gjuhën R, duke përdorur hartën e linjës të Unazës si një imazh sfond.
2. Importimi i të dhënave hapësinore në formën e koordinatave x dhe y për paraqitjen e stacioneve të linjës.
3. Krijimi i procedurave që mundëson llogaritjen e distancave të autobusit nga stacioni i zgjedhur si pika e fillimit të simulimit.

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

4. Krijimi i procedurave që mundëson llogaritjen e pikave me koordinata x dhe y që ndodhen në distancat e llogaritura në hapin e mëparshëm.
5. Importimi këtyre të dhënave në ndërfaqen e ndërtuar.

Le të shohim me hollësi hapat e ndjekur:

Hapi 1 Hartën që përbën shtresën bazë mbi të cilën do të paraqitet gjithë informacioni e marrim nga shërbimi Google Maps. Disa nga arsyet pse kemi zgjedhur të përdorim Google Maps janë si më poshtë:

- Hartat e ofruara nga Google Maps kanë saktësi mjaft të madhe.
- Hartat e ofruara nga Google Maps ofrojnë një mënyrë mjaft tërheqëse për paraqitjen e të dhënave .
- Sistemi GIS përdor lidhjen e internetit për të shkarkuar hartat nga Google Maps. Kjo bën të mundur që të gjitha ndryshimet në sistemin Google të pasqyrohen në sistemin tonë GIS në një kohë mjaft të shkurtër.
- Google Maps ofron një numër të madh që në mënyrë programative mund ti bashkëngjiten sistemit GIS të ndërtuar duke e bërë atë akoma më interaktiv.
- Hartat e ofruara nga Google Maps mund të përdoren falas.

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Kërkesën nga gjuha R për hartë sipas një pozicioni të caktuar dhe me një zmadhim të caktuar, e realizojmë duke përdorur paketën *ggmap*. Avantazhi i përdorimit të kësaj pakete është gramatika e shtresave grafike që ajo përdor.[?] [20] Nga përkufizimi, gramatika e shtresave grafike kërkon që çdo grafik të përbëhet nga pesë komponentë:

- një koleksion i parazgjedhur të dhënash me elementët përkatës estetikë.
- një ose më shumë shtresa, secila me një objekt gjeometrik ("geom"), një transformues statistikor ("stat"), dhe një koleksion të dhënash me elementët përkatës estetikë (mundësisht të parazgjedhur).
- një shkallë për çdo element estetik hartografik (të cilat mund të gjenerohen automatikisht).
- një sistem koordinativ
- një aspekt i specifikuar.

Pra çdo hartë e printuar me ndihmën e paketës *ggmap* i ka këto elementë. Disa prej elementëve estetikë janë të fiksuar dhe lidhen me elementët e hartës. Elementi x lidhet me gjatësinë gjeografike, elementi y lidhet me gjerësinë gjeografike dhe sistemi koordinativ lidhet me projeksionin Merkator. Me ndihmën e paketës *ggmap* shkarkojmë dhe formatojmë hartën duke e përgatitur atë për printim. Ky proces

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

kryhet duke përdorur funksionin `get_map` [20].

Listim 6.1: Funksioni `get_map`

```
get_map(location = c(lon = -95.3632715, lat = 29.7632836),
        zoom = "auto", scale = "auto",
        maptype = c("terrain", "satellite", "roadmap", "hybrid", "toner",
                    "\"{e}atercolor"),
        messaging = FALSE, urlonly = FALSE,
        filename = "ggmapTemp", crop = TRUE,
        color = c("color", "b\"{e}"),
        source = c("google", "osm", "stamen", "cloudmade"), api_key)
```

Zgjedhim për hartën tonë argumentet:

Listim 6.2: Argumentet për funksionin `get_map`

```
location = c(19.817955, 41.33071)
zoom = 14
maptype = 'roadmap'
```

Pasi kemi shkarkuar dhe formatuar hartën nga Google Maps e printojmë atë në ekran duke përdorur funksionin `ggmap` nga paketa `ggmap`. [20]

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Listim 6.3: Funksioni ggmap

```
ggmap(ggmap, extent = "panel", base_layer,  
maprange = FALSE, legend = "right", padding = 0.02,  
darken = c(0, "black"), ...)
```

Zgjedhim për hartën tonë argumentet:

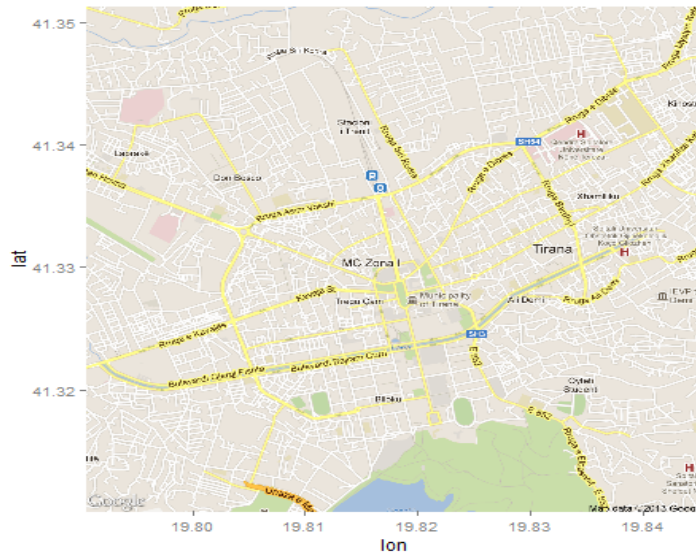
Listim 6.4: Argumentet për funksionin ggmap

```
extent = "device",  
base_layer -> unaza  
legend = "right"
```

Figura 6.1 paraqet rezultatin e ekzekutimit të funksionit:

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.1: Harta e Unazës të Tiranës



Hapi 2 Importojmë të dhënat hapësinore në formën e koordinatave x dhe y për paraqitjen e stacioneve të linjës. Për importimin e të dhënave do të përdorim funksionin `geom_point` brenda paketës `ggplot`[\[34\]](#).

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Listim 6.5: Funksioni geom_point

```
geom_point(mapping = NULL, data = NULL,  
stat = "identity", position = "identity",  
na.rm = FALSE, ...)
```

Zgjedhim për hartën tonë argumentet:

Listim 6.6: Argumentet për funksionin geom_point

```
data=stacionet  
  
mapping = aes(x=lt, y=ln,color=Legjenda)  
  
size=4  
  
alpha=0.5
```

Rezultati i bashkuar i shtresës bazë që krijuam në hapin 1 dhe shtresës me të dhënat për stacionet paraqitet në figurën 6.2:

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.2: Harta e Unazës të Tiranës me stacionet



Hapi 3 Metodologjia që do të ndjekim për llogaritjen e distancave ndryshon për rastin kur përdorim gjenerimin e të dhënave normale dhe Puasoniane. Në rastin e ligjit normal ne simulojmë kohët midis dy stacioneve të përcaktuara dhe më pas distancën. Duke përdorur distancën e llogaritur dhe koordinatat e çdo stacioni gjejmë koordinatat e pikës ku ndodhet autobusi. Në rastin e ligjit Puason ne llogarisim në çdo moment distancën e autobusit nga një stacion të përcaktuar dhe pastaj llogarisim vendndodhjen e autobusit në lidhje me stacionin.

6.2.0.4.2 Metodologjia e ndjekur në rastin e ligjit Puason Hapi 3

Krijojmë procedurën që mundëson llogaritjen e distancave të autobusit nga stacioni i zgjedhur si pika e fillimit të simulimit. Kemi ndërtuar në gjuhën R funksionet

getBearingTrack1 dhe *getDistTrack1* si më poshtë. Në rastin e ligjit Puason.

Procedura e plotë e ndërtuar në gjuhën R me rezultat koordinatat e pikave në distancat e simuluar ndodhet në shtojcën R.

Listim 6.7: Funksioni *getBearingTrack*

```
getBearingTrack1<-function (PT)
{
  n<-dim (PT) [1]
  brng<-c (1:n)

  for (i in 2:n)
  {

    brng[i]<-bearing (PT[(i-1),], PT[i,])

  }
  brng[1]<-brng[2]
  brng
}
```

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Funksioni `getBearingTrack` llogarit drejtimin e lëvizjes të autobusit sipas rrugës të përcaktuar. Për të ndërtuar këtë funksion kemi përdorur funksionin *bearing* brenda paketës *geosphere*[\[28\]](#). Funksioni *bearing* ka sintaksën e mëposhtme:

Listim 6.8: Funksioni bearing

```
bearing(p1, p2)
```

dhe llogarit drejtimin fillestar për të shkuar nga pika `p1` në pikën `p2` me rrugën më të shkurtër. Në sistemin tonë pikat `p1` dhe `p2` përfaqësojnë koordinatat e dy stacioneve të njëpëasnjëshëm. Vlera e funksionit *bearing* llogaritet në gradë.

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Listim 6.9: Funksioni getDistTrack1

```
getDistTrack1<-function (PT)
{
  n<-dim (PT) [1]
  dist<-c (1:n)

  for (i in 2:n)
  {

    dist[i]<-distCosine (PT[(i-1),], PT[i,], r=6378)

  }
  dist[1]<-dist[2]
  dist
}
```

Funksioni `getDistTrack1` llogarit distancat e pozicioneve të autobusit në momentet e simuluar kohore. Për të ndërtuar këtë funksion kemi përdorur funksionin *distCosine* brenda paketës *geosphere*[\[28\]](#). Funksioni *distCosine* ka sintaksën e mëposhtme:

Listim 6.10: Funksioni distCosine

```
distCosine (p1, p2, r=6378137)
```

dhe llogarit drejtimin fillestar për të shkuar nga pika p1 në pikën p2 me rrugën më të shkurtër. Në sistemin tonë pikat p1 dhe p2 përfaqësojnë koordinatat e dy stacioneve të njëpëasnjëshëm, kurse r është rrezja e Tokës i dhënë në metra. Vlera e funksionit `distCosine` llogaritet në të njëjtën njësi matëse si argumenti `r`(metra).

Hapi 4 Krijojmë procedurat që mundësojnë llogaritjen e pikave me koordinata x dhe y që ndodhen në distancat e llogaritura në hapin e mëparshëm. Kemi ndërtuar në gjuhën R funksionet *getPointFromdist*, *getALLpoints* dhe *getALLpoints1* si më poshtë.

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Listim 6.11: Funksioni `getPointFromdist`

```
getPointFromdist <- function (l1, l01, d, brng)
{
  lat1<-degrees.to.radians(l1)
  lon1<-degrees.to.radians(l01)
  R<-6371
  g<-d/R

  lat2<-asin(sin(lat1)*cos(g) + cos(lat1)*sin(g)*cos(brng))
  lon2<-lon1 + atan2(sin(brng)*sin(g)*cos(lat1), cos(g)-sin(lat1)*sin(
    lat2))
  lt2<-radians.to.degrees(lat2)
  ln2<-radians.to.degrees(lon2)
  p<-c(lt2, ln2)
  p
}

degrees.to.radians<-function(degrees)
{
  radians<-degrees*pi/180
  radians
}
```

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

```
radians.to.degrees<-function(radians)
{
degrees<-radians*180/pi
degrees

}
```

Funksioni `getPointFromdist` llogarit koordinatat e pikave me distancat që llogaritëm për momentet e simuluara kohore. Për të ndërtuar këtë funksion kemi përdorur funksionin *destPoint* brenda paketës *geosphere*[\[28\]](#). Funksioni *destPoint* ka sintaksën e mëposhtme:

Listim 6.12: Funksioni `destPoint`

```
destPoint(p, b, d, r = 6378137)
```

dhe llogarit pikën e destinacionit duke marrë rrugën më të shkurtër, duke ditur pikën nga fillon lëvizja, drejtimin fillestar, dhe distancën. Argumentet e funksionit janë:

- p** Gjatësia dhe gjerësia gjeografike e pikave(stacioneve), në gradë. Në sistemin tonë përdoret si matricë me dy kolona,(e para është gjatësia, e dyta është gjerësia).
- b** Drejtimi në gradë i llogaritur nga funksioni *bearing*.

d Distanca e llogaritur nga funksioni *getDistTrack1* në të njëjtën njësi si rrezja e

Tokës r .(metra)

r Rrezja e Tokës (6378137 m)

Procedura e plotë e krijuar për llogaritjen e distancave në rastin e shpërndarjes

Puason gjendet në shtojcën R, listimi *R.1*.

6.2.0.4.3 Metodologjia e ndjekur në rastin e shpërndarjes normale Për

ilustrim do paraqesim metodën e simulimit të ligjit normal. Në pamundesitë të

mbledhjes të të dhënave për gjithë stacionet do krijojmë një funksion që gjeneron

parametrat e ligjit normal për madhësinë T për lëvizjen në distancën midis çdo dy

stacioneve. Shpejtësinë mesatare të lëvizjes të autobusit do e marrim

$v = 0.145 km/min$ kurse kohën e qëndrimit në stacion do e marrim mesatarisht

$t = 0.6 min$. **Hapi 3** Krijojmë në gjuhën R funksionin *calcMes* që mundëson

gjenerimin e mesatareve të ligjit normal.

Listim 6.13: Funksioni calcMes

```
calcMes<-function(PTD, V)
{
  n<-length(PTD)
  Mes<-c(1:n)
```

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

```
for (i in 1:n)
{
  d<-PTD[i]/v
  Mes[i]<-d
}

Mes
}
```

Krijojmë në gjuhën R funksionin *simStdev* që mundëson gjenerimin e dispersionit të ligjit normal.

Listim 6.14: Funksioni *simStdev*

```
simStdev<-function(n,a,b)
{
  stdev<-c(1:n)

  for (i in 1:n)
  {

    u <- runif(1);
    p<-a+(b-a)*u;
    stdev[i]<-p
  }
}
```

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

```
stdev  
}
```

Krijojmë në gjuhën R funksionin *rnormDist* që mundëson llogaritjen e distancave nga stacioni fillestar i simulimit.

Listim 6.15: Funksioni *rnormDist*

```
rnormDist<-function(TB,v,dm)  
{  
  n<-dim(TB)[1]  
  dist<-c(1:n)  
  for (i in 1:n)  
  {  
  
    t <- rnorm(1, TB[i,1],TB[i,2]);  
    d<-abs(t*v);  
    ds <- runif(1)*dm;  
  
    dist[i]<-d-ds  
  }  
  dist  
}
```

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Funksioni *getALLpoints1* transformon distancat e llogaritura në koordinata duke përdorur funksionet *bearing* dhe *destpointtë* përmendura më parë në punim.

Listim 6.16: Funksioni *getALLpoints1*

```
getALLpoints1<-function(BNNRR)
{
  n<-dim(BNNRR)[1]
  V1<-c(1:n)
  V2<-c(1:n)
  b<-c(1:n)

  ln1<-0
  lon1<-0

  for (i in 1:n)
  {

    ln1<-BNNRR[i,1]
    lon1<-BNNRR[i,2]
    p<-c(ln1,lon1)
    Po<-destPoint(p, BNNRR[i,4], BNNRR[i,5], r = 6378)
    V1[i]<-Po[1]
    V2[i]<-Po[2]
```

}

Procedura e plotë e krijuar për llogaritjen e distancave në rastin e shpërndarjes

Puason gjendet në shtojcën R, listimi *R.2*.

6.3 Paraqitja grafike e rezultateve për procesin e simuluar Puason

KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.3: Pozicioni 1-Simulimi Puason

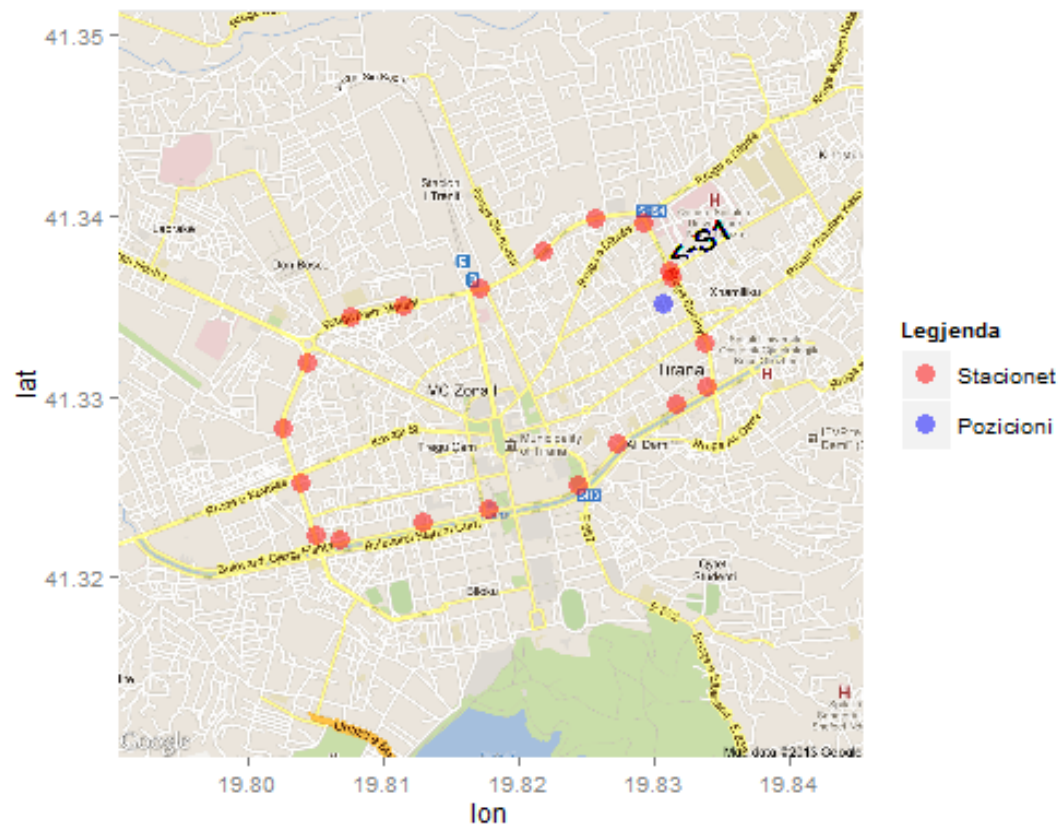
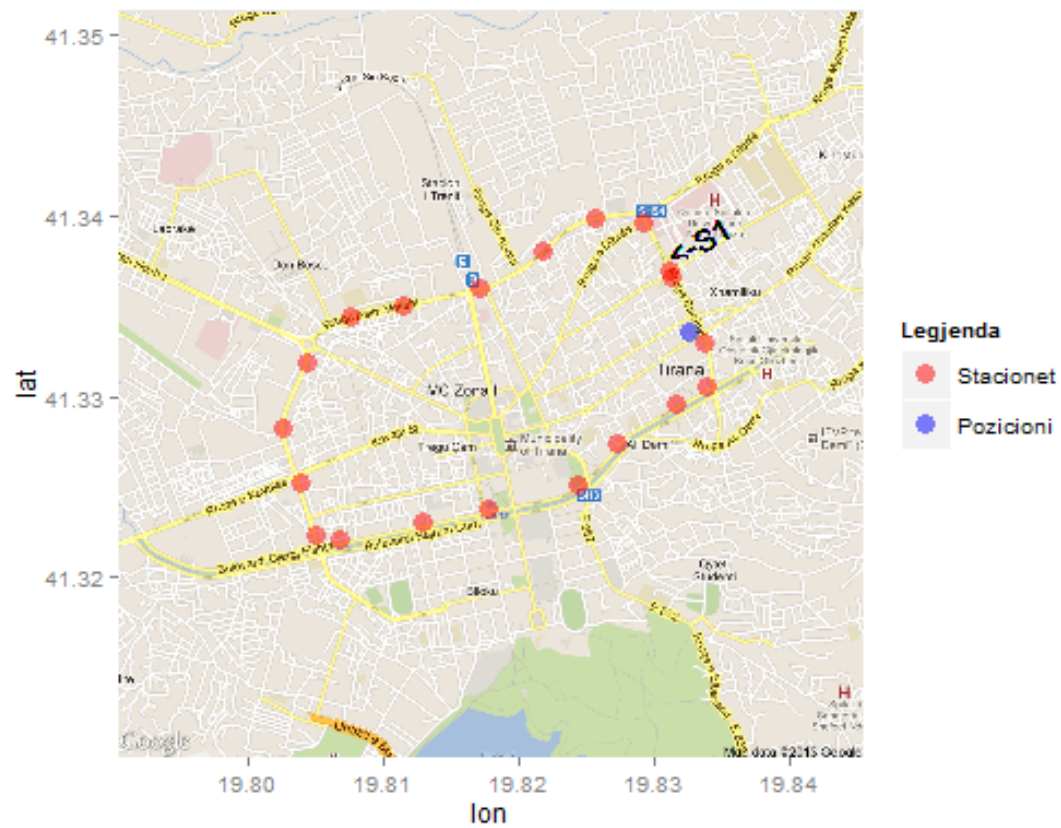


Figura 6.4: Pozicioni 2-Simulimi Puason



KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.6: Pozizioni 4-Simulimi Puason

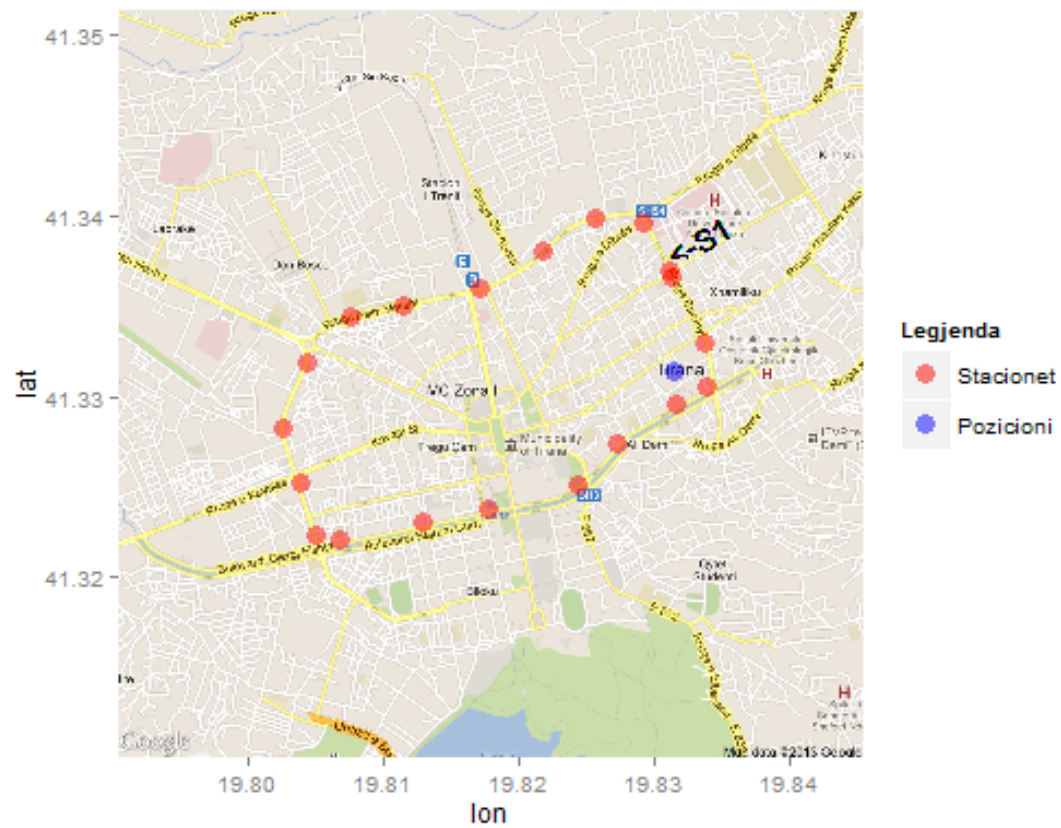
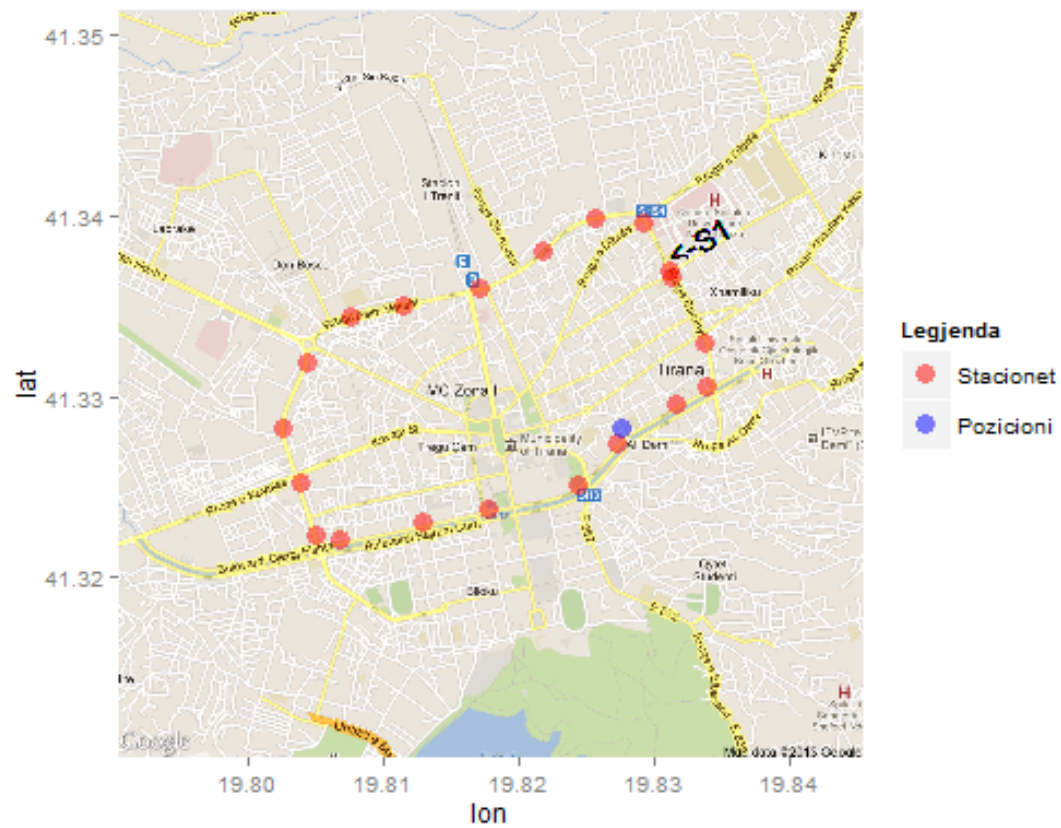
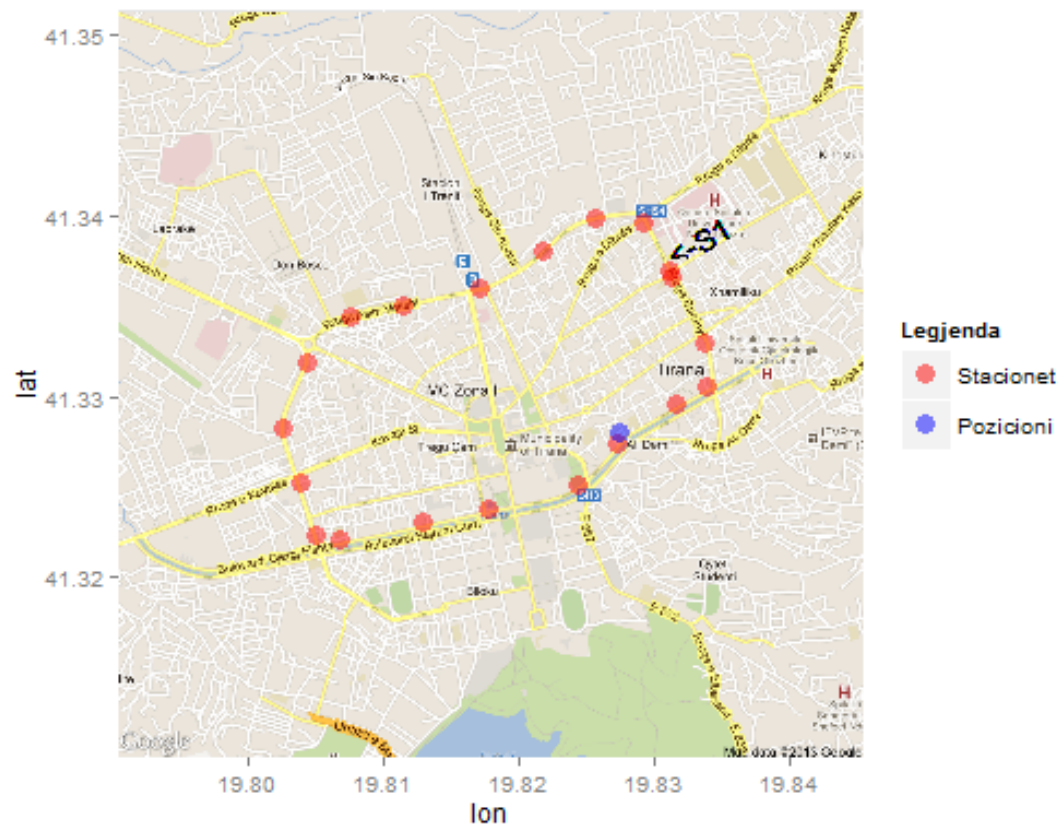


Figura 6.7: Pozicioni 5-Simulimi Puason



KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.8: Pozicioni 6-Simulimi Puason



KAPITULLI 6. VIZUALIZIMI I MODELIT MATEMATIK ME NDIHMËN E METODAVE GIS

Figura 6.9: Pozicioni 7-Simulimi Puason

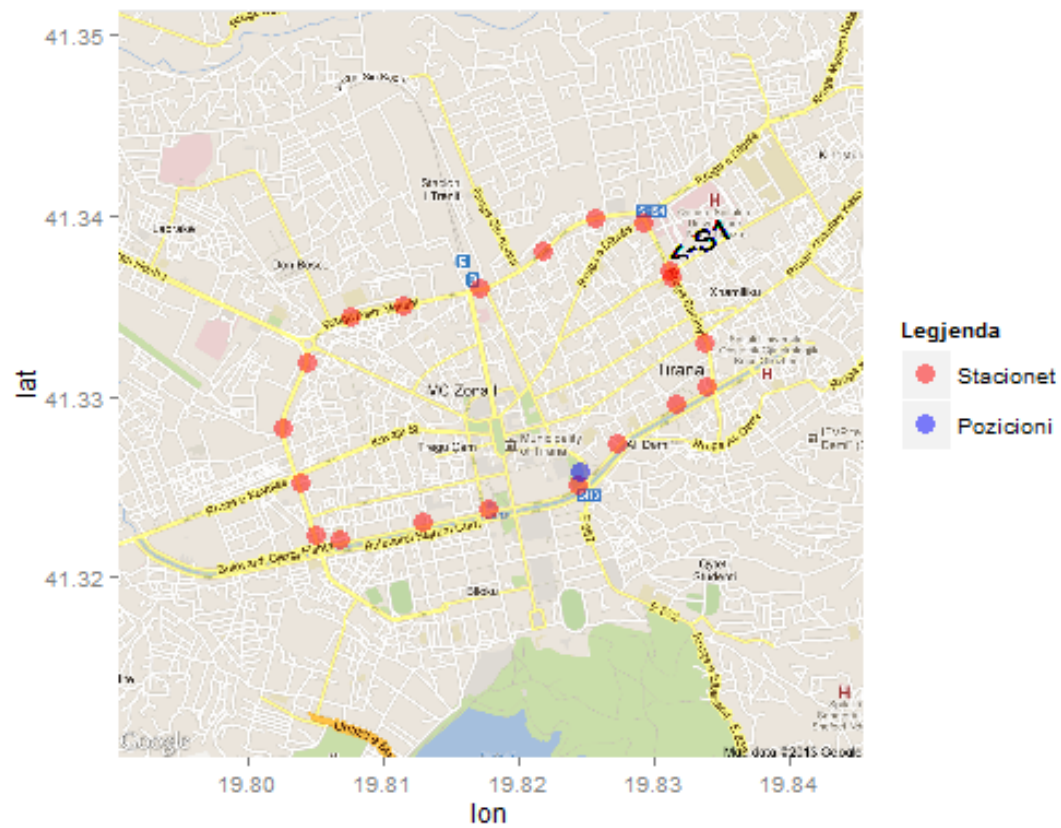


Figura 6.11: Pozicioni 9-Simulimi Puason

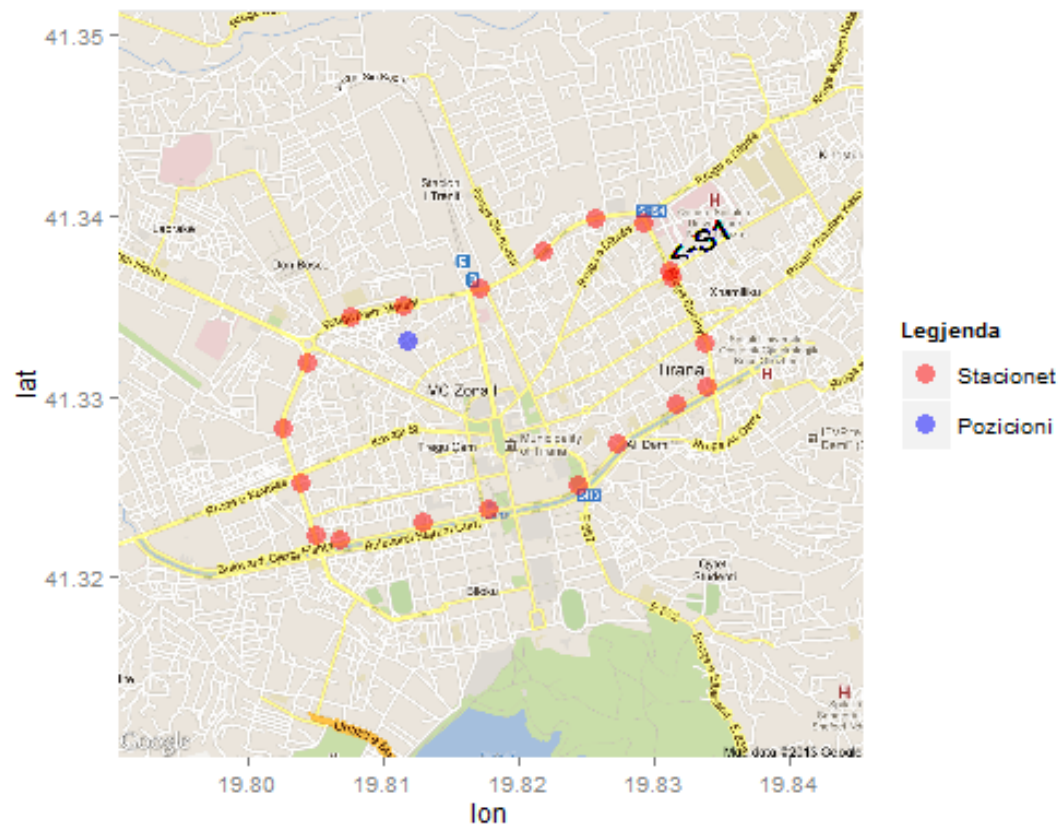


Figura 6.13: Pozicioni 11-Simulimi Puason

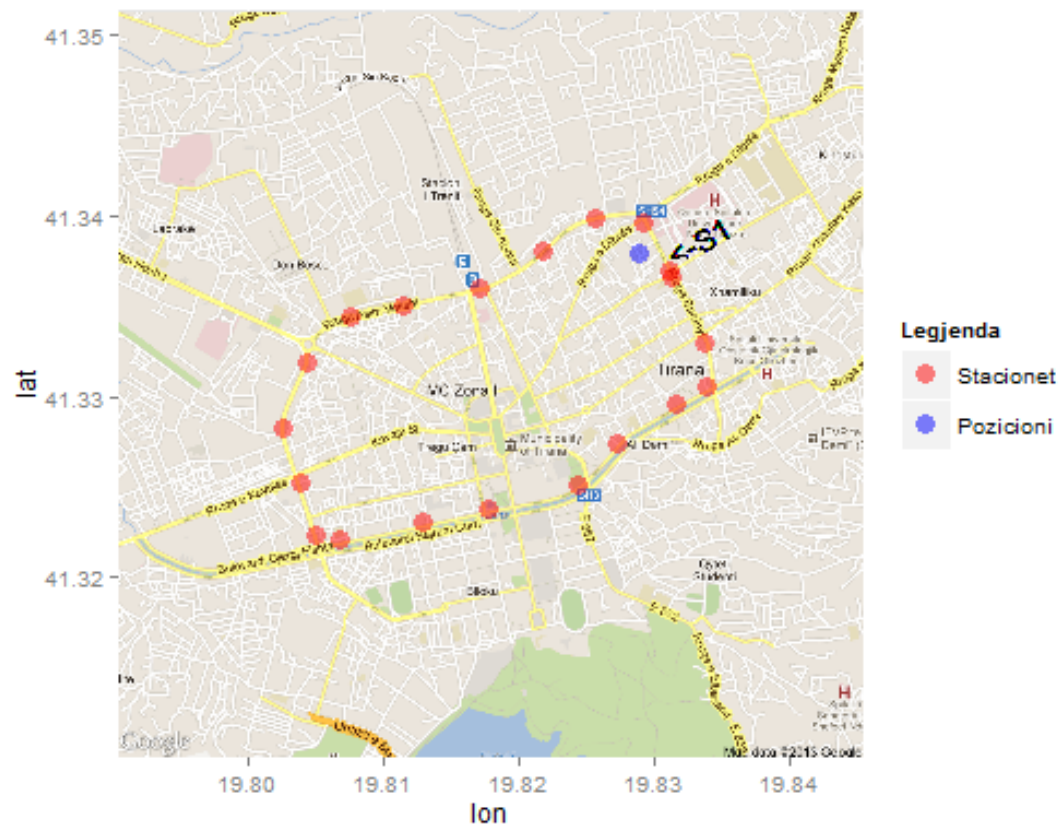


Figura 6.15: Pozicioni 2-Simulimi normal

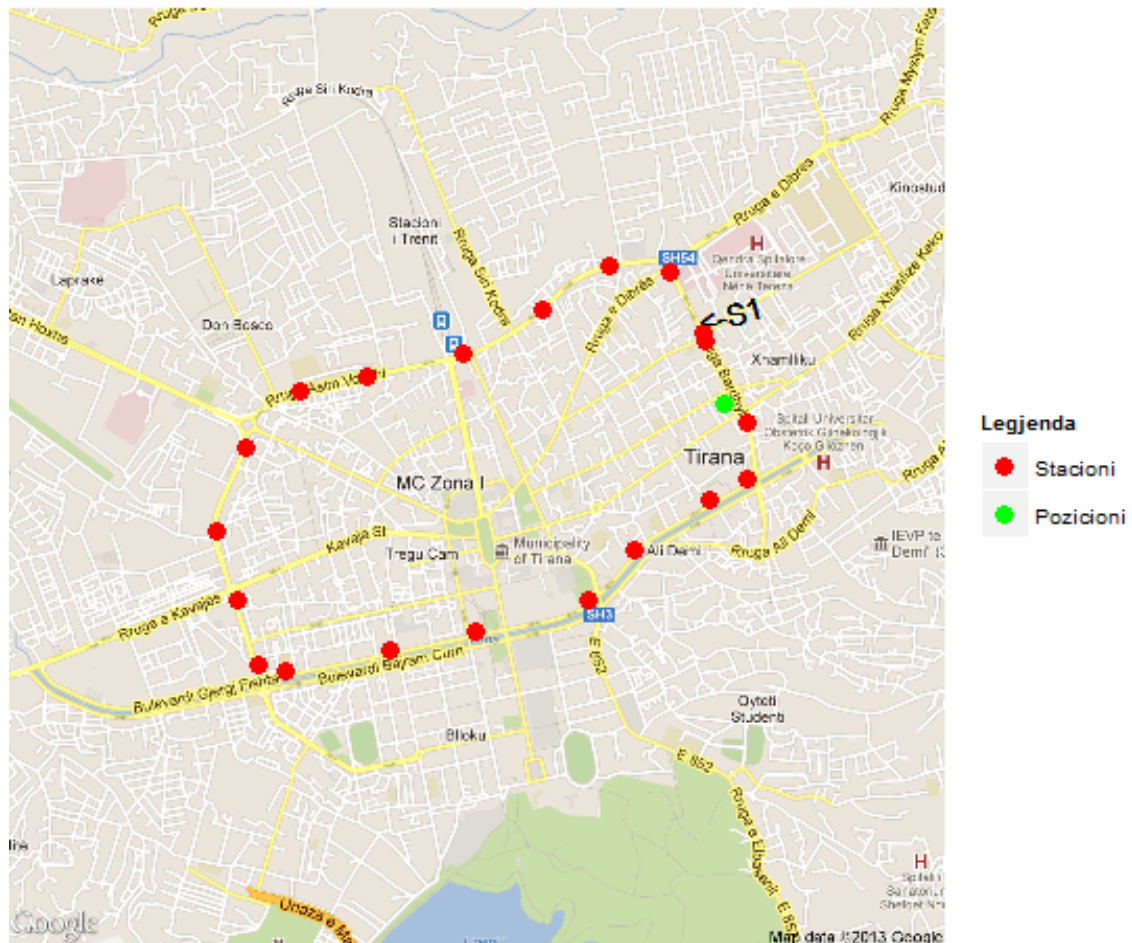


Figura 6.16: Pozicioni 3-Simulimi normal

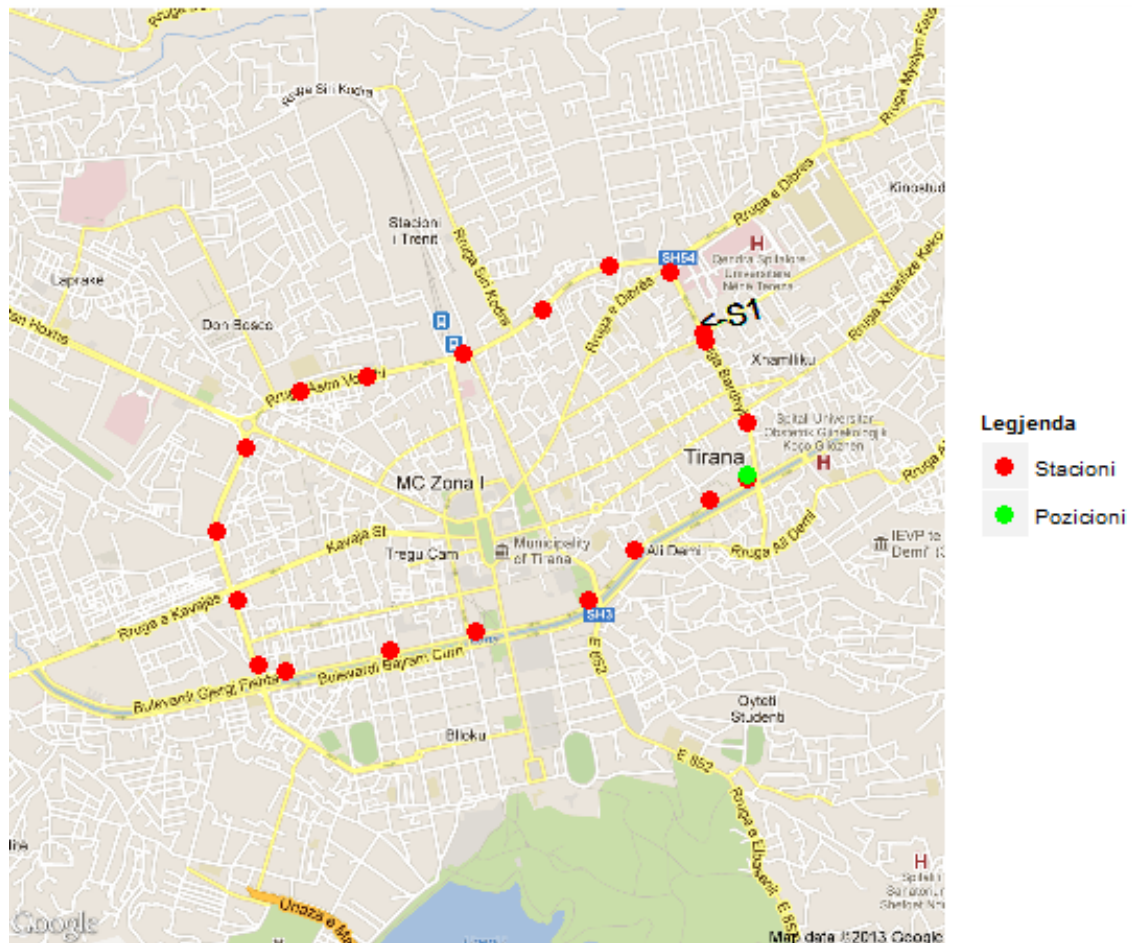


Figura 6.17: Pozicioni 4-Simulimi normal

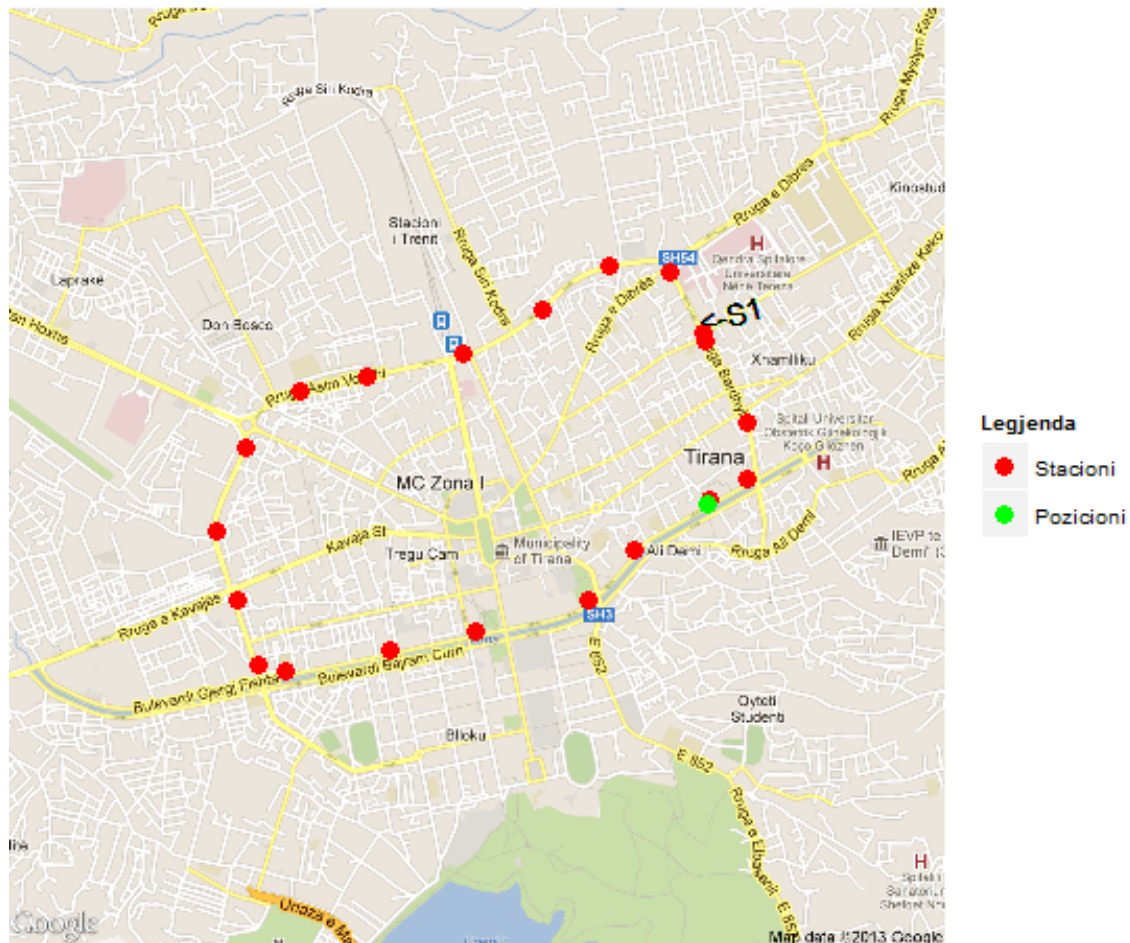


Figura 6.18: Pozicioni 5-Simulimi normal

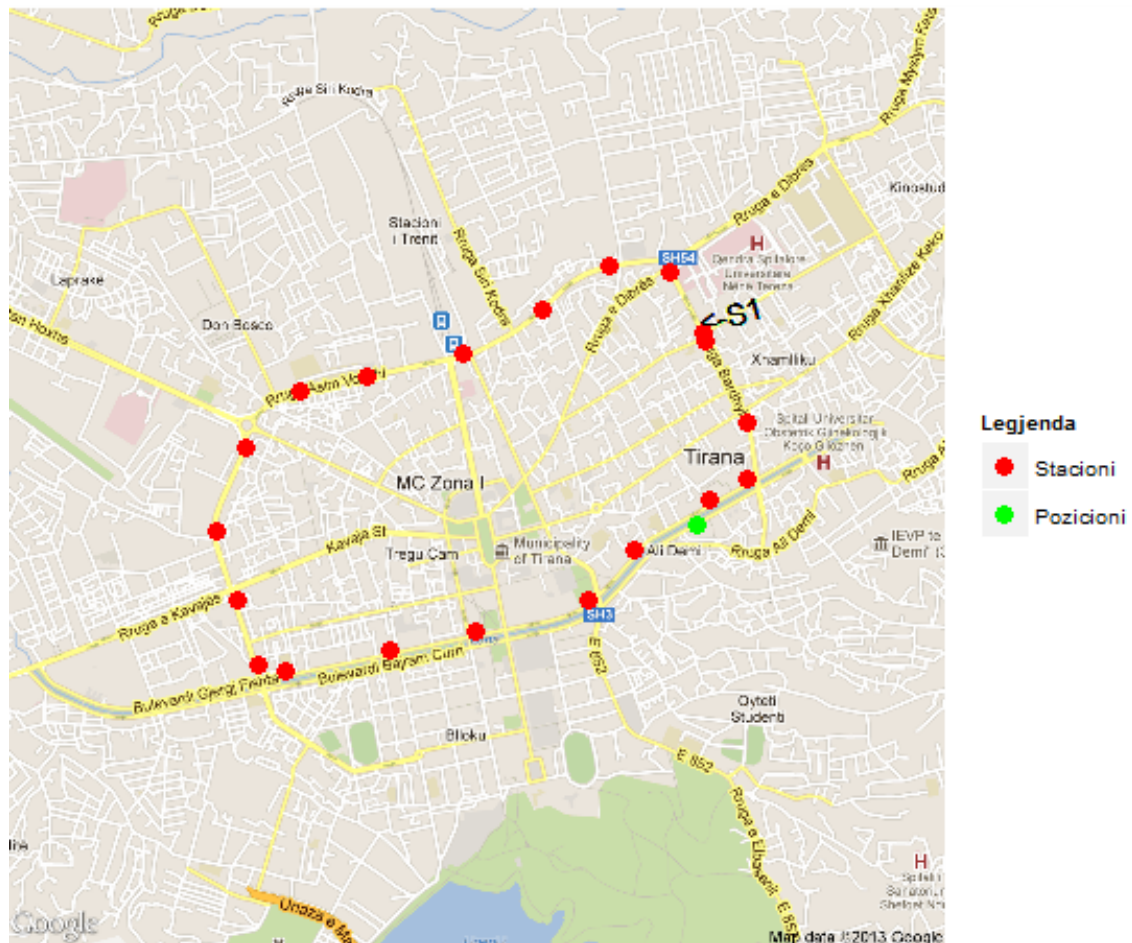


Figura 6.19: Pozicioni 6-Simulimi normal

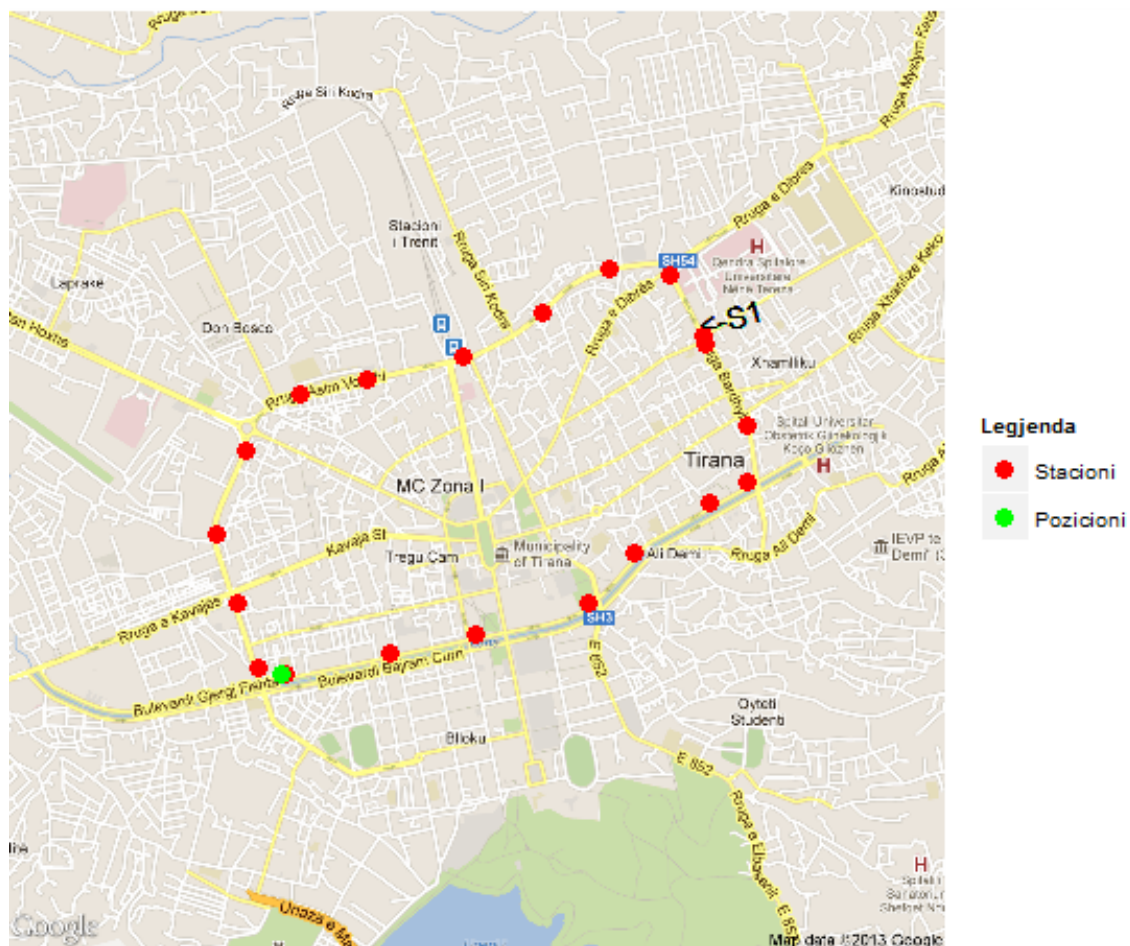


Figura 6.20: Pozicioni 7-Simulimi normal

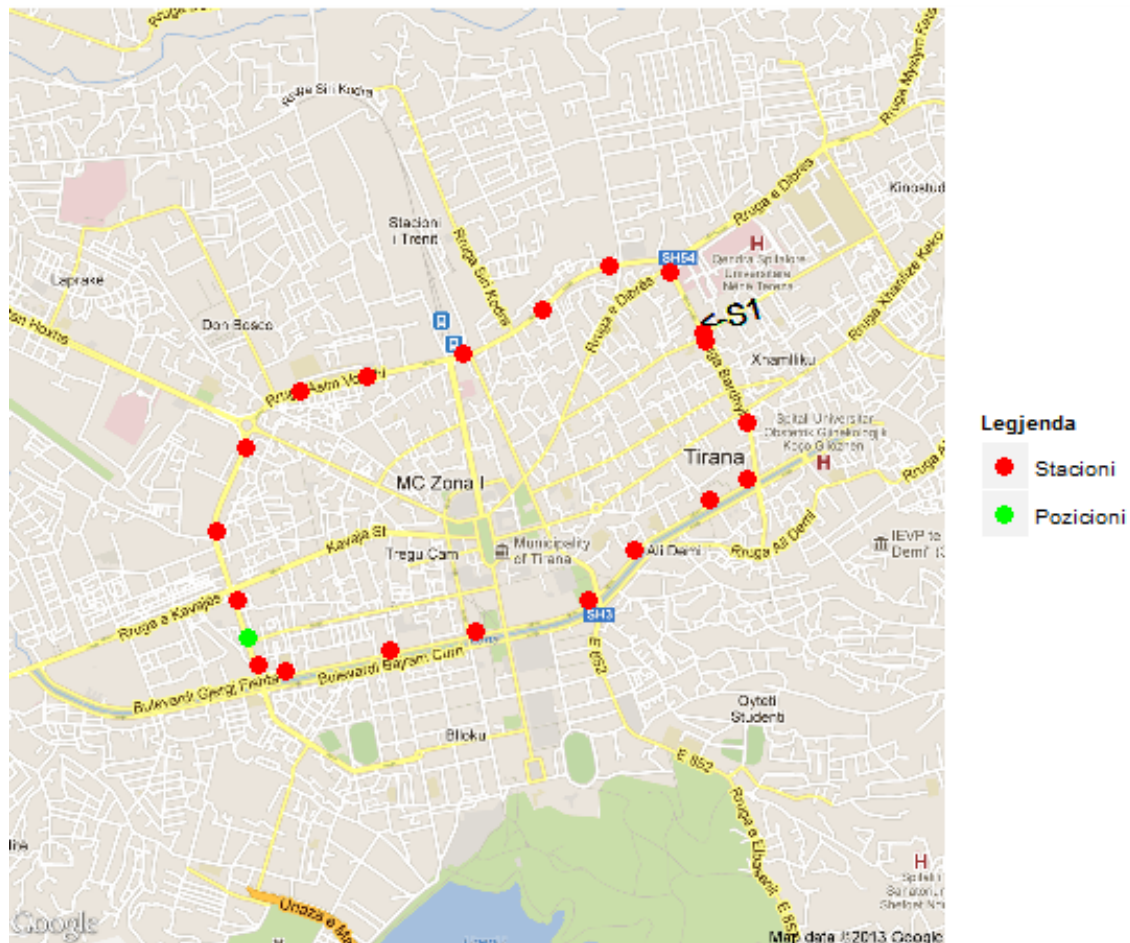


Figura 6.21: Pozicioni 8-Simulimi normal

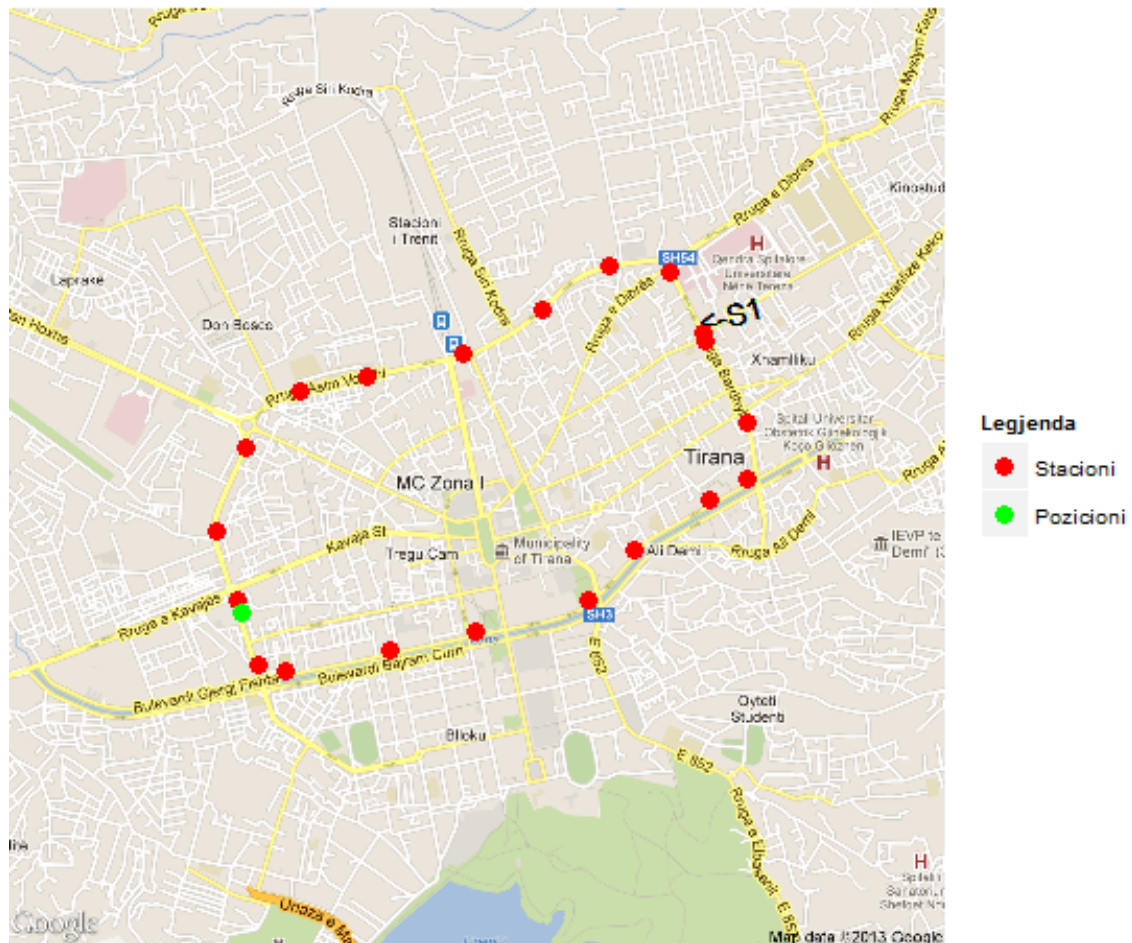


Figura 6.22: Pozicioni 9-Simulimi normal

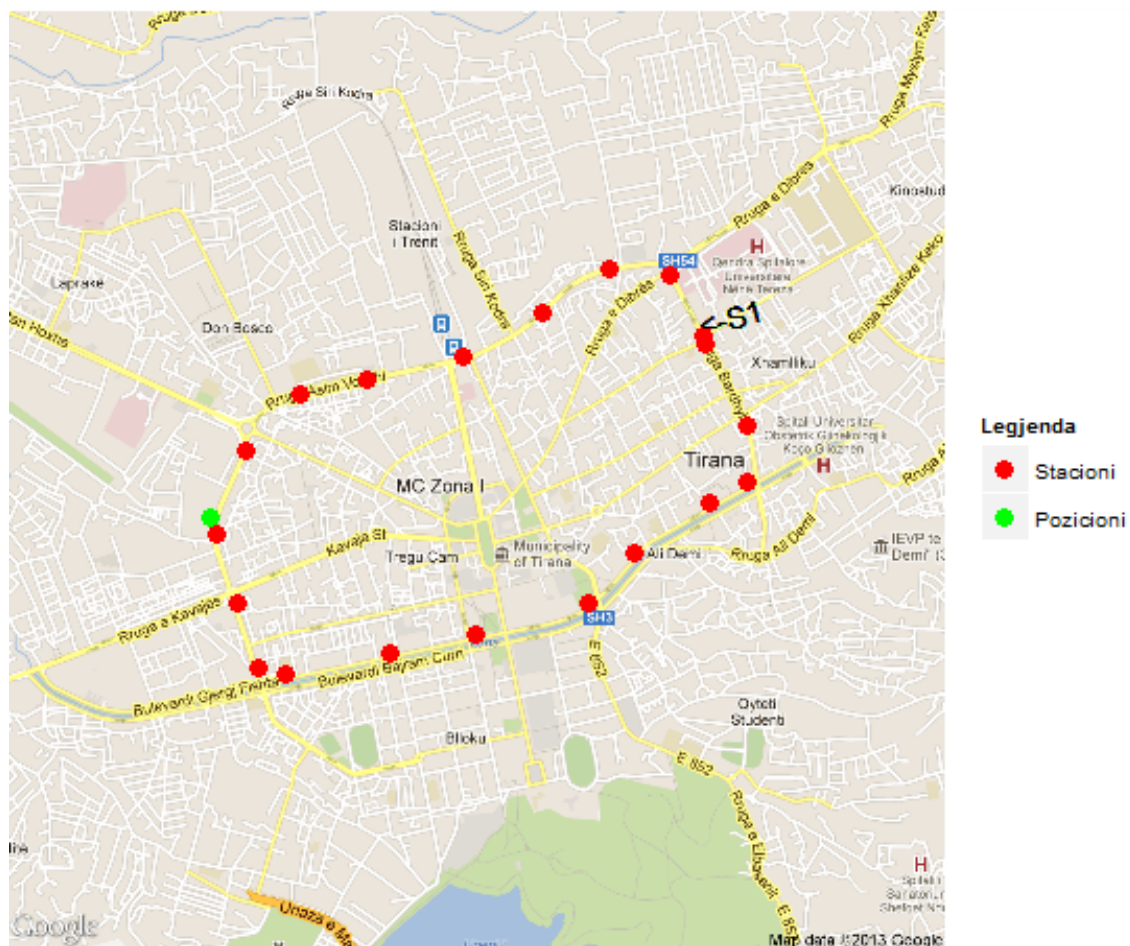


Figura 6.23: Pozicioni 10-Simulimi normal

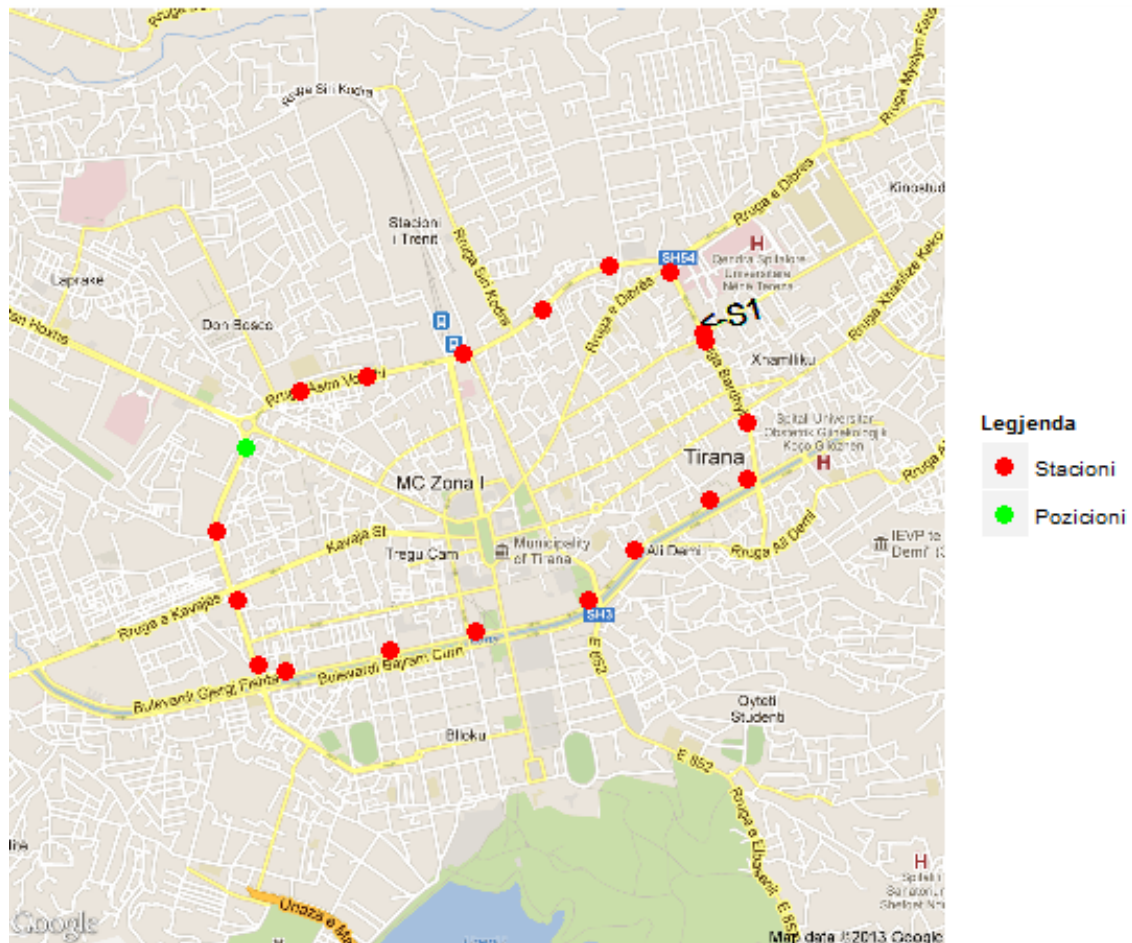


Figura 6.24: Pozicioni 11-Simulimi normal

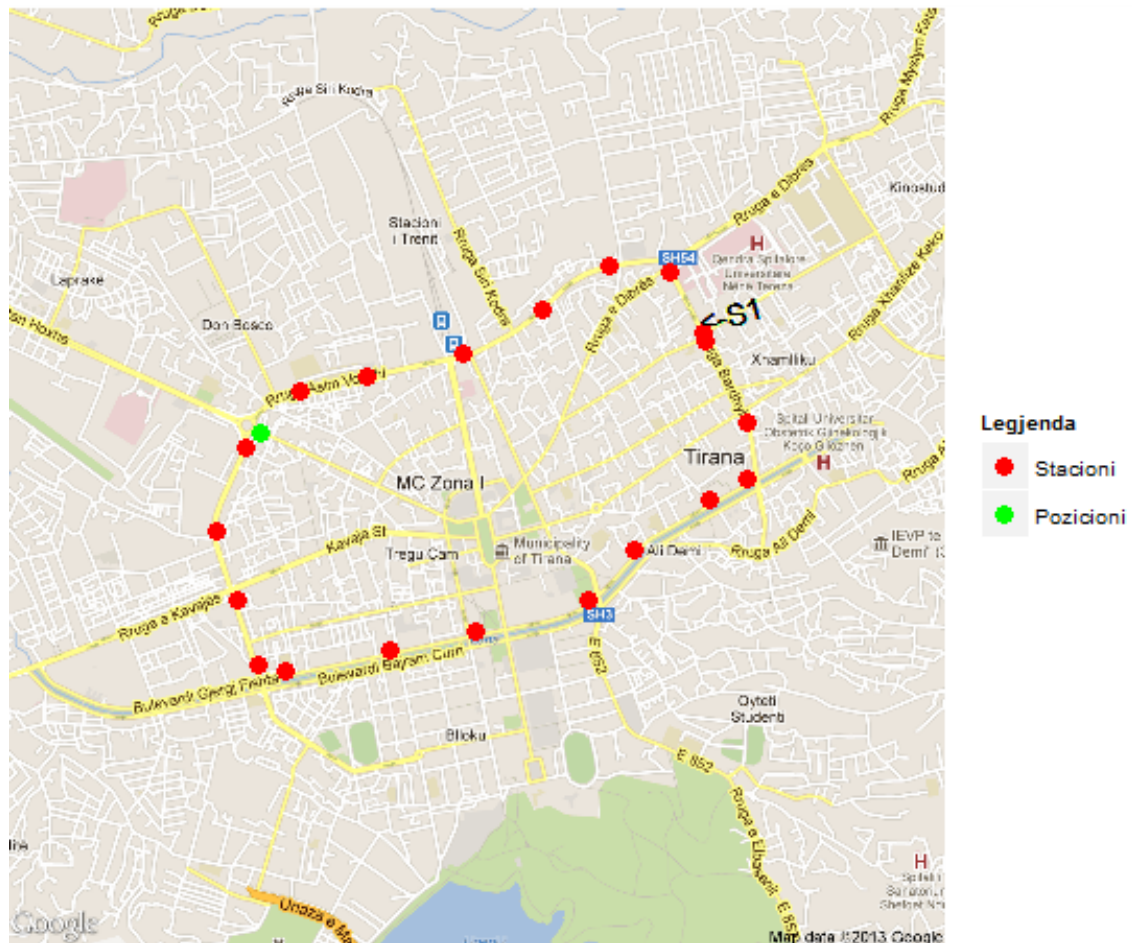


Figura 6.25: Pozicioni 12-Simulimi normal

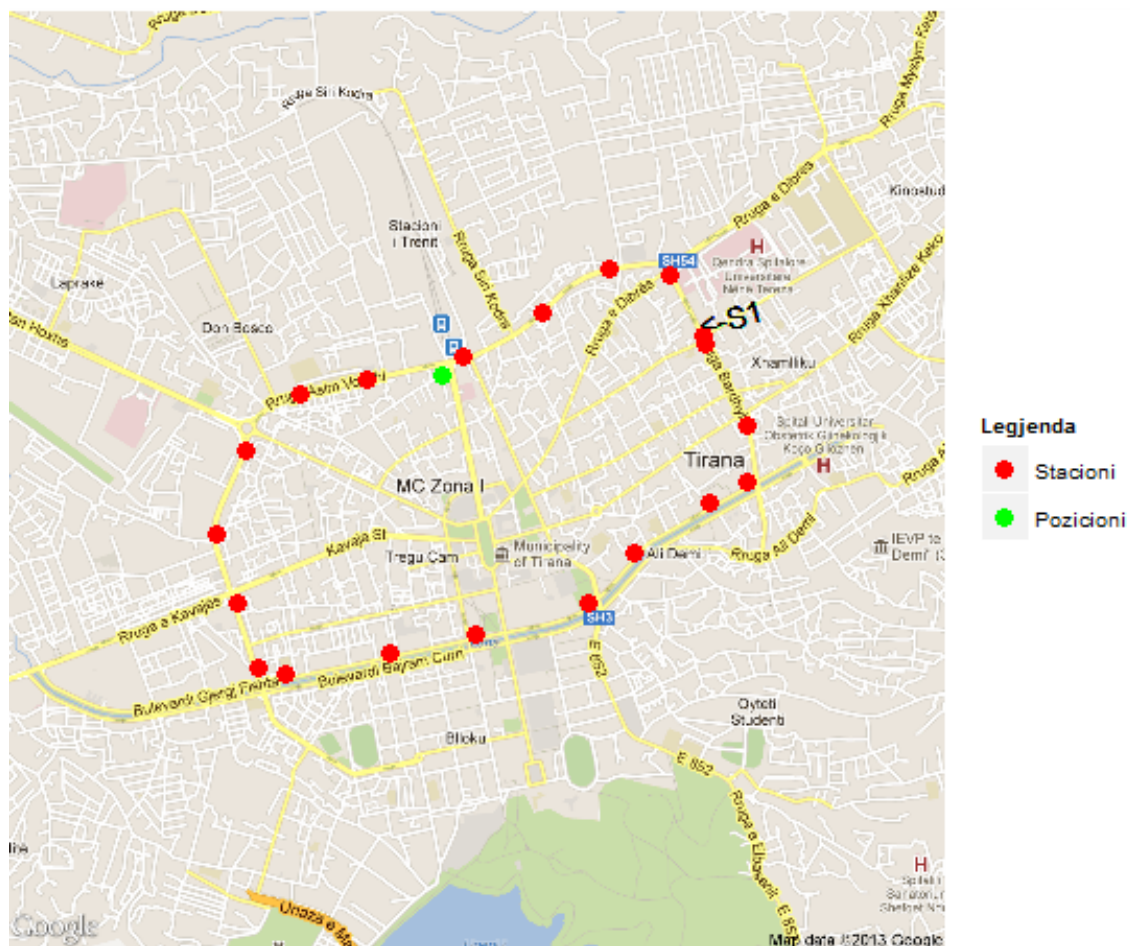
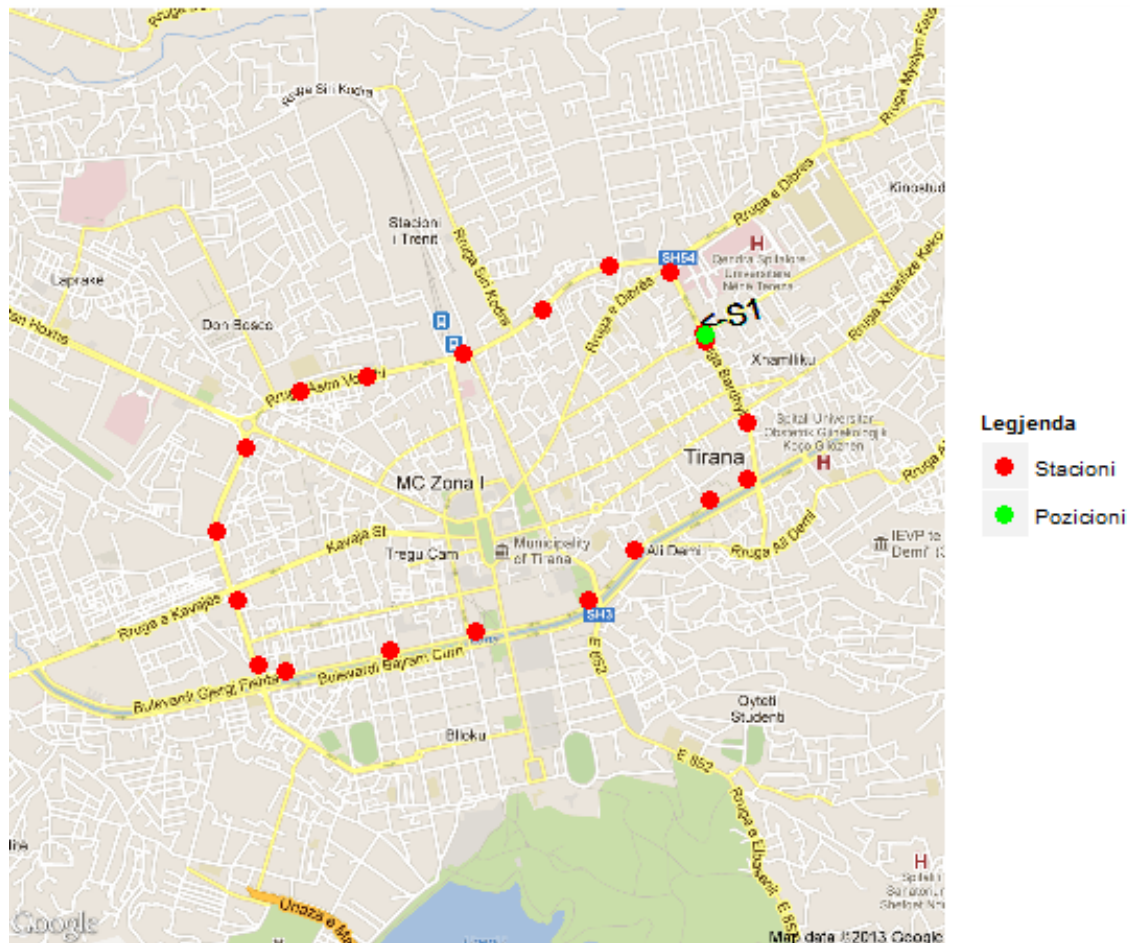


Figura 6.28: Pozicioni 15-Simulimi normal



KONKLUSIONE DHE REKOMANDIME

7.1 Rezultatet e punës

Në këtë punim, ndërtuam dhe analizuam një model matematiko-statistik duke përdorur metodat e simulimit dhe teknikat GIS të funksionimit të sistemit real. Si sistem real për të ilustruar idetë e procesit të modelimit, u përdor një linjë transporti urban. Fillimisht përcaktuam proceset më thelbësorë që ndikojnë në funksionimin e sistemit real. Në shembullin tonë këto parametra varen thellesisht nga faktorë të rastit. Për ndërtimin e modelit, kemi kryer vërtetime dhe kemi mbledhur të dhëna në 3 stacione të njëpasnjëshme të linjës urbane të unazës . Për mbledhjen e këtyre të

dhënave u krijua metodologjia përkatëse, duke marrë parasysh karakteristikat dhe kufizimet që kanë pjesë të caktuara të linjës urbane. Duke u bazuar në vëzhgimet dhe në argumentet teorike ndërtuam hipotezën statistikore se procesi i mbërritjes të pasagjerëve në stacion ndjek modelin Puason kurse procesi i shërbimit të pasagjerëve ndjek modelin normal. Për kontrollin e hipotezave përdorëm teste të ndryshme statistikore duke argumentuar dobinë dhe kufizimet e tyre në rastin konkret të përdorëm. Nga ligjet probabilitare që zgjodhëm për proceset e rastit , gjeneruam madhësi të rastit që ndihmojnë në funksionimin e modelit. Për gjenerimin e të madhësive të rastit Puason dhe atyre normale ndërtuam në gjuhën R procedurat e nevojshme duke u bazuar në algoritmet ekzistuese të propozuara në literaturë.

Krahasuam të dhënat e gjeneruara me të dhënat reale me ndihmën e testeve grafike dhe atyre statistikore dhe arritëm në përfundimin se të dhënat e gjeneruara plotësojnë kushtet për përdorim në ndërtimin e sistemit. Për gjenerimin e të madhësive të rastit Puason përdorëm dy algoritme të ndryshme dhe me ndihmën e testeve grafike dhe statistikore arritëm në konkluzionin se njëri prej tyre performon më mirë për shembullin që po studiojmë. Për procesin e shërbimit, duke përdorur të dhënat e gjeneruara arritëm në konkluzionin se modeli normal i propozuar në studim është më i përshtatshëm në shembullin që po studiojmë krahasuar me modelin Puason që gjithashtu përmendet në literaturën ekzistuese. Kemi realizuar paraqitjen vizuale të pozicioneve të autobusëve në momentet kohore të llogaritura me ndihmën

e modelit matematik të ndërtuar në punim. Për këtë qëllim kemi realizuar një kombinim të metodave GIS me mundësitë e ofruara nga gjuha statistikore R. Duke përdorur këto teknologji relativisht të reja, kemi krahasuar shkallën e performancës të modelit normal që propozohet në punim kundrejt modelit Puason. Kemi arritur në konkluzionin se për shembullin konkret që studiojmë modeli normal është më i përshtatshëm për përshkrimin e kohës të shërbimit.

7.2 Rekomandime për kërkime të mëtejshme

Pavarësisht sistemit që kemi zgjedhur për ilustrim, punimi ka për qëllim ilustrimin e procesit të modelimit. Në këtë drejtim punimi mund të përdoret si një pikë fillimi për studime të sistemeve të tjera ku faktorët e rastit kanë një rol përcaktues. Modelet e propozuara në punim janë të ndjeshme ndaj sasisë të të dhënave. Një numër më i madh të dhënash mund të sjellë nevojën e përdorimit të modeleve të tjera për të përshkruar procesin e mbërritjes dhe shërbimit. Në këtë punim u studiuan vetëm disa prej faktorëve të rastit që ndikojnë në funksionalitetin e sistemit. Përcaktimi i faktorëve të tjerë dhe studimi i detajuar i tyre rrit saktësinë e modelit dhe si rrjedhim përmirëson funksionalitetin e sistemit real. Teknikat GIS, në rastin e transportit urban, mundësojnë përdorimin në të ardhmen të sistemeve bashkëkohore satelitore GPS dhe GALILEO. Këto sisteme kohë reale dërgojnë në qendrën e kontrollit

koordinatat e vendndodhjes të automjetit. Në këtë mënyrë pozicioni i autobusit është më i saktë dhe mundësohet marrja e informacionit për shërbimin në momentin e kërkuar. Vizualizimi i të dhënave është kthyer tashmë në një domosdoshmëri të kohës. Mundësitë GIS që ofron gjuha statistikore R janë teknologji relativisht të reja që po testohen dhe përmirësohen dita ditës. Kërkimi i mëtejëm dhe eksperimentimi në këto teknologji premtan për rezultate mjaft të mira.

Literatura

- [1] ANSCOMBE, F., AND GLYNN, W. Distribution of kurtosis statistic for normal statistics. *Biometrika* 70(1) (1983), 227–234.
- [2] BARKER, E., AND KELSEY, J. Recommendation for random number generation using deterministic random bit generators.

[http : //csrc.nist.gov/publications/nistpubs/800 – 90A/SP800 – 90A.pdf](http://csrc.nist.gov/publications/nistpubs/800-90A/SP800-90A.pdf),

2012.
- [3] B.J.LEMESHKO, AND S.B.LEMESHKO. Comparative analysis of criteria for testing deviation of the distribution from the normal law. *Metrologia* 2 (2005), 3–24. (in russian).
- [4] BOLSHEV, L. N., AND SMIRNOV, V. N. *Mathematical Statistical Tables*. Nauka, Moscow,Russia, 1983. (in russian).

- [5] CAFFO, B. Methods in biostatistics. <http://www.biostat.jhsph.edu/~bcaffo/651/files/lecture11.pdf>, 2007.
- [6] CORPORATION, R. A million random digits with 100,000 normal deviates. http://www.rand.org/pubs/monograph_reports/MR1418, 2001. Ekziston dhe në formë të printuar.
- [7] D'AGOSTINO, RALPH B., A. B. R. B. D. J. A suggestion for using powerful and informative tests of normality. *The American Statistician* 44 (1990).
- [8] D'AGOSTINO, R. Transformation to normality of the null distribution of g_1 . *Biometrika* 57 (1970), 679–681.
- [9] D'AGOSTINO, R. B., AND PEARSON, E. A further development of tests for normality. *Biometrika* 22(1–2) (1930), 239–249.
- [10] D'AGOSTINO, R. B., AND PEARSON, E. A further development of tests departure from normality. empirical results for the distributions of $\sqrt{b_1}$ and β_2 . *Biometrika* 60 (1973), 613–622.
- [11] DAHIYA, R. C., AND J., G. How many classes in the pearson chi-square test? *Journal of the American Statistical Association* 68 (1973), 678–689.

- [12] DUDLEY, R. The shapiro–wilk test for normality.
<http://math.mit.edu/~rmd/465/shapiro.pdf>, publisher =
Massachusetts Institute of Technology, 2012.
- [13] E.A.DENISKINA, AND P.E.KOLLOMYEC. Statistical analysis:
Guidelines for calculation works. *Samara State Aerospace University named
after academician S.P. Korolev* (2004), 13–22. (In Russian).
- [14] G.K.KANJI. *100 Statistical Tests*. SAGE Publications Ltd, 2006.
- [15] GROSS, J. Tests for normality. [http:](http://cran.r-project.org/web/packages/nortest/nortest.pdf)
[//cran.r-project.org/web/packages/nortest/nortest.pdf](http://cran.r-project.org/web/packages/nortest/nortest.pdf),
2012. Package "nortest".
- [16] HAIN, J. Comparison of common tests for normality.
[http://www.statistik-mathematik.uni-wuerzburg.de/](http://www.statistik-mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040800/user_upload/hain/da_hain_final.pdf)
[fileadmin/10040800/user_upload/hain/da_hain_final.pdf](http://www.statistik-mathematik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/10040800/user_upload/hain/da_hain_final.pdf),
2010.
- [17] HENDERSON, A. Testing experimental data for univariate normality.
Clinica Chimica Acta 366 (2006), 122–129.
- [18] HINES, W. W., AND MONTGOMERY, D. C. *Probability and Statistics
in Engineering and Managment Science*. John Wiley and Sons, Inc, 1980.

- [19] JARQUE, C. M., AND BERA, A. K. A test for normality of observations and regression residuals. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique* 55(2) (1987), 163–172.
- [20] KAHLE, D., AND WICKHAM, H. ggmap: Spatial visualization with ggplot2. *The R Journal* (2013).
- [21] LAW, A. M., AND KELTON, D. M. *Simulation Modeling and Analysis*. McGraw-Hill Higher Education, 2007.
- [22] LEKA, S. *Teoria e Probabiliteteve dhe Statistika Matematike*. shblu, Tirana, Albania, 2004.
- [23] LOMONT, C. Random number generation.
http://www.lomont.org/Math/Papers/2008/Lomont_PRNG_2008.pdf, 2008. online.
- [24] LOONEY, S. W. How to use tests for univariate normality to assess multivariate normality. *American Statistician* 49 (1995), 64–70.
- [25] O. JONES, R. M., AND ROBINSON, A. *Introduction to Scientific Programming and Simulation Using R*. Chapman and Hall/CRC the R Series, 2009.

- [26] PASUPATHY, R. Generating homogeneous poisson processes. *Wiley Encyclopedia of Operations Research and Management Science* (2011).
- [27] R.AKCHELIK, AND E.CHUNG. Calibration of the bunched exponential distribution of arrival headways. *Road and Transport Research* 3 (1994), 42–59.
- [28] ROBERT J. HIJMANS, E. W., AND VENNES, C. geosphere: Spherical trigonometry. <http://cran.r-project.org/web/packages/geosphere/geosphere.pdf>, 2012. online.
- [29] ROSS, S. M. *Simulation, Fifth Edition*. Academic Press, 2012.
- [30] SHAPIRO, S. S., AND FRANCIA, R. S. An approximate analysis of variance test for normality. *Journal of the American Statistical Association* 67 (1972), 215–216.
- [31] SHAPIRO, S. S., AND WILK, M. B. An analysis of variance test for normality (complete samples). *Biometrika* 52(3,4) (1965), 591–611.
- [32] STEPHENS, M. A. Use of the kolmogorov-smirnov, cramer-von mises and related statistics without extensive tables. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)* 32(1) (1970), 115–122.

- [33] TOTTON, N., AND WHITE, P. The ubiquitous mythical normal distribution. <http://www.nbt.nhs.uk/sites/default/files/filedepot/incoming/Normal%20Distribution.pdf>, 2011.
- [34] WICKHAM, H., AND CHANG, W. ggplot2: An implementation of the grammar of graphics. <http://cran.r-project.org/web/packages/ggplot2/ggplot2.pdf>, 2013. online.
- [35] WILKINSON, AND TASK FORCE ON STATISTICAL INFERENCE, A. B. O. S. A. Statistical methods in psychology journals: Guidelines and explanations. *American Psychologist* 54 (1999).

Shtojca

Shtojca **A**

Të dhënat për mbërritjen e autobusëve

Tabela A.1: Të dhënat për mbërritjen e autobusëve

Matja	Mbrritja S1	Qëndrimi S1	Nisja S1	Mbrritja S2	Qëndrimi S2	Nisja S2	Mbrritja S3	Qëndrimi S3	Nisja S3
1	7:00:00	01:06	7:01:06	7:07:35	01:28	7:09:03	7:13:31	00:58	7:16:35
1	7:01:28	01:24	7:02:52	7:12:32	02:16	7:14:48	7:21:05	01:32	7:23:57
1	7:03:23	01:55	7:05:18	7:09:40	01:40	7:11:20	7:17:58	00:47	7:22:03
1	7:06:56	01:18	7:08:14	7:14:34	00:51	7:15:25	7:21:17	00:22	7:22:34
1	7:12:45	01:54	7:14:39	7:18:33	02:28	7:21:01	7:27:27	00:28	7:29:56
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
2	7:00:00	00:31	7:00:31	7:03:57	02:32	7:06:29	7:11:55	00:52	7:13:33
2	7:03:40	00:24	7:04:04	7:09:37	02:41	7:12:18	7:16:12	00:22	7:18:20
2	7:07:46	00:58	7:08:44	7:13:58	02:13	7:16:11	7:20:40	01:38	7:23:59
2	7:11:13	00:30	7:11:43	7:19:36	01:41	7:21:17	7:28:11	01:35	7:32:45
2	7:18:43	00:54	7:19:37	7:27:41	04:06	7:31:47	7:36:52	01:24	7:38:28
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
3	7:00:00	01:38	7:01:38	7:07:17	02:20	7:09:37	7:13:47	01:31	7:17:41
3	7:04:12	02:01	7:06:13	7:12:51	01:28	7:14:19	7:18:06	01:58	7:19:12
3	7:05:04	01:43	7:06:47	7:12:05	00:58	7:13:03	7:17:44	01:32	7:19:47
3	7:09:11	03:11	7:12:22	7:16:38	01:18	7:17:56	7:24:49	01:21	7:26:12
3	7:09:48	02:11	7:11:59	7:18:26	03:23	7:21:49	7:25:45	03:14	7:29:03
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
4	7:00:00	01:15	7:01:15	7:05:22	01:18	7:06:40	7:12:18	02:10	7:14:45
4	7:04:22	01:52	7:06:14	7:14:04	03:25	7:17:29	7:22:32	00:43	7:24:54
4	7:06:27	05:03	7:11:30	7:16:51	00:37	7:17:28	7:21:53	00:58	7:24:20
4	7:09:54	01:28	7:11:22	7:18:39	03:33	7:22:12	7:29:05	02:14	7:32:19
4	7:19:15	02:48	7:22:03	7:27:15	02:25	7:29:40	7:37:57	00:41	7:38:41
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
5	7:00:00	03:06	7:03:06	7:07:00	01:40	7:08:40	7:14:34	02:14	7:16:14
5	7:07:02	01:01	7:08:03	7:11:46	02:00	7:13:46	7:19:26	00:56	7:22:36
5	7:13:00	02:17	7:15:17	7:19:50	06:27	7:26:17	7:33:10	00:38	7:36:38
5	7:16:23	02:45	7:19:08	7:24:13	02:49	7:27:02	7:34:26	01:27	7:38:59
5	7:18:05	01:31	7:19:36	7:23:59	03:17	7:27:16	7:33:45	01:45	7:36:40

Shtojca **B**

Të dhënat për mbërritjen e pasagjerëve

izf

Tabela B.1: Të dhënat për mbërritjen e pasagjerëve

Matja	Stacioni S1		Stacioni S2		Stacioni S3	
	Çasti i mbërritjes	Nr.pasagjerëve	Çasti i mbërritjes	Nr.pasagjerëve	Çasti i mbërritjes	Nr.pasagjerëve
1	7:00	4	7:00	3	7:00	4
2	7:01	7	7:01	3	7:01	5
3	7:02	1	7:02	3	7:02	1
4	7:03	5	7:03	3	7:03	5
5	7:04	1	7:04	4	7:04	1
...	...	...	...	...	...	...
30	7:25	4	7:25	6	7:25	4
31	7:26	3	7:26	5	7:26	8
32	7:27	4	7:27	4	7:27	4
33	7:28	2	7:28	3	7:28	2
34	7:29	5	7:29	7	7:29	5
35	7:30	3	7:30	7	7:30	3
...	...	...	...	...	...	...
50	7:42	3	7:42	4	7:42	3
51	7:43	2	7:43	5	7:43	2
52	7:44	0	7:44	3	7:44	0
53	7:45	3	7:45	4	7:45	3
54	7:46	5	7:46	8	7:46	5
55	7:47	2	7:47	4	7:47	2
...	...	...	...	...	...	...
81	8:15	2	8:15	3	8:15	2
82	8:16	2	8:16	7	8:16	2
83	8:17	3	8:17	1	8:17	3
84	8:18	5	8:18	3	8:18	5
85	8:19	9	8:19	6	8:19	9
...	...	...	...	...	...	...
117	8:57	3	8:57	5	8:57	3
118	8:58	7	8:58	1	8:58	7
119	8:59	2	8:59	3	8:59	2
120	9:00	3	9:00	1	9:00	3



Grupimi i të dhënave për mbërritjet

Grupimi i të dhënave për mbërritjet e autobusëve Le të jetë T ndryshorja e rastit me ligj probabilitar të panjohur.

Shënojmë $T_1, T_2, \dots, T_n$ zgjedhjen me vëllim $N = 144$ të nxjerrë nga popullimi Ω ku është përcaktuar ndryshorja e rastit T .

Le të jenë $t_1, t_2, \dots, t_k$ intervalet kohore midis dy mbërritjeve të njëpasnjëshme të autobusit në stacionin S2. Këto vlera janë paraqitur në Aneksin A. Amplituda $R = t_{max} - t_{min} = 7.3233$ ndahet në k -klasa (intervale) me ndihmën e pikave $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$ ku klasa e i -të ($\forall i = \overline{1, k}$) ka gjatësinë $\Delta Z_i = Z_i - Z_{i-1}$.

Për lehtësi gjatësitë $\Delta Z_i = Z_i - Z_{i-1} = 0.959$ merren të barabartë dhe numri $k = 9$ i intervaleve llogaritet me formulën e Stirxhisit $k = [\log_2(n) + 1]$. Intervalet dhe denduritë absolute të të dhënave për intervalet kohore të vrojtuar, midis dy mbërritjeve

të njëpasnjëshme të autobusit në stacionin S2 paraqiten në tabelën C1. Ndjekim të njëjtën metodologji për intervalet kohore të vrojtuar T_{S3} . Për këto intervale $R = t_{max} - t_{min} = 5.4309$ kurse $\Delta Z_i = Z_i - Z_{i-1} = 0.711$. Do kemi $k = 9$ intervale. Intervalet dhe denduritë absolute të të dhënave për intervalet kohore të vrojtuar T_{S3} paraqiten në tabelën C2.

Tabela C.1: Tabela e grupimit të të dhënave për intervalet kohore T_{S2}

Numri i intervaleve i	x_i	x_{i+1}	Denduria m_i	$f_i = \frac{m_i}{n}$
1	2.388	3.285	8	0.016585
2	3.285	4.182	15	0.022813
3	4.182	5.079	24	0.029041
4	5.079	5.976	39	0.035269
5	5.976	6.872	26	0.041497
6	6.872	7.769	14	0.047725
7	7.769	8.666	15	0.053953
8	8.666	9.563	1	0.060181
9	9.563	10.460	2	0.066409

Intervalet dhe denduritë absolute të të dhënave për intervalet kohore të vrojtuarat T_{S3} paraqiten në tabelën C2.

Tabela C.2: Tabela e grupimit të të dhënave për intervalet kohore T_{S3}

Numri i intervaleve i	x_i	x_{i+1}	Denduria m_i	$f_i = \frac{m_i}{n}$
1	2.936	3.601	3	0.020833
2	3.601	4.266	18	0.125
3	4.266	4.931	16	0.111111
4	4.931	5.596	25	0.173611
5	5.596	6.261	22	0.152778
6	6.261	6.926	26	0.180556
7	6.926	7.591	21	0.145833
8	7.591	8.257	9	0.0625
9	8.257	8.922	4	0.027778

Grupimi i të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve Le të jetë X ndryshorja e rastit me ligj probabilitar të panjohur.

Shënojmë $X_1, X_2, \dots, X_n$ zgjedhjen me vëllim $N = 144$ të nxjerrë nga popullimi Ω ku është përcaktuar ndryshorja e rastit X .

Le të jenë $x_1, x_2, \dots, x_k$ numri i pasagjerëve që mbërrin në stacionin S1. Këto vlera janë paraqitur në Aneksin B. Duke ndjekur metodologjinë e më sipërme ndërtojmë tabelat e grupimit të të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve në stacionet S1, S2, S3. Të dhënat e grupuara janë paraqitur përkatësisht në tabelat C3, C4, C5.

Tabela C.3: Tabela e grupimit të të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve në S1

Numri i intervaleve i	x_i	x_{i+1}	Denduria m_i	$f_i = \frac{m_i}{n}$
1	-0.5	0.5	1	0.008333
2	0.5	1.5	12	0.1
3	1.5	2.5	22	0.183333
4	2.5	3.5	27	0.225
5	3.5	4.5	22	0.183333
6	4.5	5.5	14	0.116667
7	5.5	6.5	7	0.058333
8	6.5	7.5	5	0.041667
9	7.5	8.5	5	0.041667
10	8.5	9.5	5	0.041667

Tabela C.4: Tabela e grupimit të të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve në S2

Numri i intervaleve i	x_i	x_{i+1}	Denduria m_i	$f_i = \frac{m_i}{n}$
1	0.5	1.5	6	0.05
2	1.5	2.5	7	0.058333
3	2.5	3.5	28	0.233333
4	3.5	4.5	21	0.175
5	4.5	5.5	21	0.175
6	5.5	6.5	15	0.125
7	6.5	7.5	9	0.075
8	7.5	8.5	5	0.041667
9	8.5	9.5	5	0.041667
10	9.5	10.5	3	0.025

Tabela C.5: Tabela e grupimit të të dhënave për mbërritjet e pasagjerëve në S3

Numri i intervaleve i	x_i	x_{i+1}	Denduria m_i	$f_i = \frac{m_i}{n}$
1	-0.5	0.5	1	0.008333
2	0.5	1.5	12	0.1
3	1.5	2.5	22	0.183333
4	2.5	3.5	26	0.216667
5	3.5	4.5	24	0.2
6	4.5	5.5	15	0.125
7	5.5	6.5	7	0.058333
8	6.5	7.5	5	0.041667
9	7.5	8.5	4	0.033333
10	8.5	9.5	4	0.033333

Shtojca **D**

Metodat e vlerësimit pikësor

D.0.0.4.4 Vlerësimi pikësor për parametrat μ dhe σ^2 .

Metoda e përgjasisë maksimale[\[22\]](#)[\[4\]](#) Le të jenë $X_1 \dots X_n$ zgjedhje nga popullimi me shpërndarje $N(\mu, \sigma^2)$. Në këtë rast funksioni i përgjasisë maksimale është :

$$L(x_1 \dots x_n, \lambda, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}} \ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - n \ln \sigma - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \quad (\text{D.0.1})$$

Duke zgjidhur sistemin :

$$\begin{cases} \frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{cases} \quad (\text{D.0.2})$$

dhe llogarisim μ dhe σ^2 me formulat:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X} \quad (\text{D.0.3})$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 \quad (\text{D.0.4})$$

Metoda e momenteve[22] Shënojmë: $\nu_k = E(X^k)$ - momentin fillestar të rendit të k-të të popullimit $\nu'_k = E(X^k)$ - momentin fillestar të rendit të k-të të zgjedhjes $X_1 \dots X_n$ të nxjerrë nga popullimi Ω . Në qoftë se parametrat që do vlerësojmë janë $\Theta_1 \dots \Theta_r$ barazojmë r momentet fillestare të popullimit me ato të zgjedhjes dhe përftohet sistemi :

$$\nu_k = \nu'_k \quad k = 1, 2, \dots, r \quad (\text{D.0.5})$$

Duke zgjidhur këtë sistem gjejmë vlerësimet Θ_i ($i = 1, 2, \dots, r$) për parametrat e panjohur Θ_i . Për shpërndarjen normale $\tilde{\mu} = \bar{X}$ dhe $\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - n\bar{X})^2$

D.0.0.4.5 Vlerësimi pikësor për parametrin λ

Metoda e përgjasisë maksimale[\[22\]](#) Kemi $X \sim P(\lambda)$

me densitet $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$

Për zgjedhjen $X_1, \dots, X_n$ të nxjerrë nga ky popullim ndërtojmë funksionin e përgjasisë:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) &= \prod_{i=1}^n f(x_i, \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} \end{aligned}$$

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda) = n \ln \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

Duke zgjidhur ekuacionin :

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i = 0 \tag{D.0.6}$$

gjejmë:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\bar{X}} \tag{D.0.7}$$

Metoda e momenteve[22] Kemi $X \sim P(\lambda)$ me densitet $f(x, \lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x > 0$.

Për shpërndarjen Puason kemi $\theta_1 = \lambda$ pra marrim ekuacionin me një ndryshore ($k = 1$):

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= 0 + \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} \\ &= \lambda \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j e^{-\lambda}}{j!} = \lambda \end{aligned}$$

$$m_1 = \mu_1(\theta_1) \Leftrightarrow m_1 = E(X_1) \Leftrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \lambda \quad (\text{D.0.8})$$

pra

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X} \quad (\text{D.0.9})$$

Shtojca

E

Testi i kontrollit të asimetrisë duke

përdorur statistikën $\sqrt{b_1}$ dhe statistikën β_2

Tabela E.1: Tabelë ndihmëse për llogaritjen e momenteve(intervalet kohore T_{S2})

N	Xi	Mi	Xi*Mi	D*Mi	$D^2 * Mi$	$D^3 * Mi$	$D^4 * Mi$
1	2.84	8	22.69332563	-23.16	67.08	-194.229	562.41
2	3.80	19	72.10907723	-36.80	71.29	-138.098	267.51
3	4.75	27	128.3516139	-26.42	25.85	-25.2971	24.75
4	5.71	37	211.3555575	-0.74	0.01	-0.00029	0.00
5	6.67	25	166.7715313	23.46	22.02	20.67058	19.40
6	7.63	20	152.5882028	37.94	71.98	136.5589	259.07
7	8.59	6	51.52775416	17.13	48.93	139.7264	399.01
8	9.55	1	9.546507913	3.81	14.55	55.49057	211.65
9	10.51	1	10.5050568	4.77	22.78	108.7208	518.90
Total		144	825.4486273	0.00	344.50	103.54	2262.71

SHTOJCA E. TESTI I KONTROLLIT TË ASIMETRISË DUKE PËRDORUR
STATISTIKËN $\sqrt{B_1}$ DHE STATISTIKËN β_2

Tabela E.2: Momentet qendrorë dhe statistikat $\sqrt{b_1}$, b_2 për ligjin probabilitar të zgjedhjes(intervalet kohore T_{S2})

$\bar{x}$	5.73
μ_1	0.00
μ_2	2.39
μ_3	0.72
μ_4	15.71
$\sqrt{b_1}$	0.1943217
b_2	3.048707

Tabela E.3: Tabelë ndihmëse për llogaritjen e momenteve(intervalet kohore T_{S3})

N	Xi	Mi	Xi*Mi	D*Mi	$D^2 * Mi$	$D^3 * Mi$	$D^4 * Mi$
1	3.27	3	9.8051465	-7.73	19.92	-51.3339	132.28
2	3.98	21	83.564167	-39.19	73.12	-136.448	254.61
3	4.69	16	75.041758	-18.48	21.35	-24.6626	28.49
4	5.40	31	167.43019	-13.77	6.12	-2.7187	1.21
5	6.11	23	140.57227	6.13	1.63	0.435693	0.12
6	6.82	25	170.56754	24.44	23.88	23.34573	22.82
7	7.53	17	128.07061	28.70	48.46	81.80862	138.12
8	8.24	7	57.711004	16.79	40.29	96.6671	231.92
9	8.96	1	8.9552931	3.11	9.67	30.08108	93.55
Total		144	841.71797	0.00	244.45	17.18	903.12

Tabela E.4: Momentet qendrorë dhe statistikat $\sqrt{b_1}$, b_2 për ligjin probabilitar të zgjedhjes(intervalet kohore T_{S3})

$\bar{x}$	5.85
μ_1	0.00
μ_2	1.70
μ_3	0.12
μ_4	6.27
$\sqrt{b_1}$	0.053
b_2	2.1763

Shtojca **F**

Normimi i statistikave $\sqrt{\beta_1}$ dhe β_2 .

Llogaritja e statistikës K^2

Le të shohim disa nga metodat për normimin e $\sqrt{\beta_1}$. Në punimin [10] propozohet përafrimi:

$$\xi = \delta \ln(t + \sqrt{t^2 + 1}) \quad (\text{F.0.1})$$

ku $t = \frac{\sqrt{\beta_1}}{\lambda}$, për $n \rightarrow \infty$, ndjek ligjin normal të normuar. (σ dhe λ – koeficientë, vlerat e të cilave janë paraqitur në tabelën e mëposhtme F1:

Në [8] është propozuar një tjetër përafrim: Në qoftë se :

$$t = \sqrt{\beta_1} \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}} \quad (\text{F.0.2})$$

SHTOJCA F. NORMIMI I STATISTIKAVE $\sqrt{\beta_1}$ DHE β_2 . LLOGARITJA E
STATISTIKËS K^2

Tabela F.1: Tabela e koeficientëve δ dhe $1/\lambda$

n	δ	$1/\lambda$	n	δ	$1/\lambda$	n	δ	$1/\lambda$
8	5.5630	0.3030	44	3.117	0.9795	125	4.272	1.1250
9	4.2600	0.4080	45	3.131	0.9840	130	4.336	1.1285
10	3.7340	0.4794	46	3.160	0.9882	135	4.398	1.1318
11	3.4470	0.5839	47	3.161	0.9923	140	4.460	1.1348
12	3.2700	0.5781	48	3.176	0.9963	145	4.521	1.1377
13	3.1510	0.6153	49	3.192	1.0001	150	4.582	1.1403
14	3.0690	0.6743	50	3.207	1.0038	155	4.641	1.1428
15	3.0100	0.6753	52	3.237	1.0108	160	4.700	1.1452
16	2.9680	0.7001	54	3.268	1.0174	165	4.758	1.1474
17	2.9370	0.7224	56	3.298	1.0235	170	4.816	1.1496
18	2.9150	0.7426	58	3.329	1.0293	175	4.873	1.1516
19	2.9000	0.7610	60	3.359	1.0348	180	4.929	1.1535
20	2.8900	0.7779	62	3.389	1.0400	185	4.985	1.1553
21	2.8700	0.7940	64	3.420	1.0449	190	5.040	1.1570
22	2.8820	0.8078	66	3.450	1.0459	195	5.094	1.1586
23	2.8820	0.8211	68	3.480	1.0540	200	5.148	1.1602
24	2.8840	0.8336	70	3.510	1.0581	210	5.255	1.1631
25	2.8890	0.8452	72	3.540	1.0621	220	5.359	1.1657
26	2.8950	0.8561	74	3.569	1.0659	230	5.461	1.1681
27	2.9020	0.8664	76	3.599	1.0695	240	5.561	1.1704
28	2.9100	0.8760	78	3.628	1.0730	250	5.660	1.1724
29	2.9200	0.8851	80	3.657	1.0763	260	5.757	1.1744
30	2.9300	0.8938	82	3.686	1.0795	270	5.853	1.1761
31	2.9410	0.9020	84	3.715	1.0825	280	5.946	1.1779
32	2.9520	0.9097	86	3.744	1.0854	290	6.039	1.1793

Tabela F.2: Mesatarja dhe dispersioni i saktë dhe asimptotik për shpërndarjen e statistikës b_2

n	$E(b_2)$	$3 - E(b_2)$	$D(b_2)$	$24n^{-1}$	$24n^{-1} - D(b_2)$
25	2.76923	0.23077	0.53466	0.96	0.42534
50	2.88235	0.11765	0.35706	0.48	0.12294
100	2.94059	0.05941	0.20679	0.24	0.03321
150	2.96026	0.03974	0.14485	0.16	0.01515
250	2.9761	0.0239	0.09043	0.096	0.00557
500	2.98802	0.01198	0.04658	0.048	0.00142
1000	2.99401	0.00599	0.02364	0.024	0.00036
2500	2.9976	0.0024	0.00954	0.0096	0.00006
5000	2.9988	0.0012	0.00479	0.0048	0.00001

$$\tau = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n + 1)(n + 3)}{(n - 2)(n + 5)(n + 7)(n + 9)} \quad (\text{F.0.3})$$

$$\omega^2 = -1 + \sqrt{2(\tau - 1)} \quad (\text{F.0.4})$$

$$\delta = \sqrt{\ln(10)} \quad (\text{F.0.5})$$

$$\alpha = \left(\frac{2}{\omega^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{F.0.6})$$

atëherë madhësia

$$z = \delta \ln \left\{ \frac{t}{\alpha} \sqrt{\frac{t^2}{\alpha} + 1} \right\} \quad (\text{F.0.7})$$

i përafrohet shpërndarjes $N(0,1)$ për $n > 25$. Shpërndarja e statistikës $\beta_2 \sim \chi^2(f)$

për f-shkallë lirie kur :

$$f = 6 + \frac{8}{c} \left\{ \frac{2}{c} + \left(1 + \frac{4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (\text{F.0.8})$$

ku:

$$c = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n + 7)(n + 9)} \sqrt{\frac{6(n + 3)(n + 5)}{n(n - 2)(n - 3)}} \quad (\text{F.0.9})$$

Në [1] propozohet përafrimi për statistikën β_2 : Në qoftë se

$$t = \frac{\beta_2 - E(\beta_2)}{\sqrt{D(\beta_2)}} \quad (\text{F.0.10})$$

atëherë madhësia e rastit

$$d = \left[1 - \frac{2}{9f} - \left\{ \frac{1 - \frac{2}{f}}{1 + x\sqrt{\frac{2}{f-4}}} \right\}^{1/3} \right] \left(\frac{2}{9f} \right)^{-1/2} \quad (\text{F.0.11})$$

mund të përafrohet me shpërndarjen normale të normuar $N(0, 1)$

Normimi i statistikës $\sqrt{\beta_1}$ Nga llogaritjet e paraqitura në Shtojcën E (tabela E1 dhe E2), për intervalet kohore T_{S1} vlera e $\sqrt{\beta_1} = 0.1943217$ dhe $\beta_2 = 3.048707$.

$$D(\sqrt{\beta_1}) = \frac{6(n - 2)}{(n + 1)(n + 3)} \approx \frac{6}{n} \left(1 - \frac{12}{2n + 7} \right) = 0.03997 \quad (\text{F.0.12})$$

$$\sqrt{D(\sqrt{\beta_1})} = 0.1999 \quad (\text{F.0.13})$$

Kryejmë llogaritjet për transformimin ξ Nga tabela F1 për $N = 144$ gjejmë $\delta = 4.521$ dhe $\frac{1}{\lambda} = 1.1377$

$$\sqrt{D(\sqrt{\beta_1})} = 0.1999 \quad (\text{F.0.14})$$

Kemi :

$$t = \sqrt{\beta_1} \sqrt{\frac{(n+1)(n+3)}{6(n-2)}} = 0.9718 \quad (\text{F.0.15})$$

$$\tau = \frac{3(n^2 + 27n - 70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)} = 3.2120 \quad (\text{F.0.16})$$

$$\omega^2 = -1 + \sqrt{2(\tau - 1)} = 1.1033 \quad (\text{F.0.17})$$

$$\delta = \sqrt{\ln(10)} = 1.5174 \quad (\text{F.0.18})$$

$$\alpha = \left(\frac{2}{\omega^2 - 1}\right)^{\frac{1}{2}} = 4.4001 \quad (\text{F.0.19})$$

$$z = \delta \ln \left\{ \frac{t}{\alpha} \sqrt{\frac{t^2}{\alpha} + 1} \right\} = 0.3324 \quad (\text{F.0.20})$$

Në mënyrë të ngjashme vlera e normuar për statistikën $\sqrt{\beta_1}$ për intervalet kohore midis stacionit S2 dhe S3 do të jetë $z = 0.0120$ **Normimi i statistikës β_2**

$$E(\beta_2) = 3 - \frac{6}{n+1} = 2.9586 \quad (\text{F.0.21})$$

$$D(\beta_2) = 0.15093 \quad (\text{F.0.22})$$

$$\sqrt{D(\beta_2)} = 0.3884 \quad (\text{F.0.23})$$

$$c = \frac{6(n^2 - 5n + 2)}{(n+7)(n+9)} \sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}} = 1.1099 \quad (\text{F.0.24})$$

$$f = 6 + \frac{8}{c} \left\{ \frac{2}{c} + \left(1 + \frac{4}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \right\} = 33.8425 \quad (\text{F.0.25})$$

SHTOJCA F. NORMIMI I STATISTIKAVE $\sqrt{\beta_1}$ DHE β_2 . LLOGARITJA E
STATISTIKËS K^2

Pra shpërndarja e madhësisë $\beta_2 \sim \chi^2(f)$ për $f \approx 34$ -shkallë lirie dhe :

$$d = \left[1 - \frac{2}{9f} - \left\{ \frac{1 - \frac{2}{f}}{1 + x\sqrt{\frac{2}{f-4}}} \right\}^{1/3} \right] \left(\frac{2}{9f} \right)^{-1/2} = 0.0036 \quad (\text{F.0.26})$$

Në mënyrë të ngjashme vlera e normuar për statistikën β_2 për intervalet kohore midis stacionit S2 dhe S3 do të jetë $d = 0.0028$

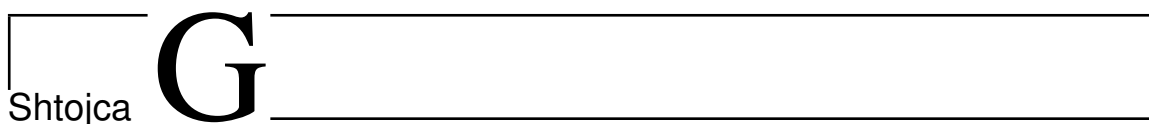
Tabela F.3: Kuantilet e shpërndarjes normale të normuar

Vlera p	Kuantili i rendit p	Vlera p	Kuantili i rendit p
0.01	-2.32635	0.60	0.25335
0.03	-1.95996	0.70	0.52440
0.05	-1.64485	0.80	0.84162
0.10	-1.28155	0.90	1.28155
0.30	-0.52440	0.95	1.64485
0.40	-0.25335	0.98	1.95996
0.50	0.00000	0.99	2.32635

SHTOJCA F. NORMIMI I STATISTIKAVE $\sqrt{\beta_1}$ DHE β_2 . LLOGARITJA E
STATISTIKËS K^2

Tabela F.4: Tabela e shpërndarjes X^2

f / P	0.01	0.05	0.1	0.9	0.95	0.99
1	0	0	0.02	2.71	3.84	6.63
2	0.02	0.1	0.21	4.61	5.99	9.21
3	0.11	0.35	0.58	6.25	7.81	11.34
4	0.3	0.71	1.06	7.78	9.49	13.28
5	0.55	1.15	1.61	9.24	11.07	15.09
6	0.87	1.64	2.2	10.64	12.59	16.81
7	1.24	2.17	2.83	12.02	14.07	18.48
8	1.65	2.73	3.49	13.36	15.51	20.09
9	2.09	3.33	4.17	14.68	16.92	21.67
10	2.56	3.94	4.87	15.99	18.31	23.21
11	3.05	4.57	5.58	17.28	19.68	24.72
12	3.57	5.23	6.3	18.55	21.03	26.22
13	4.11	5.89	7.04	19.81	22.36	27.69
14	4.66	6.57	7.79	21.06	23.68	29.14
15	5.23	7.26	8.55	22.31	25	30.58
16	5.81	7.96	9.31	23.54	26.3	32
17	6.41	8.67	10.09	24.77	27.59	33.41
18	7.01	9.39	10.86	25.99	28.87	34.81
19	7.63	10.12	11.65	27.2	30.14	36.19
20	8.26	10.85	12.44	28.41	31.41	37.57



Llogaritja e testit Pirson për intervalet e lëvizjes të autobusëve

Llogaritjet për intervalet e lëvizjes të autobusëve Një nga kufizimet kryesore të testit Pirson është varësia e rezultatit të testit nga mënyra e grupimit të të dhënave. Përdorimi i mënyrave të ndryshme në përcaktimin e intervaleve mund të shpjerë në rezultate kontradiktore. Në studimin[11]është paraqitur një modifikim i testit Pirson. Ky modifikim përdoret për kontrollin e normalitetit kur parametrat e shpërndarjes vlerësohen nga të dhënat e pagrupuara. Pasi vlerësojmë parametrat e shpërndarjes normale, të dhënat ndahen në k-intervale me probabilitet të njëjtë $p_i = \frac{1}{k} = \textit{konstante}$.

SHTOJCA G. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR INTERVALET E LËVIZJES TË AUTOBUSËVE

Statistika e testit llogaritet me formulën :

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k m_i^2 - n \quad (\text{G.0.1})$$

ku n -vëllimi i zgjedhjes dhe m_i - denduria e të dhënave në intervalin i . Kufijtë e intervaleve llogariten:

$$\bar{x} + c_i s_i \quad (i = 0 \dots k) \quad (\text{G.0.2})$$

ku

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{G.0.3})$$

dhe

$$s = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (\text{G.0.4})$$

Vlerat e koeficientit c_i janë paraqitur në tabelën G1. Në qoftë se $\chi^2 > d_k(\alpha)$ ku $d_k(\alpha)$ është vlera kritike e statistikës për nivelin e rëndësisë α , hipoteza hidhet poshtë. Vlerat kritike $d_k(\alpha)$ janë paraqitur në tabelën G2. Do pranojmë $c_0 = -\infty$ dhe $c_k = +\infty$. Vlerat c_i janë simetrike në lidhje me 0, kështu që do llogarisim vlerat që mungojnë në tabelë me formulat:

Për k -numër tek:

$$c_{\frac{1}{2}(k-1)+i} = -c_{\frac{1}{2}(k-1)-i} \quad (i = 0 \dots \frac{k-1}{2}) \quad (\text{G.0.5})$$

SHTOJCA G. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR INTERVALET E
LËVIZJES TË AUTOBUSËVE

Tabela G.1: Vlerat e koeficientit c_i për testin e modifikuar të Pirsonit

k	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
3	-0.4307						
4	-0.6745	0					
5	-0.8416	0.02533					
6	-0.9674	-0.4307	0				
7	-1.0676	-0.5659	-0.18				
8	-1.1503	-0.6745	-0.3186	0			
9	-1.2206	-0.7647	-0.4307	-0.1397			
10	-1.2816	-0.8416	-0.5224	-0.2533	0		
11	-1.3352	-0.9085	-0.6046	-0.3488	-0.1142		
12	-1.383	-0.9674	-0.6745	-0.4307	-0.2194	0	
13	-1.4261	-1.0201	-0.7363	-0.5024	-0.2934	-0.0966	
14	-1.4652	-1.0676	-0.7916	-0.566	-0.3661	-0.18	0
15	-1.5011	-1.1108	-0.8416	-0.6229	-0.4307	-0.2533	-0.0837

Për k-numër çift:

$$c_{\frac{1}{2}(k+i)} = -c_{\frac{1}{2}(k-i)} \quad (i = 0 \dots \frac{k-2}{2}) \quad (\text{G.0.6})$$

Tabela G.2: Vlerat kritike për testin e modifikuar të Pirsonit

k	alfa		
	0.1	0.05	0.01
3	2.371	3.248	5.418
4	3.928	5.107	7.917
5	5.442	6.844	10.075
6	6.905	8.479	12.021
7	8.322	10.038	13.837
8	9.703	11.543	15.567
9	11.055	13.007	17.234

Për madhësinë e rastit T_{S2} kemi $\sigma^2 = 2.270$ dhe $\mu = 5.7144$. Përdorim $k = 10$

SHTOJCA G. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR INTERVALET E
LËVIZJES TË AUTOBUSËVE

intervale dhe nga tabela G1 llogarisim:

$$c_1 = -1.2816 \quad c_2 = -0.8416 \quad c_3 = -0.5244 \quad c_4 = -0.2533 \quad c_5 = 0 \quad c_6 = 0.2533$$

$$c_7 = 0.5244 \quad c_8 = 0.8416 \quad c_9 = 1.2816 \quad (\text{G.0.7})$$

Rezultatet e llogaritjeve i vendosim në tabelën G3:

Tabela G.3: Tabela e llogaritjes të testit të modifikuar χ^2 për T_{S2}

i	x_i	x_{i+1}	m_i	m_i^2
1	$-\infty$	3.434938	8	64
2	3.434938	4.227687	18	324
3	4.227687	4.799187	18	324
4	4.799187	5.287629	11	121
5	5.287629	5.744	24	576
6	5.744	6.200371	13	169
7	6.200371	6.688813	18	324
8	6.688813	7.260313	8	64
9	7.260313	8.053062	16	256
10	8.053062	$+\infty$	10	100

Statistika e kriterit është:

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k m_i^2 - n = 17.25 \quad (\text{G.0.8})$$

Për madhësinë e rastit T_{S3} kemi $\sigma^2 = 1.653$ dhe $\mu = 5.8582$. Në mënyrë të

SHTOJCA G. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR INTERVALET E
LËVIZJES TË AUTOBUSËVE

ngjashme ndërtojmë tabelën e llogaritjes të testit të modifikuar χ^2 .

Tabela G.4: Tabela e llogaritjes të testit të modifikuar χ^2 për T_{S3}

i	x_i	x_{i+1}	m_i	m_i^2
1	$-\infty$	4.21046	19	361
2	4.21046	4.776163	12	144
3	4.776163	5.183984	15	225
4	5.183984	5.532535	15	225
5	5.532535	5.8582	12	144
6	5.8582	6.183865	10	100
7	6.183865	6.532416	15	225
8	6.532416	6.940237	13	169
9	6.940237	7.50594	18	324
10	7.50594	$+\infty$	15	225

Statistika e kriterit është:

$$\chi^2 = \frac{k}{n} \sum_{i=1}^k m_i^2 - n = 4.74999 \quad (\text{G.0.9})$$

Shtojca **H**

Llogaritja e testit Pirson për mbërritjet e
pasagjerëve

SHTOJCA H. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR MBËRRITJET E PASAGJERËVE

Tabela H.1: Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S1

i	m_i	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	1	0.022185	2.6622	1.03784
1	12	0.084488	10.1386	0.34174
2	22	0.16088	19.3056	0.37605
3	27	0.204228	24.5074	0.25352
4	22	0.194442	23.3331	0.07616
5	14	0.1481	17.772	0.80059
6	7	0.094002	11.2803	1.62415
7	5	0.051142	6.137	0.21066
>=8	10	0.040532	4.8638	5.4237

Tabela H.2: Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S2

i	m_i	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	1	0.022185	2.6622	1.03784
1	12	0.084488	10.1386	0.34174
2	22	0.16088	19.3056	0.37605
3	27	0.204228	24.5074	0.25352
4	22	0.194442	23.3331	0.07616
5	14	0.1481	17.772	0.80059
6	7	0.094002	11.2803	1.62415
7	5	0.051142	6.137	0.21066
>=8	10	0.040532	4.8638	5.4237

Tabela H.3: Tabela e llogaritjes të testit Pirson për mbërritjet e pasagjerëve në S3

i	m_i	p_i	np_i	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	1	0.023518	2.8221	1.17647
1	12	0.088192	10.583	0.18973
2	22	0.165359	19.8431	0.23445
3	26	0.206699	24.8039	0.05768
4	24	0.19378	23.2536	0.02396
5	15	0.145335	17.4402	0.34143
6	7	0.090834	10.9001	1.39549
7	5	0.048661	5.8394	0.12065
>=8	8	0.037621	4.5146	2.69091

SHTOJCA H. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR MBËRRITJET E PASAGJERËVE

Figura H.1: Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S1

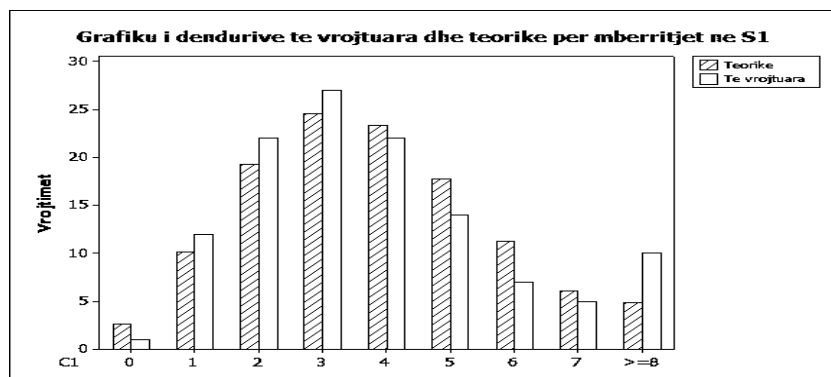
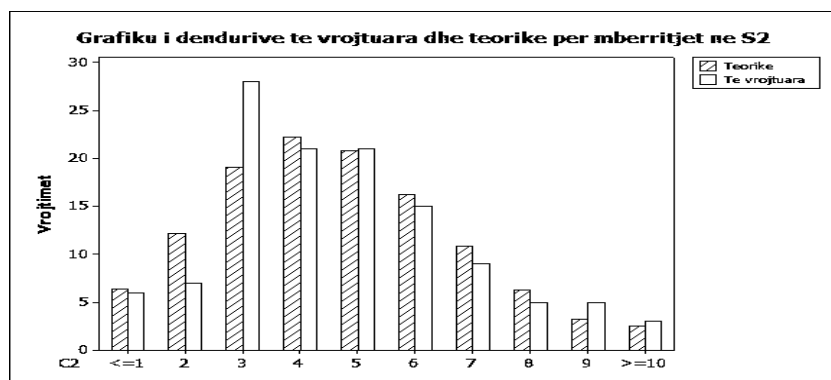


Figura H.2: Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S2



SHTOJCA H. LLOGARITJA E TESTIT PIRSON PËR MBËRRITJET E PASAGJERËVE

Figura H.3: Grafiku i dendurive të vrojtuar dhe teorike për mbërritjet në S3

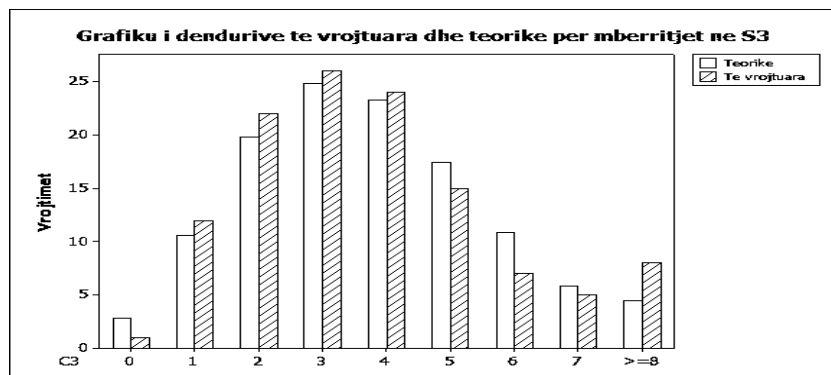


Tabela H.4: Tabela e shpërndarjes χ^2

$\frac{\alpha}{k}$	$\alpha = 0.9$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.1$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.01$
1	0.016	0.455	2.706	3.841	6.635
2	0.211	1.386	4.605	5.991	9.21
3	0.584	2.366	6.251	7.815	11.345
4	1.064	3.357	7.779	9.488	13.277
5	1.61	4.351	9.263	11.07	15.086
6	2.204	5.348	10.645	12.592	16.812
7	2.833	6.346	12.017	14.067	18.475
8	3.49	7.344	13.362	15.507	20.09

Shtojca **I**

Testi Kolmogorov-Smirnov

Për llogaritjen e statistikave D_n^+ dhe D_n^- në praktikë përdoren formulat:

$$D_n^+ = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\frac{i}{n} - \Phi(x) \right) \quad (\text{I.0.1})$$

$$D_n^- = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\Phi(x) - \frac{i-1}{n} \right) \quad (\text{I.0.2})$$

Për T_{S2} kemi:

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) = 0.050 \quad (\text{I.0.3})$$

Për T_{S3} kemi:

$$D_n = \max(D_n^+, D_n^-) = 0.068 \quad (\text{I.0.4})$$

Tabela I.1: Tabela e vlerave kritike për testin Kolmogorov-Smirnov

N (α)	Niveli i rëndësisë për $D_n = \sqrt{n} \max_x F_n(x) - F(x) $				
	0.2	0.15	0.1	0.05	0.01
1	0.9	0.925	0.95	0.975	0.995
2	0.684	0.726	0.776	0.842	0.929
3	0.565	0.597	0.642	0.708	0.828
4	0.494	0.525	0.564	0.624	0.733
5	0.446	0.474	0.51	0.565	0.669
6	0.41	0.436	0.47	0.521	0.618
7	0.381	0.405	0.438	0.486	0.577
8	0.358	0.381	0.411	0.457	0.543
9	0.339	0.36	0.388	0.432	0.514
10	0.322	0.342	0.368	0.41	0.49
11	0.307	0.326	0.352	0.391	0.468
12	0.295	0.313	0.338	0.375	0.45
13	0.284	0.302	0.325	0.361	0.433
14	0.274	0.292	0.314	0.349	0.418
15	0.266	0.283	0.304	0.338	0.404
16	0.258	0.274	0.295	0.328	0.392
17	0.25	0.266	0.286	0.318	0.381
18	0.244	0.259	0.278	0.309	0.371
19	0.237	0.252	0.272	0.301	0.363
20	0.231	0.246	0.264	0.294	0.356
25	0.21	0.22	0.24	0.27	0.32
30	0.19	0.2	0.22	0.24	0.29
35	0.18	0.19	0.21	0.23	0.27
> 35	$\frac{1.07}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.14}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Tabela I.2: Testi Kolmogorov-Smirnov për T_{S2}

i	x_i	z_i	$\Phi(z_i)$	$F(x)$	$F_n(x)$
1	6.482303	0.509693	0.694867	-0.68792	0.694867
2	9.669152	2.624951	0.995667	-0.98178	0.988722
3	4.352063	-0.90425	0.182932	-0.1621	0.169044
4	6.334024	0.411273	0.659564	-0.63179	0.63873
5	3.909953	-1.1977	0.115518	-0.0808	0.08774
6	7.803263	1.386475	0.917199	-0.87553	0.882477
7	7.246496	1.016923	0.845405	-0.79679	0.803738
8	8.322311	1.730991	0.958273	-0.90272	0.909662
9	7.399219	1.118292	0.868279	-0.80578	0.812723
10	5.888688	0.115683	0.546048	-0.4766	0.483548
11	8.085993	1.574136	0.942272	-0.86588	0.872828
12	5.63807	-0.05066	0.479797	-0.39646	0.403408
13	6.47434	0.504407	0.693012	-0.60273	0.609679
14	8.780771	2.035292	0.979089	-0.88187	0.888811
15	5.125243	-0.39105	0.34788	-0.24371	0.250658
16	5.584399	-0.08629	0.465619	-0.35451	0.361452
17	6.096136	0.253376	0.600011	-0.48196	0.4889
18	3.631945	-1.38222	0.083452	0.041548	-0.0346
19	6.488917	0.514082	0.696403	-0.56446	0.571403
20	5.967394	0.167924	0.566679	-0.42779	0.434734
21	6.010286	0.196393	0.577849	-0.43202	0.43896
22	6.39921	0.45454	0.67528	-0.5225	0.529447
23	5.130993	-0.38723	0.349291	-0.18957	0.196514
24	3.861211	-1.23005	0.10934	0.057327	-0.05038
...	...	...	...	...	...
130	5.222103	-0.32676	0.371925	0.530853	-0.52391
131	6.447251	0.486427	0.686668	0.223054	-0.21611
132	5.928386	0.142032	0.556473	0.360194	-0.35325
133	6.357828	0.427073	0.665337	0.258274	-0.25133
134	5.545189	-0.11231	0.455288	0.475268	-0.46832
135	3.5694	-1.42374	0.077262	0.860238	-0.85329
136	3.736126	-1.31307	0.094579	0.849865	-0.84292
137	5.438108	-0.18339	0.427247	0.524142	-0.5172
138	6.209967	0.328931	0.628896	0.329437	-0.32249
139	7.413303	1.12764	0.870264	0.095014	-0.08807
140	4.657533	-0.70149	0.241498	0.730724	-0.72378
141	6.47299	0.503511	0.692698	0.286469	-0.27952
142	7.936665	1.47502	0.929896	0.056215	-0.04927
143	5.486778	-0.15108	0.439955	0.5531	-0.54616
144	3.279047	-1.61646	0.052998	0.947002	-0.94006

Tabela I.3: Testi Kolmogorov-Smirnov për T_{S3}

i	x_i	z_i	$\Phi(z_i)$	$F(x)$	$F_n(x)$
1	4.473865	-0.8234	0.20514	-0.1982	0.20514
2	6.280698	0.375878	0.646496	-0.63261	0.639552
3	6.635944	0.611671	0.729622	-0.70879	0.715733
4	5.867035	0.101311	0.540348	-0.51257	0.519515
5	6.430954	0.47561	0.682824	-0.6481	0.655046
6	4.057227	-1.09994	0.135679	-0.09401	0.100956
7	3.938257	-1.17891	0.119217	-0.07061	0.077551
8	5.231447	-0.32056	0.374273	-0.31872	0.325662
9	5.550153	-0.10902	0.456594	-0.39409	0.401038
10	4.681317	-0.6857	0.24645	-0.17701	0.18395
11	4.898137	-0.54179	0.293981	-0.21759	0.224537
12	6.340551	0.415605	0.66115	-0.57782	0.584762
13	3.963236	-1.16233	0.122551	-0.03227	0.039218
14	5.783606	0.045935	0.518319	-0.4211	0.428041
15	5.022051	-0.45954	0.322922	-0.21876	0.225699
16	3.959781	-1.16462	0.122086	-0.01098	0.017919
17	7.349801	1.085491	0.861148	-0.74309	0.750037
18	8.558731	1.887914	0.970481	-0.84548	0.852426
19	5.638994	-0.05005	0.480041	-0.3481	0.355041
20	5.505306	-0.13879	0.44481	-0.30592	0.312866
21	3.710759	-1.32991	0.091774	0.054059	-0.04711
22	6.931074	0.807563	0.790329	-0.63755	0.644496
23	5.900722	0.123671	0.549212	-0.38949	0.396434
24	7.601961	1.252861	0.894872	-0.72821	0.73515
...	...	...	...	...	...
130	5.222103	-0.32676	0.371925	0.530853	-0.52391
131	6.447251	0.486427	0.686668	0.223054	-0.21611
132	5.928386	0.142032	0.556473	0.360194	-0.35325
133	6.357828	0.427073	0.665337	0.258274	-0.25133
134	5.545189	-0.11231	0.455288	0.475268	-0.46832
135	3.5694	-1.42374	0.077262	0.860238	-0.85329
136	3.736126	-1.31307	0.094579	0.849865	-0.84292
137	5.438108	-0.18339	0.427247	0.524142	-0.5172
138	6.209967	0.328931	0.628896	0.329437	-0.32249
139	7.413303	1.12764	0.870264	0.095014	-0.08807
140	4.657533	-0.70149	0.241498	0.730724	-0.72378
141	6.47299	0.503511	0.692698	0.286469	-0.27952
142	7.936665	1.47502	0.929896	0.056215	-0.04927
143	5.486778	-0.15108	0.439955	0.5531	-0.54616
144	3.279047	-1.61646	0.052998	0.947002	-0.94006

Shtojca **J**

Algoritmi Box-Muller dhe Metoda e
Koordinatave Polare

Algoritmi 1 Algoritmi Box–Muller

- 1: Hapi 1. Gjenerojmë $U_1 \sim (0, 1)$ dhe $U_2 \sim (0, 1)$.
 - 2: Hapi 2. $R^2 = -2\log U_1$ $\theta = 2\pi U_2$
 - 3: Hapi 3. Le të jetë : $X_1 = R\cos\theta = \sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2)$ $X_2 = R\sin\theta = \sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$
-

Algoritmi 2 Metoda e Koordinatave Polare

- 1: Hapi 1. Gjenerojmë $U_1 \sim (0, 1)$ dhe $U_2 \sim (0, 1)$ Le të jetë : $V_i = 2U_i - 1$ për $i = 1, 2$ dhe le të jetë $W = V_1^2 + V_2^2$
 - 2: Hapi 2. Në rastin kur $W > 1$, kthehemi në hapin 1. Në qoftë se $W < 1$ kemi :
 $Y = \sqrt{\frac{(-2\ln W)}{W}}$, $X_1 = V_1 Y$ dhe $X_2 = V_2 Y$
-

Shtojca **K**

Metodat e gjenerimit të proceseve të rastit

Puason

Algoritmi 3 Metoda e parë

- 1: Hapi 1. Fillojmë me $t = 0$.
 - 2: Hapi 2. Gjenerojmë $u \sim U(0, 1)$.
 - 3: Hapi 3. Vendosim $t \leftarrow t - \frac{1}{\lambda} \log(u)$.
 - 4: Hapi 4. Përftojme t .
 - 5: Hapi 5. Kthehemi në Hapin 1.
-

Algoritmi 4 Metoda e dytë

- 1: Hapi 1. Gjenerojmë $n \sim P(\lambda t)$.
 - 2: Hapi 2. Në qoftë se $n = 0$ dil nga programi. Në qoftë se $n \neq 0$ gjenerojmë $u_1 \sim U(0, 1), u_2 \sim U(0, 1) \dots u_n \sim U(0, 1)$ dhe i renditim sipas rendit rritës për të përftuar $u_1, u_2, \dots u_n$.
 - 3: Hapi 3. Vendosim $t_i \leftarrow t_{0u_i} \quad i = 1, 2, \dots n$.
 - 4: Hapi 4. Përftojmë $t_i \quad i = 1, 2, \dots, n$.
-

Listim K.1: Algoritmi i parë

```
rPoisson1 <- function (n, l, t0)
{
  t <- 0;
  int<-0;
  s<-0;
  while (s<=100)
  {
    u <- runif(1);
    t<-t-(1/l)*log(u);
    if (t<=t0)
      int<-c(int,t);
    s<-s+1;
  }
```

SHTOJCA K. METODAT E GJENERIMIT TË PROCESIVE TË RASTIT PUASON

```
int  
  
}
```

Listim K.2: Algoritmi i dytë

```
rPoisson2 <- function (l, t0)  
{  
  n <- rpois(1,l*t0);  
  int<-0;  
  for (i in 1:n)  
  {  
    u <- runif(1);  
    t<-t0*u;  
    int<-c(int,t);  
  }  
  d<-sort(int)  
  d  
}
```

Shtojca **L**

Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në
stacione

SHTOJCA L. SIMULIMI I MBËRRITJEVE TË PASAGJERËVE NË STACIONE

Figura L.1: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S1 -Algoritmi 1

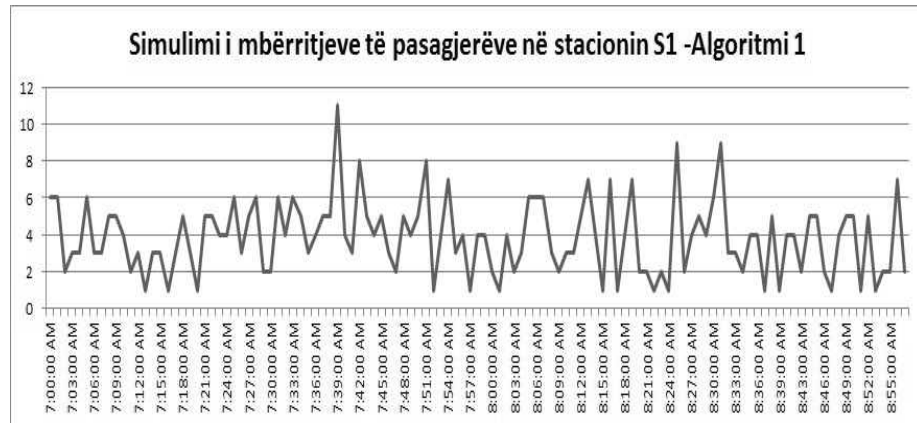
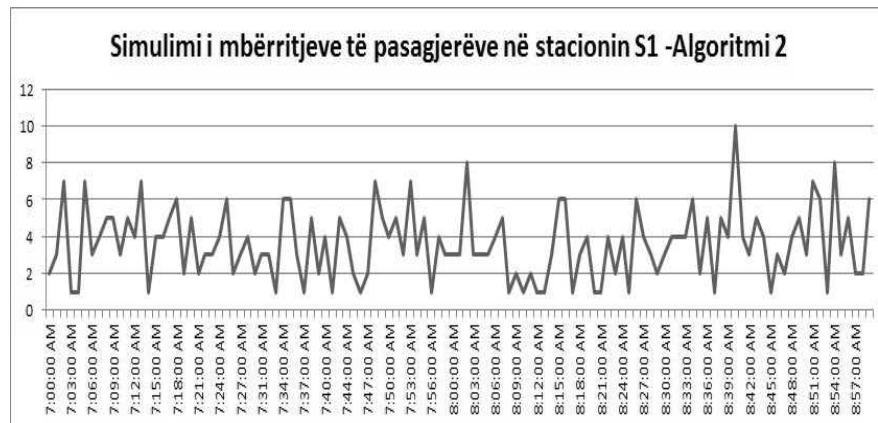


Figura L.2: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S1 -Algoritmi 2



SHTOJCA L. SIMULIMI I MBËRRITJEVE TË PASAGJERËVE NË STACIONE

Figura L.3: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S2 -Algoritmi 1

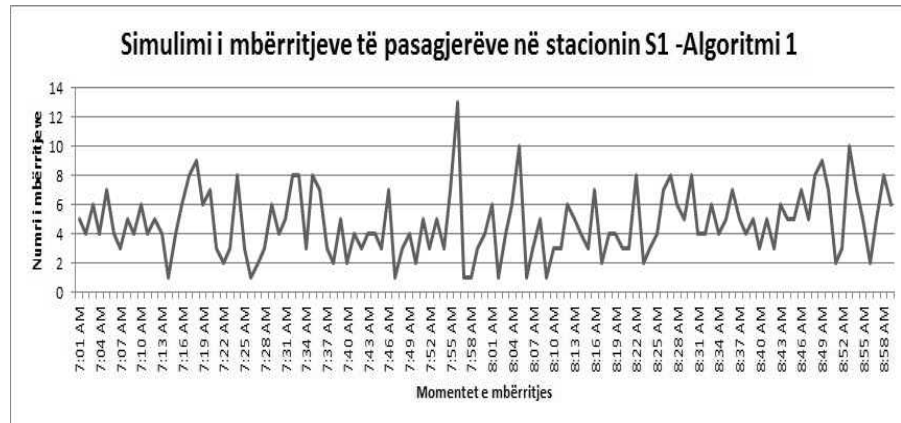
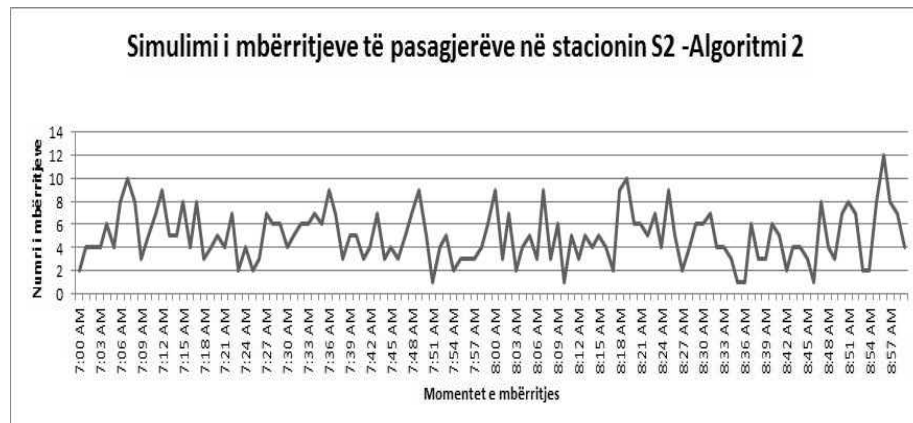


Figura L.4: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S2 -Algoritmi 2

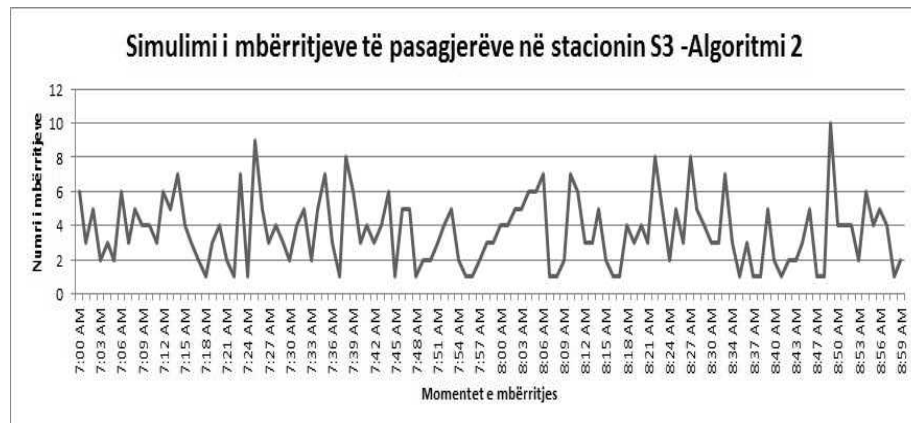


SHTOJCA L. SIMULIMI I MBËRRITJEVE TË PASAGJERËVE NË STACIONE

Figura L.5: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S3 -Algoritmi 1



Figura L.6: Simulimi i mbërritjeve të pasagjerëve në stacionin S3 -Algoritmi 2



Shtojca **M**

Simulimi i mbërritjeve të autobusëve

Figura M.1: Simulimi i mbërritjeve të autobusëve në stacionin S2

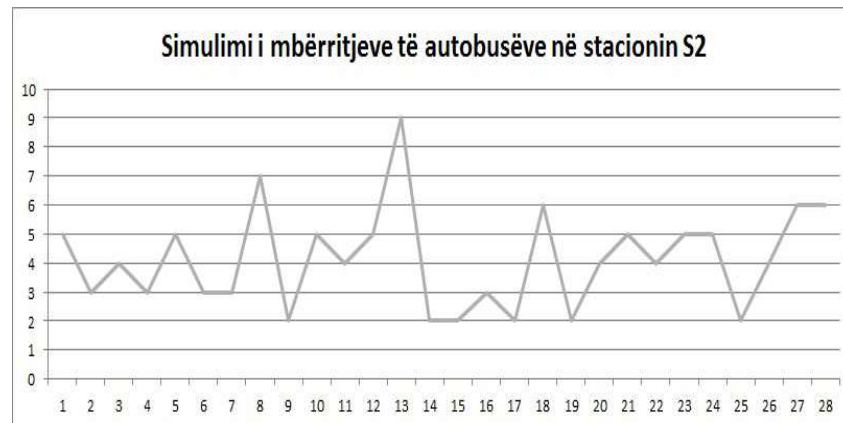
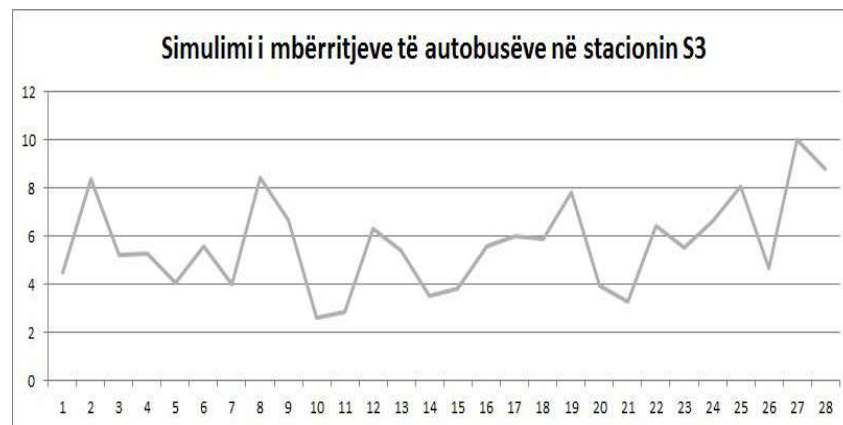


Figura M.2: Simulimi i mbërritjeve të autobusëve në stacionin S3

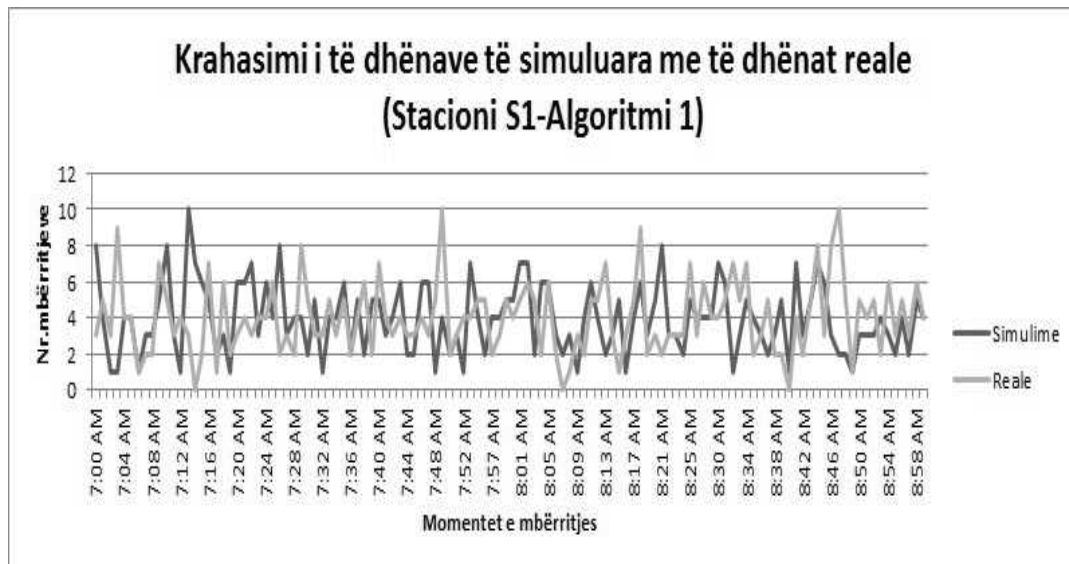


Shtojca **N**

Krahasimi i të dhënave të simuluar me të
dhënat reale për procesin e mbërritjes të
pasagjerëve

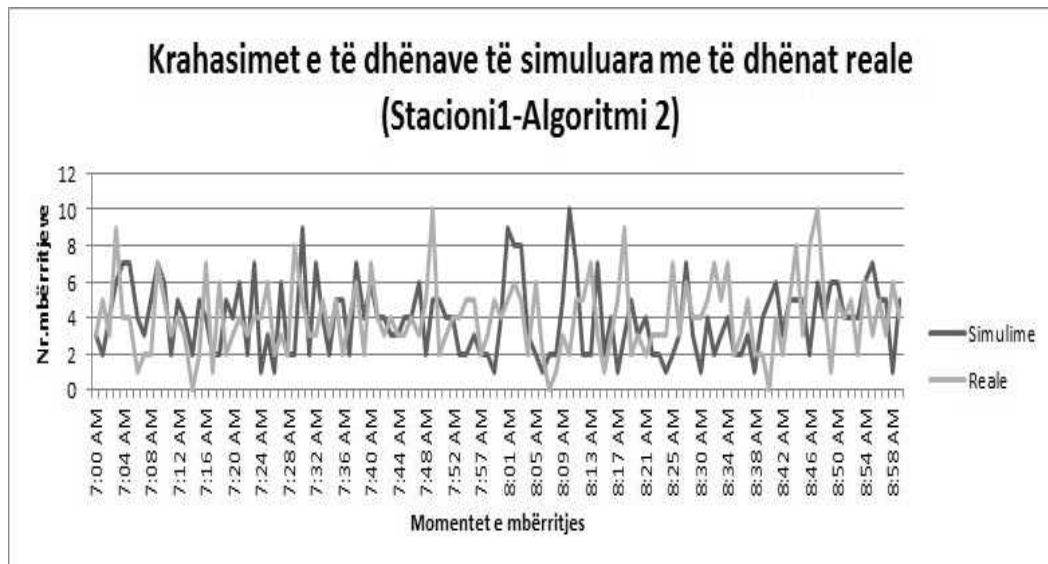
SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.1: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S1- Algoritmi 1)



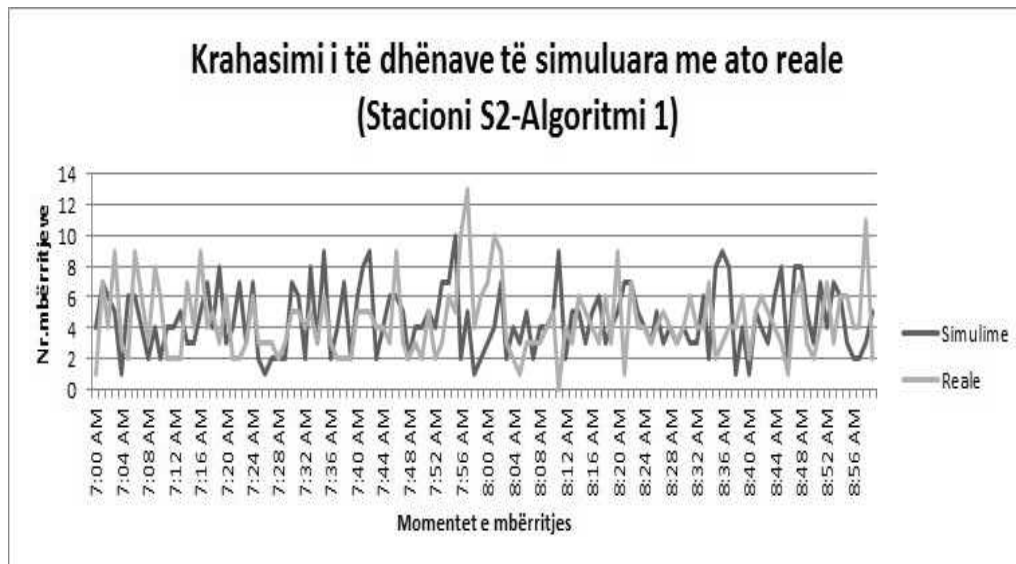
SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.2: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S1- Algoritmi 2)



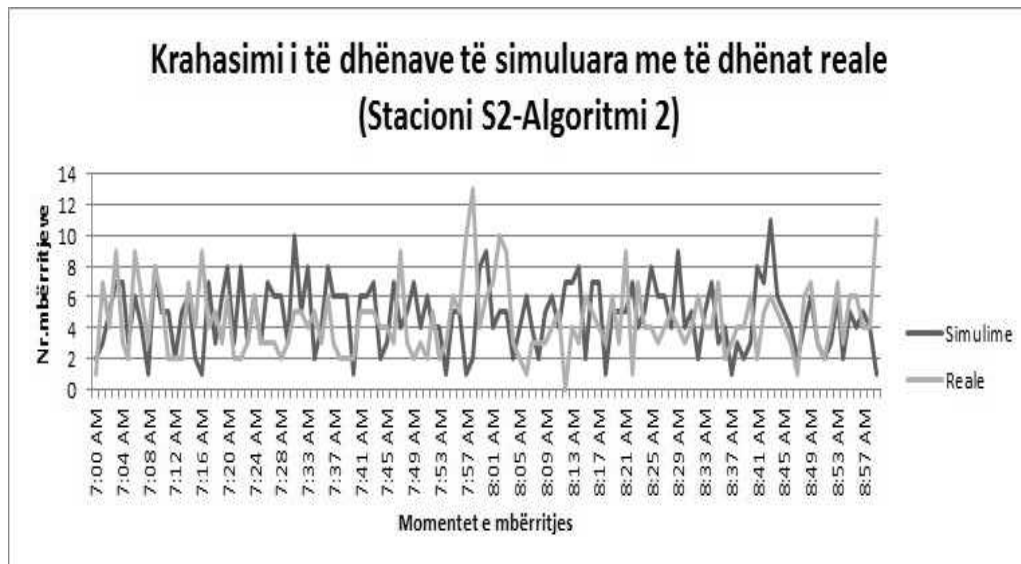
SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.3: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2- Algoritmi 1)



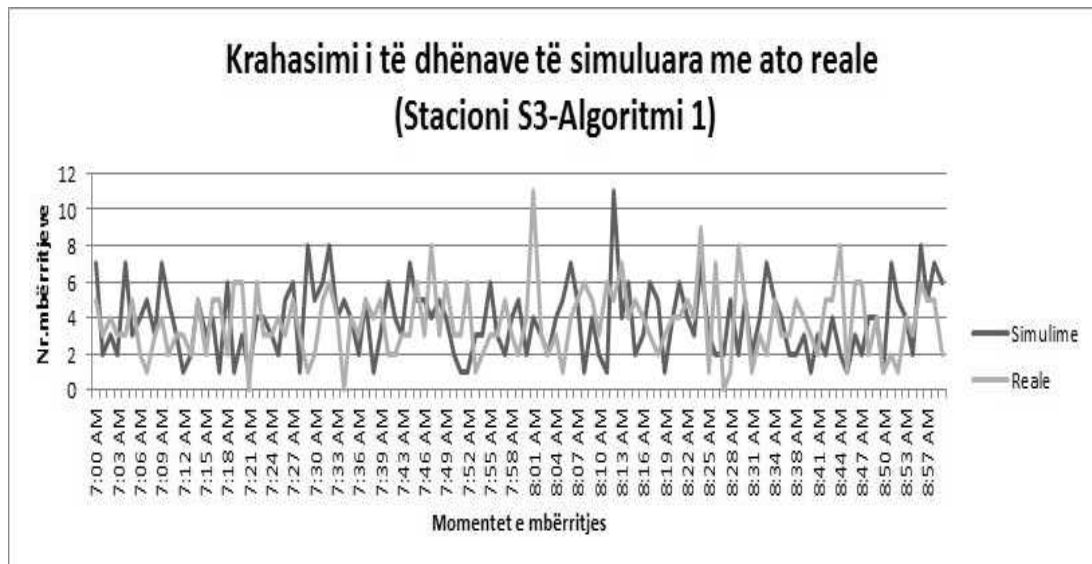
SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.4: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2- Algoritmi 2)



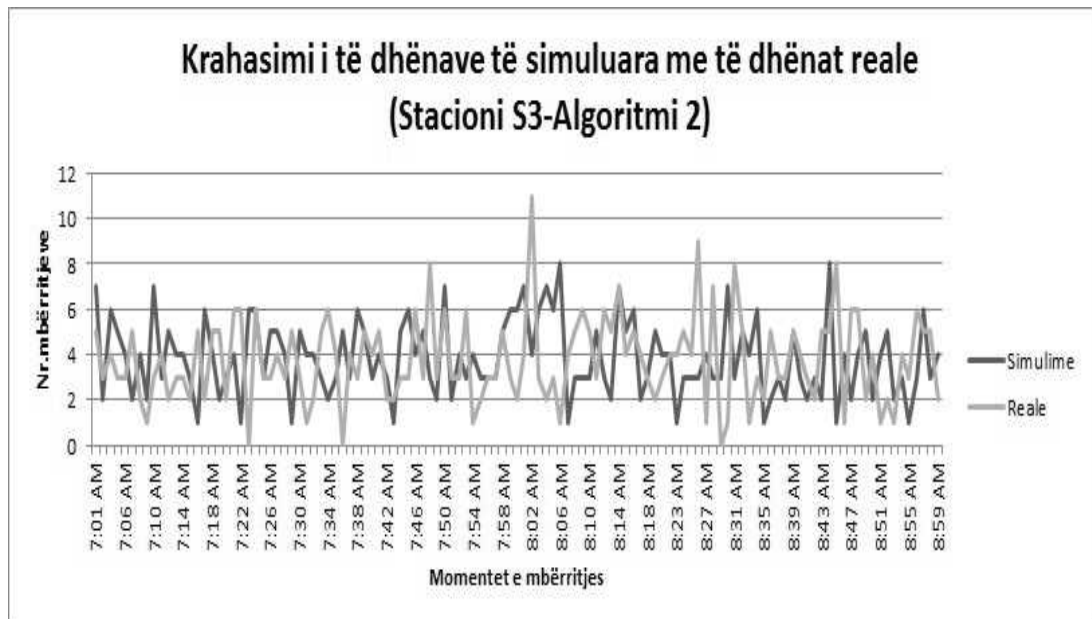
SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.5: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3-Algorithmi 1)



SHTOJCA N. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E MBËRRITJES TË PASAGJERËVE

Figura N.6: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3- Algoritmi 2)



Shtojca **O**

Krahasimi i mesatares për të dhënat reale dhe ato të simuluara. Testi T për të dhënat e mbërritjes të pasagjerëve

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S1 - Algoritmi 1

Tabela O.1: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	3.9083	120	1.96608	.17948
Reale	3.8583	120	2.04280	.18648

Tabela O.2: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	-.007	.936

Tabela O.3: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 1)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime & Reale	-.46439	.56439	.192	119	.848

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S1- Algoritmi 2

Tabela O.4: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	3.9167	120	2.02747	.18508
Reale	3.9500	120	2.04508	.18669

Tabela O.5: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	.153	.095

Tabela O.6: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S1 - Algoritmi 2)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime - Reale	-.51240	.44573	-.138	119	.891

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S2- Algoritmi 1

Tabela O.7: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	4.5250	120	2.15361	.19660
Reale	4.4000	120	2.31328	.21117

Tabela O.8: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	.081	.381

Tabela O.9: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 1)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime & Reale	-.42285	.67285	.452	119	.652

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S2- Algoritmi 2

Tabela O.10: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	4.7667	120	2.19906	.20075
Reale	4.4000	120	2.31328	.21117

Tabela O.11: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	-.024	.791

Tabela O.12: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S2 - Algoritmi 2)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime & Reale	-.21726	.95060	0.143	119	.216

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S3- Algoritmi 1

Tabela O.13: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	3.8250	120	1.96466	.17935
Reale	3.7417	120	1.92068	.17533

Tabela O.14: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	.024	.798

Tabela O.15: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 1)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime & Reale	-.40742	.57409	.336	119	.737

SHTOJCA O. KRAHASIMI I MESATARES PËR TË DHËNAT REALE DHE
ATO TË SIMULUARA. TESTI T PËR TË DHËNAT E MBËRRITJES TË
PASAGJERËVE

Stacioni S3- Algoritmi 2

Tabela O.16: Statistika e çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)

	Mesataret	N	Shm.mes.katror	Gab.stand.mes.
Simulime	3.8250	120	1.69360	.15460
Reale	3.7250	120	1.92708	.17592

Tabela O.17: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)

	N	Korrel.	Sig.
Simulime & Reale	120	-.151	.084

Tabela O.18: Testi T për çiftet e zgjedhjeve (Stacioni S3 - Algoritmi 2)

	95% Intervali i besueshmërisë Kufiri i poshtëm	Kufiri i sipërm	t	Shk.lirisë	Sigma
Simulime & Reale	-.39732	.59732	.398	119	.691

Shtojca **P**

Krahasimi i të dhënave të simuluara me të
dhënat reale për procesin e shërbimit

SHTOJCA P. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT
REALE PËR PROCESIN E SHËRBIMIT

Mbërritjet e autobusëve në stacionin S2

Tabela P.1: Statistika e çifteve të zgjedhjes

	Mesatarja	N	Shm.mes.kuadratike	Gab.st.mesatares
Simulime	5.9800	23	2.33217	.48629
Reale	6.5291	23	1.86992	.38991

Tabela P.2: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjes

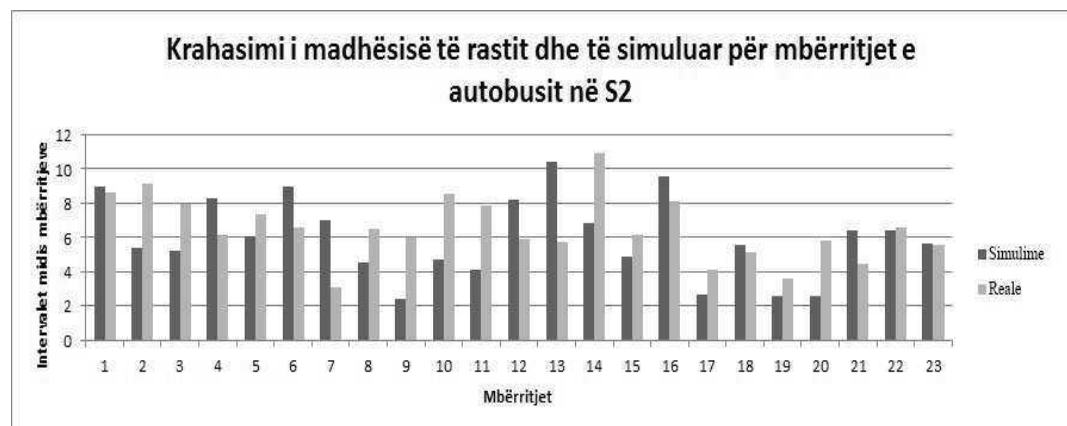
	N	Korrelacioni	Sig.
Simulime & Reale	23	.231	.290

Tabela P.3: Testi T për çiftet e zgjedhjes

	95% Intervali i besimit për diferencën	t	Shk.lirisë	Sig.
	K.ulët K.lartë			
Simulime - Reale	-1.68708	.58881	-1.001	22 .328

SHTOJCA P. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E SHËRBIMIT

Figura P.1: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S2)



SHTOJCA P. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT
REALE PËR PROCESIN E SHËRBIMIT

Mbërritjet e autobusëve në stacionin S3

Tabela P.4: Statistika e çifteve të zgjedhjes

	Mesatarja	N	Shm.mes.kuadratike	Gab.st.mesatares
Simulime	5.9205	23	1.28581	.26811
Reale	6.4163	23	1.42339	.29680

Tabela P.5: Korrelacioni i çifteve të zgjedhjes

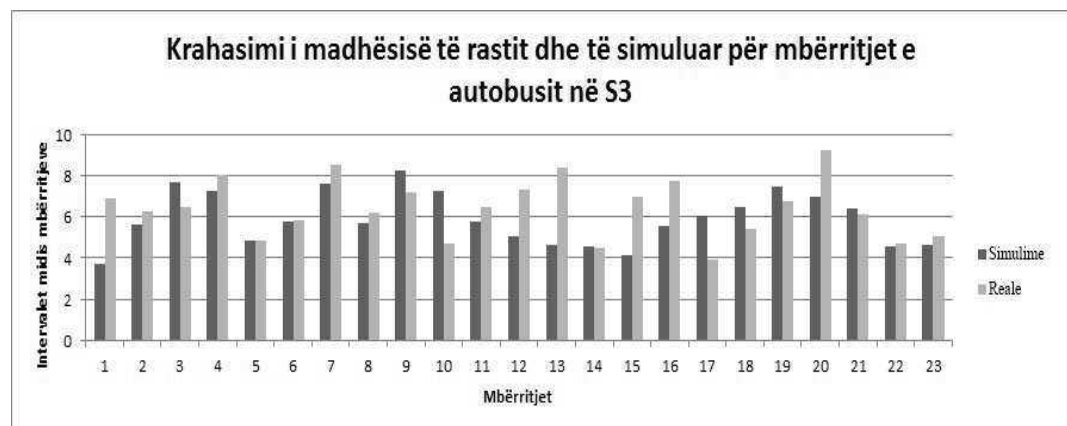
	N	Korrelacioni	Sig.
Simulime & Reale	23	.231	.290

Tabela P.6: Testi T për çiftet e zgjedhjes

	95% Intervali i besimit për diferencën	t	Shk.lirisë	Sig.
	K.ulët	K.lartë		
Simulime - Reale	-1.21077	.21927	-1.438	22 .165

SHTOJCA P. KRAHASIMI I TË DHËNAVE TË SIMULUARA ME TË DHËNAT REALE PËR PROCESIN E SHËRBIMIT

Figura P.2: Krahاسimi i të dhënave të simuluar me të dhënat reale (Stacioni S3)



Shtojca **Q**

Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit

Tabela Q.1: Testi T për krahasimin e modeleve të shërbimit

	95% Intervali i besimit për diferencën		t	Shk.lirisë	Sig.
	K.poshtëm	K.sipërm			
Reale-Normale	-1.57589	0.94295	-0.52	49	0.608
Reale-Puason	-1.10992	2.27659	0.713	49	0.483

Figura Q.1: Krahassimi i modeleve për procesin e shërbimit (Stacioni S2)

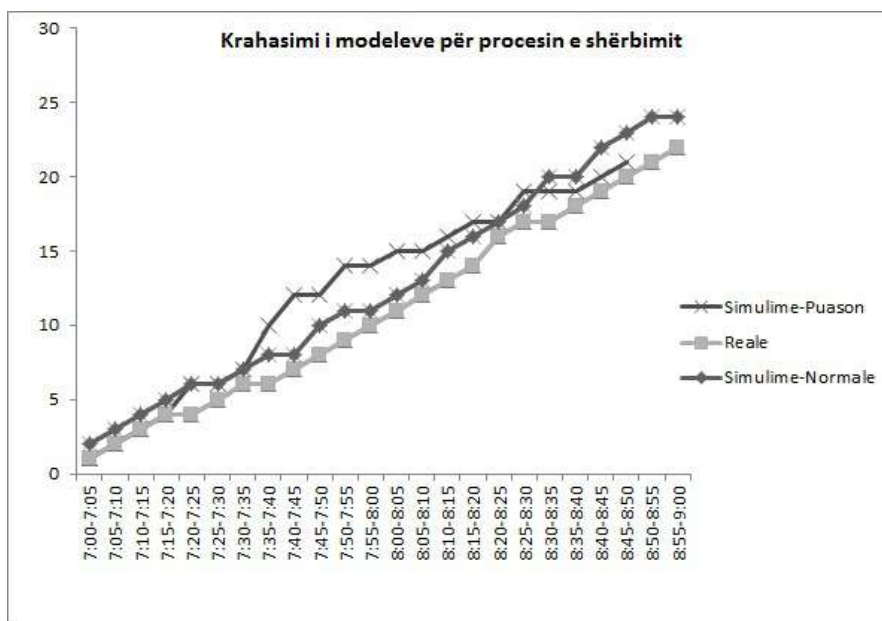
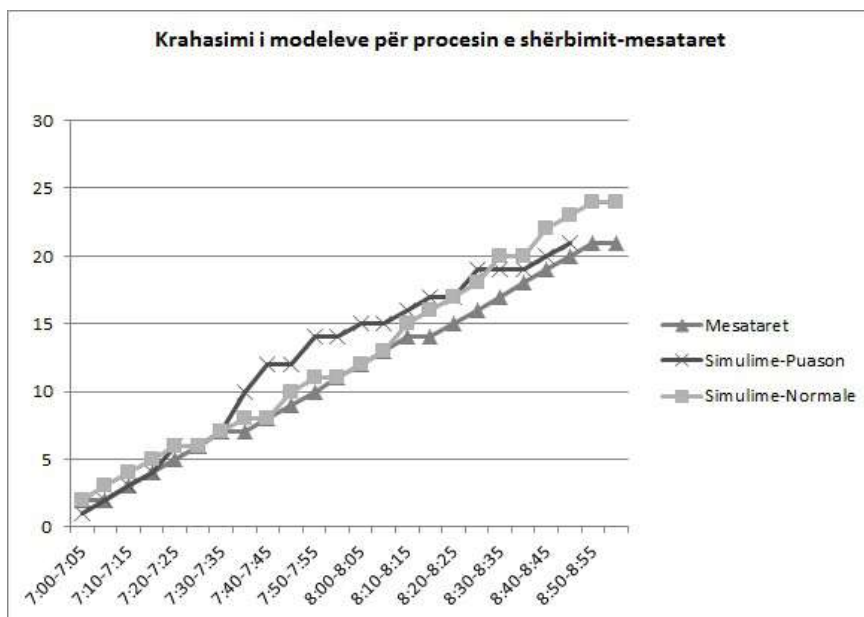
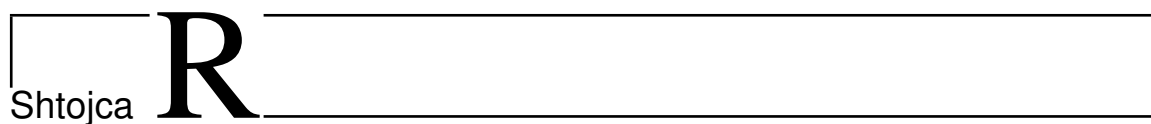


Figura Q.2: Krahاسimi i modeleve për procesin e shërbimit -krahاسimi i mesatareve (Stacioni S2)





Krahasimi i modeleve për procesin e shërbimit

Tabela R.1: Testi T për krahasimin e modeleve të shërbimit

	95% Intervali i besimit për diferencën		t	Shk.lirisë	Sig.
	K.poshtëm	K.sipërm			
Reale-Normale	-1.57589	0.94295	-0.52	49	0.608
Reale-Puason	-1.10992	2.27659	0.713	49	0.483

Figura R.1: Krahاسimi i modeleve për procesin e shërbimit (Stacioni S2)

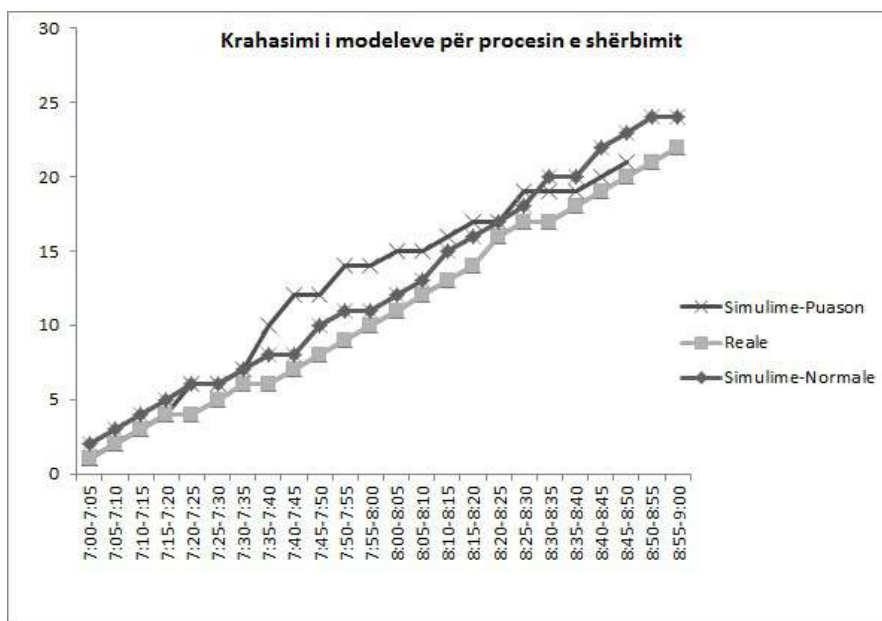


Figura R.2: Krahاسimi i modeleve për procesin e shërbimit -krahاسimi i mesatareve (Stacioni S2)

