



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

Disertacion për Gradën Shkencore “Doktor” në Matematikë

Tema e Disertacionit:

**NDËRTIMI DHE ANALIZA E MODELEVE STATISTIKE
PËR STUDIMIN E HOMOGJENITETIT TË BASHKËSISË
ME NDIHMËN E SHPËRNDARJEVE ASIMPTOTIKE**

Punoi:
Teuta XHINDI

Udhëheqësi shkencor:
Prof.dr. Shpëtim LEKA

Tiranë 2014

“Gjëja që të bën më shumë përshtypje është fakti: sa më shumë që matematika zhvillohet duke arritur majat e të menduarit abstrakt, kthehet më pas në tokë me një instrument gjithmonë e më të rëndësishëm për analizën e të dhënave konkrete”.

Alfred N.Whitehead (1861 – 1947), “La scienza e il mondo moderno”, Boringhieri, Torino 1979.

ABSTRAKT

Zhvillimi i modeleve stokastike, bëhet i mundur me identifikimin e disa shpërndarjeve probabilitare që u korespondojnë një sërë proceseve që gjenerojnë të dhëna dhe më pas studimit të vetive të këtyre shpërndarjeve. Ndodh që shpërndarja e një statistike nuk njihet ose kur njihet mund të ketë vështirësi në përdorimin praktik. Në këto raste përpiqemi të gjejmë një përafrim të shpërndarjes së panjohur. Një metodë që përdoret gjerësisht konsiston në përafrimin e shpërndarjes së panjohur me shpërndarjen limite që përftohet kur numri i elementeve të zgjedhjes rritet pambarim.

Shpërndarja asimptotike është shpërndarja probabilitare që përftohet si limit drejt të cilit tenton shpërndarja e një vargu ndryshoresh rasti.

Jepet vargu i pafundëm i ndryshoreve të rastit $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, secili me funksion shpërndarje përkatësisht $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$. Themi se vargu X_n ka shpërndarje asimptotike nëse vargu $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$ ka për limit një funksion shpërndarje F në të gjitha pikat ku F është i vazhdueshëm. Shpërndarja limite ose Ligji F mund të jetë i degjeneruar ose jo. Në rastin e parë, me një masë probabilitare të caktuar, limiti është një numër x_0 . Në këtë rast, thuhet se X_n tenton sipas probabilitetit të x_0 . Në rastin e dytë, ligji F mund të jetë i vazhduar ose diskret. Në këtë rast thuhet se vargu X_n konvergjon në shpërndarje të ndryshorja e rastit X me ligj F .

Kuptimi i shpërndarjes asimptotike është veçanërisht i rëndësishëm në statistikë sepse njohja e shpërndarjes limite të një vlerësuesi lejon njohjen e vetive statistikore për zgjedhje të mëdha dhe kështu lejon përafrimin e vetive për zgjedhjet e fundme. Vlerësuesit më të përdorur në statistikë janë, në shumicën e rasteve, me shpërndarje asimptotikisht normale, pra shpërndarja probabilitare e tyre përafrohet shumë mirë me një shpërndarje normale kur numri i elementeve të zgjedhjes është mjaft i madh. Më saktësisht, themi se një vlerësues θ_n i një parametri θ ka shpërndarje asimptotike normale nëse shpërndarja e vargut të ndryshoreve të rastit $\frac{\theta_n - \theta}{\sigma(\theta_n)}$ përafrohet shumë mirë me shpërndarjen normale kur numri i elementeve të zgjedhjes rritet pambarim. Meqë statistikën janë ndryshore rasti, flasim për limit sipas masës probabilitare.

Në këtë punim është trajtuar shpërndarja asimptotike e disa statistikave të cilat ndeshen shpesh në situata praktike si ajo e devijimit standard të zgjedhjes s apo e koeficientit të variacionit të zgjedhjes c . Ky trajtim është bërë me ndihmën e funksioneve prodhuese të momenteve dhe funksioneve karakteristike. Gjithashtu janë trajtuar edhe disa zbatime të shpërndarjes asimptotike të koeficientit të variacionit të zgjedhjes së marrë nga bashkësia normale.

Falënderime

Së pari, falënderoj udhëheqësin tim, prof.dr Shpëtim Leka për profesionalizmin, përkushtimin, seriozitetin dhe ndihmën e pakursyer për këtë punim. Së dyti falënderoj edhe familjen time për mbështetjen dhe përkrahjen që më dhanë gjatë punës sime.

PËRMBAJTJA

KAPITULLI I	7
<i>Hyrja.....</i>	<i>7</i>
 KAPITULLI II.....	 12
<i>Rastet e mundshme lidhur me shpërndarjen e një ndryshore rasti</i>	
2.1 Kuptime të përgjithshme	12
2.2 Vlerësimi i parametrave të panjohur të modelit probabilitar.....	13
2.3 Përafrimi i shpërndarjes së panjohur të një ndryshore rasti	19
 KAPITULLI III	 30
<i>Përafrimi i shpërndarjes së një statistike me shpërndarjen normale</i>	
3.1 Mosbarazime probabilitare të rëndësishme	30
3.2 Lloje të ndryshme të konvergjencës të një vargu ndryshoresh të rastit.....	31
3.3 Ligjet e numrave të mëdhenj	36
3.4 Teoremat qendrore limite	41
3.5 Shpërndarja asimptotike e funksioneve të mesatare të zgjedhjeve.....	47
 KAPITULLI IV	 52
<i>Studimi i koeficientit të variacionit të zgjedhjes</i>	
4.1 Kontrolli statistikor i cilësisë.....	52
4.2 Të dhëna për betonin	55
4.3 Rezistenca në shtypje.....	57
4.4 Përcaktimi i rezistencës mesatare	58
4.5 Devijimi standard dhe koeficienti i variacionit	60
4.6 Kartat e kontrollit	61
4.7 Disa zbatime të shpërndarjes χ^2	63
4.8 Shpërndarja asimptotike e statistikave s dhe s^2	67
4.9 Shpërndarja asimptotike e koeficientit të variacionit të zgjedhjes $c = \frac{s}{\bar{x}}$	83

KAPITULLI V.....	89
<i>Zbatime të shpërndarjes asimptotike të statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2})$</i>	
5.1 Karta e kontrollit për koeficientin e variacionit të zgjedhjes së nxjerrë nga popullimi normal.....	89
5.2 Përdorimi i statistikave c dhe s^2 në procesin e kontrollit të cilësisë së prodhimit.....	92
5.3 Karta e kontrollit të mostrës me anë të statistikave $\bar{c}$ dhe s_c	96
5.4 Intervali me një besueshmëri të caktuar për koeficientin e variacionit $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ të një popullimi normal.	100
5.5 Intervali me një besueshmëri të caktuar për p-kuantilin c_p	102
5.6 Kriteri për krahasimin e koeficientëve të variacionit të dy popullimeve normale. ...	104
ANEKS.....	109
KONKLUSIONE	111
BIBLIOGRAFIA	113

KAPITULLI I

Hyrja

Studiuesit përdorin statistikën për të përpunuar të dhënat që përftohen nga një eksperiment ose studim i caktuar. Ky proces njihet si analizë e të dhënave ose statistikë përshkruese. Por ka edhe raste kur studiuesit e përdorin statistikën në një mënyrë tjetër. Në statistikë rezultati i vrojtimit është fillimi i studimit. Statistika ndërton metoda që lejojnë të nxirren përfundime nga vrojtimit e realizuara gjatë zhvillimit të një dokurie rasti. Sipas përfundimeve të nxjerra nga përpunimi statistikor i zgjedhjes, ka interes të sigurohet me një masë probabilitare të caktuar, se sa përfaqësuese e popullimit është kjo zgjedhje.

Origjina e teorisë së probabilitetit daton në mesin e shekullit të 17-të. Thelbi i teorisë së probabilitetit janë teoremat limite sepse ato janë shumë të dobishme në të kuptuarit e fenomeneve të rastit, prezente në të gjithë shkencat tona. Historia e teoremave limite fillon me teoremat limite të Bernulit (1713) dhe më pas vijon me teoremat limite të De Moivre-s dhe Laplace-s. Më pas, Poisson ia doli në mënyrë të suksesshme të bëjë përgjithësimin e teoremave të Bernoulli-t, De Moivre-s dhe Laplace-s. Sot, i njohim këto teorema si ligjet e numrave të mëdhenj dhe teoremat qendrore limite, pjesë themelore e teorisë së probabilitetit.

Ky punim trajton ndryshoret e rastit, të cilave ose nuk i njihet shpërndarja probabilitare, ose ajo paraqet vështirësi në zbatimet praktike. Në këto raste lind nevoja e shqyrtimit të disa kushteve që lidhen me shpërndarjen teorike ose asimptotike të kësaj ndryshore. Ky trajtim do të bëhet bazuar në dy qasje:

- Nisur nga të dhënat e një zgjedhje me vëllim “n”, ndërtohet funksioni empirik $F_n(x)$. Për vargun $F_n(x)$, gjejmë $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$. Nëse ky limit ekziston dhe është i barabartë me $F(x)$ në të gjitha pikat ku $F(x)$ është i vazhdueshëm, atëherë themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon sipas shpërndarjes tek X me funksion shpërndarje $F(x)$ dhe shënohet kështu:

$$\{X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} X.$$

Shpërndarja $F(x)$ quhet shpërndarje limite ose asimptotike e vargut $\{X_n\}$.

- Vektorit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ku X_i janë ndryshore rasti, i gjejmë funksionin karakteristik $C_n(x)$, të cilit, i korespondon një dhe vetëm një ligj i shpërndarjes probabilitare $F(x)$. Kjo do të thotë:

$$C_n(x) \xleftrightarrow{\text{bijeksion}} F(x).$$

Në këto kushte, funksioni i shpërndarjes për ndryshoren X , do të jetë $F(x)$. Për gjetjen e funksionit karakteristik ndihmohemi prej momenteve të rendeve të ndryshme, të cilat “prodhohen” prej funksionit prodhues të momenteve. Prej këtu del rëndësia e përdorimit të funksionit prodhues të momenteve dhe funksionit karakteristik në gjetjen e shpërndarjes së një ndryshore rasti.

Teoria asimptotike është pjesë mjaft e rëndësishme e statistikës analitike. Ajo trajton sjelljen limite të ndryshoreve të rastit (një ose disa përmasore) si dhe shpërndarjet e tyre. Kontribut në këtë pjesë kanë dhënë Serfling (1980), Shorack dhe Wellner (1986), Sen dhe Singer (1993), Barndorff-Nielsen dhe Cox (1994), Van Der Vaart (1998), etj.

Konsiderojmë një varg ndryshoresh rasti X_n . Jemi të interesuar për:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} X_n.$$

Ka dy raste të mundshme:

- X_n “konvergjon sipas probabilitetit” te ndonjë konstante c
- X_n “konvergjon sipas shpërndarjes” te një ndryshore tjetër rasti “ X ”.

Nëse X_n konvergjon te X , shpërndarjen e X e quajmë “shpërndarje limite” të X_n . Sa më i madh të jetë vëllimi i zgjedhjes aq më mirë shpërndarja e ndryshores X_n përafrohet me shpërndarjen e ndryshores X .

Përkufizimi i mëposhtëm shërben si pikënisje për trajtimin e shpërndarjes asimptotike.

Përkufizim 1: Le të jetë $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, një varg ndryshoresh rasti, secila me funksion shpërndarje përkatësisht $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x), \dots$, atëherë nëse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x),$$

në të gjitha pikat ku $F(x)$ është i vazhdueshëm, themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon sipas shpërndarjes të X me funksion shpërndarje $F(x)$ dhe shënohet kështu:

$$\{X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} X.$$

Shpërndarja F quhet shpërndarje limite ose asimptotike e vargut $\{X_n\}$. Pra, shpërndarja asimptotike është shpërndarja probabilitare që i korrespondon limitit drejt të cilit tenton shpërndarja e një vargu ndryshoresh rasti.

Koncepti i shpërndarjes asimptotike është veçanërisht i rëndësishëm në statistikë sepse njohja e shpërndarjes limite të një vlerësuesi lejon njohjen e vetive statistike për zgjedhje të mëdha dhe kështu përafrimin e vetive për zgjedhjet e fundme. Lejontë njihet, për shembull:

- nëse një vlerësues është i pazhvendosur për një parametër të caktuar
- njohjen e përafërt të variancës ose
- kryerjen e kontrollit të hipotezave statistikore me një saktësi të tillë që rritet me rritjen e numrit të elementeve të zgjedhjes.

Vlerësuesit më të përdorur në statistikë, janë në shumicën e rasteve, me shpërndarje asimptotike normale, pra shpërndarja probabilitare e tyre përafrohet shumë mirë me një shpërndarje normale kur numri i elementeve të zgjedhjes është mjaft i madh. Më saktësisht, themi se një vlerësues θ_n , i një parametri θ , ka shpërndarje asimptotike normale nëse shpërndarja e vargut të ndryshoreve të rastit $\frac{\theta_n - \theta}{\sigma(\theta_n)}$ përafrohet shumë mirë me shpërndarjen normale.

Përse ndodh kjo? Kjo ndodh sepse shpërndarja normale është shpërndarja më e rëndësishme në statistikën analitike për disa arsye:

- Shumica e ndryshoreve që ndeshen në jetën reale kanë shpërndarje normale.
- Kjo shpërndarje mundëson zgjidhjen e shumë problemeve nga fusha të ndryshme me ndihmën e modeleve probabilitare – statistikore.
- Përafron edhe shpërndarjet e disa ndryshoreve diskrete në disa kushte të caktuara.
- Është në bazën e disa prej teoremave më të rëndësishme të statistikës analitike si, për shembull, të Teoremës Qendrore Limite, e cila mund të përmbledhet kështu:

Çdo madhësi e rastit që është rezultat i veprimit të një numri shumë të madh ndryshoresh të rastit të pavarura, secila me peshë të papërfillshme kundrejt të tjerave, ka shpërndarje afërsisht normale, pavarësisht nga natyra e ligjeve të ndryshoreve të rastit të pavarura.

- Familja e shpërndarjeve normale është e mbyllur përsa i përket transformimeve lineare si dhe kombinacioneve lineare etj.

Quhet ndryshe edhe vija e gabimeve të rastit sepse shpërndarja e gabimeve të bëra, në matjen e disahershme të të njëjtës madhësi, mund të përafrohet mirë me një vijë të tillë.

Shpërndarja normale u zbulua në vitin 1733 prej DeMoivre-s si një përafrim i shpërndarjes binomiale. Për një kohë të gjatë shkrimet e tij humbën derisa Karl Pearson-i i gjeti në vitin 1924.

Laplace e përdori shpërndarjen normale në vitin 1783 për të përshkruar shpërndarjen e gabimeve të rastit kurse Gauss-i e përdori këtë shpërndarje në vitin 1809 në analizën e të dhënave astronomike. Shpërndarja normale shpesh quhet edhe “shpërndarja gaussiane”.

Në kapitullin dytë, do të trajtohen rastet e mundshme që lidhen me shpërndarjen e një ndryshore rasti duke analizuar problemin në këto situata:

- Ndryshores së rastit X (një përmasore ose shumë përmasore), i njihet ligji probabilitar i shpërndarjes $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.
- Ndryshores së rastit X , i njihet ligji probabilitar i shpërndarjes, por funksionit të shpërndarjes $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ nuk i njihen parametrat e tij, të cilat duhen vlerësuar.
- Ndryshores së rastit X , nuk i njihet ligji i shpërndarjes probabilitare $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$.

Për secilin nga këto raste do të tregohen dhe zgjidhjet përkatëse.

Në kapitullin e tretë, do të trajtohen disa mosbarazime probabilitare të rëndësishme (mosbarazimi i Markovit, i Chebyshevit), lloje të ndryshme të konvergjencës (konvergjenca sipas probabilitetit, konvergjenca pothuajse kudo, konvergjenca sipas katrorit mesatar), ligjet e numrave të mëdhenj si dhe elemente që lidhen me shpërndarjen asimptotike (teoremat qendrore limite si: teorema Linderberg-Levi, teorema Liapunov, teorema De Moivre-Laplace) dhe shpërndarja asimptotike e funksioneve të mesatares së zgjedhjes $g(\bar{x})$. Këto trajtime janë marrë nga literatura e përzgjedhur dhe e studiuar për këtë punim.

Në kapitullin e katërt, në fillim është trajtuar kontrolli statistikor i cilësisë duke u ndalur tek materiali i betonit. Këtu tregohet rëndësia e studimit të homogjenitetit të të dhënave mbështetur te statistikën:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \text{ dhe } c = \frac{s}{\bar{x}}.$$

Më pas është trajtuar shpërndarja asimptotike e këtyre statistikave si dy prej treguesve të ndryshueshmërisë së të dhënave.

Në kapitullin e pestë, bazuar në rezultatet e arritura në kapitullin 4 për shpërndarjen e statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}}$, janë ndërtuar dhe analizuar disa modele matematike për kontrollin statistikor të cilësisë së prodhimit.

Në fund janë dhënë konkluzionet dhe referencat e këtij punimi.

KAPITULLI II

Rastet e mundshme lidhur me shpërndarjen e një ndryshore rasti

2.1 Kuptime të përgjithshme

Në shumë dukuri të natyrës, edhe pse të krijohet përshtypja e një parregullsie, ka në fakt rregullsi të shpërndarjes së rastësive, gjë e cila na lejon t'i paraqesim këto dukuri me procese ose ndryshore rasti të tipeve të ndryshme. Pra ndryshorja e rastit paraqet ligjësinë që e ka dukuria në kuptimin e ligjesisë së natyrës dhe për këtë arsye ne themi ligji i shpërndarjës së probabiliteteve në vend të ndryshores së rastit.

Në aspektin teorik, nëse shënojmë me Ω hapësirën e rezultateve të mundshme të një prove, ndryshore rasti me përkufizim quhet:

Përkufizim 2: Ndryshore e rastit (ose stokastike) quhet çdo funksion real X , i përcaktuar në hapësirën Ω , pra:

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Pra, ndryshorja e rastit është bashkësi numrash realë të rastit. Këto vlera ndryshorja e rastit i merr me probabilitet të caktuar, të njohur ose jo. Sipas këtij kuptimi ne mund të ndërtojmë pafundësi ndryshoresh të rastit, të cilat shprehin një tipar sasior ose cilësor të popullimit që ne studiojmë dhe që ka vlera praktike.

Ndryshorja e rastit X mund të jetë diskrete ose e vazhduar, njëpërmasore ose shumëpërmasore.

Përkufizim 3: Ndryshorja e rastit X quhet diskrete në qoftë se bashkësia e vlerave të mundshme të saj A është të shumtën e numërueshme.

Në qoftë se $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ atëherë shpërndarja e saj që përcaktohet nga numrat:

$$P(x_i) = P(X = x_i); \text{ për çdo } i \geq 1 \text{ quhet shpërndarje diskrete.}$$

Le të jetë X një ndryshore rasti e përcaktuar në hapësirën Ω ku është dhënë probabiliteti P .

Përkufizim 4: Ndryshorja e rastit X quhet e vazhduar në qoftë se gjendet një funksion $\varphi(x) \geq 0$ për çdo $x \in R$, që për çdobashkësi $A \subset R$ të kemi:

$$P(X \in A) = \int_A \varphi(x) dx.$$

$\varphi(x)$ që plotëson këto kushte quhet densitet shpërndarje.

Përkufizim 5: Funksioni $F(x)$ i tillë që $F'(x) = \varphi(x)$ quhet funksion i shpërndarjes për ndryshoren e rastit të vazhduar X .

Kur flasim për ligj probabilitar të njohur, tani dhe më tej do të kuptojmë ose njohjen e funksionit të densitetit të probabilitetit $\varphi(x)$ ose të funksionit të shpërndarjes $F(x)$ të një ndryshore rasti.

2.2 Vlerësimi i parametrave të panjohur të modelit probabilitar

Përkufizim 6: Parametër quhet një konstante që është karakteristikë për gjithë popullatën.

Nëse popullata jepet nga një model matematik, parametri është konstantja që shfaqet te ky model. Funksioni i densitetit i probabilitetit shkruhet $\varphi(x, \theta_i)$ duke evidentuar kështu parametrat që e karakterizojnë atë.

Dimë se kur njihet ligji probabilitar i shpërndarjes $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ për ndryshoren e rastit X (një përmasore ose shumë përmasore), llogaritja e probabilitetit bëhet sipas formulës:

$$P(X \in A) = \int_A \varphi(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) dx = \int_A dF(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

Shohim rastin kur ndryshores së rastit X , i njihet ligji Probabilitar i shpërndarjes, por funksionit të shpërndarjes $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ nuk i njihen parametrat e tij.

Përkufizim 7: Statistikë quhet çdo funksion i zgjedhjes në trajtën

$$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Meqë statistika varet nga zgjedhja, ajo në vetvete është ndryshore rasti. Shpërndarja probabilitare e statistikës $T = T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ quhet shpërndarje e zgjedhjes për këtë statistikë.

Përkufizim 8: Vlerësues pikësor i parametrut θ quhet çdo statistikë $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ që përdoret për të vlerësuar θ .

Vlerësuesi pikësor është funksion i të dhënave të zgjedhjes dhe si i tillë është ndryshore rasti.

Mbi bazën e informacionit të marrë nga zgjedhja, parametri θ mund të marrë një vlerë ose një bashkësi vlerash. (figura 1).

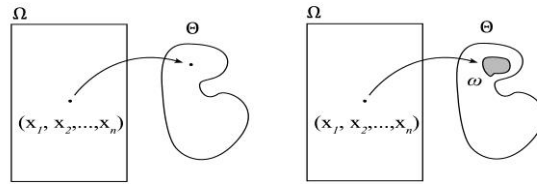


Figura 1

Përkufizim 9: Vlerësim i parametrut θ quhet çdo vlerë $\tilde{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ e vlerësuesit $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, ku $x_1, x_2, \dots, x_n$ janë përkatësisht vlera konkrete të ndryshoreve $X_1, X_2, \dots, X_n$, të përftuar nga një zgjedhje.

Për funksionin $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ me parametra të panjohur, bazuar në të dhënat e zgjedhjes, ndërtojmë statistika $\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, si vlerësues për secilin prej parametrave të tij të panjohur.

Çdo vlerësues $\tilde{\theta}$, ka një shpërndarje probabilitare që përcakton shkallën e ndryshueshmërisë rreth vlerës së vërtetë të parametrut θ .

Vlerësimet e θ , kanë devijime, gabime, referuar vlerës së panjohur të θ . Preferohet vlerësuesi $\tilde{\theta}$ i θ që të ketë në mesatare gabimin më të vogël të mundshëm.

Vlera mesatare e gabimit të një vlerësuesi mund të llogaritet nëpërmjet vlerës së pritshme $E(|\tilde{\theta} - \theta|)$, si mesatare e diferencave në vlerë absolute ndërmjet vlerësimeve të θ dhe vlerës së vërtetë të parametrut.

Një kriter tjetër për matjen e gabimit jepet sipas gabimit katror mesatar.

Përkufizim 10: Le të jetë $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ një vlerësues i parametrut θ . Gabim katror mesatar KMG i vlerësuesit $\tilde{\theta}$ quhet numri:

$$\text{KMG}(\tilde{\theta}) = E(\tilde{\theta} - \theta)^2 \quad (2.2.1)$$

Duke qenë se vlerësuesi i një parametri mund të mos jetë i vetëm, shtrohet çështja e zgjedhjes së vlerësuesit; si duhet të jetë ai?

Vlerësuesi $\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ duhet të plotësojë disa kushte që të pranohet si vlerësues më i mirë. Kërkohet që të jetë vlerësues i pazhvendosur, i qëndrueshëm, konvergjent, me variancë minimale, i mjaftueshëm etj.

Ndërtimi i statistikës $\tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, mund të realizohet me metoda të ndryshme, por më të përdorurat janë ato të katrorëve më të vegjël, të momenteve, të përgjasisë maksimale etj.

Në rastin kur ndërtohen statistika të ndryshme, preferohet të merret statistika e mjaftueshme. Duam të dimë se:

- Sa të saktë jemi ne me vlerësimin e gjetur?
- Sa të sigurt jemi?
- Sa duhet të jetë vëllimi i zgjedhjes “n” në mënyrë që zgjedhja të përfaqësojë Ω ?

Vlerësimi pikësor jep pak informacion për saktësinë dhe sigurinë. Kjo është arsyeja që për θ e panjohur bëhet vlerësimi intervalor dhe kontrolli i hipotezave statistikore.

Në rastin e vlerësimit intervalor, ndërtojmë intervale me qendër vlerësimin pikësor, të cilat japin “siguri” të caktuar për përmbajtjen e vlerës së parametrut θ . Në këtë mënyrë, çdo zgjedhjeje nuk i përgjigjet një numër si vlerësimi pikësor, por një interval që quhet *interval besimi*.

Le të jetë $X_1, X_2, \dots, X_n$ një zgjedhje nga popullimi me densitet probabilitar $\varphi(x, \theta)$ ku θ është parametri i panjohur. Shënojmë $\tilde{\theta} = \tilde{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ një vlerësues të parametrut θ dhe me $\varphi_{\tilde{\theta}}(\theta)$ densitetin probabilitar të statistikës $\tilde{\theta}$. Le të jenë c_1, c_2 dy vlera të tilla që:

$$P(\tilde{\theta} < c_1) = \alpha_1 \text{ dhe } P(\tilde{\theta} > c_2) = \alpha_2 \quad (2.2.2)$$

Shënoj $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Numri α quhet niveli i rëndësisë ose niveli i sigurisë.

Prej (2.2.2) gjejmë që:

$$P(c_1 < \tilde{\theta} < c_2) = 1 - \alpha = \gamma$$

Numri γ quhet koeficient besimi dhe zgjidhet afërsisht i barabartë me 1.

Shprehjen $c_1 < \tilde{\theta} < c_2$, mbas veprimeve algjebrike mund ta shkruajmë në trajtën $L_1 < \theta < L_2$ dhe nga njëvlershmëria e tyre del se edhe:

$$P(c_1 < \tilde{\theta} < c_2) = P(L_1 < \theta < L_2) = 1 - \alpha = \gamma$$

Përkufizim 11: Intervali (L_1, L_2) quhet interval besimi për parametrin θ , me besueshmëri $(1 - \alpha)\%$.

Statistikat L_1 dhe L_2 quhen përkatësisht kufi i poshtëm dhe kufi i sipërm i intervalit të besimit, ndërsa madhësia $L = L_2 - L_1$ quhet gjatësi e intervalit.

Numrit α zakonisht i jepen vlerat $\alpha = 0,10; 0,05; 0,01$ që do të thotë përkatësisht

$$\gamma = 90\%; 95\%; 99\%.$$

Për një α të dhënë, preferohet intervali me gjatësi më të vogël. Numrat α dhe L janë të lidhur mes tyre: vlerave më të vogla të α ose vlerave më të mëdha të γ i përgjigjen intervale besimi me gjatësi L më të mëdha.

Le të jetë $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ një zgjedhje nga popullimi Ω , me ligj $\varphi(x, \theta)$, ku vlera e parametrin të panjohur θ e përcakton plotësisht ligjin. Parametri θ mund të jetë me një ose disa përmasa.

Përkufizim12: Çdo supozim për vlerën e parametrin θ , quhet hipotezë statistikore. Hipoteza quhet e thjeshtë kur ka formën:

$H_0: \theta = \theta_0$ (θ_0 – vlerë e caktuar) dhe quhet e përbërë kur ka formën:

$H_0: \theta \in \Theta_0$ ku Θ_0 është një nënbashkësi e bashkësisë Θ të vlerave të mundshme të parametrin θ .

Për të kontrolluar një hipotezë ndërtohet një test (ose kriter) me ndihmën e zgjedhjes $X_1, X_2, \dots, X_n$ e cila na lejon të marrim një vendim nëse hipoteza e ngritur pranohet apo jo (Leka, 2004, fq.186-189). Kuptohet se testi është funksion i zgjedhjes, pra :

$$T = T(X_1, X_2, \dots, X_n).$$

Nga bashkësia Δ - e vlerave të mundshme të testit T , veçojmë një nënbashkësi Δ_k - që e quajmë zonë kritike, të tillë që, kur $t \in \Delta_k$, hipoteza H_0 – nuk pranohet, ku t është vlera e testit T .

Zonën Δ_0 të tillë që $\Delta_0 \cup \Delta_k = \Delta$, e quajmë zonë të lejuar të testit. Zona kritike Δ_k mund të jetë e njëanshme p.sh $\Delta_k = \{t: t \geq c_2\}$, që quhet zonë kritike e djathtë ose zonë kritike e majtë $\Delta_k = \{t: t \leq c_1\}$. Zona kritike mund të

jetë edhe e dyanshme: $\Delta_k = \{t: t < c_1 \text{ ose } t > c_2\}$. Vlerat c_1 dhe c_2 quhen pika kritike (figura 2)

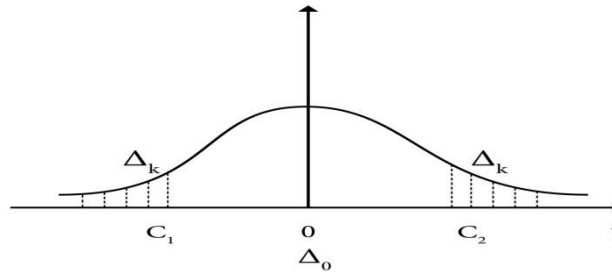


Figura 2

Shënojmë $f(t, \theta)$ ligjin e testit T , ku θ është parameter i panjohur, zonën kritike Δ_k e zgjedhim të tillë që:

$$P(T \in \Delta_k / H_0) = \int_{\Delta_k} f(t, \theta) dt = \alpha, \quad (2.2.3)$$

ku $\alpha \cong 0$, është nivel i rëndësisë. Sipas përkufizimit të ngjarjes, praktikisht të pamundur, ngjarja $A = (T \in \Delta_k / H_0)$ – praktikisht nuk ndodh në një provë. Pra probabiliteti, që hipoteza e ngritur H_0 të mos pranohet kur është e vërtetë, të jetë sa më e vogël. Kuptohet se është e domosdoshme të njihet ligji i testit T kur H_0 është e vërtetë, për të gjetur pikat kritike, ose për të gjetur nivelin α kur janë përcaktuar pikat kritike. Në praktikë, shpesh jepet niveli α dhe gjenden vlerat kritike. Llogaritja e statistikës T mbi bazën e “ n ” vlerave të vrojtuar nga zgjedhja na jep një vlerë t (quhet vlera e vrojtuar e testit ose vlera statistikore) që na lejon të marrim një vendim.

Në qoftë se $t \in \Delta_k$, hipoteza H_0 nuk pranohet dhe kur $t \in \Delta_0$ hipoteza H_0 nuk ka arsye të mos pranohet si e vërtetë.

Ndërtohen shumë nënbashkësi Δ_k që plotësojnë kushtin (2.2.3) prandaj për të zgjedhur më të mirën, bashkë me H_0 shqyrtohet edhe një hipotezë alternative $H_a: \theta \in \Theta_1$, ku Θ_1 (që nuk pritet me Θ_0) është nënbashkësi e bashkësisë Θ të vlerave të mundshme të θ . Hipoteza H_a quhet hipotezë alternative.

Për të kontrolluar një hipotezë bazë për një parametër θ , ka një procedurë që kalon nëpër disa etapa duke konkluduar me vendimin për hipotezën bazë.

Hipotezat e thjeshta. Llojet e gabimeve. Fuqia e testit

Në qoftë se një hipotezë përcakton plotësisht ligjin e testit T atëherë ajo quhet hipotezë e thjeshtë. Kështu, në testin T (kur θ është një parameter çfarëdo) hipoteza: $H_0 : \theta = \theta_0$ me alternativë $H_a : \theta \neq \theta_0$ (ose $\theta < \theta_0$; $\theta > \theta_0$) është hipotezë e thjeshtë. Kuptimet e tjera të teorisë së kontrollit të hipotezave po i trajtojmë vetëm për hipotezat e thjeshta.

Me çdo test, janë të lidhura dy llojet e gabimeve. Sipas (2.2.3) përcaktuam:

$\alpha = P(H_0 - \text{hidhet poshtë})$ – është gabim i llojit të parë. Me këtë nivel nuk pranohet një hipotezë e vërtetë.

Shënojmë:

$\beta = P(H_0 - \text{pranohet})$ – është gabim i llojit të dytë, pra pranohet një hipotezë jo e vërtetë.

Testi më i mirë do të jetë ai që të dyja llojet e gabimeve α dhe β i ka afër zeros. Kjo gjë përgjithësisht është vështirë të realizohet sepse zvogëlimi i njërit sjell rritjen e tjetrit. Në këto kushte jepet niveli α dhe zgjidhet testi që realizon minimizimin e β .

Përkufizim 13: Testi T quhet optimal me nivel α në qoftë se minimizon β për α të dhënë. Skema e vendimit të një testi të hipotezës së thjeshtë është:

	Lloji i hipotezës H_0	
Vendimi	H_0 e vërtetë	H_0 e gabuar
Pranohet H_0	Vendim i drejtë (prob $1 - \alpha$)	Vendim i gabuar (prob β)
Hidhet poshtë H_0	Vendim i gabuar (prob α)	Vendim i drejtë (prob $1 - \beta$)

Për kontrollin e hipotezës $H_0: \theta = \theta_0$, me hipotezë alternative $H_a: \theta > \theta_0$, kemi:

- Për “n” të dhënë, kur α rritet (c-zvogëlohet) atëherë edhe β zvogëlohet.
- Për α të dhënë, kur “n” rritet (d.m.th σ_T zvogëlohet) atëherë α dhe β zvogëlohen. Kështu duke rritur vëllimin “n” të zgjedhjes, është e mundur të zvogëlohen njëkohësisht α dhe β .

Supozojmë se kontrollojmë hipotezën $H_0: \theta = \theta_0$, me hipotezë alternative $H_a: \theta > \theta_0$. Për çdo vlerë θ të hipotezës alternative, llogarisim $\beta(\theta)$.

Përkufizim 14:

Funksioni:

$\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) = P(\text{ e hedhjes poshtë të } H_0 \text{ së gabuar})$ quhet fuqi e testit.

Ideale do të ishte të ndërtonim një test që të mund të dallohej ekzaktësisht midis hipotezave, d.m.th i tillë që:

$$\pi(\theta_0) = \alpha = 0$$

$$\pi(\theta) = 1 - \beta(\theta) = 1 \text{ n.q.s } \theta \neq \theta_0$$

Nga të dyja testet A dhe B, me grafikë të funksioneve të fuqisë $\pi(\theta)$ si më poshtë, më i miri është testi A, sepse për të funksioni $\pi(\theta)$ konvergjon më shpejt te 1.

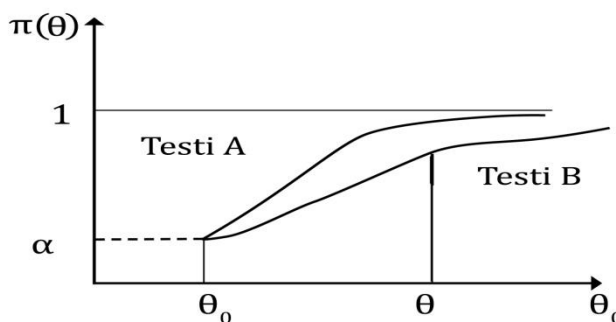


Figura 3

2.3 Përafrimi i shpërndarjes së panjohur të një ndryshore rasti

Shënojmë me X një ndryshore rasti me ligj të shpërndarjes probabilitare $F(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, të panjohur.

Në këtë rast për të arritur me objektivitet në ligjin e panjohur teorik tëkësaj ndryshore, mbi bazën e vrojtimeve që realizojmë, llogarisim sa më shumë karakteristika numerike, të cilat kanë domethënie statistikore që na ndihmojnë për të arritur te ligji teorik.

Për të përafruar shpërndarjen, mund të veprohet sipas këtyre 2 mënyrave:

- I. Bazuar në të dhënat e një zgjedhje me vëllim n , ndërtohet funksioni empirik $F_n(x)$.

Ndërtimi i këtij funksioni kërkohet të bëhet i tillë që “largesa”:

$$\|F_n(x) - F(x)\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Për vargun $F_n(x)$, gjejmë $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$. Nëse ky limit ekziston dhe është i barabartë me $F(x)$ në të gjitha pikat ku $F(x)$ është i vazhdueshëm, atëherë themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon sipas shpërndarjes të X me funksion shpërndarje $F(x)$ dhe shënohet kështu:

$$\{X_n\} \xrightarrow[\text{shpërndarje}]{n \rightarrow \infty} X.$$

Shpërndarja F quhet shpërndarje limite ose asimptotike e vargut $\{X_n\}$.

Shpërndarja limite përdoret si përafrim i shpërndarjes për ndryshoren e rastit X . Sa më i madh të jetë vëllimi i zgjedhjes, aq më shumë shpërndarja limite përafrohet me shpërndarjen e vërtetë të statistikës.

Me ndihmën e aparatit të teorisë asimptotike, mund të përafrojmë shpërndarjet e panjohura të statistikave të ndryshme.

Ose një mënyrë tjetër

- II. Vektorit $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$ ku X_i janë ndryshore rasti, i gjejmë funksionin karakteristik $C_{n_t}(x)$, të cilit, i korrespondon një dhe vetëm një Ligj i Shpërndarjes Probabilitare $F(x)$, në bazë të teoremës së mëposhtme të unicitetit për funksionin karakteristik.

Teoremë: Në qoftë se dy ndryshore rasti të vazhduara kanë të njëjtin funksion karakteristik atëherë ato kanë dhe të njëjtin funksion shpërndarje.

Bazuar te kjo teoremë kemi: $C_{n_t}(x) \xleftrightarrow{\text{bijeksion}} F(x)$ (A.W.Van Der Vaart, 2000, fq 15). Në këto kushte, Funksioni i Shpërndarjes për ndryshoren X , do të jetë $F(x)$. Për gjetjen e funksionit karakteristik, ndihmohemi prej momenteve të rendeve të ndryshme, të cilat “prodhohen” prej funksionit prodhues të momenteve. Prej këtui del rëndësia e përdorimit të funksionit prodhues të momenteve dhe funksionit karakteristik në gjetjen e shpërndarjes së një ndryshoreje rasti.

Lind nevoja të trajtojmë shkurt kuptimet e mëposhtme:

❖ Momentet e një ndryshore rasti

Momentet janë konstante që karakterizojnë një shpërndarje probabilitare, të përcaktuara si më poshtë:

Përkufizim 15: Nëse X është një ndryshore rasti dhe r një numër i plotë pozitiv, atëherë moment jo qendror i rendit r të X quhet numri:

$$\mu_r = E(X^r) = \begin{cases} \sum_{i=1}^n x_i^r P(X = x_i), & \text{kur } X - \text{ndryshore diskrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r dF(x), & \text{kur } X - \text{ndryshore e vazhduar} \end{cases}$$

kurse moment qendror quhet numri:

$$\overline{\mu_r} = \begin{cases} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^r P(X = x_i), & \text{kur } X - \text{ndryshore diskrete} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^r dF(x), & \text{kur } X - \text{ndryshore e vazhduar} \end{cases}$$

Të dyja llojet e momenteve janë të lidhura sipas barazimit:

$$\overline{\mu_r} = E(X - \mu)^r = \sum_{h=0}^r (-1)^h \cdot C_h^r \cdot \mu^h \cdot \mu_{r-h}$$

Nga përkufizimi del që: $\mu_1 = E(X)$ kurse $\overline{\mu_2} = Var(X)$

Rëndësia: Nëse integrali tek përkufizimi i momenteve është konvergjent, kur njohim shpërndarjen probabilitare ne mund të llogarisim momentet e rendeve të ndryshme si dhe anasjelltas, njohja e momenteve bën të mundur të gjejmë në mënyrë unike shpërndarjen probabilitare të ndryshores së rastit (kjo do sqarohet pas funksionit prodhues të momenteve)

❖ Funksioni prodhues i momenteve i një ndryshore rasti

Përkufizim 16: Nëse X është një ndryshore rasti dhe t një numër real, $t \in \mathbb{R}$, atëherë funksion prodhues i momenteve për X quhet pritja matematikee funksionit

$$g(X) = e^{tX}.$$

Shënohet me $M_X(t)$, dhe me simbole mund të shkruhet kështu:

$$\begin{cases} M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum_i e^{tx_i} P(X = x_i), & \text{nëse } X \text{ është ndryshore diskrete.} \\ M_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} dF(x), & \text{nëse } X \text{ është ndryshore e vazhduar.} \end{cases}$$

Rëndësia:

1. Nga përkufizimi si dhe duke njohur funksionin e shpërndarjes, ne mund të gjejmë funksionet prodhuese të momenteve për shpërndarje të ndryshme.
2. Funksioni prodhues i momenteve, nëse ai ekziston në një interval të hapur rreth pikës 0, na lejon të gjejmë (për r jo negative), momentet e rendeve të ndryshme sipas formulës:

$$E(X^r) = M_X^{(r)}(0) = \frac{d^r M_X}{dt^r}(0) \text{ (Casella e Berger, 1990, fq.68-76).}$$

3. Teorema e unicitetit 2.3.1 (pa vertetim): Nëse dy ndryshore rasti X dhe Y kanë të njëjtin funksion prodhues të momenteve atëherë ata kanë të njëjtin funksion shpërndarje dhe anasjelltas, nëse dy ndryshore rasti X dhe Y kanë të njëjtin funksion shpërndarje atëherë ata kanë edhe të njëjtin funksion prodhues të momenteve (me supozimin se këto funksione ekzistojnë) (Gut, 2005, fq. 189-190).

Koment: Kjo Teoremë është shumë e rëndësishme dhe me vlera praktike, në disa raste kur duhet provuar që dy shpërndarje janë të njëjta, është më e lehtë të provohet barazia e funksioneve prodhuese të momenteve sesa e funksioneve të shpërndarjes (ose funksioneve të densitetit të probabilitetit).

Le ta zbatojmë këtë Teoremë, për shembull, në rastin e dy variablave X dhe Y që kanë shpërndarje binomiale.

Meqë X ka shpërndarje binomiale, kjo do të thotë nga përkufizimi se:

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = \sum e^{tx} C_n^x p^x q^{n-x} = \sum C_n^x (pe^t)^x q^{n-x} = (pe^t + q)^n.$$

Gjithashtu, meqë edhe Y ka shpërndarje binomiale, mund të shkruajmë në mënyrë analoge:

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \sum e^{ty} C_n^y p^y q^{n-y} = \sum C_n^y (pe^t)^y q^{n-y} = (pe^t + q)^n,$$

pra si konkluzion, variablat X dhe Y , që kanë shpërndarje të njëjtë (binomiale), kanë të njëjtin funksion prodhues të momenteve.

4. Funksioni prodhuesi i momenteve mund të zbërthehet në seri në një zonë rrethuese të pikës $= 0$.

$$M_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{\mu_r}{r!} t^r + o(t^r) \quad (2.3.1)$$

Bazuar në këtë zbërthim, tani bëhet e qartë se: kur njihen momentet e rendeve të ndryshme të një ndryshore rasti, mund të gjejmë funksionin prodhues të

momenteve për të dhe bazuar tek teorema e unicitetit këtij funksioni i korespondon vetëm një funksion i shpërndarjes.

Funksioni prodhues i momenteve mund të mos ekzistojë gjithmonë, ndërsa një funksion tjetër që gjeneron momentet në mënyrë të ngjashme me të, por që ekziston gjithmonë është funksioni karakteristik i një ndryshore rasti.

❖ Funksioni karakteristik i një ndryshore rasti

Përkufizim 17: Nëse X është një ndryshore rasti dhe t një numër real, $t \in \mathbb{R}$, atëherë funksion karakteristik për X quhet pritja matematike e funksionit $g(X) = e^{itX}$, ku i është njësia imagjinare. Shënohet me $C_X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, dhe me simbole jepet kështu:

$$\begin{cases} C_X(t) = E(e^{itX}) = \sum_i e^{itx_i} P(X = x_i), & \text{nëse } X \text{ është ndryshore diskrete.} \\ C_X(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF(x), & \text{nëse } X \text{ është ndryshore e vazhduar.} \end{cases}$$

1. Funksioni karakteristik ekziston gjithmonë sepse $E | e^{itX} | = 1$,

ku $e^{itX} = \cos tX + i \sin tX$

2. Nëse $Y = a \cdot X + b$, atëherë:

$$C_Y(t) = e^{ibt} \cdot C_X(at)$$

3. Funksioni karakteristik përcakton në mënyrë të vetme shpërndarjen probabilitare.

Teorema e unicitetit 2.3.2: Nëse dy ndryshore rasti të vazhduara kanë të njëjtin funksion karakteristik atëherë ato kanë dhe të njëjtin funksion shpërndarje.

Kështu, nëse dy ndryshore rasti kanë të njëjtin funksion karakteristik (me përjashtim të një bashkësie të numërueshme pikash) atëherë ata kanë të njëjtën shpërndarje dhe anasjelltas. Kjo veti e funksioneve karakteristike na jep një mënyrë alternative për të arritur te shpërndarja e një ndryshore rasti (Rao, 1973, fq. 99-104).

Nëse njohim funksionin e densitetit të një ndryshore rasti, nga përkufizimi, mund të gjejmë funksionin karakteristik të saj. Anasjelltas, nëse njohim funksionin karakteristik të një ndryshore rasti, mund të gjejmë funksionin e shpërndarjes ose të densitetit (kur ata ekzistojnë), bazuar te formula e mëposhtme e inversionit.

Formula e inversionit: Nëse X është një ndryshore rasti me vlera të plota, me funksion karakteristik $C_X(t)$, atëherë mund të gjejmë densitetin $\varphi_X(k)$ të saj si më poshtë:

$$\varphi_X(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \cdot C_X(t) \cdot dt$$

ndërsa në rastin kur ndryshorja X është e vazhduar dhe funksioni i saj karakteristik është i integrueshëm, kemi:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} \cdot C_X(t) \cdot dt \quad (2.3.2)$$

(<http://galton.uchicago.edu/~wichura/Stat304/Handouts/L12.cf2.pdf>, fq13-3&13-4)

Në aplikime të ndryshme, funksioni karakteristik quhet dhe transformimi Fourie i densitetit të ndryshores së rastit X .

Në një sërë problemash praktike, shpesh është më e lehtë të gjendet funksioni karakteristik i një ndryshore rasti dhe më pas prej formulës (2.3.2) të gjendet funksioni i densitetit të X .

Le të zbatojmë teoremën e unicitetit për dy ndryshore X dhe Y që kanë shpërndarje binomiale. Të tregojmë që ata kanë të njëjtin funksion karakteristik.

Meqë X ka shpërndarje binomiale, atëherë kemi:

$C_X(t) = E(e^{itX}) = \sum e^{itx} C_n^x p^x q^{n-x} = \sum C_n^x (pe^{it})^x q^{n-x} = (pe^{it} + q)^n$. Gjithashtu, meqë edhe Y ka shpërndarje binomiale, mund të shkruajmë në mënyrë analoge:

$C_Y(t) = E(e^{itY}) = \sum e^{ity} C_n^y p^y q^{n-y} = \sum C_n^y (pe^{it})^y q^{n-y} = (pe^{it} + q)^n$, pra si konkluzion, ndryshoret e rastit X dhe Y , që kanë shpërndarje të njëjtë (binomiale), kanë të njëjtin funksion karakteristik ashtu siç kishin edhe të njëjtin funksion prodhues të momenteve.

4. Funksioni karakteristik $C_X(t)$, lidhet me momentet e ndryshores së rastit X me anë të një relacioni që është shumë i rëndësishëm dhe i dobishëm për t'u përdorur në situata praktike.

$$\mu_r = i^{-r} \cdot \frac{d^r}{dt^r} C_X(t) |_{t=0} \quad (2.3.3)$$

5. Nëse ekzistojnë momentet $E(X^r)$, atëherë $C_X(t)$ mund të zbërthehet në seri të Mc Laurin rreth pikës $t = 0$ si më poshtë:

$$C_X(t) = 1 + (it)E(X) + \frac{(it)^2}{2!} E(X^2) + \dots + \frac{(it)^r}{r!} E(X^r) + o(t^r).$$

6. Jepet ndryshorja e rastit X , atëherë:

Nëse funksioni prodhues i momenteve përcakton në mënyrë të vetme shpërndarjen probabilitare atëherë edhe funksioni karakteristik e përcakton atë në mënyrë të vetme (ka vend edhe pohimi i anasjelltë). Kjo do të thotë se bazuar te funksioni prodhues i momenteve ose funksioni karakteristik, mund të nisemi prej njërit për të treguar se tjetri përcakton në mënyrë të vetme shpërndarjen. (Gut, 2005, fq 189-190).

Vërtet, nëse për ndryshoren e rastit X njohim funksionin e saj karakteristik $C_X(t)$, prej formulës (2.3.3) mund të gjejmë momentet e rendeve të ndryshme dhe kështu prej (2.3.1) gjejmë funksionin prodhues të momenteve. Më pas, bazuar në teoremën e unicitetit të funksionit prodhues të momenteve konkludojmë se edhe funksioni karakteristik përcakton në mënyrë të vetme shpërndarjen probabilitare.

Teoremë 2.3.3: (shumëzimit) Le të jenë $X_1, X_2, \dots, X_n$, "n" ndryshore të rastit të pavarur, për të cilët ekzistojnë funksionet prodhuese të momenteve për

$|t| < h > 0$. Nëse shënojmë:

$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, atëherë:

$C_{S_n}(t) = C_{X_1}(t) \cdot C_{X_2}(t) \cdot \dots \cdot C_{X_n}(t)$. Për më shumë, nëse $X_1, X_2, \dots, X_n$ kanë të njëjtën shpërndarje, atëherë: $C_{S_n}(t) = (C_{X_1}(t))^n$.

Teoremë 2.3.4: Nëse $X_1, X_2, \dots, X_n$ është zgjedhje nga popullimi me funksion shpërndarje $F(x)$, funksion karakteristik $C(t)$ dhe janë të pavarur, atëherë:

statistika $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$, ka funksion karakteristik $\psi(t) = [C\left(\frac{t}{n}\right)]^n$

Vërtet,

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\frac{t}{n}x_1} dF(x_1) \cdot e^{i\frac{t}{n}x_2} dF(x_2) \cdot \dots \cdot e^{i\frac{t}{n}x_n} dF(x_n) = \\ &= C\left(\frac{t}{n}\right) \cdot C\left(\frac{t}{n}\right) \cdot \dots \cdot C\left(\frac{t}{n}\right) = [C\left(\frac{t}{n}\right)]^n\end{aligned}$$

Gjejmë tani funksionin karakteristik për ndryshoren e rastit X që ka shpërndarje normale me parametra μ dhe σ^2 , pra $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Pohim: Nëse $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, atëherë funksioni i saj karakteristik është

$$C_X(t) = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}}$$

Vërtet,

$$\begin{aligned}C_X(t) &= \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \\ &= e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma} - it\sigma\right)^2} dx = \text{zv: } \frac{x-\mu}{\sigma} - it\sigma = z \\ &= e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot \sigma \cdot dz = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}}\end{aligned}$$

Konkluzioni: Nëse $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ atëherë $C_X(t) = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}}$

Rast i veçantë: Nëse $X \sim N(0,1)$ atëherë $C_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$

Ne, mund të mbështetemi tek funksioni karakteristik i ndryshores së rastit me shpërndarje normale si dhe tek teorema e unicitetit të funksionit karakteristik për të gjetur shpërndarjet e disa statistikave të tjera si:

$$z = \sum_{i=1}^n x_i \text{ dhe të } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

○ Për ndryshoren $z = \sum_{i=1}^n x_i$ kemi:

$$C_z(t) = [C_x(t)]^n = e^{itn\mu - \frac{t^2 \cdot n \cdot \sigma^2}{2}}.$$

Kjo do të thotë se ndryshorja e rastit $z \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

- Për ndryshoren e rastit $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ kemi

$$C_{\bar{x}}(t) = [C_x(\frac{t}{n})]^n = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2n}}$$

Kjo do të thotë se ndryshorja e rastit $\bar{x} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Teoremë 2.3.5: Le të jenë $(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1})$, $(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2})$, dy zgjedhje të pavarura respektivisht me vëllim n_1 dhe n_2 nga bashkësitë

$$N(\mu_1, \sigma_1^2) \text{ dhe } N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

N.q.s $\exists c_i \neq 0, \forall i = \overline{1, 2}$ atëherë $f = c_1 \bar{X}_1 + c_2 \bar{X}_2$ ka shpërndarje

$$N(\sum_{i=1}^2 c_i \mu_i; \sum_{i=1}^2 \frac{c_i^2 \sigma_i^2}{n_i})$$

Vertetim: (me ndihmën e funksionit karakteristik)

Meqë $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, atëherë:

$$C_{x_1}(t) = E(e^{itx_1}) = \exp(it\mu_1 - \frac{t^2 \cdot \sigma_1^2}{2})$$

del se $\bar{X}_1$ ka funksion karakteristik:

$$C_{\bar{X}_1}(t) = [C_{x_1}(\frac{t}{n_1})]^{n_1}$$

nga kjo $c_1 \bar{X}_1$ ka funksion karakteristik:

$$C_{c_1 \bar{X}_1}(t) = [C_{x_1}(\frac{c_1 t}{n_1})]^{n_1} = \exp(itc_1 \mu_1 - \frac{t^2 \cdot \sigma_1^2 \cdot c_1^2}{2 n_1})$$

Njësoj, meqë $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, atëherë:

$$C_{x_2}(t) = E(e^{itx_2}) = \exp(it\mu_2 - \frac{t^2 \cdot \sigma_2^2}{2})$$

nga kjo $\bar{X}_2$ ka funksion karakteristik:

$$C_{\bar{X}_2}(t) = [C_{x_2}(\frac{t}{n_2})]^{n_2}$$

prej këtui del se $c_2 \bar{X}_2$ ka funksion karakteristik:

$$C_{c_2 \bar{X}_2}(t) = [C_{x_2}(\frac{c_2 t}{n_2})]^{n_2} = \exp(itc_2 \mu_2 - \frac{t^2 \sigma_2^2 c_2^2}{2 n_2})$$

Atëherë nga pavarësia e zgjedhjeve, kemi që:

$$f = c_1 \overline{X_1} + c_2 \overline{X_2}$$

ka për funksion karakteristik:

$$\begin{aligned} C_{c_1 \overline{X_1}}(t) \cdot C_{c_2 \overline{X_2}}(t) &= \exp \left(itc_1 \mu_1 - \frac{t^2 \sigma_1^2 c_1^2}{2 n_1} \right) \cdot \exp \left(itc_2 \mu_2 - \frac{t^2 \sigma_2^2 c_2^2}{2 n_2} \right) = \\ &= \exp \left[(it(c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2)) - \frac{t^2}{2} \left(\frac{c_1^2 \sigma_1^2}{n_1} + \frac{c_2^2 \sigma_2^2}{n_2} \right) \right] \end{aligned}$$

Prej këtui del se funksioni $f = c_1 \overline{X_1} + c_2 \overline{X_2}$, ka shpërndarje normale

$$N\left(\sum_{i=1}^2 c_i \mu_i; \sum_{i=1}^2 \frac{c_i^2 \sigma_i^2}{n_i}\right)$$

Rast i veçantë:

○ N.q.s $c_1 = 1$ dhe $c_2 = -1$, atëherë funksioni linear $f = \overline{X_1} - \overline{X_2}$, ka shpërndarje $N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

○ N.q.s $c_1 = 1$ dhe $c_2 = 1$, atëherë funksioni linear $f = \overline{X_1} + \overline{X_2}$, ka shpërndarje $N\left(\mu_1 + \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$

○ N.q.s zgjedhjet e pavarura janë nga bashkësia normale e normuar, atëherë funksioni linear f ka shpërndarje $N(0, \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2})$

Teorema 2.3.5 mund të përgjithësohet edhe në rastin e n zgjedhjeve të pavarura kështu:

Le të jenë

$$(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n_1}), (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n_2}), \dots, (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn_k})$$

k zgjedhje të pavarura respektivisht me vëllime $n_1, n_2, \dots, n_k$ nga bashkësitë $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \dots, N(\mu_k, \sigma_k^2)$. N.q.s $\exists c_i \neq 0, \forall i = \overline{1, k}$, atëherë:

funksioni $f = c_1 \overline{X_1} + c_2 \overline{X_2} + \dots + c_k \overline{X_k}$ ka shpërndarje normale

$$N\left(\sum_{i=1}^k c_i \mu_i; \sum_{i=1}^k \frac{c_i^2 \sigma_i^2}{n_i}\right)$$

Bazuar në kuptimet e funksionit prodhues të momenteve si dhe të funksionit karakteristik, mund të flasim për konvergjencën në shpërndarje të një vargu ndryshoresh rasti.

Teorema Levy-Cramer 2.3.6 (pa vertetim):

KNM që $X_n \xrightarrow{\text{shpërndarje}} X$, pra që

$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$, është që:

$\lim_{n \rightarrow \infty} C_{X_n}(t) = C_X(t)$, ku $C_X(t)$ është funksioni karakteristik i ndryshores së rastit X dhe $C_X(t)$ – i vazhduar në pikën $t=0$.

(Resnick,1999,fq304-305).

Teoremë 2.3.7 (pa vertetim)(Loeve,1977, fq 132)

Le të jetë $\{X_n\}$ një varg ndryshoresh rasti dhe $F_n(x), M_{X_n}(t)$ përkatësisht funksioni i shpërndarjes dhe funksioni prodhues i momenteve i vektorit $X=\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ si dhe $F(x)$ dhe $M_X(t)$ funksioni i shpërndarjes dhe ai prodhues i momenteve të ndryshores së rastit X . Themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon në shpërndarje tek X atëherë dhe vetëm atëherë kur:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M_{X_n}(t) = M_X(t), \text{ për çdo } t \in]-h; h[.$$

Rezultati i kësaj teoreme (si dhe ai i teoremës Levy-Cramer) është i rëndësishëm dhe me vlera praktike. Në rastin kur duam të gjejmë limitin e vargut të ndryshoreve të rastit:

- Në fillim gjejmë limitin e vargut korespondues të funksioneve prodhues të momenteve.
- Shohim nëse ky limit është funksion prodhues për ndonjë ndryshore rasti X .
- Konkludojmë se X është limiti i vargut fillestar të ndryshoreve të rastit.

Në kapitullin e tretë, janë treguar zbatime të këtyre teoremave që tregojnë se si shpërndarja normale apo normale e normuar, mund të shihen si shpërndarje limite (asimptotike) për vargje të veçanta të ndryshoreve të rastit. Prej këtu del se shpërndarja normale apo normale e normuar mund të shërbejnë si përafrime të shpërndarjeve për të tilla vargje.

KAPITULLI III

Përafrimi i shpërndarjes së një statistike me shpërndarjen normale

Në teorinë e probabilitetit, baza empirike mbi të cilën mbështetet modeli i fenomeneve të rastit është llogaritja e dendurive relative. Ndërsa në statistikë, vendimet apo konkluzionet bazohen tek zgjedhjet e mëdha (nëse është e mundur). Kjo ndodh sepse zgjedhjet e mëdha kanë efekt zbutës, rastësia që është gjithmonë e pranishme tek zgjedhjet e vogla, këtu zbutet.

Për shembull, përdorimi i shpeshtë i shpërndarjes normale mbështetet në faktin që: në një zgjedhje, mesatarja aritmetike ka shpërndarje afërsisht normale kur numri i elementeve të zgjedhjes është i madh.

Gjithçka mbështetet në konceptin e konvergjencës:

- Çfarë ndodh me vargun $\{X_n\}$ kur rritet n ?
- Çfarë ndodh me shumën $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ me rritjen e n ?
- Çfarë ndodh me $\max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ me rritjen e n ? etj

Më poshtë do të tregojmë disa mosbarazime probabilitare të rëndësishme, lloje të ndryshme të konvergjencës si dhe ligjet e numrave të mëdhenj dhe teoremat qendrore limite, pjesë mjaft e rëndësishme e teorisë së probabilitetit.

3.1 Mosbarazime probabilitare të rëndësishme

Këto mosbarazime janë të dobishme si instrumente mbi të gjitha në ato raste kur duhet të vërtetohen vetitë asimptotike të ndryshoreve të rastit me shpërndarje probabilitare të çfarëdoshme.

Teoremë 3.1.1 (Mosbarazimi i Markovit)

Në qoftë se X është ndryshore rasti, që merr vlera jo negative, atëherë $\forall a > 0$ dhe $\beta \geq 0$ kemi:

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X^\beta)}{a^\beta}$$

Teoremë 3.1.2 (Mosbarazimi i Chebyshev-it)

Nëse X është një ndryshore rasti me shpërndarje çfarëdo (nuk ka rëndësi shpërndarja probabilitare), me mesatare μ dhe variancë σ^2 ,

atëherë $\forall \varepsilon > 0$ kemi:

$$P(|X - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

Mosbarazimi i Chebyshev-it mund të shkruhet në këto dy forma alternative:

$$\circ P(|X - \mu| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

dhe kur $\varepsilon = k\sigma$, ku k është numër i plotë pozitiv, kemi:

$$\circ P(|X - \mu| < k\sigma) \geq 1 - \frac{1}{k^2} \quad \text{ose} \quad P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2} \quad (3.1.1)$$

Rrjedhim:

Në qoftë se ndryshorja e rastit X ka $E(X) = E(X^2) = \sigma^2 = 0$ atëherë:

$$P(X=0) = 1$$

3.2 Lloje të ndryshme të konvergjencës të një vargu ndryshoresh të rastit

Le të jetë $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ një proces stokastik, me komponente reciprokisht të pavarura.

Çdo bashkësi prej n elementesh të tilla është zgjedhje me vëllim n nga bashkësia që ka funksion shpërndarje $F(x)$.

Ky proces stokastik shpesh quhet “zgjedhje thjesht e rastit” nga bashkësia e pafundme ose “zgjedhje rasti” nga shpërndarja probabilitare.

Ekzistojnë mënyra të ndryshme për të përcaktuar konvergjencën e një vargu ndryshoresh rasti $\{X_n\}$ drejt një ndryshore rasti X .

Përkufizim 18: Themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon te X sipas masës probabilitare nëse:

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$$

Në këtë rast flitet për “konvergjencë të fortë” ose “pothuajse kudo”.

Përkufizim 19: Them i se vargu $\{X_n\}$ konvergjon tek X sipas masës probabilitare,

nëse $\forall \varepsilon > 0$ kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n - X| < \varepsilon) = 1$$

Në këtë rast flitet për “konvergjencë të dobët”.

Përkufizim 20: Them i se vargu $\{X_n\}$ konvergjon te X sipas katrorit mesatar nëse:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0$$

Teoremë 3.2.1:

Jepet vargu $\{X_n\}$ i cili konvergjon sipas probabilitetit ndryshorja e rastit X për n që rritet pa mbarim, pra:

$$X_n \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} X$$

Në këto kushte provohet se vargu $\{X_n\}$ konvergjon në shpërndarje te X për n që rritet pa mbarim:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} X$$

Vërtetim:

$$\begin{aligned} F_{X_n}(x) &= P_{X_n}(X_n \leq x) = P_{X_n, X}((X_n \leq x) \cap (|X_n - X| \leq \varepsilon)) + \\ &+ P_{X_n, X}((X_n \leq x) \cap (|X_n - X| > \varepsilon)) \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

nga ana tjetër:

$$((X_n \leq x) \cap (|X_n - X| \leq \varepsilon)) \subseteq ((X_n \leq x) \cap (X - X_n \leq \varepsilon)) = (X \leq x + \varepsilon)$$

si dhe

$$((X_n \leq x) \cap (|X_n - X| > \varepsilon)) \subseteq (|X_n - X| > \varepsilon)$$

atëherë prej (3.2.1) kemi:

$$F_{X_n}(x) \leq P_X(X \leq x + \varepsilon) + P_{X_n, X}(|X_n - X| > \varepsilon)$$

Këtu kalojmë në limit për n që shkon në infinit.

Meqë $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{X_n, X}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

gjithashtu konsiderojmë:

$$\begin{aligned} F_X(x - \varepsilon) &= P_X(X \leq x - \varepsilon) = \\ &= P_{X_n, X}((X \leq x - \varepsilon) \cap (|X_n - X| \leq \varepsilon)) + P_{X_n, X}((X \leq x - \varepsilon) \cap (|X_n - X| > \varepsilon)) \end{aligned}$$

duke arsyetuar në mënyrë analoge si më sipër kemi:

$$((X \leq x - \varepsilon) \cap (|X_n - X| \leq \varepsilon)) \subseteq ((X \leq x - \varepsilon) \cap (X_n - X \leq \varepsilon)) = (X_n \leq x)$$

dhe

$$((X \leq x - \varepsilon) \cap (|X_n - X| > \varepsilon)) \subseteq (|X_n - X| > \varepsilon)$$

Atëherë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \geq F_X(x - \varepsilon)$$

Si përfundim

$$F_X(x - \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) \leq F_X(x + \varepsilon)$$

Kjo do të thotë se nëse x është pikë vazhdueshmërie për funksionin $F_X(x)$, kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{X_n}(x) = F_X(x) \quad \text{pra } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} X$$

Më poshtë do të tregojmë tani disa prej pohimeve që tregojnë lidhjen në mes llojeve të ndryshme të konvergjencës.

(Për të treguar që formulimet e ndryshme të konvergjencës në shpërndarje janë ekuivalente mund t'i referohemi Parzen, 1992, fq. 514-7).

Teoremë 3.2.2: Nëse $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ atëherë $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$ (Jacod dhe Protter, 2000, fq 144)

Kjo teoremë tregon se nga “konvergjenca pothuajse kudo” del “konvergjenca sipas masës probabilitare”, pra:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pothuajse kudo}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

Vërtetim:

Prej $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pothuajse kudo}} X$, del se:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon, \forall n > N_\varepsilon, P(|X_n - X| < \varepsilon) \cong 1$$

Kjo do të thotë se: $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{X_n, X}(\cap_{n > N_\varepsilon} |X_n - X| < \varepsilon) = 1$ (3.2.2)

Ngjarja: $\cap_{n > N_\varepsilon} |X_n - X| < \varepsilon \subset |X_n - X| < \varepsilon$

Prej këtui: $P_{X_n, X}(\cap_{n > N_\varepsilon} |X_n - X| < \varepsilon) \leq P(|X_n - X| < \varepsilon)$

Duke kaluar në limit për n që shkon në infinit dhe prej (3.2.2) del se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{X_n, X}(|X_n - X| < \varepsilon) = 1.$$

Nga kjo del se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{X_n, X}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \text{ pra } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

Teoremë 3.2.3: Nëse vargu $\{X_n\}$ konvergjon te X sipas “katrorit mesatar” atëherë ai konvergjon edhe sipas “masës probabilitare” te X .

Kjo teoremë mund të paraqitet skematikisht kështu:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{katror mesatar}} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

Vërtetim:

Meqë $\{X_n\}$ konvergjon te X në katror mesatar atëherë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n - X)^2 = 0 \quad (3.2.3)$$

Bazuar në mosbarazimin e Chebyshev-it mund të shkruajmë:

$$P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(X_n - X)^2$$

Te ky mosbarazim duke kaluar në limit për n , që shkon në infinit, dhe prej barazimit (3.2.3) kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_{X_n, X}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0, \text{ pra } X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

Teoremë 3.2.4: Nëse g është funksion i vazhdueshëm dhe

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pothuajse kudo}} X$$

$$\text{atëherë kemi: } g(X_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{pothuajse kudo}} g(X)$$

(marrë prej:

<http://www.dip-statistica.uniba.it/html/docenti/pollice/cp2012/DisPro5.pdf>)

Vërtetim: Meqë funksioni g është i vazhdueshëm kemi që kur $X_n \rightarrow X$ atëherë

$$g(X_n) \rightarrow g(X).$$

E shprehur me gjuhën e ngjarjeve kjo do të thotë se:

$$\{\tilde{\omega} \in \Omega: X_n(\tilde{\omega}) \rightarrow X(\tilde{\omega})\} \subset \{\tilde{\omega} \in \Omega: g(X_n(\tilde{\omega})) \rightarrow g(X(\tilde{\omega}))\}$$

Prej këtui del:

$$P(g(X_n) \rightarrow g(X)) \geq P(X_n \rightarrow X). \quad (3.2.4)$$

Nga kushti, meqë kemi: $P(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$ dhe prej (3.2.4) del se edhe:

$$P[\lim_{n \rightarrow \infty} g(X_n) = g(X)] = 1$$

Teorema Slutsky (Lubian,1999, fq6)

Le të jenë $\{X_n\}$ dhe $\{Y_n\}$ dy vargje ndryshoresh rasti dhe α një konstante.

Në qoftë se $\{X_n\} \xrightarrow{\text{shpërndarje}} X$ dhe $\{Y_n\} \xrightarrow{\text{probabilitet}} \alpha$, atëherë:

- $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{shpërndarje}} X + \alpha$
- $Y_n \cdot X_n \xrightarrow{\text{shpërndarje}} \alpha X$
- $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{\text{shpërndarje}} \frac{X}{\alpha}$ për $\alpha \neq 0$

Vërejtje:

- Pohimi i dytë vlen edhe në rastin kur $\alpha = 0$. Në këtë rast themi se $Y_n \cdot X_n \xrightarrow{\text{shpërndarje}} 0$
- Kjo teoremë është e vërtetë edhe në rastin kur $\{Y_n\}$ është një varg matricash me përmasa $(k \times k)$ që konvergjon sipas probabilitet (element për element) tek matrica A me përmasa $(k \times k)$. Në këtë rast pika e tretë e kësaj teoreme duhet kuptuar si:
 $Y_n^{-1} \cdot X_n \xrightarrow{\text{shpërndarje}} A^{-1} \cdot X$, nëse matrica A ka të anasjelltë

3.3 Ligjet e numrave të mëdhenj

Ka situata praktike në të cilat, duke pasur një bashkësi të numërueshme vlerash të një madhësie të panjohur (për shembull, të një madhësie fizike), secila prej të cilave përmban gabime të rastit, duhet të vlerësohet vlera reale e madhësisë. Zgjidhja e këtij problemi konsiston në gjetjen e mesatares aritmetike të vlerave të vrojtuar individuale. Eksperiencia sugjeron se me rritjen e numrit të vrojtimit mesatarja aritmetike e vlerave të vrojtuar tenton drejt një konstante që mund të merret si vlera e panjohur e madhësisë. Pozicionimi i mesatares, në rastin e kryerjes së një numri të konsiderueshëm vrojtimesh, njihet si “ligji empirik i numrave të mëdhenj”.

Në teorinë e probabiliteteve, ekzistojnë disa teorema që quhen ligjet e numrave të mëdhenj që përmbajnë kushte të mjaftueshme dhe mbështesin “ligjin empirik të numrave të mëdhenj”.

Në kushtet kur ligji i numrave të mëdhenj bazohet te konvergjenca “sipas masës probabilitare” të një vargu ndryshoresh rasti atëherë ai mund të quhet edhe *Ligji i Dobët i Numrave të Mëdhenj*, ndërsa në rastin kur ai bazohet në “konvergjencën e fortë” ose “pothuajse kudo” ai quhet *Ligji i Fortë i Numrave të Mëdhenj*.

Teorema Khintchin

Teoremë 3.3.1: N.q.s($X_1, X_2, \dots, X_n$) është zgjedhje nga bashkësia me funksion shpërndarje $F(x)$, për të cilën ekziston $E(x) = \mu$ e fundme, atëherë vlera mesatare

$$\bar{X} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} \mu$$

Vërtetim:

Funksioni karakteristik $C(t)$ që i korrespondon $F(x)$, mund të paraqitet në formën (në zonën rrethuese të pikës $t=0$):

$$C(t) = 1 + i \mu t + o(t), \text{ m.q.s } \mu \text{ ekziston}$$

(dimë se: N.q.s ndryshorja e rastit X ka moment të rendit “ r ”, atëherë në një zonë rrethuese të pikës $t=0$, funksioni $C(t)$ mund paraqitet:

$$C(t) = 1 + \sum_{k=1}^r \frac{(it)^k}{k!} \mu_k + o(t^r) \quad (3.3.1)$$

Prej këtui, duke zbatuar (3.3.1), ku μ_r për $r = 1$ është $\mu_1 = \mu$, kemi:

$$C(t) = 1 + \sum_{h=1}^r \frac{(it)^h}{h!} \mu_h + o(t^r) = 1 + i \mu t + o(t) \text{ (në zonën rrethuese të pikës } t=0)$$

Meqë $\bar{x}$ ka funksion karakteristik $[C(\frac{t}{n})]^n$, në rastin tonë kemi:

$$[C(\frac{t}{n})]^n = [1 + i \mu \frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})]^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [C(\frac{t}{n})]^n = \lim_{n \rightarrow \infty} [1 + i \mu \frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})]^n =$$

$$= \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n[1 + i \mu \frac{t}{n} + o(\frac{t}{n}) - 1] = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} (i \mu t + n \cdot o(\frac{t}{n})) = e^{i \mu t}$$

sepse: $n \cdot o(\frac{t}{n}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \forall t$, pra $\varphi_{\bar{x}}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{i \mu t}$ (i vazhduar)

Gjejmë tani funksionin karakteristik të madhësisë së rastit μ , që e konsiderojmë si ndryshore rasti diskrete me një vlerë, me tabelë shpërndarje:

X	μ	$\neq \mu$
P	1	0

Në rastin tonë, ndryshorja e rastit diskrete merr vetëm një vlerë ($X = \mu$), është e degjeneruar. Funksionin e shpërndarjes e shënojmë:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{për } x \geq \mu \\ 0 & \text{për } x < \mu \end{cases}$$

Duke ditur që funksioni karakteristik për ndryshoren e rastit diskrete është:

$$C(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k, \text{ për rastin tonë } (x = \mu) \text{ kemi } C(t) = e^{it\mu} \cdot 1 = e^{it\mu}.$$

Arritëm që $C_{\bar{X}}(t)$ dhe $C_{\mu}(t) \xrightarrow[\text{probabilitet}]{n \rightarrow \infty} e^{it\mu}$ për $n \rightarrow \infty$, nga këto rezultate duke u bazuar në Teoremën Levy-Cramer (më poshtë) konkludojmë që:

$$\bar{X} \xrightarrow[\text{probabilitet}]{n \rightarrow \infty} \mu$$

Teoremë: Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që vargu i ndryshoreve të rastit

$$(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots) \xrightarrow[\text{sipas shpërndarjes për } n \rightarrow \infty]{} X$$

$$(\text{pra që } F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x))$$

është që për çdo t , vargu i funksioneve karakteristike:

$$C_1(t), C_2(t), \dots \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} C(t)$$

dhe funksioni $C(t)$ të jetë i vazhduar për $t = 0$. Në këto kushte funksioni limit $C(t)$ përputhet me funksionin karakteristik të ndryshores së rastit X .

Pra meqë $e^{it\mu}$ është funksioni karakteristik për $\bar{X}$ dhe i vazhduar në $t=0$, direkt rrjedh që:

$$\bar{X} \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} \mu$$

Vërejtje: N.q.s në Teoremën Khintchin, supozojmë se ndryshorja e rastit X ka:

$E(x) = \mu$ dhe $\text{Var}(x) = \sigma^2$ të fundëm, atëherë:

$$\bar{X} \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} \mu$$

Vërtetim: Sipas mosbarazimit të Chebyshevit kemi:

$$(P|X - \mu| \geq t\sigma) \leq \frac{1}{t^2};$$

$$P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(|\bar{X} - \mu| \geq \varepsilon) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} = 0,$$

$$\text{Pra } \bar{X} \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} \mu$$

Përgjithësim i Teoremës Khintchin, rasti k dimensional (pa vërtetim)

Teoremë 3.3.2:

Jepet $(X_1, X_2, \dots, X_k)$ zgjedhje nga bashkësia me funksion shpërndarje

$F(x_1, x_2, \dots, x_k)$, ku $X_1 = (x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1n})$ është zgjedhje nga popullimi me $E(x) = \mu_1$, $X_2 = (x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2n})$ është zgjedhje nga popullimi me

$E(x) = \mu_2, \dots, X_k = (x_{k1}, x_{k2}, \dots, x_{kn})$ është zgjedhje nga popullimi me

$E(x) = \mu_k$. Nëse vektori $E(x) = \mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ është i fundëm, atëherë:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{pmatrix} \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} \mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_k \end{pmatrix}$$

Teoremë 3.3.3 (e Kolmogorov 1, pa vërtetim)

Jepet $\{X_n\}$ një varg ndryshoresh rasti të pavarura, të tillë që: $E(X_n) = \mu_n$ dhe $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$.

Atëherë, nëse seria $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2}$ është konvergjente, kemi që vargu $\{\bar{X}_n - \bar{\mu}_n\}$ kënaq ligjin e fortë të numrave të mëdhenj, pra $P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \bar{\mu}_n) = 1$

(për vërtetimin mund t'i referohemi Rao, 1973, fq.114-115)

Teoremë 3.3.4 (e Kolmogorov 2, pa vërtetim)

Nëse $\{X_n\}$ është një varg ndryshoresh rasti të pavarura dhe me shpërndarje të njëjtë atëherë konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që

$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mu) = 1$ është që të ekzistojë $E(X_n)$ dhe të kemi: $E(X_n) = \mu$.

(për vërtetimin mund t'i referohemi Rao, 1973, f.115-116)

Më poshtë, është paraqitur formulimi i Bernoullit për Ligjin e Numrave të Mëdhenj.

Jepet $\{X_n\}$ një varg ndryshoresh rasti të pavarur dhe me shpërndarje të bernoullit, pra të gjeneruara nga prova bernoulliane. Shënoj me p “probabilitetin e suksesit” dhe me $q = 1 - p$, “probabilitetin e dështimit”.

Kemi që secila prej ndryshoreve të dhëna merr vlerën 1 me probabilitet p ose vlerën 0 me probabilitet q .

Gjithashtu $E(X_n) = p$ dhe $\text{Var}(X_n) = p \cdot q$

Shumat e pjesshme:

$$S_1 = X_1; S_2 = X_1 + X_2; S_3 = X_1 + X_2 + X_3; \dots S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

mund të shihen si ndryshore rasti që paraqesin dendurinë absolute të sukseseve në n prova të Bernoullit.

Shënojmë:

$S_n \sim B(n, p)$, kemi $E(S_n) = n \cdot p$ dhe $\text{Var}(S_n) = n \cdot p \cdot q$

Vargu:

$$R_n = \frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}, \text{ mund të shihet si varg i dendurive}$$

relative të sukseseve në n prova.

$$\text{Llogarisim } E(R_n) = \frac{n \cdot p}{n} = p$$

$$\text{si dhe } \text{Var}(R_n) = \text{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) = \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2} = \frac{n \cdot p \cdot q}{n^2} = \frac{p \cdot q}{n}$$

Teoremë 3.3.5 (Teorema e Bernoullit)

Nëse $\{X_n\}$ është një varg ndryshoresh rasti të pavarura dhe me shpërndarje të Bernoullit, atëherë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|R_n - p| < \varepsilon) = 1$$

Vërtetim:

Për ndryshoren e rastit R_n , prej mosbarazimit të Chebyshevit kemi:

$$P(|R_n - E(R_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\text{Var}(R_n)}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$P(|R_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{\frac{p \cdot q}{n}}{\varepsilon^2} \Rightarrow$$

$$P(|R_n - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2}$$

Kaloj në limit për $n \rightarrow \infty$ dhe meqë $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p \cdot q}{n \cdot \varepsilon^2} = 0$,

del se edhe $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|R_n - p| \geq \varepsilon) = 0$

Prej këtui nxjerrim që: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|R_n - p| < \varepsilon) = 1$

3.4 Teoremat qendrore limite

Më poshtë janë treguar disa zbatime të teoremave të mësipërme që njihen si Teoremat Qendrore Limite për shkak të disa varianteve të formulimit të tyre. Këto teorema kanë zbatime të shumta në praktikë dhe në thelb tregojnë se: kur plotësohen kushte të caktuara, shuma e ndryshoreve të rastit të pavarura tenton drejt shpërndarjes normale kur numri i elementeve të zgjedhjes rritet pambarim. Me fjalë të tjera, nuk është e nevojshme të kemi shumë informacion mbi natyrën e ndryshoreve nëse jemi të interesuar për shumën e tyre.

Historia e teoremave limite fillon me teoremat limite të Bernulit (1713) dhe më pas vijon me teoremat limite të De Moivre dhe Laplace në fundin e shekullit të tetëmbëdhjetë. Më pas, Poisson ja doli në mënyrë të suksesshme të bëjë përgjithësimin e teoremave të Bernoulli-t, De Moivre dhe Laplace. Sot, i njohim këto teorema si ligjet e numrave të mëdhenj, një prej pjesëve themelore të teorisë së probabilitetit.

Konsideroj të parën Teoremën e Linderberg-Levy, që njihet si Teorema Qendrore Limite në formë të dobët.

Shpërndarja limite e shumës së zgjedhjes dhe të mesatares së zgjedhjes

Rasti njëdimensional

Jepet vargu $\{X_n\}$, i “n” ndryshoreve të rastit.

Shënoj: $z = \sum_{i=1}^n x_i$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{z}{n}$$

N.q.s për shpërndarjen e bashkësisë ekziston vlera mesatare dhe varianca të fundme, atëherë ne mund të themi më shumë për karakteristikat e shpërndarjes së $\bar{x}$ dhe z kur n rritet pambarim

Teorema Linderberg-Levy

Teoremë 3.4.1: N.q.s z është shuma e zgjedhjes me vëllim n dhe $\bar{x}$ është vlera mesatare e zgjedhjes, të nxjerra nga bashkësia me variancë të fundme σ^2 dhe pritje matematike μ , atëherë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} < y\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left[\frac{\sqrt{n}(\bar{x} - \mu)}{\sigma} < y\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

Esenciale në këtë teoremë është që:

1. Ndryshorja e rastit $\bar{x}_n \xrightarrow{\infty} N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
2. Ndryshorja e rastit $(\bar{x} - \mu)\sqrt{nn} \xrightarrow{\infty} N(0, \sigma^2)$
3. Ndryshorja e rastit $\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\infty} N(0, 1)$
4. Ndryshorja e rastit $z_n \xrightarrow{\infty} N(n\mu, n\sigma^2)$,

Vërtetim:

Ndryshorja e rastit $\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ mund të paraqitet kështu:

$$\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{n\bar{x} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \quad \text{Shënojmë:}$$

$C(t)$ funksionin karakteristik të $\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pra:

$$C(t) = E\left(e^{it\frac{x - \mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$$

dhe me $C_n(t)$ funksionin karakteristik të ndryshores së rastit $\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pra:

$$C_n(t) = E\left(e^{it\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right)$$

Mund të shkruajmë:

$$\begin{aligned} C_n(t) &= E\left(e^{it\frac{z - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right) = E\left[e^{it\frac{\sum_{\xi=1}^n x_{\xi} - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}}\right] = \\ &= E\left[e^{it\frac{\sum_{\xi=1}^n (x_{\xi} - \mu)}{\sigma\sqrt{n}}}\right] = [C(t)]^n \end{aligned}$$

Dimë se:

Nëse X ka moment të rendit r në zonën rreth $t=0$, atëherë:

$$C(t) = 1 + \sum_{k=1}^r \frac{it^k}{k!} \mu_k + o(t^r) \quad (3.4.1)$$

E zbatuar për madhësinë e rastit $\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ kemi:

- $\mu_1 = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)$ (që është e barabartë me zero) (3.4.2)
- $\mu_2 = E\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2$

prandaj duke zbatuar (3.4.1) kemi:

$$C_{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) = 1 + it\mu_1 - \frac{t^2}{2!}\mu_2 + o(t^2) \text{ ose sipas barazimeve të mësipërme} \quad (3.4.2)$$

kemi:

$$\begin{aligned} C_{\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}}(t) &= 1 + it E\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{t^2}{2!} E\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right); \\ \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [C(t)]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + it E\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \frac{t^2}{2!} E\left(\frac{(x-\mu)^2}{n\sigma^2}\right) + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2} E(x-\mu)^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{t^2}{2n\sigma^2} \sigma^2 + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{n}\right) \right]^n = \exp \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\frac{t^2}{2n}\right) - 1 \right] \\ &= e^{-\frac{t^2}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{pra } \lim_{n \rightarrow \infty} C_n(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \quad (3.4.3)$$

$$(n \cdot o\left(\frac{t^2}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0)$$

Ana e djathtë e barazimit (3.4.3) është funksioni karakteristik i ndryshores së rastit me shpërndarje normale të normuar $N(0,1)$ atëherë nga teorema Levy-Cramer rrjedh që:

$$\frac{z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X \sim N(0, 1)$$

Prej këtui, mund të tregojmë se ndryshorja e rastit $z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} N(n\mu, n\sigma^2)$.

Kjo sepse $E\left(\frac{z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} (E(z) - n \cdot \mu) = 0$, nga kjo del se $E(z) = n \cdot \mu$ dhe

$$D\left(\frac{z-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{n\sigma^2} D(z) = 1, \text{ prej këtui del se } D(z) = n \cdot \sigma^2.$$

Rrjedhim

Teorema e De Moivre-Laplace-s

Teoremë 3.4.2: Në qoftë se ndryshorja e rastit Z ka shpërndarje binomiale me parametër p , pra $Z \sim B(n, p)$, atëherë $Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} N(np, npq)$

Vërtetim:

Ndryshorja e rastit Z me shpërndarje binomiale mund të shihet si shumë e zgjedhjeve me vëllim “ n ” nga shpërndarja e Bernulit $B_1(1, p)$.

Kjo do të thotë se $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ku $X_k \sim B_1(1, p)$ dhe:

X_k	0	1
p	q	p

Pra zgjedhja $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ është bërë nga bashkësia me shpërndarje të Bernulit që ka:

prirje matematike $E(X) = p$ dhe $D(X) = p \cdot q$, të fundme, sepse jepet $Z \sim B(n, p)$.

Atëherë jemi në kushtet e Teoremës Linderberg-Levi prej nga del se:

$$Z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} N(n\mu, n\sigma^2) = N(np, npq)$$

Kjo do të thotë se $U = \frac{Z - E(Z)}{\sigma(Z)}$, ndryshorja e normuar e ndryshores Z , konvergjon në shpërndarje të ndryshorja me shpërndarje normale të normuar, me rritjen e numrit të elementeve të zgjedhjes.

Më poshtë po japim pa vërtetim Teoremën Liapunov, e njohur si Teorema Qendrore Limite në formën e fortë. Në rastin e kësaj teoreme vëmë re se ndryshoret e rastit X_i kanë ligje të ndryshme shpërndarje.

Teorema Qendrore Limite (sipas Lyapunov-it)

Teoremë 3.4.3: Le të jetë $\{X_i\}$ një varg ndryshoresh rasti të pavarura, secila me mesatare μ_i dhe variancë σ_i^2 të fundme. Shënojmë $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, nëse për disa $\delta > 0$ plotësohet kushti :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{s_n^{2+\delta}} \sum_{i=1}^n E[|X_i - \mu_i|^{2+\delta}] = 0$, atëherë:

$$\frac{1}{s_n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i) \xrightarrow{\text{shpërndarje}} N(0,1) \text{ për } n \rightarrow \infty.$$

Formulimi i Teoremës Qendrore Limite në rastin e përgjithshëm (pa vërtetim)

Teoremë 3.4.4: Nëse $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ një varg ndryshoresh të pavarura,

- me funksion shpërndarje $(F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x) \dots)$,
- me vlera mesatare $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \dots)$ dhe
- me varianca $(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_n^2 \dots)$

po që se shënojmë:

$$Z_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$$

$$\rho_n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$$

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2$$

$$\tau_n^{*2} = \sigma_1^{*2} + \sigma_2^{*2} + \dots + \sigma_n^{*2}$$

ku $\forall \varepsilon > 0$ kemi:

$$\sigma_i^{*2} = \int_{\mu_i - \varepsilon \tau_n}^{\mu_i + \varepsilon \tau_n} (x - \mu_i)^2 dF_i(x) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

atëherë:

Konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{Z_n - \rho_n}{\tau_n} < y\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^y e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

është që 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = 1$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \infty, \forall \varepsilon > 0$

Në këtë teoremë vëmë re se kushti i mjaftueshëm është marrë nga:

Teorema Linderberg-Levi, ndërsa kushti i nevojshëm është marrë nga Feller (më vonë, 1935).

Rrjedhim: N.q.s $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ është varg ndryshoresh të pavarura me të njëjtën shpërndarje dhe me të njëjtën variancë σ^2 , atëherë plotësohen:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = 1$

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \infty, \forall \varepsilon > 0$

Vërtetim:

$$\tau_n^2 = n \sigma^2; \tau_n^{*2} = n \sigma^{*2} \quad \text{ku}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 dF(x) \quad ; \quad \sigma^{*2} = \int_{|x - \mu| < \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x)$$

$$\text{atëherë } \sigma^2 = \sigma^{*2} + \int_{|x - \mu| > \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x)$$

kaloj në limit te ky barazim për n që shkon në infinit:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{*2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x - \mu| > \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x) \quad (3.4.4)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^2$ ekziston si dhe $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma^{*2}$.

Shënojmë $\int_{|x-\mu| < \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x) = I$ dhe

$$R_n = \int_{|x-\mu| > \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x)$$

Prej (3.3.4) themi: $\forall \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon)$, që $\forall n > N(\varepsilon)$ kemi:

$$|I + \int_{|x-\mu| > \varepsilon \cdot \sqrt{n} \cdot \sigma} (x - \mu)^2 dF(x)| < \varepsilon \quad \text{ose}$$

$$|R_n| < \varepsilon \text{ prej ku del se } R_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{prandaj kemi: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sigma^{*2}}{n \sigma^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{*2}}{\sigma^{*2} + R_n} = 1 \quad \text{dhe}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sigma^2 = \infty$$

3.5 Shpërndarja asimptotike e funksioneve të mesatare të zgjedhjeve

Rasti i përgjithshëm

Në këtë pjesë do të trajtojmë elemente që lidhen me shpërndarjen asimptotike të disa funksioneve të mesatare të zgjedhjeve. I shënojmë këto funksione me $g(\overline{X}_n)$. Më i rëndësishmi është ky rezultat:

Supozojmë që $\{X_n\}$ është një varg ndryshoresh rasti të pavarur, me shpërndarje të njëjtë, me $E(X) = \mu$ dhe $D(X) = \sigma^2$ (të fundëm).

Teoremë 3.5.1:

Është dhënë se:

- $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ është zgjedhje nga bashkësia me $E(X) = \mu$ dhe $D(X) = \sigma^2$ (të fundëm)
- $g(x)$ – një funksion real që ka derivat në zonën rrethuese të pikës $x = \mu$ dhe
- $g'(\mu) \neq 0$, atëherë

$$g(\overline{X}_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(g(\mu); \frac{[\sigma \cdot g'(\mu)]^2}{n})$$

Vërtetim:

Shënojmë me $V(\mu)$ zonën rrethuese të pikës $x = \mu$ ku $g'(x)$ ekziston dhe është i ndryshëm nga zero.

Për vargun $\{X_n\}$ jemi në kushtet e Teoremës Kolmogorov 1 që thotë:

Nëse jepet $\{X_n\}$ një varg ndryshoresh rasti të pavarura, të tillë që:

- $E(X_n) = \mu_n$
- $\text{Var}(X_n) = \sigma_n^2$
- seria $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2}$ është konvergjente,
- $\bar{X}_n = \frac{1}{n} (X_1 + X_2 + \dots + X_n)$
- $\bar{\mu}_n = \frac{1}{n} (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)$

atëherë vargu $\{\bar{X}_n - \bar{\mu}_n\}$ kënaq ligjin e fortë të numrave të mëdhenj

$$P(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \bar{\mu}_n) = 1$$

pra, për $\forall \delta > 0$ dhe $\varepsilon > 0$, gjendet të paktën një n_ε e tillë që

$$\forall n > n_\varepsilon \text{ kemi } P(|\bar{X}_n - \bar{\mu}_n| < \varepsilon) \geq 1 - \delta$$

Në rastin tonë $E(X_i) = \mu$, $\sigma^2(X_i) = \sigma^2$ (të fundëm);

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sigma_i^2}{i^2} = \sigma^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \infty \text{ (konvergjente) atëherë } \bar{X}_n \xrightarrow[p.k]{n \rightarrow \infty} \mu \text{ d.m.th}$$

$$P(\bar{X}_n \in V(\mu)) \geq 1 - \varepsilon, \text{ për } n > n_\varepsilon$$

Prej këtui, për rastin tonë nxjerrim:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\varepsilon > 0, \text{ që për } n > n_\varepsilon, P(\bar{X}_n \in V(\mu)) \geq 1 - \varepsilon \quad (3.5.1)$$

Për $\forall$ pikë $x = \bar{x}$ nga $V(\mu)$ ne mund të shkruajmë:

$$g(\bar{x}) = g(\mu) + g'(x^*) \cdot (\bar{x} - \mu) \quad (3.5.2)$$

(Teorema e Lagranzhit në segmentin $[\mu, \bar{x}]$, $\mu < x^* < \bar{x}$ dhe $|x^* - \mu| \leq |\bar{x} - \mu|$)

Barazimin (3.5.2) e shkruajmë në formën:

$$[g(\bar{x}) - g(\mu)]\sqrt{n} = g'(x^*) \cdot (\bar{x} - \mu)\sqrt{n} \quad (3.5.3)$$

$$\text{Shënojmë } U_n = [g(\bar{X}) - g(\mu)]\sqrt{n}$$

$$V_n = g'(x^*)(\bar{X} - \mu)\sqrt{n}$$

Mqs ε çfarëdo, atëherë vargjet e ndryshoreve të rastit:

1) $U_1, U_2, \dots$ dhe 2) $V_1, V_2, \dots$ formojnë proces stokastik.

Nga Teorema Linderberg-Levi, meqenëse σ^2 është e fundme, rrjedh që vargu:

$$(\bar{x} - \mu)\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} N(0, \sigma^2) \quad (3.5.4)$$

Kjo do të thotë se vargu $(\bar{x} - \mu)\sqrt{n}$ konvergjon sipas shpërndarjes tek shpërndarja normale për n që shkon në infinit.

Nga ana tjetër, m.q.s $g'(x)$ ekziston në të gjitha pikat e $V(\mu)$, ai është i vazhduar në $V(\mu)$, pra edhe në $x = \mu$. Në këto kushte nga Teorema 3.1.4 dhe Teorema 3.1.2 rrjedh që:

$$g'(x^*) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} g'(\mu) \quad (3.5.5)$$

(do të thotë se $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|g'(x^*) - g'(\mu)| \geq \varepsilon) = 0$)

Prej (3.5.4) dhe (3.5.5) del se

$$V_n = g'(x^*) \cdot (\bar{x} - \mu)\sqrt{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} g'(\mu) \cdot Z \quad (3.5.6)$$

ku madhësia $Z \sim N(0, \sigma^2)$ dhe $g'(\mu) \neq 0$.

Prej barazimeve (3.5.3) dhe (3.5.6), prej konvergjencës së vargut V_n do të rrjedhë konvergjenca e vargut U_n . Kështu prej barazimit:

$\lim_{n \rightarrow \infty} P(V_n < v) = P(g'(\mu) \cdot Z < v)$, rrjedh

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n < v) = P(t < v) \quad (3.5.7)$$

Meqenëse madhësia $Z \sim N(0, \sigma^2)$, atëherë:

madhësia $Z \cdot g'(\mu) \sim N(0, [\sigma g'(\mu)]^2)$

$$\text{Prej këtui del se tek (3.5.7), madhësia } t \sim N(0, [\sigma g'(\mu)]^2) \quad (3.5.8)$$

Kemi:

$$V_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} g'(\mu) \cdot Z \quad \text{Zatëherë si proces i rastit edhe } U_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} g'(\mu) \cdot Z$$

pra $U_n \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} t \sim N(0, [\sigma g'(\mu)]^2)$

Atëherë sipas (3.5.8) kemi:

$$U_n = [g(\bar{x}) - g(\mu)]\sqrt{n} \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} t \sim N(0, [\sigma g'(\mu)]^2) \quad (3.5.9)$$

Prej këtu del se:

$$g(\bar{x}) = \frac{U_n}{\sqrt{n}} + g(\mu) \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} Y \sim N(g(\mu); \frac{[\sigma g'(\mu)]^2}{n}) \text{ sepse sipas} \quad (3.5.9)$$

$$E(g(\bar{x})) = \frac{1}{\sqrt{n}} E(U_n) + g(\mu) \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} g(\mu) \text{ si dhe}$$

$$D(g(\bar{x})) = \frac{1}{n} D(U_n) + 0 \xrightarrow[p]{n \rightarrow \infty} \frac{[\sigma g'(\mu)]^2}{n} \text{ pra në këtë mënyrë treguam}$$

përfundimisht që:

$$g(\bar{x}) \xrightarrow[n]{n \rightarrow \infty} N(g(\mu); \frac{[\sigma g'(\mu)]^2}{n})$$

Përgjithësimi i Teoremës 3.5.1 në rastin “k” dimensional formulohet si më poshtë:

Teoremë 3.5.2

Supozojmë se $(X_{1\xi}, X_{2\xi}, \dots, X_{k\xi})$, $\xi = 1, 2, \dots, k$ është një zgjedhje nga shpërndarja k dimensionale me pritje matematike të fundme $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$ dhe matricë të kovariacionit $\|\sigma_{i,j}\|$ pozitiv, të përcaktuar për $i, j = 1, 2, \dots, k$.

Le të jetë $g(x_1, x_2, \dots, x_k)$ një funksion që ka derivate të pjesshëm $\frac{\partial g}{\partial x_i} = g_i$,

për $i = 1, 2, \dots, k$, në të gjitha pikat e zonës rrethuese të pikës $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$, të tillë që $g_i^0 = g_i(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k)$. Atëherë n.q.s të paktën një nga $g_i^0 \neq 0$, kemi:

$$g(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_k) \xrightarrow[n]{n \rightarrow \infty} N(g(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k); \frac{1}{n} \sum_{i,j=1}^k \sigma_{i,j} \cdot g_i^0 \cdot g_j^0)$$

KAPITULLI IV

Studimi i koeficientit të variacionit të zgjedhjes

Në këtë kapitull do të trajtohet shpërndarja asimptotike e dy statistikave, devijimit standard dhe koeficientit të variacionit. Të dy këto statistika përdoren për të vlerësuar shkallën e homogjenitetit të një popullimi. Më parë, është trajtuar shkurt cilësia, çfarë përfaqëson kontrolli i cilësisë, teknikat statistikore që përdoren për të verifikuar dhe për të analizuar kushtet që përcaktojnë ndryshueshmërinë e karakteristikës së cilësisë që është marrë në studim, duke patur si objektiv kryesor: *Përmirësimin e vazhdueshëm të cilësisë*.

Kartat e kontrollit janë instrumente të kontrollit statistikor të procesit të prodhimit për të kontrolluar ndryshueshmërinë e tij. Ndërtimi i tyre bazohet në shpërndarjet probabilitare të statistikave si të devijimit standard s ose koeficientit të variacionit c etj.

Kështu, njohja e shpërndarjeve probabilitare ose përafrime të tyre kanë rëndësi jo vetëm teorike, por kanë edhe vlera praktike.

4.1 Kontrolli statistikor i cilësisë

Të realizosh një produkt me cilësi do të thotë: të prodhosh duke respektuar specifikime dhe nivele të tolerancës të përcaktuara në bazë të pritshmërive dhe preferencave të klientëve që mund të jenë konsumatorët finalë ose kompani në rastin e produkteve industriale. Në një kuptim të gjerë, quhet cilësi e një produkti aftësia e tij për t'u përdorur për qëllimin për të cilin është krijuar ose aftësia e produktit që të ketë vetitë e garantuara nga prodhuesi për të kënaqur kërkesat e tregut.

Për të prodhuar produkte të një cilësie të lartë është e nevojshme të njohësh dëshirat dhe kërkesat e klientëve; kjo është detyrë e departamentit të marketingut të një kompanie. Në vijim, është e nevojshme t'i përkthesh kërkesa të tilla në një projekt operativ, derisa të arrihet në paraqitjen e plotë inxhinierike të procesit të prodhimit që do të finalizohet me prodhimin fizik të produktit. Në fund, realizohet shpërndarja e produktit që siguron dorëzimin e produktit te klienti. Në këto kushte, të prodhosh me cilësi të lartë do të thotë të përmirësosh të gjitha proceset që kontribuojnë në prodhimin e produkteve

ose shërbimeve. Dinamika e tregut nënkupton një kontroll të vazhdueshëm dhe përshtatshmëri të nivelit të cilësisë së produktit. Në këtë mënyrë lind nevoja e përmirësimit të vazhdueshëm të cilësisë që kërkon përfshirjen e të gjithë proceseve brenda kompanisë. Në këtë sens strategjia e cilësisë totale konsiderohet si një instrument për të garantuar mbijetesën dhe suksesin afatgjatë të kompanisë. Kërkesat e tregut nuk janë statike, ato janë të lidhura me vetë nivelin e cilësisë. Në këtë kuadër, është i justifikuar përdorimi i metodave të drejtpërdrejta të Kontrollit Statistikor të Procesit si mjete të vlefshme në mbështetje të veprimtarisë së vendimmarrjes në çdo nivel organizativ për arritjen e cilësisë. Në paraqitjen e metodave statistikore për kontrollin e cilësisë do të përqëndrohemi në procesin e prodhimit si dhe në vetë produktin/shërbimin që del nga ky proces.

Çfarë është kontrolli statistikor i procesit?

- 1. Është pranuar se kontrolli statistikor i procesit është një metodologji që referuar një aktiviteti të caktuar, operacioni, faze ose procesi që përsëritet, përdor teknikat statistikore me qëllim analizimin dhe verifikimin e kushteve që përcaktojnë ndryshueshmërinë e objektit që analizohet. Në mënyrë të përmbedhur, bazuar në përkufizimin e dhënë nga Juran (Joseph M. Juran, 1904-2008, inxhinier dhe konsulent menaxhimi), mund të përcaktojmë kontrollin statistikor të procesit si “aplikim i teknikave statistikore për të kuptuar dhe analizuar ndryshueshmërinë e një procesi”.**

Procesi i prodhimit vepron gjatë kohës duke realizuar një seri produktesh që mund të konsiderohen elemente të popullimit Ω , të gjithë elementeve që procesi mund të prodhojë. Themi se është prezente një ndryshueshmëri në ecurinë e procesit për sa kohë që pjesët e prodhuara nuk janë njësoj me njëra tjetrën. Kjo do të thotë se nëse masim të njëjtën karakteristikë X tek secili produkt vërehet një ndryshueshmëri e saj. Prezenca e ndryshueshmërisë justifikon plotësisht studimin statistikor. Vlera e ndryshores X tek një produkt i vetëm shihet si vlerë që merr ndryshorja e rastit me një probabilitet të caktuar.

Në veçanti, duhet të kemi parasysh se:

- Në çdo moment të kohës (kujtojmë se një veçanti e procesit të prodhimit është faktori kohë) madhësia X mund të përshkruhet prej një modeli të caktuar shpërndarje. Këtu i referohemi modelit parametrik: duke njohur vlerat e parametrave jemi në gjendje të identifikojmë plotësisht shpërndarjen.
- Një vlerë e caktuar e ndryshores X , e vrojtuar mbi një produkt mund të konsiderohet si një vlerë e gjeneruar prej këtij modeli të veçantë që

do të thotë mund të shihet si një zgjedhje rasti e thjeshtë me një element e nxjerrë nga popullata e përshkruar prej këtij modeli shpërndarje.

- Shpërndarja e X mund të ndryshojë në kohë sepse mund të ndryshojnë në kohë vlerat e parametrave të shpërndarjes. Kur ndodhin të tilla ndryshime do të thotë se popullimi ka ndryshuar.

Qëllimi i përdorimit të teknikave statistikore është që kompania të sigurojë instrumentet e përshtatshme për përmirësimin e nivelit të prodhimit/shërbimeve të ofruara/ përmes eliminimit të gabimeve, ndryshueshmërisë që vijnë prej punës në vazhdimësi, kontrollet e panevojshme dhe kështu vonesat në ciklet e punës. Garanci për të marrë rezultate pozitive do të jetë njohja e mirë dhe e thelluar e proceseve, identifikimi i fazave kritike të procesit përmes përdorimit të të dhënave statistikisht të rëndësishme për tu analizuar, që na lejojnë të konkludojmë dhe interpretojmë performancën dhe shkaqet që përcaktojnë “ndryshimet e padëshiruara” në raport me funksionimin normal të procesit që po analizohet.

Deming (1982) në filozofinë e tij për të realizuar përmirësimin e vazhdueshëm të procesit të prodhimit, e ka përcaktuar procesin e prodhimit si një cikël PDCA:

Plan (planifikoj)

Do (bëj)

Check (kontrolloj)

Act (veproj ose korrigjoj)

Shtatë instrumentet e Deming që përfshihen në metodologjinë e Kontrollit Statistikor të Cilësisë janë:

- Fleta e mbledhjes së të dhënave
- Diagrama Pareto
- Diagrama shkak-pasojë
- Histograma e dendurive
- Diagrama e korrelacionit
- Analiza e formimit të shtresave
- Kartat e kontrollit

Theksojmë disa prej përdorimeve të këtyre instrumenteve:

- Parashikimi i mundësisë për të arritur tolerancat e projektit
- Planifikimi i verifikimit të kontrollit të procesit
- Analiza e mundësive të ndërvarësisë ndërmjet proceseve
- Ndërhyrjet rregulluese gjatë punës

- Vlerësimi i aparaturave të reja
- Përpunimi i elementeve specifike

Në këtë punim kam trajtuar materialin e betonit, sigurimin e cilësisë së prodhimit të tij nëpërmjet kontrollit të rezistencës në shtypje X. Zgjedhja e betonit u bë për arsye të zhvillimit që ka pësuar industria e ndërtimit në Shqipëri pas viteve '90.

Në Shqipëri, rregullat teknike për përdorimin e betoneve strukturore përmbledhen në Vendimin Nr. 679, datë 22.10.2004, "Për miratimin e rregullave teknike për përdorimin e betoneve strukturore", në mbështetje të nenit 100 të Kushtetutës dhe të nenit 18 të ligjit nr.8402, datë 10.9.1998 "Për kontrollin dhe disiplinimin e punimeve të ndërtimit", të ndryshuar, me propozimin e Ministrit të Rregullimit të Territorit dhe të Turizmit.

4.2. Të dhëna për betonin

Betoniparaqet në vetvete materialin prej guri artificial, të prodhuar si rezultat i përzierjes dhe i ngurtësimit të lëndëve lidhëse, ujit, i mbushësve dhe i shtesave të veçanta të marra në raporte të caktuara.

Ai gjen përdorim shumë të gjerë sot në ndërtim për arsye të shumta. Në radhë të parë ana ekonomike si material që realizohet me lëndë rrethimore; rezistenca e madhe në shtypje, duke realizuar shpesh edhe elemente mbajtës të strukturave të ndërtimit; lidhja shumë e mirë që realizohet midis betonit dhe çelikut duke formuar elementin betonarme që mënjanon defektin e betonit që është "puna e keqe" në tërheqje.

Për projektimin e konstruksioneve prej betoni dhe prej betoni të armuar përcaktohen karakteristikat e kërkuara të betonit që emërtohen marka ose klasa të tij.

Për markë betoni të projektit sipas qëndresës mekanike në shtypje përdoret kufiri i rezistencës mesatare aksiale në shtypje R (kg/cm^2), e përcaktuar sipas mostrave kubike ose cilindrike etalon në moshë 28 ditë.

Marka paraqet kufirin e rezistencës në shtypje të kubeve të betonit me përmasa 20x20x20 cm në moshën 28 ditore dhe të trajtuara në kushte normale ngurtësimi. Mostrat duhet të lihen në kallëpe për të paktën 16 orë por jo më shumë se 3 ditë, të mbrojtura nga goditjet, lëkundjet dhe tharja, në temperaturë $(20 \pm 5)^\circ\text{C}$ ose $(25 \pm 5)^\circ\text{C}$ në vendet me klimë të nxehtë.

Në momentin që mostrat hiqen prej kallëpeve deri në momentin e provës, ato ruhen në ujë, në temperaturë $(20 \pm 2)^{\circ}\text{C}$ ose në ambient në temperaturë $(25 \pm 2)^{\circ}\text{C}$ dhe në kushtet e lagështirës $\geq 95\%$.

Sipas rekomandimeve të organizatave ndërkombëtare të: CEB (Komisioni European i Betonit), FNP (Federata Ndërkombëtare e Paranderjes), ISO (Organizata Ndërkombëtare e Standarteve) etj, pothuajse në të gjitha shtetet është bërë kalimi nga marka në klasa të betonit.

Klasë e betonit quhet rezistenca karakteristike R_{ck} , e përcaktuar si “vlera e rezistencës nën të cilën gjenden maksimumi 5% e gjithë vlerave të rezistencës së provave”.

Normativa SSH-EN-206, si dhe eurokodet në përgjithësi ose standartet ISO në veçanti përcaktojnë këto klasa betoni në shtypje:

$C_{12/15}$; $C_{16/20}$; $C_{20/25}$; $C_{25/30}$; $C_{30/37}$; $C_{37/45}$, etj (në emërues jepet klasa e përcaktuar mbi mostra cilindrike dhe në numërues ajo mbi mostra kubike).

Vlerat e mëposhtme, të shprehura në N/mm^2 , tregojnë klasifikimin sipas llojeve të ndryshme të betonit:

- beton jostrukturor 8/10 – 12/5
- beton i zakonshëm 16/20 – 45/55
- beton me karakteristika të larta 50/60 – 60/75
- beton me rezistencë të lartë 70/85 – 100/115

Klasat e rezistencës klasifikohen si me poshtë:

Klasa e rezistencës	R_{ck} (N/mm^2)
Shumë e ulët	$5 < R_{ck} < 15$
E ulët	$15 < R_{ck} < 30$
Mesatare	$30 < R_{ck} < 55$
E lartë	$55 < R_{ck} < 85$

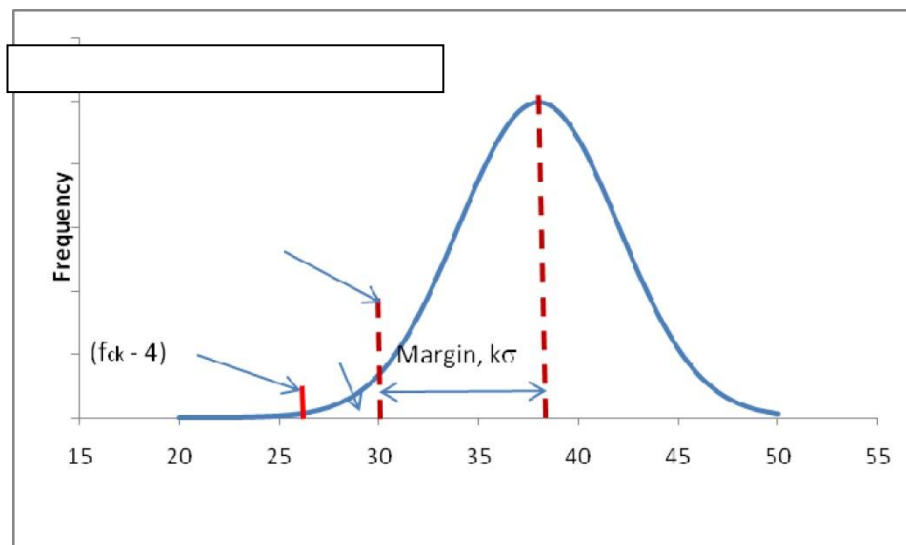
Marka/ klasa e betonit në shtypje kontrollohet nëpërmjet provave të mostrave standarte kubike ose cilindrike (kjo, duhet të specifikohet përpara se të fillojnë punimet e ndërtimit) me brinjë 150 mm në rastin e kubit ose diametër 150mm dhe lartësi 300 mm në rastin e cilindrit, me moshë zakonisht 28 ditë.

Nëqoftëse për betonin që kontrollojmë arrijmë të pranojmë një vlerë mesatare si rezistencë karakteristike (R_{ck} , cyl ose R_{ck} , kub), kjo do të thotë se 95% e të gjitha provave që do të kryhen në të ardhmen mbi të njëjtin beton duhet të japin si rezultat një vlerë të barabartë ose më të lartë se vlera e pranuar si rezistencë karakteristike, ndërsa 5% e provave mund të japin një vlerë më të ulët. Për të marrë një vlerë të besueshme si rezistencë karakteristike, kryhen një numër shumë i madh provash, mbi bazën e të cilave bëhet kontrolli statistikor i cilësisë së betonit të prodhuar e të vendosur në vepër.

Standardet e reja të betonit japin direktiva për sa i përket kontrollit nëse fortësia e betonit është në përputhje me kërkesat e rezistencës në shtypje për klasën të cilës i përket. Pranimi ose jo i konformitetit është në funksion të rezultateve të testimit për rezistencën në shtypje si dhe i vlerësimit të rezultateve të testimit.

4.3 Rezistenca në shtypje

Rezistenca në shtypje, e parë si ndryshore rasti X , ka shpërndarje normale siç tregohet në figurën më poshtë.



Sipërfaqja nën vijë ndërmjet dy vlerave të X na jep probabilitetin që një rezultat të bjerë ndërmjet këtyre vlerave. Termi “bisht” përdoret për të karakterizuar sipërfaqen nën vijë ndërmjet një vlere të X (pra të një vlere të rezistencës në shtypje) dhe vlerave me denduri pothuajse zero. Në rastin e rezistencës në shtypje konsiderojmë “bishtin e poshtëm” që do të thotë sipërfaqja prej një vlere çfarëdo të X dhe gjithë vlerave më të vogla se ajo.

Rezistenca karakteristike e betonit është numri që tregon se : nëse do të kryheshin të gjitha provat e mundshme, 5% e rezultateve do të bien në zonën e poshtme që fillon nga vlera 1.64σ poshtë vlerës së rezistencës mesatare. Mirëpo rezistenca mesatare nuk mund të njihet derisa betoni të jetë prodhuar dhe testuar dhe kështu rezistenca mesatare zakonisht caktohet në vlera më të mëdha për të pasur kujdes që betoni të arrijë të paktën rezistencën e llogaritur karakteristike. Rezistenca mesatare jepet prej ekuacionit:

$$R_m = R_{ck} + k \cdot \sigma$$

ku: R_m është rezistenca mesatare, R_{ck} është rezistenca karakteristike në shtypje, σ është devijimi standard për popullatën, k është konstante, $k \cdot \sigma$ është marzhi i gabimit.

Një vlerë e rezistencës R_m poshtë rezistencës karakteristike nuk konsiderohet dështim sepse statistikisht 5% e rezultateve pritet dhe pranohet të bien poshtë kësaj vlere. Megjithatë, për arsye të sigurisë së strukturës, në standardet EN 206-1, për klasat që rezistencën në shtypje e kanë më të vogël ose të barabartë me $C_{50/60}$, përcaktohet një minimum i rezistencës së kërkuar për rezultatet individuale $R_{ci} = R_{ck} - 4$ (N/mm²). Ndërsa, për klasat që rezistencën në shtypje e kanë më të madhe ose të barabartë me $C_{55/67}$, ky minimum duhet të jetë $R_{ci} \geq 0.9 R_{ck}$. Çdo sasi betoni që nuk plotëson këto kushte konsiderohet jo e rregullt.

4.4 Përcaktimi i rezistencës mesatare

Rezistenca mesatare përcaktohet për të arritur balancën ndërmjet kërkesave të mëposhtme:

- Me probabilitet të lartë për të arritur një rezistencë për popullatën, me të paktën rezistencën karakteristike të kërkuar.
- Risk të ulët në mosplotësimin e kriterit për minimumin e vlerës së rezistencës
- Risk të ulët për konsumatorin
- Risk të ulët për prodhuesin
- Kriterin ekonomik dhe konkurrueshmërinë.

Rezistenca mesatare zgjidhet nga prodhuesi duke patur kujdes që të plotësohen kërkesat për kufijtë minimalë të rezistencës si edhe faktin që rezistenca mesatare asnjëherë nuk mund të jetë më e vogël se

$(R_{ck} + 1.64\sigma)$. Në këtë pikë duhet të konsiderohen edhe kërkesat specifike të çdo vendi si dhe kërkesat e kompanive certifikuese.

Kontrolli i rezistencës në shtypje të betonit ndahet në dy tipe:

- Kontrolli i rezistencës në vepër që kryhet nga klienti dhe
- Kontrolli i konformitetit të prodhimit, që kryhet nga vetë fabrikat e betonit.

Koncepti i pranimi të betonit ka kuptim në rastin e parë kur kontrolli kryhet nga klienti. Në këtë rast përdoren dy lloje kontrolli:

Kontrolli i pranimi i Tipit A:

Kontrolli i Tipit A kryhet duke llogaritur mesataren e tre provave, secila prej të cilave llogaritet si mesatare e dy mostrave. Ky kontroll bëhet në ato raste kur prodhimi nuk kalon 300 m^3 . Secila mostër duhet të merret mbi një sasi maksimale prej 100 m^3 . Për sasi më të vogla të prodhuara si dhe për sasitë ditore, duhet të sigurohet të paktën një provë.

Kontrolli quhet pozitiv nëse plotësohen njëkohësisht dy kushtet e mëposhtme:

$$R_m \geq R_{ck} + 3.5 \text{ N/mm}^2 \text{ dhe } R_1 \geq R_{ck} - 3.5 \text{ N/mm}^2$$

(3 prova, 1 për çdo 100 m^3)

Ku:

R_m , rezistenca mesatare e provave

R_{ck} , rezistenca karakteristike e klasës

R_1 , rezistenca minimale e zgjedhjes së bërë

Shembull:

Klasa C25/30 ($R_{ck} = 30$)

Rezistenca e provës	Rezistenca përfaqësuese	Kontrolli i tipit A							
34.2	35.1	R _m		R ₁					
36.1		Vlera	Pranimi	Vlera	Pranimi				
38.4	37	37.8	OK	35.1	OK				
35.6									
40.4	41.4								
42.5									

→ $R_m \geq 33.5 \text{ N/mm}^2$ dhe $R_1 \geq 26.5 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow$ Sasia pranohet

Kontrolli i pranimi i Tipit B

Kontrolli i pranimi i Tipit B kryhet në ato raste kur sasia e prodhuar është më e madhe se 1500 m³. Kontrolli bëhet ndaj një përzierje homogjene dhe kërkon në total të paktën 15 mostra çdo 1500 m³.

Kontrolli quhet pozitiv nëse plotësohen njëkohësisht tre kushtet e mëposhtme:

$$R_m \geq R_{ck} + 1.4 s \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad R_1 \geq R_{ck} - 3.5 \text{ N/mm}^2 \quad ; \quad c \leq 0.3$$

Ku:

R_m , rezistenca mesatare e mostrave të marra

R_{ck} , rezistenca karakteristike e klasës

R_1 , rezistenca minimale e zgjedhjes së bërë

s , devijimi standart në zgjedhjen e bërë

Në rastin e kontrollit të tipit B shtohet kërkesa për kontrollin e koeficientit të variacionit të zgjedhjes. Për vlera të koeficientit të variacionit më të mëdha se 0.15, kërkojnë kontrolle më të kujdesshme gjatë kryerjes së punimeve ndërsa për vlera të koeficientit të variacionit më të mëdha se 0.3, betoni i prodhuar nuk pranohet.

Shembull:

Klasa C25/30 (Rck30)

Rezistenca e provës	Rm	s	1.4 s	Kontrolli i pranimi					
				Rm		R1		c	
34.6									
36.8									
41									
38									
36.9									
45.1									
34.6									
42.4	37.5	4.7	6.7	37.5	OK	29	OK	0.13	OK
31.7									
43.7									
35.4									
39									
32.6									
29									
41.9									

→ $R_m \geq 36.5 \text{ N/mm}^2$; $R_1 \geq 26.5 \text{ N/mm}^2$; $c \leq 0.3 \Rightarrow$ **Sasia pranohet**

Rezistenca karakteristike efektive: $37.5 - 6.7 = 30.8 \text{ N/mm}^2$.

4.5 Devijimi standard dhe koeficienti i variacionit

Të kontrollosh vetëm plotësimin e kushteve për mesataren nuk është e mjaftueshme. Ka shumë situata praktike në të cilat jemi të interesuar për homogjenitetin e një popullimi çfarëdo Ω si tekstil, beton, material plastik, dru etj. Në rastin e materialit të betonit, si një nga 10 materialet me më shumë risk në botë, projektuesit dhe ndërtuesit janë shumë të interesuar që rezistenca e tij në shtypje të jetë brenda kufijve të lejuar në të gjithë strukturën.

Homogjeniteti i një popullimi mund të kontrollohet nëpërmjet devijimit standard, koeficientit të variacionit etj. Më pas është treguar se si mund të kryhet kontrolli për koeficientin e variacionit bazuar në shpërndarjen probabilitare asimptotike të tij. Koeficienti i variacionit ka gjetur një përdorim të madh në disa fusha si: shkencë, mjekësi, inxhinieri, ekonomi etj. Në financë dhe aktuaristikë, koeficienti i variacionit përdoret për të matur riskun relativ (Miller dhe Karson (1977)) ku një test për barazinë e koeficientëve të variacionit për dy aksione ndihmon për të përcaktuar nëse dy aksionet kanë apo jo të njëjtin risk. Hamer et.al.(1995) e përdori koeficientin e variacionit për të vlerësuar homogjenitetin e kockave kur mbi to ishin kryer ndërhyrje të jashtme (p.sh rezatime). Gong dhe Li (1999) e përdorën koeficientin e variacionit për të vlerësuar fortësinë e qeramikës. Si dhe Pyne et.al.(2003) studioi variabilitetin në performancën e notarëve në garat olimpike duke përdorur koeficientin e variacionit.

4.6 Kartat e Kontrollit

Që në fillimet e industrisë prodhuese janë bërë përpjekje për të mbajtur nën kontroll këtë proces me qëllim përmirësimin e cilësisë dhe reduktimin e kostove. Teknikat statistikore u përdorën për herë të parë nga fizikanti dhe staticioni Walter A. Shewhart në labororet e Kompanisë Telefonike Bell, në 1924. Më pas Shewhart vazhdoi të zhvillojë idenë dhe në vitin 1931 ai botoi një libër mbi kontrollin statistikor të cilësisë.

Në këtë libër, Shewhart theksonte se brenda një procesi prodhimi nuk ka vetëm ndryshueshmëri të zakonshme, të pandarë me procesin dhe që ndikojnë në cilësinë, por ka gjithashtu ndryshueshmëri specifike, të

paparashikueshme,që nuk mund të shpjegohet. Ai mendonte se ishte e mundur të vendoseshim kufinj për ndryshueshmërinë e zakonshme (natyrale) të çdo procesi në mënyrë të tillë që luhatjet brenda këtyre kufijve mund të shpjegohen prej shkaqeve rastësore ndërsa çdo ndryshueshmëri jashtë këtyre kufijve, ndryshueshmëria e paparashikuar (specifike), paraqet një deformim të procesit.

Në rastin e prodhimit të betonit shkaqet e ndryshueshmërisë së zakonshme lidhen me variacionin në lëndën e parë (sasia e përbërësve, përbërja kimike etj), saktësia në zgjedhje, procedurën e testimit etj, ndërsa ndryshueshmëria specifike ka të bëjë me ndryshimin e elementeve përbërëse të betonit, problemet me ekipin që merret me procedurat e testimit etj.

Kartat e kontrollit kanë gjetur një përdorim të gjerë në industrinë e betonit si një mjet për kontrollin e cilësisë. Ato mund të përdoren për të monitoruar një sërë karakteristikash të tij (psh rezistencën, koeficientin e variacionit, qëndrueshmërinë, raportin ujë/çimento etj), materialet përbërëse (raportet e përbërësve, rezistencën e çimentos etj) ose saktësinë e prodhimit.

Përdorimi i kartave të kontrollit ka për qëllim:

- të kontrollojë nëse janë arritur vlerat e synuara të ndryshoreve të shqyrtuara
- të masë ndryshueshmërinë prej vlerave të synuara
- të identifikojë shkallën e ndryshueshmërisë
- të veprojë për ta kthyer procesin në normalitet

Kartat e kontrollit nuk duhet të shihen të veçuara prej pjesës tjetër të kontrollit të prodhimit.Psh kontrolli rutinë dhe mirëmbajtja e pajisjeve do të minimizonin riskun e një dështimi më të madh.Kartat e kontrollit japin informacion rreth procesit por interpretimi i këtij informacioni nuk është një punë mekanike.Informacioni i marrë duhet të kuptohet dhe interpretohet saktë në mënyrë që të merren vendime të drejta.Ndryshimi në cilësinë e betonit a ndodhi kur u përdor një përbërës për herë të parë? A po ndjek prodhimi i gjithë betonit të njëjtin trend? Fabrikat e tjera që përdorin materiale të ngjashme a kanë trend të ngjashëm?Ky lloj informacioni mundëson që të zbulohen shkaqet që kanë çuar në ndryshimin e cilësisë si dhe marrjen e masave për ndryshimin e situatës.Psh një humbje e saktësisë së punës së pajisjeve duhet të të drejtojë tek riparimi, mirëmbajtja dhe rikalibrimi i tyre dhe jo tek ndryshimi i raporteve të elementeve përbërës.

Kontrolli efektiv i prodhimit të betonit arrihet më lehtë nëse ekzistojnë marrëdhënie të mira me të gjithë furnizuesit e lëndës së parë, në mënyrë të veçantë me furnizuesit e çimentos.

Paralajmërimi i hershëm në ndryshimin e përbërësve që janë lëndë e parë për betonin duhet të jetë pjesë e kontratës me furnizuesin. Disa prodhues përdorin ndryshimet në përbërjen e çimentos për të parashikuar ndryshimet në rezistencën e betonit. Kontroll efektiv i prodhimit do të thotë të përdorësh të gjithë informacionin e mundshëm për të prodhuar beton në përputhje me specifikimet e tij. Ky kontroll, që përfshin përdorimin e kartave të kontrollit, zvogëlon në mënyrë të rëndësishme riskun e jo-konformitetit, gjë që favorizon si përdoruesin ashtu edhe prodhuesin e betonit.

Kartat e kontrollit, që përdoren gjerësisht sot, sigurojnë që rezistenca karakteristike të arrihet dhe mbahet brenda kufijve të lejuar ashtu siç parashikohet edhe në Udhëzuesin CEN (Product standards and conformity assessment guideline, CEN/BT N6287, 2000-11-09).

Në këtë punim është trajtuar karta e kontrollit për koeficientin e variacionit, bazuar në të dhënat e marra prej kompanisë Ferro-Beton & Construction Co e cila është themeluar në vitin 2002 dhe është kompani lider në industrinë e prodhimit të betonit në Shqipëri. Ferro-Beton & Construction Co vlerësohet si furnizuesi më i madh i betonit në rajon. Vetëm në 3 vitet e fundit kjo kompani ka realizuar një prodhim prej 500.000 m³ beton.

Duke qenë se shpërndarja χ^2 dhe përafrimi i saj zënë vend qendror në pjesën në vijim, po ndalemi në disa zbatime të saj.

4.7 Disa zbatime të shpërndarjes χ^2

Rezultate:

a) Në qoftë se ndryshoret e rastit $X_i \sim N(0,1)$ dhe janë të pavarura atëherë:

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$$

b) Në qoftë se ndryshoret e rastit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ dhe janë të pavarura atëherë:

ndryshorja

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi^2(n)$$

c) Karakteristikat numerike të shpërndarjes $\chi^2(n)$ janë:

$$\begin{aligned} E(\chi^2(n)) &= E\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) =_{\text{nga pavarësia}} \sum_{i=1}^n E(X_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n E(X_i - 0)^2 = \\ &= \sum_{i=1}^n D(X_i) = n \quad (\text{sepse } X_i \sim N(0,1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(\chi^2(n)) &= D\left(\sum_{i=1}^n X_i^2\right) =_{\text{nga pavarësia}} \sum_{i=1}^n D(X_i^2) \\ &= \sum_{i=1}^n [E(X_i^4) - 1] = 2n \end{aligned}$$

Si përfundim: $E(\chi^2(n)) = n$ dhe $D(\chi^2(n)) = 2n$

d) **Teoremë:** Në qoftë se $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ dhe janë të pavarura atëherë:

Ndryshorja $V^* = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \sigma^2 \chi^2(n)$, me densitet probabilitar:

$$p(v^*) = \frac{1}{2 \sigma^2 \Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{v^*}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{v^*}{2\sigma^2}}, \quad V^* > 0 \quad (4.7.1)$$

Vertetim:

Vërtet, fusim ndryshoren e rastit $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2$

Meqë $\frac{X_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, atëherë $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n)$

$$\text{Kemi } V = \frac{V^*}{\sigma^2} \quad (4.7.2)$$

atëherë prej këtu, duke ditur se: $p(v^*) = p(v) \cdot \left|\frac{\partial V}{\partial V^*}\right|$, kemi:

$$p(v^*) = \frac{v^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{v}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma^2}$$

Zëvendësojmë (4.7.2) dhe gjejmë:

$$p(v^*) = \frac{\left(\frac{v^*}{\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{v^*}{2\sigma^2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{2 \sigma^2 \cdot \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{v^*}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{v^*}{2\sigma^2}}$$

Si përfundim:

$$p(v^*) = \frac{1}{2 \sigma^2 \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \left(\frac{v^*}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{v^*}{2\sigma^2}}$$

Të shohim tani përafrime të shpërndarjes χ^2 me atë normale

Teoremë 4.7.1

Në qoftë se $V \sim \chi^2(n)$ atëherë madhësia e rastit:

$$V_1 = \frac{V - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$$

Vërtetim:

Madhësisë së rastit V_1 i gjejmë funksionin karakteristik:

$$C_{V_1}(t) = E(e^{iV_1 t}) = E\left(e^{it\frac{V}{\sqrt{2n}} - it\sqrt{\frac{n}{2}}}\right) = e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot E\left(e^{it\frac{V}{\sqrt{2n}}}\right) = e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}} \cdot C_V\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)$$

Dimë se funksioni karakteristik i ndryshores së rastit V është:

$$C_V(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}$$

Prej këtu nxjerrim se:

$$C_V\left(\frac{t}{\sqrt{2n}}\right) = \left(1 - 2i\frac{t}{\sqrt{2n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Si dhe:

$$C_{V_1}(t) = e^{-it\sqrt{\frac{n}{2}}} \left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

Logaritmojmë:

$$\ln C_{V_1(t)} = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \cdot \ln\left(1 - it\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$$

Nga zbërthimi në seri i funksionit logaritmik dhe pas kryerjes së veprimeve kemi:

$$\ln C_{V_1(t)} = -it\sqrt{\frac{n}{2}} - \frac{n}{2} \left(-it\sqrt{\frac{2}{n}} - (it)^2 \frac{2}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{t^2}{2}$$

Pra: $\ln C_{V_1(t)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\frac{t^2}{2} \Rightarrow C_{V_1(t)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{t^2}{2}}$ atëherë: $V_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1)$

Po japim tani (pa vërtetim) dy përafrime, përafrimin e Fisherit dhe përafrimin Wilson-Hilfart, për madhësitë e rastit: $\sqrt{2V} - \sqrt{2n-1}$ dhe

$$\frac{\sqrt{\frac{V}{n} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9n}\right)}}{\sqrt{\frac{2}{9n}}}, \text{ kur } V \sim \chi^2(n).$$

- Përafrimi i Fisherit:

Jepen:

- ndryshoret e rastit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ dhe të pavarura
- ndryshorja $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \sim \chi^2(n)$, atëherë

madhësia e rastit $\sqrt{2V} - \sqrt{2n-1}$, mund të përafrohet me shpërndarjen normale të normuar $N(0,1)$ me rritjen e numrit të elementeve të zgjedhjes, pra në mënyre simbolike kemi:

$$\sqrt{2V} - \sqrt{2n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1), \text{ kur } V \sim \chi^2(n)$$

- Përafrimi Wilson-Hilfart:

Jepen:

- ndryshoret e rastit $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ dhe të pavarura

- ndryshorja $V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu_i}{\sigma_i} \right)^2 \sim \chi^2(n)$, atëherë

madhësia e rastit $\frac{\sqrt[3]{V} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9n} \right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}}$, mund të përafrohet me shpërndarjen

normale të normuar $N(0,1)$ me rritjen e numrit të elementeve të zgjedhjes, pra në mënyre simbolike kemi:

$$\frac{\sqrt[3]{V} - \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{9n} \right)}{\sqrt{\frac{2}{9n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0,1), \quad \text{kur } V \sim \chi^2(n)$$

(Wilson, E., Hilferty, M.M., (1931), "The distribution of chi-squared", Proc. Natl. Acad. Sci. USA 17(12):684-688).

4.8 Shpërndarja asimptotike e statistikave s dhe s^2

Ka raste praktike, si ai që parashtruan më sipër, kur është i domosdoshëm të njihet koeficienti i variacionit i bashkësisë së përgjithshme (popullimit).

Duke u shkëputur nga natyra konkrete e problemeve që diktojnë nevojën e studimit të koeficientit të variacionit, para nesh shtrohet ky problem matematik:

Për zgjedhjen $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, të nxjerrë nga bashkësia e përgjithshme normale me parametra μ , σ^2 , të gjejmë shpërndarjen asimptotike të koeficientit të variacionit:

$c = \Phi(\bar{x}, s) = \frac{s}{\bar{x}}$, ku statistikën $\bar{x}$ dhe s përcaktohen si më poshtë:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}; \quad s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \quad (4.8.1)$$

Koeficienti i variacionit për popullimin jepet:

$\omega = \frac{\sigma}{\mu}$, ndërsa bazuar në të dhënat e zgjedhjes $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ gjejmë një vlerësues të tij $c = \frac{s}{\bar{x}}$.

(Në disa raste koeficienti i variacionit është shënuar edhe me simbolin γ)

Për rastin kur zgjedhjet:

$$X^i = \begin{pmatrix} x_1^i \\ x_2^i \\ \vdots \\ x_{n_i-1}^i \\ x_{n_i}^i \end{pmatrix}; \quad \forall i = \overline{1, k}$$

janë nxjerrë nga bashkësitë e përgjithshme normale me parametra μ_i , σ_i të ndryshëm, por me koeficientë $\omega_i = \frac{\sigma_i}{\mu_i}$ të njëjtë, karakterizimi i ndryshimit të madhësisë së rastit $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ me anë të koeficientit ω është me vlera praktike.

Le të paraqesim tani një vlerësues të pazhvendosur të koeficientit të variacionit për popullimin normal kur njohim mesataren μ_0 të tij.
(Panichkitkosolkul W, 2013, fq 2-6)

Shënoj:

$$\omega_0 = \frac{\sigma}{\mu_0}$$

$$c_0 = \frac{s_0}{\mu_0}, \text{ ku } s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{n}$$

Lemë: Le të jetë $X_1, X_2, \dots, X_n$ një zgjedhje e rastit e thjeshtë nga popullimi normal me mesatare μ_0 të njohur dhe variancë σ^2 . Atëherë, nëse shënoj:

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{n}$$

kemi:

$$E(s_0) = c_{n+1} \sigma$$

$$\text{Var}(s_0) = (1 - c_{n+1}^2) \sigma^2,$$

ku

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \right)$$

Vertetim: Nga kushti,

$$s_0^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu_0)^2}{n} = \frac{\sigma^2}{n} \sum_{i=1}^n Z_i^2$$

ku

$$Z_i = \frac{X_i - \mu_0}{\sigma} \sim N(0,1).$$

Kemi:

$$\frac{ns_0^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2. \quad (4.8.2)$$

Shënojmë:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n-1} \quad \text{dhe} \quad s_*^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n}$$

Atëherë: $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$

Në mënyrë të ngjashme: $\frac{ns_*^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2. \quad (4.8.3)$

Tregohet se (S. F. Arnold, 1990, faqe 197):

$$E(s) = c_n \sigma,$$

ku:

$$c_n = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n-1}{2})} \right).$$

Njësoj $E(s_*) = c_{n+1} \sigma$, ku:

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left(\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right)$$

Barazimet (4.8.2) dhe (4.8.3) janë ekuivalente. Prej këtu del:

$$E(s_0) = E(s_*) = c_{n+1} \sigma$$

Ndërsa:

$$\text{var}(s_0) = E(s_0^2) - E^2(s_0) = (1 - c_{n+1}^2)\sigma^2$$

Duke përdorur rezultatet e kësaj leme, gjejmë:

$$E(c_0) = \frac{c_{n+1}\sigma}{\mu_0} = c_{n+1}\omega_0 \quad (4.8.4)$$

$$\text{Var}(c_0) = \left(\frac{1-c_{n+1}^2}{\mu_0^2}\right)\sigma^2 = (1 - c_{n+1}^2)\omega_0^2$$

Shihet se:

$$c_{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Prej këtui:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(c_0) = \omega_0$$

Kjo do të thotë se c_0 është vlerësues asimptotikisht i pazhvendosur dhe i qëndrueshëm për ω_0 .

Nga (4.8.4), një vlerësues i pazhvendosur për ω_0 është:

$$\hat{c}_0 = \frac{c_0}{c_{n+1}}$$

Prej Lemës, vlera e pritshme dhe varianca e $\hat{c}_0$, janë:

$$E(\hat{c}_0) = E\left(\frac{c_0}{c_{n+1}}\right) = \omega_0$$

$$\text{Var}(\hat{c}_0) = \text{Var}\left(\frac{c_0}{c_{n+1}}\right) = \frac{1}{c_{n+1}^2} \text{Var}\left(\frac{s_0}{\mu_0}\right) = \frac{1}{c_{n+1}^2 \mu_0^2} (1 - c_{n+1}^2) \sigma^2 = \left(\frac{1-c_{n+1}^2}{c_{n+1}^2}\right) \omega_0^2 \quad (4.8.5)$$

Prej këtui:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{c}_0) = 0$$

Kjo do të thotë se $\hat{c}_0$ është vlerësues asimptotikisht i qëndrueshëm për ω_0 .

Teoremë (Mosbarazimi Cramer – Rao)

Nëse $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ është zgjedhje nga bashkësia me densitet $\varphi(x; \theta)$, me parametër θ të panjohur dhe $\hat{\theta}$ një vlerësues i pazhvendosur i θ , atëherë varianca e $\hat{\theta}$ kënaq mosbarazimin:

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{n E\left[\frac{d}{d\theta} \ln \varphi(x; \theta)\right]^2} = \frac{1}{n I(\theta)}$$

ku $I(\theta)$ është informacioni i Fisherit. Nëse $\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{n I(\theta)}$, atëherë vlerësuesi është eficient (E. J. Dudewicz dhe S. N. Mishra, 1988, fq 377-379).

Duke shënuar $\theta = \omega_0$ në këtë teoremë, kemi që:

$$\text{Var}(\tilde{\omega}_0) \geq \frac{\omega_0^2}{2n}$$

ku, $\tilde{\omega}_0$ është çdo vlerësues i pazhvendosur i ω_0 . Kjo do të thotë se varianca për vlerësuesin eficient të ω_0 është $\frac{\omega_0^2}{2n}$.

Nga (4.8.5) kemi:

$$\frac{1 - c_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n - 1}$$

Zbërthimi asimptotik i raportit të gamma funksionit është (R.L.Graham, D. E. Knuth, dhe O.Patashink, 1994):

$$\frac{\Gamma\left(j + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(j)} = \sqrt{j} \left(1 - \frac{1}{8j} + \frac{1}{128j^2} + \dots\right).$$

Nëse $j = \frac{n}{2}$, kemi:

$$c_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \sqrt{\frac{2}{n}} \left[\sqrt{\frac{n}{2}} \left(1 - \frac{1}{4n} + \frac{1}{32n^2} + \dots\right) \right] = 1 - \frac{1}{4n} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Nga ku:

$$c_{n+1}^2 = 1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

si edhe:

$$\frac{1 - c_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n - 1}$$

Kjo do të thotë se:

$$\text{Var}(\hat{c}_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\omega_0^2}{2n - 1}$$

Pra $\hat{c}_0$ është vlerësues asimptotikisht eficient.

Bazuar në përkufizimin e koeficientit të variacionit, para nesh shtrohet fillimisht problem i shqyrtimit të shpërndarjes asimptotike të statistikave s dhe s^2 .

Dihet se kur $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ është zgjedhje nga bashkësia me densitet $\varphi(x)$, funksioni karakteristik i vektorit të rastit X përcaktohet si më poshtë:

$$C_X(T) = \int \dots \int_{R^n} e^{i \cdot T' \cdot X} \varphi(X) d(X) \quad (4.8.6)$$

ku $T' = (t_1 t_2, \dots, t_n)$ është vektor real.

(marrë nga:

http://www.ems.bbk.ac.uk/for_students/msc_finEng/math_methods/lecture7.pdf)

Për rastin njëdimensional kemi:

$$C_X(t) = E(e^{itx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \varphi(x) dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Dimë gjithashtu se kur X_1, X_2 janë madhësi të rastit me densitete dhe funksione karakteristike respektivisht $\varphi_1(x)$, $C_1(t)$ dhe $\varphi_2(x)$, $C_2(t)$ atëherë kushti:

$$C_1(t) \equiv C_2(t) \quad (4.8.7)$$

është i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Kur madhësitë e rastit X_i ($\forall i = \overline{1, n}$) janë të pavarura me funksione karakteristike $C_i(t_i)$, funksioni linear: $L = \sum_{i=1}^n a_i \cdot x_i$,

ka funksion karakteristik:

$$C(t) = \prod_{i=1}^n C_i(a_i \cdot t_i) \quad (4.8.8)$$

Kështu për zgjedhjen $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, të nxjerrë nga bashkësia me funksion shpërndarje $F(x)$ dhe funksion karakteristik $C(t)$, funksioni linear i zgjedhjes:

$Z = \sum_{i=1}^n X_i$ ka funksion karakteristik:

$$\psi_1(t) = [C(t)]^n \quad (4.8.9),$$

ndërsa statistika $\bar{X}$ ka funksion karakteristik: $\psi_2(t) = [C(\frac{t}{n})]^n \quad (4.8.10)$

➤ Kur madhësia $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, funksioni karakteristik i saj është:

$$C(t) = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2}} \quad (4.8.11)$$

dhe sipas Teoremës (2.3.4) statistika $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ ka funksion karakteristik:

$$\psi(t) = e^{it\mu - \frac{t^2 \cdot \sigma^2}{2n}} \quad (4.8.12)$$

Përfundimisht, kur $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ është nxjerrë nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$, sipas kushtit (4.8.11) dhe barazimit (4.8.12), arrijmë në përfundimin që:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \quad (4.8.13)$$

dhe për rrjedhojë:

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (4.8.14)$$

Dihet se kur madhësitë e rastit $X_i \sim N(0, 1)$ atëherë madhësia:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) \text{ dhe densitet:} \quad (4.8.15)$$

$$g(y) = \frac{\frac{n}{2} - 1 \cdot e^{-\frac{y}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})}, \quad (4.8.16)$$

$$\text{ku: } \Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} \cdot e^{-x} dx \quad (\text{gama funksioni}) \quad (4.8.17)$$

$$\text{dhe } \Gamma(1) = 1, \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n+1) = n!, \Gamma(2l) = \frac{2^{2l-1}}{\sqrt{\pi}} \cdot \Gamma(l) \cdot \Gamma\left(l + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(l) \cong \sqrt{2\pi} \cdot l^{l-\frac{1}{2}} \cdot e^{-l} \quad (\text{formula e Stirlingut}) \quad (4.8.18)$$

Madhësia e rastit χ^2 ka funksion karakteristik:

$$C(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}} \quad (4.8.19)$$

dhe moment të rendit “k”: $\mu_k = \frac{2^k \cdot \Gamma(n+k)}{\Gamma(n)}$,

$$\text{nga ku llogarisim : } \mu_1 = n = E(\chi^2), \sigma^2(\chi^2) = 2n \quad (4.8.20)$$

Përfundimisht, në qoftë se $X' = (X_1, \dots, X_n)$ është zgjedhje nga bashkësia

$N(0, 1)$, statistika:

$$X' \cdot X = \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n) \quad (4.8.21)$$

dhe kur zgjedhja është nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$, statistika:

$$\frac{(X-V)' \cdot (X-V)}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n) \quad (4.8.22)$$

$$\text{ku } V = \begin{pmatrix} \mu \\ \vdots \\ \mu \end{pmatrix}$$

Teorema e mëposhtme na mundëson gjetjen e shpërndarjes për statistikën $\bar{X}$ dhe s^2 , kur zgjedhja është nxjerrë nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$.

Teoremë 4.8.1

Në qoftë se zgjedhja $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ është nxjerrë nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$ atëherë statistikën e mëposhtme janë të pavarura dhe kanë shpërndarje respektive:

$$\begin{aligned} \circ \bar{X} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \\ \circ \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} &\sim \chi^2(n-1) \end{aligned}$$

Vërtetim:

(Marrë nga <http://mcs.une.edu.au/~stat261/notes.pdf>)

Në këtë rast kërkojmë shpërndarjen e çiftit $(\bar{X}; s^2)$,

ku:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \text{ dhe } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2$$

Ideja është kjo: Meqenëse shpërndarjen e $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ e njohim, mjafton të gjejmë shpërndarjen e s^2 dhe të tregojmë pavarësinë.

Shpërndarja e s^2

Kryejmë transformimin: $Y = A \cdot X$, ku $A = (a_{ij})_{n \times n}$ është matricë ortogonale me rresht të fundit $(\frac{1}{\sqrt{n}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n}})$

$$y_n = \sum_{i=1}^n a_{ni} x_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} x_i = \sqrt{n} \cdot \bar{x} \text{ pra } y_n = \sqrt{n} \cdot \bar{x} \quad (4.8.23)$$

Nga ana tjetër, meqë matrica A është ortogonale kemi:

$$\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 \quad (4.8.24)$$

Kemi:

$$(n-1)s^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - y_n^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$$

$$\text{Pra } (n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 \quad (4.8.25)$$

(siç shihet mjafton të gjejmë shpërndarjen e $\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2$)

Shënojmë me $V = (\mu, \mu, \dots, \mu)'$

Matrica:

$A \cdot V = (\sum_{i=1}^n a_{1i} \mu, \sum_{i=1}^n a_{2i} \mu, \dots, \sum_{i=1}^n a_{(n-1)i} \mu, \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \mu = \sqrt{n} \mu)'$ është matricë ortogonale dhe trajta e saj është: $A \cdot V = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{n} \mu)$

Funksioni i densitetit për vektorin X është:

$$q(x) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (X - V)'(X - V) \right\},$$

kurse funksioni i densitetit për vektorin Y është:

$$q(y) = q(x) \quad |J| = 1 \quad \text{meqë } |J| = 1$$

$$q(y) = \frac{1}{(\sigma \sqrt{2\pi})^n} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} (Y - AV)'(Y - AV) \right\}$$

duke pasur parasysh që $A \cdot V = (0, 0, \dots, 0, \sqrt{n} \mu)$

forma:

$$(Y - AV)'(Y - AV) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + (y_n - \sqrt{n}\mu)^2$$

atëherë:

$$q(Y) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + (y_n - \sqrt{n}\mu)^2\right)\right\} \quad (4.8.26)$$

Shihet se $Y_1, Y_2, \dots, Y_{n-1}, Y_n$ janë të pavarur dhe kanë:

$$Y_i \sim N(0, \sigma^2) \quad \text{për } i = 1, 2, \dots, n-1 \text{ dhe } Y_n \sim N(\sqrt{n}\mu, \sigma^2)$$

$$\text{Prej (4.8.25)} \quad (n-1)s^2 = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2, \text{ atëherë } \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i}{\sigma}\right)^2$$

Duke qenë se madhësia $\frac{Y_i}{\sigma} \sim N(0,1)$, kemi që:

$$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$$

$$\text{Kurse } \bar{x} = \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

Përfundimisht:

- $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$
- $\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{y_i}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$ dhe prej (4.8.26) këto statistika janë

të pavarura

Në këtë mënyrë provuam se kur $X' = (x_1, \dots, x_n)$ është zgjedhje nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$, statistikën: $\bar{x}$ dhe $\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$ janë të pavarura dhe kanë shpërndarje përkatësisht:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n x_i \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}\right)^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2 \sim \chi^2(n-1) \quad (4.8.27)$$

$$\text{ku } y_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Vektori i rastit $(\bar{x}, s^2)$ ka densitet:

$$p(\bar{x}, s^2) = p_1(\bar{x}) \cdot p_2(s^2) = \\ = \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{1}{\sigma^n \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} s^{n-3} \cdot \exp\left\{-\frac{(n-1) \cdot s^2 + n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

ku:

$$p_1(\bar{x}) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2} \cdot n\right\} \quad (4.8.28)$$

$$p_2(s^2) = \frac{n-1}{2^{\frac{n-1}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \sigma^2} \cdot \left[\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot s^2\right]^{\frac{n-3}{2}} \cdot \exp\left\{-\frac{n-1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot s^2\right\} \quad (4.8.29)$$

$$s^2 \in (0, +\infty)$$

Konkluzione:

Nga Teorema që vërtetohet mund të nxjerrim këto konkluzione:

- Ndryshorja e rastit $z = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \sqrt{n} \sim N(0,1)$

Kjo ndodh sepse:

$$q(z) = p(\bar{x}) \cdot |J| = p(\bar{x}) \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{ku } \bar{x} = \frac{\sigma z}{\sqrt{n}} + \mu \text{ dhe } \bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$q(z) = \frac{1}{\sigma} \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2} \cdot n\right\} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

kjo do të thotë se $z \sim N(0,1)$ dhe $\left(\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma}\right)^2 \cdot n \sim \chi^2(n)$

- Ndryshorja $\eta = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

Dimë se raporti $V = \frac{z}{\sqrt{\frac{\eta}{n-1}}} \sim t(n-1)$, (shpërndarja “studenti” me n-1

“shkallë lirie”) kjo do të thotë se:

$$V = \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2(n-1)}}} = \frac{\bar{x}-\mu}{s} \sqrt{n} \sim t(n-1)$$

Vërejtje: Ka vend edhe pohimi i anasjelltë i teoremës

Pohimi i Girit (1936); Kavatas (1949); Llukaçevit (1942)

Teoremë 4.8.2: Në qoftë se $\bar{X}$ dhe s^2 janë përkatësisht vlera mesatare dhe varianca e zgjedhjes me vëllim n nga një bashkësi me densitet $\varphi(x)$, atëherë po qe se $\bar{X}$ dhe s^2 janë statistika të pavarura kemi që $\varphi(x)$ është densiteti i shpërndarjes normale.

Rezultat më të thellë paraqet teorema e mëposhtme:

Teorema Kramerit 4.8.3 (1936)

Në qoftë se X_1, X_2 janë ndryshore rasti të pavarura, të tilla që shuma e tyre $X_1 + X_2$ ka shpërndarje normale, atëherë secila prej ndryshoreve X_1 dhe X_2 ka shpërndarje normale.

(Ky rezultat mund të përgjithësohet)

Shpërndarja asimptotike e statistikave s^2 dhe s

Mënyra e parë

Me ndihmën e aparatit të funksioneve karakteristike gjejmë shpërndarjen e statistikës s^2 . Për këtë formulojmë dhe vërtetojmë në fillim këtë teoremë.

Teoremë 4.8.4: Në qoftë se madhësitë e rastit të pavarura $X_i \sim N(0, 1)$,

$\forall i = \overline{1, n}$, atëherë madhësia:

$$V = \frac{\chi^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(1, \frac{2}{n}\right)$$

Vërtetim:

Dimë se madhësia e rastit χ^2 , ka për funksion karakteristik:

$$\varphi(t) = (1 - 2it)^{-\frac{n}{2}}, \quad (\text{shih 4.8.19})$$

Prej këtu gjejmë:

$$\varphi_V(t) = \left(1 - 2i \cdot \frac{t}{n}\right)^{-\frac{n}{2}} \quad (4.8.30)$$

Logaritmojmë anë për anë

$$\ln \varphi_V(t) = -\frac{n}{2} \cdot \ln \left(1 - 2i \cdot \frac{t}{n}\right) = -\frac{n}{2} \cdot \left\{ -\frac{2it}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(2it)^2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} = it - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

prej këtu gjejmë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \varphi_V(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(it - \frac{t^2}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) \cong it - \frac{t^2}{n}$$

nga ku pohojmë se:

$$\varphi_V(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{it - \frac{t^2}{n}} \quad (4.8.31)$$

Funksioni $\varphi(t) = e^{it - \frac{t^2}{n}}$, është funksioni karakteristik i madhësisë së rastit $T \sim N\left(1, \frac{2}{n}\right)$.

Nga teorema Levy-Cramer dhe barazimit (4.8.31) nxjerrim se:

$$V \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(1, \frac{2}{n}\right) \quad (4.8.32)$$

Rrjedhim:

- Nga barazimi $\chi^2 = V \cdot n$ dhe barazimi (4.8.32) del që:

$$\chi^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(n, 2n) \quad (4.8.33)$$

- Nga barazimet (4.8.27) dhe (4.8.30) gjejmë se:

$$s^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\sigma^2, \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}\right) \quad (4.8.34)$$

Mënyra e dytë

Të tregojmë tani me një mënyrë tjetër shpërndarjen e statistikës s^2 .

Dimë prej teoremës 4.8.1 se madhësia $\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$ ka shpërndarje $\chi^2(n-1)$, pra:

$$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$$

dhe se:

$$\chi^2(n-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(n-1, 2(n-1)) \quad (\text{sipas teoremës 4.8.4}), \text{ atëherë:}$$

$$E(s^2) = E\left(\frac{\sigma^2 \cdot \chi^2}{n-1}\right) = \frac{\sigma^2}{n-1} E(\chi^2) = \sigma^2 \quad (4.8.35)$$

$$D(s^2) = D\left(\frac{\sigma^2 \cdot \chi^2}{n-1}\right) = \frac{\sigma^4}{(n-1)^2} D(\chi^2) = \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}$$

Kjo do të thotë se për statistikën s^2 ekzistojnë pritja matematike dhe varianca.

Teoremë 4.8.5

Në qoftë se $(X_1, X_2, \dots, X_n, \dots)$ është një varg madhësish të pavarura, me shpërndarje të njëjtë $F(x)$, me varianca σ^2 dhe me vlera mesatare μ , atëherë plotësohen kushtet:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = 1; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \infty, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4.8.36)$$

$$\text{ku } \tau_n^2 = n \cdot \sigma^2$$

$$\tau_n^{*2} = n \cdot \sigma^{*2}$$

$$\sigma^{*2} = \int_{\mu - \varepsilon \cdot \tau_n}^{\mu + \varepsilon \cdot \tau_n} (x - \mu)^2 dF(x); \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (4.8.37)$$

Vërtetim:

Dihet që:

$$\sigma^2 = \int_R (x - \mu)^2 dF(x) = \int_{|x - \mu| \leq \varepsilon \cdot \tau_n} (x - \mu)^2 dF(x) + \int_{|x - \mu| > \varepsilon \cdot \tau_n} (x - \mu)^2 dF(x) \quad \text{ose}$$

$$\sigma^2 = \sigma^{*2} + \int_{|x - \mu| > \varepsilon \cdot \sigma \cdot \sqrt{n}} (x - \mu)^2 dF(x)$$

Meqenëse σ^2 ekziston nga kushti, kjo do të thotë se:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x - \mu| > \varepsilon \cdot \sigma \cdot \sqrt{n}} (x - \mu)^2 dF(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, si mbetje e integralit konvergjent atëherë kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\tau_n^{*2}}{\tau_n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sigma^{*2}}{n \cdot \sigma^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma^{*2} + R_n}{\sigma^2} = 1$$

$$\text{dhe } \lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \sigma^2 = \infty$$

Meqenëse kushtet (4.8.36) janë të nevojshme dhe të mjaftueshme (kushtet e Linderbergut dhe Felerit) kemi që madhësia:

$$\frac{z_n - S_n}{\tau_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, 1) \quad \text{ku:}$$

$$z_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$S_n = n \cdot \mu$$

$$\text{Konkludojmë që: } \frac{z_n - n \cdot \mu}{\sqrt{n} \cdot \sigma} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(0, 1) \quad (4.8.38)$$

Nga barazimi:

$\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n y_i^2$, ku madhësitë y_i^2 kanë shpërndarje të njëjtë, sipas teoremës (4.8.5) dhe sipas barazimeve (4.8.35) kemi:

$$\chi^2 = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(\mu^*, \sigma^{*2}) \quad (4.8.39)$$

$$\text{ku } \mu^* = E\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \cdot E(s^2) \cong (n-1)$$

$$\text{dhe } \sigma^{*2} = D\left(\frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}\right) = \frac{(n-1)^2}{\sigma^4} D(s^2) \cong 2(n-1) \quad (4.8.40)$$

$$\text{pra përfundimisht } s^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N\left(\sigma^2, \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}\right) \quad (4.8.41)$$

Për të gjetur shpërndarjen asimptotike të statistikës $s = \frac{\sigma \cdot \chi}{\sqrt{n-1}}$, llogarisim në fillim karakteristikat e saj numerike:

$$E(s) = \frac{\sigma}{\sqrt{n-1}} E(\chi) = \sigma \cdot \alpha$$

$$D(s) = \frac{\sigma^2}{(n-1)} D(\chi) = \sigma^2 \cdot \beta \quad (4.8.42)$$

$$\text{ku: } \alpha = \frac{E(\chi)}{\sqrt{n-1}} \quad \text{dhe } \beta = \frac{D(\chi)}{n-1}$$

$$\text{Dimë se: } E[\varphi(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \cdot p(x) dx \quad (4.8.43)$$

(në rastin kur ndryshorja e rastit X është diskrete kemi:

$$E[\varphi(X)] = \sum_x \varphi(x)p(x)$$

ku $p(x)$ është densiteti i madhësisë së rastit X .

Prej (4.8.43) gjejmë:

$$E(\chi^k) = E[(\chi^2)^{\frac{k}{2}}] = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \int_0^{+\infty} (\chi^2)^{\frac{k}{2}} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 \quad (4.8.44)$$

Nga barazimi i njohur:

$$\frac{1}{2^{\frac{n+k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n+k}{2})} \cdot \int_0^{+\infty} (\chi^2)^{\frac{n+k}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\chi^2 = 1 \quad (4.8.45)$$

dhe pasi zëvendësojmë te barazimi (4.8.44) $\frac{\chi^2}{2} = y$, gjejmë:

$$E(\chi^k) = \frac{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma(\frac{n+k}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \quad (4.8.46)$$

nga ku për $k = 1, 2$ marrim:

$$E(\chi) = \frac{\sqrt{2} \cdot \Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}; \quad E(\chi^2) = \frac{2 \cdot \Gamma(\frac{n+2}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} = n \quad (4.8.47)$$

$$\text{dhe } D(\chi) = E(\chi^2) - (E(\chi))^2 = n - 2 \cdot \left[\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right]^2$$

Sipas barazimeve (4.8.18); (4.8.42) dhe (4.8.47) gjejmë:

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{n-1}} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \cong \sqrt{1 + \frac{1}{2(n-1)}}$$

$$\beta = \frac{n - 2 \cdot \left[\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right]^2}{n-1} \cong 1 - \frac{2}{n-1} \cdot \left[\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})} \right]^2 = 1 - \alpha^2 \cong \frac{1}{2(n-1)}$$

prej këtu nxjerrim se:

$$E(s) = \alpha \cdot \sigma = \sigma \cdot \sqrt{1 - \frac{1}{2(n-1)}} \cong \sigma$$

si dhe:

$$D(s) = \beta \cdot \sigma^2 \cong \frac{\sigma^2}{2(n-1)}$$

Përfundimisht për karakteristikat numerike të statistikës s gjetëm këto vlera të përafërta:

$$E(s) \cong \sigma; D(s) \cong \frac{\sigma^2}{2(n-1)} \quad (4.8.48)$$

Duke ditur se $\chi^2(n-1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\{(n-1), 2(n-1)\}$ (Teorema 4.8.4), por konvergjenca është e dobët, janë gjetur transformime të tilla, që të zbatuara për madhësitë e rastit me shpërndarje χ^2 , të përftohen madhësi të rastit me shpërndarje asimptotikisht normale tashmë për n të vogël.

Transformime të tilla më të thjeshta janë dhënë nga Fisher.

Transformimi i Fisherit (pa vërtetim):

Nëse zgjedhja bëhet nga bashkësia $N(\mu; \sigma^2)$, atëherë tregohet se madhësia e rastit:

$$\sqrt{2 \cdot \chi^2(n-1)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\sqrt{2 \cdot (n-1)} - 1, 1), \text{ për rrjedhojë madhësia:}$$

$$s = \frac{\sigma}{\sqrt{2 \cdot (n-1)}} \cdot \sqrt{2 \cdot \chi^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(E(s), \sigma^2(s)).$$

$$\text{Përfundimisht treguam se } s \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\sigma, \frac{\sigma^2}{2(n-1)}\right) \quad (4.8.49)$$

4.9 Shpërndarja asimptotike e koeficientit të variacionit të zgjedhjes $c = \frac{s}{\bar{x}}$

Për të gjetur shpërndarjen asimptotike të madhësisë c, shfrytëzojmë faktin që

$c = f(\bar{x}, s) = \frac{s}{\bar{x}} = s \cdot (\bar{x})^{-1}$ është funksion i dy statistikave $\bar{x}$ dhe s të pavarura, njëra me shpërndarje normale dhe tjetra me shpërndarje asimptotikisht normale. Që në vitet '30, Hendricks & Robey (1936) studiuuan shpërndarjen e koeficientit të variacionit të zgjedhjes së nxjerrë nga popullimi normal. Shpërndarja e saktë e koeficientit të variacionit të zgjedhjes nga bashkësia normale, u dha nga Iglewicz (1967). McKay (1932) dha një përafrim të shpërndarjes së koeficientit të variacionit të zgjedhjes bazuar te shpërndarja χ^2 .

Miller (1991), për herë të parë përdori shpërndarjen asimptotike të koeficientit të variacionit të zgjedhjes e cila “mundet në mënyrë të arsyshme të vlerësohet normale nëse popullimi është normal”.

Le të jetë $X_1, X_2, \dots, X_n$ një zgjedhje e rastit me vëllim n nga popullimi normal me mesatare μ dhe variancë σ^2 . Nëse $\bar{x}$ dhe s janë përkatësisht mesatarja dhe devijimi standart i zgjedhjes, atëherë Miller dha zbërthimin e mëposhtëm për $\frac{s}{\bar{x}}$:

$$\frac{s}{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\mu} + \frac{1}{\sqrt{n-1}} [\sqrt{0,5} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right) Y_1 - \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 Y_2] + o_p\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

ku, Y_1 dhe Y_2 janë ndryshore me shpërndarje normale të normuar dhe të pavarura.

Prej këtui, ai konkludoi se:

$$\frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\frac{\sigma}{\mu}, \frac{(\sigma/\mu)^2}{n-1} [0,5 + (\sigma/\mu)^2]\right)$$

Në këtë konkluzion mund të arrijmë edhe në një mënyrë tjetër:

Le të jetë $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, një funksion që konsiderohet linear në fushën e ndryshimit të vektorit të rastit $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, të tillë që

$E(X') = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$; $E(x_i) = \mu_i$, $\forall i = \overline{1, n}$, atëherë sipas formulës së Taylor kemi:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cong f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) + (x_1 - \mu_1) \frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + (x_n - \mu_n) \frac{\partial f}{\partial x_n} + \dots + R_k$$

$$\text{Prej këtui gjejmë: } E[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \cong f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \quad (4.9.1)$$

(Leka, 2011, fq15)

$$D[f(x_1, x_2, \dots, x_n)] \cong \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \cdot D(x_1) + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \cdot D(x_n) + 2 \frac{\partial f}{\partial x_{n-1}} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n} \cdot \text{COV}(x_{n-1}; x_n) \quad (4.9.2)$$

$$\text{Për funksionin tonë } c = f(\bar{x}, s) = \frac{s}{\bar{x}} = s \cdot (\bar{x})^{-1} \quad (4.9.3)$$

Nga zbërthimi i këtij funksioni gjejmë:

$$c = f(\bar{x}, s) \cong f(\mu, \sigma) + (\bar{x} - \mu) \cdot \frac{\partial f}{\partial \bar{x}} + (s - \sigma) \cdot \frac{\partial f}{\partial s} \quad (4.9.4)$$

nga ku, llogarisim:

$$E(c) \cong E[f(\mu, \sigma)] \cong f(\mu, \sigma) = \frac{\sigma}{\mu}$$

$$\text{Pra gjetëm: } E(c) \cong \frac{\sigma}{\mu} = \omega \quad (4.9.5)$$

Tek teoremat qendrore limite kemi treguar se kur $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

(ku $x_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\forall i = \overline{1, n}$) mund të konsiderohet linear në lidhje me secilën ndryshore në të gjithë fushën e ndryshimit të tyre, atëherë funksioni z ka shpërndarje afërsisht normale, pra:

$$z \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(E(z); \sigma^2(z)) \quad (4.9.6)$$

Meqë funksioni:

$c = f(\bar{x}, s) = \frac{s}{\bar{x}} = s \cdot (\bar{x})^{-1}$ mund të konsiderohet linear në lidhje me secilën ndryshore, në gjithë fushën e ndryshimit të tyre, sipas rezultatit (4.9.6) pohojmë se:

$$c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(\mu^*; \sigma^{*2})$$

Meqenëse $D(c) = c^2\{c\} \cdot E^2(c)$, gjejmë:

$$D(c) \cong \frac{\gamma^2}{2(n-1)} \cdot [1 + \frac{2\gamma^2}{n} \cdot (n-1)] \cong \frac{\gamma^2}{2(n-1)} \cdot (1 + 2\gamma^2) \quad (4.9.7)$$

Sipas barazimeve (4.9.5) dhe (4.9.7) konkludojmë:

$$c \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} N(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} \cdot (1 + 2\gamma^2))$$

Në këtë mënyrë vërtetuar këtë teoremë:

Teoremë 4.9.1

Në qoftë se $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ është zgjedhje e bërë nga bashkësia normale me parametra μ, σ^2 atëherë kemi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{c < t\} = \frac{1}{\sigma^* \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-\mu^*)^2}{2\sigma^{*2}}} dx$$

ku $c = \frac{s}{\bar{x}}$ është koeficienti i variacionit të zgjedhjes dhe $\mu^* = E(c)$, $\sigma^* = \sigma(c)$.

Mënyra e dytë

Të gjejmë tani me një mënyrë tjetër shpërndarjen e statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100$, për rastin kur statistikën $\bar{x}$ dhe s^2 janë ndërtuar për zgjedhjen nga bashkësia normale $N(\mu, \sigma^2)$ pra:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; \quad s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (4.9.13)$$

Dimë se: $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$ dhe densiteti i saj është:

$$p_1(\bar{x}) = \frac{\sqrt{n}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2} \cdot n\right\} \quad (4.9.14)$$

Ndërsa madhësia: $\frac{n-1}{\sigma^2} \cdot s^2 \sim \chi^2(n-1)$, me funksion të densitetit:

$$p_2(s^2) = \frac{\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot s^{n-3} \cdot \exp\left\{-\frac{n \cdot s^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.15)$$

Prej Teoremës Nejman – Fisher, dimë se kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që statistika $T(X_1, X_2, \dots, X_n)$ të jetë e mjaftueshme për parametrin e panjohur θ është që:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n, \theta) = \varphi[T(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta] \cdot h(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (4.9.16)$$

ku: $\varphi[T(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta]$, është një funksion që varet nga të dhënat vetëm nëpërmjet funksionit $T(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

$h(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – është funksion që varet vetëm nga zgjedhja.

Të tregojmë tani që statistika $T(\bar{x}, s^2)$ është e mjaftueshme për parametrin $\theta(\mu, \sigma^2)$.

Për zgjedhjen $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, gjejmë:

$$p(x, \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2\right\} \quad (4.9.17)$$

Në këtë barazim, pas transformimit:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = \sum_{i=1}^n [(x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - \mu)]^2 = (n-1)s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2 \quad (4.9.18)$$

gjejmë:

$$p(x, \mu, \sigma^2) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^n \cdot \exp\left\{-\frac{(n-1)s^2 + n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.19)$$

Shënojt:

$$\varphi[T(x_1, x_2, \dots x_n), \theta] = \exp \left\{ -\frac{(n-1)s^2 + n(\bar{x} - \mu)^2}{2\sigma^2} \right\}$$

dhe

$$h(x_1, x_2, \dots x_n) = 1$$

Barazimi (4.9.19) tregon se statistikat $\bar{x}$ dhe s^2 janë të pavarura dhe vektori i rastit $(\bar{x}, s^2)$ është i mjaftueshëm për parametrin dy përmasor $\theta(\mu, \sigma^2)$.

Duke njohur shpërndarjen e statistikës s^2 prej (4.9.15), gjejmë:

$$p_2(s) = \frac{2\left(\frac{n}{2\sigma^2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot s^{n-2} \cdot \exp\left\{-\frac{ns^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.20)$$

Statistika $T(\bar{x}, s)$, me komponentë të pavarur ka shpërndarje:

$$p(\bar{x}, s) = p_1(\bar{x}) \cdot p_2(s) = \frac{\frac{n}{2}}{2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sigma^n \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot s^{n-2} \cdot \exp\left\{-\frac{ns^2}{2\sigma^2} - \frac{n(\bar{x}-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.21)$$

Të gjejmë tani shpërndarjen e statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}} 100$. Për këtë shënojmë:

$$\begin{cases} u = \bar{x} \\ c = \frac{s}{\bar{x}} 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = u \\ s = \frac{u \cdot c}{100} \end{cases} \quad (4.9.22)$$

Vektori i rastit (u, c) ka shpërndarje:

$$p(u, c) = p_1(u) \cdot p_2\left(\frac{u \cdot c}{100}\right) \cdot |J(u, c)| \quad (4.9.23)$$

ku $J(u, c)$ është jakobiani i transformimit.

Nëse zëvendësojmë tek barazimi (4.9.23), rezultatet (4.9.14) dhe (4.9.20) gjejmë:

$$p(u, c) = \frac{\frac{n}{2}}{2^{\frac{n-2}{2}} \cdot \sigma^n \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \left(\frac{u \cdot c}{100}\right)^{n-2} \cdot \frac{u}{100} \exp\left\{-\frac{n \cdot u^2 \cdot c^2}{2 \cdot 100^2 \cdot \sigma^2} - \frac{n(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.24)$$

ose

$$p(u, c) = \frac{A}{100^{n-1}} \cdot c^{n-2} \cdot u^{n-1} \cdot \exp\left\{-\frac{n \cdot u^2 \cdot c^2}{2 \cdot 100^2 \cdot \sigma^2} - \frac{n(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (4.9.25)$$

Meqë statistika $\bar{X}$ merr vlera në intervalin $(0, +\infty)$ në rastin e materialit të betonit, mund të gjejmë densitetin probabilitar të përbërësit c si më poshtë:

$$p(c) = \int_0^{+\infty} p(u, c) du = \frac{A \cdot c^{n-2}}{100^{n-1}} \cdot \int_0^{+\infty} u^{n-1} \cdot \exp\left\{-\frac{n \cdot u^2 \cdot c^2}{2 \cdot 100^2 \cdot \sigma^2} - \frac{n(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} du \quad (4.9.26)$$

Pas kryerjes së veprimeve, tregohet se:

Kur, $X' = (x_1, \dots, x_n)$ është zgjedhje nga bashkësia normale $N(\mu, \sigma^2)$,

statistika $c = \frac{s}{\bar{x}} 100$ ka densitet të shpërndarjes:

$$f(c, \omega) = \frac{100 \cdot c^{n-2} \cdot \exp\left\{-\frac{n \cdot c^2}{2\omega^2 \left(1 + \frac{c^2}{100^2}\right)}\right\}}{2^{\frac{n-2}{2}} \cdot (100^2 + c^2)^{\frac{n}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \cdot \sqrt{\pi}} I(c) \quad (4.9.27)$$

ku $I(c)$ përcaktohet nga:

$$I(c) = \int_0^{+\infty} \left(t + \frac{100^2 \sqrt{n}}{\omega \cdot \sqrt{100^2 + c^2}}\right)^{n-1} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} \cdot dt \quad (4.9.28)$$

dhe $\omega = \frac{\sigma}{\mu} 100$ është parametri i panjohur i bashkësisë.

Për kontrollin e hipotezës $H_0: \omega \leq \omega_0$ në familjen me shpërndarje $f(c, \omega)$, ekziston kriteri uniformisht më i fuqishëm invariant, i cili jepet prej (4.9.29) ku konstantja c_k përcaktohet prej (4.9.30) (Leka, 2011, fq 16)

$$\varphi(c) = \begin{cases} 1 & \text{për } c \geq c_k \\ 0 & \text{për } c < c_k \end{cases} \quad (4.9.29)$$

ku konstantja c_k përcaktohet nga barazimi:

$$\int_{c_k}^{+\infty} f(c, \omega) dc = \alpha \quad (4.9.30)$$

KAPITULLI V

Zbatime të shpërndarjes asimptotike të statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2})$

5.1 Karta e kontrollit për koeficientin e variacionit të zgjedhjes së nxjerrë nga popullimi normal.

Nisur nga rezultatet e arritura për shpërndarjen e statistikave c , s dhe $\bar{x}$, të përcaktojmë tani p -kuantilin c_p për koeficientin e variacionit të zgjedhjes $c = \frac{s}{\bar{x}}$. Kjo do të na mundësojë ndërtimin e një tablele për të gjetur numrat që mund të konsiderohen kufinj të sipërm kur njohim vëllimin e zgjedhjes, koeficientin e variacionit të bashkësisë, me një nivel të caktuar besimi. Sa më i mirë të jetë përafrimi i shpërndarjes së madhësisë c me shpërndarjen normale, aq më të saktë jemi në përcaktimin e p -kuantilit.

Ne treguam që $c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} (1 + 2\gamma^2))$ (5.1.1)

Bazuar në përkufizimin e p -kuantilit, shkruajmë:

$$P\{c < c_p\} = P\{s - \bar{x} \cdot c_p < 0\} = p \quad (5.1.2)$$

(Leka, 2004, fq170)

Ky barazim na mundëson të përcaktojmë p -kuantilin c_p .

$$\text{Shënojmë } y = s - \bar{x} \cdot c_p \quad (5.1.3)$$

Madhësia y , si kombinim linear i statistikave $\bar{x}$ dhe s , me shpërndarje respektivisht normale dhe asimptotikisht normale, ka shpërndarje asimptotikisht normale:

$$y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(E(y); \sigma^2(y)) \quad (5.1.4)$$

Llogarisim karakteristikat numerike të kësaj shpërndarje:

$$E(y) = E(s - \bar{x} \cdot c_p) \cong \sigma - \mu \cdot c_p$$

$$\sigma^2(y) = \sigma^2(s - \bar{x} \cdot c_p) \cong \frac{\sigma^2}{2n} + c_p^2 \cdot \frac{\sigma^2}{n} \quad (5.1.5)$$

Pra:

$$y \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\sigma - \mu \cdot c_p; \sigma^2(\frac{1}{2 \cdot n} + \frac{c_p^2}{n})) \quad (5.1.6)$$

Sipas barazimit (5.1.2) dhe rezultatit (5.1.6) përcaktojmë tani p-kuantilin c_p .

$$p = P(y < 0) = P(s - \bar{x} \cdot c_p < 0) \cong \Phi\left(\frac{\mu \cdot c_p - \sigma}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot n} + \frac{c_p^2}{n}}}\right) = \Phi\left(\frac{\frac{c_p}{\gamma} - 1}{\sqrt{\frac{1}{2n} + \frac{c_p^2}{n}}}\right)$$

shënojmë $t_p = \frac{\frac{c_p}{\gamma} - 1}{\sqrt{\frac{1}{2 \cdot n} + \frac{c_p^2}{n}}}$ nga ku përcaktojmë:

$$c_p = \gamma \cdot \frac{1 + t_p \cdot \sqrt{\frac{1}{2 \cdot n} \cdot \left(1 - \gamma^2 \cdot \frac{t_p^2}{n}\right)} + \frac{\gamma^2}{n}}{1 - \gamma^2 \cdot \frac{t_p^2}{n}}$$

ose:

$$c_p = \gamma \cdot \frac{1 + t_p \cdot \sqrt{\frac{L}{2 \cdot n} + \frac{\gamma^2}{n}}}{L}, \quad \text{ku } L = 1 - \gamma^2 \cdot \frac{t_p^2}{n} \quad (5.1.7)$$

Në kushtet kur ne njohim vlerat e koeficientit të variacionit γ të bashkësisë së përgjithshme të përcaktuara në bazë të kushteve teknike, barazimi (5.1.7) na mundëson gjetjen e vlerës që duhet konsideruar kufi i sipërm i koeficientit të variacionit të zgjedhjes, me besueshmëri p dhe vëllim n të caktuar.

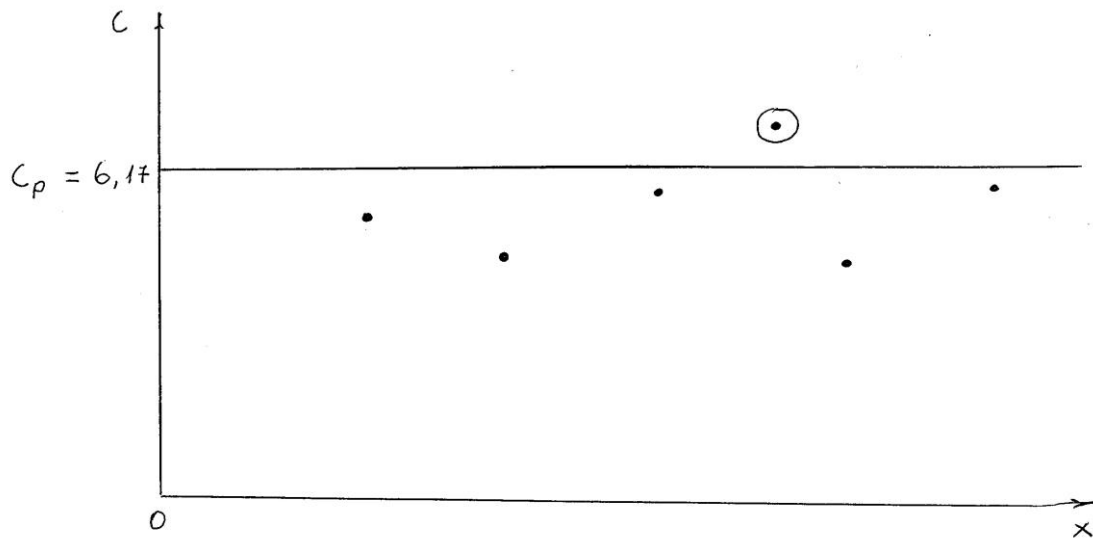
Më poshtë, është ndërtuar një kartë kontrolli për koeficientin e variacionit, me anë të së cilës realizohet ndjekja në dinamikë e madhësisë c , gjatë gjithë hallkave të procesit teknologjik, gjë që shërben për të vlerësuar shkallën e homogjenitetit të materialit.

Si duhet lexuar tabela?

Për shembull, për $\gamma = 5\%$, $n=25$, besueshmëri $p=0,95$ gjejmë në tabelë vlerën $c_p = 6.17$. Në qoftë se vlera c_v për koeficientin e variacionit e llogaritur sipas zgjedhjes me vëllim $n=25$, të nxjerrë nga bashkësia me koeficientin standart $\gamma = 5\%$, është më e vogël se c_p , nuk kemi pse të mos besojmë që e gjithë sasia e ka koeficientin e variacionit brenda standartit. Në rast se pas përsëritjes së provave rezulton $c_v > c_p$, koeficienti i variacionit për mostrën ka dallime të rëndësishme nga standarti $\gamma = 5\%$. Në këtë rast rekomandojmë të ndërhyhet në procesin teknologjik të prodhimit.

Më poshtë është treguar rezultati nga zgjedhja për të dhënat e marra nga kompania Ferro-Beton. Siç shihet nga grafiku, të dhënat prej zgjedhjes numër 4 japin një koeficient variacioni më të lartë se 6.17. Në këtë rast duhet ndërhyrë për të “zbuluar” se çfarë nuk shkon gjatë procesit të prodhimit.

$$\gamma = 5\% \quad , \quad n = 25 \quad , \quad p = 0.95 \quad , \quad c_p = 6.17$$



Në mënyrë analoge do të ndërtoheshin kartat e kontrollit edhe për nivele të tjera besimi.

Karta e kontrollit për koeficientin e variacionit (besueshmëria $p=0.95$; γ në përqindje)

$\gamma \backslash n$	10	14	18	20	25	30	500	1000
4	5,48	5,25	5,1	5,05	4,93	4,85	4,21	4,15
5	6,85	6,56	6,4	6,31	6,17	6,07	5,26	5,18
6	8,23	7,9	7,66	7,57	7,41	7,28	6,31	6,22
7	9,61	9,2	8,94	8,84	8,65	8,5	7,37	7,26
11	15,1	14,5	14,1	13,92	13,6	13,38	11,58	11,4
12	16,5	15,8	15,4	15,2	14,9	14,61	12,64	12,45
13	17,95	17,2	16,7	16,5	16,11	15,84	13,69	13,49
14	19,35	18,5	17,97	17,76	17,36	17,07	14,75	14,53
15	20,77	19,8	19,27	19,05	18,62	18,3	15,8	15,57

16	22,19	21,2	20,58	20,34	19,88	19,5	16,86	16,6
17	23,6	22,56	21,89	21,64	21,14	20,77	17,92	17,65
18	25,04	23,92	23,21	22,94	22,4	22,02	18,97	18,69

5.2 Përdorimi i statistikave s^2 dhe c në procesin e kontrollit të cilësisë së prodhimit.

Ka mjaft raste në praktikë në të cilat jemi të interesuar për të përmirësuar cilësinë e një produkti. Kjo mund të realizohet duke ndryshuar disa nga faktorët e prodhimit. Cilësia e produktit mund të vlerësohet me ndihmën e statistikave s^2 (varianca e zgjedhjes), c (koeficienti i variacionit të zgjedhjes) etj.

Për konkretizim, shohim rastin kur statistika e zgjedhur është varianca e zgjedhjes s^2 si dhe koeficienti i variacionit të zgjedhjes c , në rastin kur zgjedhja është bërë nga popullimi normal.

Nëse ka qenë apo jo efektive masa që ne kemi marrë për përmirësimin e cilësisë, mund të sqarohet kështu:

Bazuar në rezultatet e provave para dhe pas masës së marrë, gjejmë dy vlera të statistikës s^2 ose c . Më pas, nëpërmjet kontrollit të hipotezave statistikore, përcaktojmë me një probabilitet të caktuar nëse ndryshimet në një produkt (psh tek betoni) kanë qenë të rastit apo thelbësore.

Kriteri ndërtohet duke u bazuar në shpërndarjen e statistikave s^2 dhe c .

Dimë se kur $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ është zgjedhje nga bashkësia normale $N(\mu, \sigma^2)$, statistika s^2 ka shpërndarje asimptotikisht normale, me parametra:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\sigma^2; \frac{2 \cdot \sigma^4}{n-1}) \quad (5.2.1)$$

po ashtu, dhe statistika c ka shpërndarje asimptotikisht normale, me parametra:

$$c = \frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} \cdot (1 + 2 \cdot \gamma^2)) \quad (5.2.2)$$

Statistikat s^2 dhe c i studiojmë në dy popullime: në bashkësinë e vlerave të tyre para se të merren masat për përmirësimin e cilësisë së produktit dhe pas ndryshimeve të faktorëve.

Realizojmë dy zgjedhje, me vëllime përkatësisht n_1 dhe n_2 nga këto dy popullime.

Vlerësimet e gjetura $\hat{s}_1^2$ dhe $\hat{s}_2^2$ i konsiderojmë si vlera të dy madhësive të rastit s_1^2 dhe s_2^2 , të pavarura, të tilla që:

$$s_i^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu_i; \sigma_i^2), \forall i = 1, 2$$

Në këto kushte, për të parë nëse kanë ndikuar faktorët e ndryshuar në ndryshimin e vlerave të statistikës s^2 , mund të bëjmë kontrollin e hipotezave të mëposhtme statistikore:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, me hipotezë alternative:

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$, me nivel rëndësie α të dhënë.

Në rastin kur $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ($i=1,2$) njihen, dihet se kriteri T_{s^2} :

$$T_{s^2} = \frac{|\hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2|}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \xrightarrow[H_0]{n \rightarrow \infty} N(0, 1) \quad (5.2.3)$$

dhe zona kritike e kriterit T_{s^2} është zona për të cilat $|T_{s^2}| > z_\alpha$, ku z_α përcaktohet nga ekuacioni $2\Phi(z_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$.

Statistika T_{s^2} merret si kriter për kontrollin e hipotezës H_0 .

Në rastin kur σ_i^2 ($i=1,2$) nuk njihen, por supozohet se $\sigma_i^2 = \sigma^2$, dihet se statistika T_{s^2} ka shpërndarje studenti me $n_1 + n_2 - 2$ shkallë lirie, pra:

$$T_{s^2} = \frac{|\hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2|}{\sqrt{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \widetilde{H}_0 \quad t(n_1 + n_2 - 2) \quad (5.2.4)$$

dhe zona kritike e kriterit përcaktohet e tillë që:

$$p\left(|T_{s^2}| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}; n_1 + n_2 - 2\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Bazuar në rezultatet e arritura në kapitullin e katërt, varianca empirike e statistikës s^2 është $\frac{2 \cdot s_i^4}{n_i - 1}$, $\forall i = 1, 2$. Prej këtu, duke zëvendësuar në barazimin (5.2.3), nxjerrim që:

$$T_{s^2} = \frac{|\hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2|}{\sqrt{2 \cdot \hat{s}_1^4 + 2 \cdot \hat{s}_2^4}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad (5.2.5)$$

Kryejmë të njëjtën procedurë edhe për statistikën c .

Vlerësimet e gjetura $\hat{c}_1$ dhe $\hat{c}_2$ i konsiderojmë si vlera të dy madhësive të rastit c_1 dhe c_2 , të pavarura, të tilla që:

$$c_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu_i; \sigma_i^2), \forall i = 1, 2$$

Edhe këtu, për të parë nëse kanë ndikuar faktorët e ndryshuar në ndryshimin e vlerave të statistikës c , mund të bëjmë kontrollin e hipotezave të mëposhtme statistikore:

$H_0: \mu_1 = \mu_2$, me hipotezë alternative:

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$, me nivel rëndësie α të dhënë.

Në rastin kur $\sigma_i^2 = \sigma^2$ ($i=1,2$) njihen, dihet se kriteri T_c :

$$T_c = \frac{|\hat{c}_1 - \hat{c}_2|}{\sigma \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{H_0} N(0,1) \quad (5.2.6)$$

dhe zona kritike e kriterit T_c është zona për të cilat $|T_c| > z_\alpha$, ku z_α përcaktohet nga ekuacioni $2\Phi(z_\alpha) - 1 = 1 - \alpha$.

Statistika T_c merret si kriter për kontrollin e hipotezës H_0 .

Në rastin kur σ_i^2 ($i=1,2$) nuk njihen, por supozohet se $\sigma_i^2 = \sigma^2$, dihet se statistika T_c ka shpërndarje studenti me $n_1 + n_2 - 2$ shkallë lirie, pra:

$$T_c = \frac{|\hat{c}_1 - \hat{c}_2|}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot s_{c_1}^2 + (n_2 - 1) \cdot s_{c_2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \widetilde{H}_0 t(n_1 + n_2 - 2) \quad (5.2.7)$$

dhe zona kritike e kriterit përcaktohet e tillë që:

$$p(|T_c| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}; n_1 + n_2 - 2) = 1 - \frac{\alpha}{2}$$

Bazuar në rezultatet e arritura në kapitullin e katërt, varianca empirike e statistikës c është $\frac{c_i^2}{2(n-1)} (1 + 2c_i^2)$, $\forall i = 1, 2$. Prej këtu, duke zëvendësuar në barazimin (5.2.7), nxjerrim që:

$$T_c = \frac{|\hat{c}_1 - \hat{c}_2|}{\sqrt{\frac{\hat{c}_1^2(1+2\hat{c}_1^2)}{2} + \frac{\hat{c}_2^2(1+2\hat{c}_2^2)}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} \quad (5.2.8)$$

Theksojmë se kriteret e dhëna T_{s^2} dhe T_c me anë të të cilave shihet nëse faktorët e ndryshuar kanë ndikuar në ndryshimin e statistikave s^2 dhe c , përdoren për zgjedhje me vëllime të mëdha dhe kur tipari sasior X i bashkësisë së përgjithshme ka ligj normal ose asimptotikisht normal.

I referohemi të dhënave të marra nga kompania Ferro-Beton për klasën 50Mpa. Kjo klasë është produkt i një recepture të caktuar e cila siguron proporcione të caktuara të përbërësve të betonit. Është eksperimentuar një recepture e re me proporcione të reja të përbërësve për synime të caktuara. Detyra jonë është të kontrollojmë nëse zbatimi në proces teknologjik i këtyre dy recepturave sjell ndryshime të qënësishme në homogjenitetin e betoneve të prodhuara.

Kontrollin po e bëjmë duke përdorur të dy kriteret e mësipërme dhe po krahasojmë rezultatet e dala nga këto kontrole.

Nga të dhënat e siguruar, nga një zgjedhje prej $n_1=25$ mostrash para eksperimentimit të recepturës së re rezultoi vlera e variancës së zgjedhjes e barabartë me $\hat{s}_1^2 = 2.8\text{Mpa}^2$. Pas eksperimentimit, nga një zgjedhje prej $n_2 = 21$ mostrash rezultoi vlera e variancës së zgjedhjes e barabartë me $\hat{s}_2^2 = 3.13\text{Mpa}^2$

Prej (5.2.5), vlera T_{s^2} e kriterit është:

$$\begin{aligned} T_{s^2} &= \frac{|\hat{s}_1^2 - \hat{s}_2^2|}{\sqrt{2 \cdot \hat{s}_1^4 + 2 \cdot \hat{s}_2^4}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}} = \\ &= \frac{|2.8 - 3.13|}{\sqrt{2 \cdot 2.8^2 + 2 \cdot 3.13^2}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 21 \cdot (25 + 21 - 2)}{25 + 21}} \end{aligned}$$

$$T_{s^2} = 1.245.$$

Nga tabela studenti, për $\alpha = 5\%$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1+n_2-2} = 2.015$. Meqë $T_{s^2} < t$, konkludojmë se eksperimentimi i recepturës së re nuk ka të dhëna që të ketë sjellë ndryshime të qënësishme në homogjenitetin e betoneve të prodhuara.

Nëse i referohemi vlerave të koeficientit të variacionit, nga zgjedhja prej $n_1=25$ mostrash para eksperimentimit të recepturës së re rezultoi vlera e koeficientit të variacionit të zgjedhjes e barabartë me $c_1 = 0.031$. Pas eksperimentimit, nga zgjedhja prej $n_2 = 21$ mostrash rezultoi vlera e koeficientit të variacionit të zgjedhjes e barabartë me $c_2 = 0.03089$.

Prej (5.2.8), vlera T_c e kriterit është:

$$T_c = \frac{|0.031 - 0.03089|}{\sqrt{\frac{0.031^2(1+2 \cdot 0.031^2)}{2} + \frac{0.03089^2(1+2 \cdot 0.03089^2)}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{25 \cdot 21 \cdot (25 + 21 - 2)}{25 + 21}}$$

$$T_c = 0.079582$$

Nga tabela studenti, për $\alpha = 5\%$, $t_{1-\frac{\alpha}{2}; n_1+n_2-2} = 2.015$. Edhe në këtë rast, meqë $T_c < t$, konkludojmë se eksperimentimi i recepturës së re nuk ka të dhëna që të ketë sjellë ndryshime të qënësishme në homogjenitetin e betoneve të prodhuara.

Duke krahasuar të dy kriteret, shohim se përfundimet janë të njëjta.

5.3 Karta e kontrollit të mostrës me anë të statistikave $\bar{c}$ dhe s_c

Ndryshorja sasiore X dhe shpërndarja e saj mund të përdoren për të kontrolluar cilësinë e prodhimit të një produkti psh të betonit. Konkretisht si ndryshore po zgjedhim koeficientin e variacionit $c = \frac{s}{\bar{x}}$.

Dimë se:

$$c = \frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} \cdot (1 + 2 \cdot \gamma^2)\right)$$

Mbështetur në vlerat e koeficientit të variacionit (në varësi të studimit dhe interesit mund të zgjidhet edhe ndonjë ndryshore tjetër) prodhimi i betonit mund të ndahet në dy klasa: tek njëra fusim prodhimin brenda kushteve tekniko-teknologjike ndërsa tek tjetra prodhimin jashtë kushteve tekniko-teknologjike. Pjesa θ_0 jashtë kushteve teknike përcaktohet nëpërmjet koeficientit të variacionit e tillë që $c > c_0$, ku c_0 përcaktohet nga kriteret specifike teknike. Qëllimi ynë është kontrolli i pjesës jashtë kriterëve teknike në partinë e dhënë.

Kemi që:

$$\theta_0 = p(c > c_0) = 1 - p(c < c_0) \cong 1 - \Phi\left(\frac{c_0 - \mu^*}{\sigma^*}\right), \quad (5.3.1)$$

kur dimë se

$$c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2})$$

Pra,

$$\Phi\left(\frac{c_0 - \mu^*}{\sigma^*}\right) \cong 1 - \theta_0$$

ose

$$\Phi(z_{1-\theta_0}) = 1 - \theta_0 \quad (5.3.2)$$

ku:

$$z_{1-\theta_0} = \frac{c_0 - \mu^*}{\sigma^*}$$

$$\text{ose } c_0 = \mu^* + \sigma^* \cdot z_{1-\theta_0} \quad (5.3.3)$$

Gjatë kontrollit të mostrave ne nuk pranojmë kampionët për të cilët:

$$p(c > c_0) > \theta_0 \quad (5.3.4)$$

ose sipas (5.3.3), ata kampionë për të cilët:

$$\mu^* + \sigma^* \cdot z_{1-\theta_0} > c_0 \quad (5.3.5)$$

Në këtë rast, si të konkludojmë për popullimin bazuar në të dhënat e zgjedhjes me vëllim “n”?

Për këtë mund të ndiqet kjo rrugë:

Shënoj me v funksionin linear:

$$v = \mu^* + \sigma^* \cdot z_{1-\theta_0}$$

Nëse bëjmë shumë zgjedhje nga i njëjti popullim, statistika v , duke qenë funksion linear i statistikave asimptotikisht normale, ka shpërndarje asimptotikisht normale:

$$v \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(E(v), \sigma^2(v))$$

me parametra:

$$E(v) = E(\bar{c}) + E(s_c) \cdot z_{1-\theta_0} = \mu^* + \sigma^* \cdot z_{1-\theta_0}$$

$$\sigma^2(v) = \sigma^2(\bar{c}) + \sigma^2(s_c) \cdot z_{1-\theta_0}^2 = \frac{\sigma^{*2}}{n} + \frac{\sigma^{*2}}{2(n-1)} \cdot z_{1-\theta_0}^2 \quad (5.3.6)$$

(statistikat $\bar{c}$ dhe s_c janë të pavarura).

Problemi shtrohet kështu:

Sa duhet marrë madhësia t_0 , që prej $v = \bar{c} + s_c \cdot t_0 > c_0$, të konkludojmë për popullimin me një besueshmëri të caktuar?

Zgjidhja e këtij problemi konsiston në ndërtimin e një karte kontrolli e cila na mundëson që bazuar në të dhënat e zgjedhjes me vëllim “n”, e cila rezulton me pjesën me difekt θ , të konkludojmë për popullimin (nëse plotëson apo jo kriteret teknike) me një probabilitet të caktuar kur vlera standarte e pjesës me difekt është θ_0 .

Si veprohet?

Sipas çdo zgjedhje llogarisim vlerën:

$$t = \frac{c_0 - \bar{c}}{s_c} \quad (5.3.7)$$

Më pas, mbështetur në përfundimin e arritur tek 5.1, për statistikën t , llogarisim p -kuantilin t_p prej barazimit:

$$t_p(\theta) \cong \frac{z_{1-\theta} + u_p \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{u_p^2}{2 \cdot n} \right) + \frac{z_{1-\theta}^2}{2 \cdot n}}}{1 - \frac{u_p^2}{2 \cdot n}} \quad (5.3.8)$$

dhe vlera u_p gjendet nga ekuacioni $\Phi(u_p) = p$.

Pra sipas barazimit (5.3.8) ne gjejmë p kuantilin t_p kur njohim pjesën θ me difekt të partisë.

Në këtë mënyrë gjejmë kufijtë e kontrollit të p -kuantilit t_p , të tillë që sipas rezultateve të zgjedhjes me vëllim “n” pranohet ose jo partia që kontrollohet. Nëse p e zëvendësojmë me α , atëherë kemi:

$$t_0 = t_\alpha(\theta_0) \cong \frac{z_{1-\theta_0} + u_\alpha \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \left(1 - \frac{u_\alpha^2}{2 \cdot n} \right) + \frac{z_{1-\theta_0}^2}{2 \cdot n}}}{1 - \frac{u_\alpha^2}{2 \cdot n}} \quad (5.3.9)$$

ku $\Phi(u_\alpha) = \alpha$.

Sipas barazimit (5.3.9) për α të dhënë dhe vëllim “n” të caktuar përcaktojmë $t_\alpha(\theta_0)$ si kufi i sipërm i vlerave të statistikës $t = \frac{c_0 - \bar{c}}{s_c}$. Bazuar në këtë

formulë, mund të kontrollojmë në vijëmbësi cilësinë e betonit, duke pranuar ose jo partinë e dhënë, sipas tiparit c , me anë të kontrollit të pjesës me difekt θ të zgjedhjes e krahasuar kjo me vlerën standarte θ_0 .

I referohemi të dhënave të marra nga kompania Ferro-Beton. Norma e pjesës me difekt për partinë që kontrollohet, referuar koeficientit të variacionit dhe sipas kushteve teknike është $\theta_0 = 3\%$.

Norma teknike c_0 për koeficientin e variacionit në rastin tonë është $c_0 = 5\%$. Për të kontrolluar nëse kjo parti është ose jo brenda kushteve teknike, për zgjedhjen me vëllim $n=20$ llogarisim vlerën:

$$t = \frac{c_0 - \bar{c}}{s_c}$$

$$t = \frac{c_0 - \bar{c}}{s_c} = \frac{0.05 - 0.0408}{1.373} = 0.006701,$$

Nga formula 5.3.13, për $\alpha = 0,025$, $n = 20$, $\theta_0 = 3\%$, gjejmë $t_\alpha(\theta_0) = 2.87$. Meqë $t < 2.87$, nuk ka arsye të mos pranojmë që e gjithë partia siguron pjesën θ_0 me difekt. Në rast se edhe pas përsëritjeve të provave $t > 2.87$, partia nuk pranohet sepse kalon normën θ_0 për pjesën me difekt.

5.4 Intervali me një besueshmëri të caktuar për koeficientin e variacionit $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ të një popullimi normal.

Në vijim të konkluzionit të dhënë nga Miller për shpërndarjen asimptotike të koeficientit të variacionit të zgjedhjes nga popullimi normal (pjesa 4.9), mund të gjejmë edhe kufijtë limit për intervalin me një besueshmëri të caktuar $1 - \alpha$ të tij:

$$\frac{s}{\bar{x}} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2 \left[0,5 + \left(\frac{\sigma}{\mu}\right)^2\right]}$$

Ky interval mund të përafrohet me:

$$\frac{s}{\bar{x}} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 \left[0,5 + \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2\right]}$$

ku z_α është $(1 - \alpha)$ përqindja e sipërme e shpërndarjes normale të normuar.

Më poshtë, jepet një mënyrë tjetër për gjetjen e intervalit me një besueshmëri të caktuar për koeficientin e variacionit $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ të një popullimi normal.

Le të jetë $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ zgjedhje nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$ për të cilën vektori $\theta(\mu, \sigma^2)$ nuk njihet.

Për të bërë vlerësimin intervalor të parametrut të panjohur γ , ndërtojmë statistikën:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \text{ dhe } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (5.4.1)$$

Dihet se statistika:

$$V = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 = \frac{n-1}{\sigma^2} \cdot s^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2(n-1) \quad (5.4.2)$$

dhe vlerat e saj nuk janë simetrike me origjinën, prandaj zonën e besimit

$L = (V_1, V_2)$ e zgjedhim të tillë që:

$$P(V < V_1) = P(V > V_2) = \frac{\alpha}{2} \quad (5.4.3)$$

Sipas barazimit (5.5.3) gjejmë se:

$$\begin{aligned} P(V_1 < V < V_2) &= P(V < V_2) - P(V < V_1) = 1 - P(V > V_2) - P(V < V_1) \\ &= 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha \end{aligned}$$

pra:

$$P(V_1 < V < V_2) = 1 - \alpha \quad (5.4.4)$$

dhe vlerat V_1, V_2 gjenden nga ekuacionet:

$$P(V < V_1) = \int_0^{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2} g(\chi^2) \cdot d\chi^2 = \frac{\alpha}{2}; \quad V_1 = \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2 (n-1) \quad (5.4.5)$$

dhe

$$P(V < V_2) = 1 - P(V > V_2) = \int_0^{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2} g(\chi^2) \cdot d\chi^2 = 1 - \frac{\alpha}{2};$$

$$V_2 = \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2 (n-1) \quad (5.4.6)$$

Për nivel rëndësie α të dhënë në tabelën e shpërndarjes χ^2 , sipas barazimeve (5.4.5) dhe (5.4.6) gjejmë V_1, V_2 të tillë që:

$$P(V_1 < V = \frac{n-1}{2} s^2 < V_2) = 1 - \alpha = p \quad \text{ose}$$

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{V_2} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{V_1}\right) = 1 - \alpha = p \quad (5.4.7)$$

Pjestojmë anë për anë me μ^2 dhe pasi zëvendësojmë $\mu \cong \bar{x}$ dhe $\frac{s}{\bar{x}} = c$, gjejmë një interval besimi për koeficientin $\gamma = \frac{\sigma}{\mu} : \left(\frac{n-1}{V_2} c^2 < \gamma^2 < \frac{n-1}{V_1} c^2\right)$ ose:

$$\left(c \cdot \sqrt{\frac{n-1}{V_2}} < \gamma < c \cdot \sqrt{\frac{n-1}{V_1}}\right) \quad (5.4.8)$$

dmth intervali $\left(c \cdot \sqrt{\frac{n-1}{V_2}}; c \cdot \sqrt{\frac{n-1}{V_1}}\right)$ përmban vlerën e vërtetë të parametrin $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ me probabilitet p , pra ai interval përbën zonën e besimit. Qendra e këtij intervali mund të merret si vlerësim pikësor për parametrin e panjohur γ .

Normat teknike sipas eurokodit, përcaktojnë si kufi të sipërm të c vlerën 6% për klasën 30Mpa të betonit. Nga të dhënat e kompanisë Ferro-Beton për këtë klasë gjejmë:

$$n=30; \bar{x}=33.62667; s = 1.373376; c = 0.040842$$

Prej (5.5.8), për $\alpha = 5\%$, gjejmë:

$$\gamma \in \left(0.040842 \cdot \sqrt{\frac{29}{45.722}}; 0.040842 \cdot \sqrt{\frac{29}{16.047}}\right)$$

$$\gamma \in (0.032527; 0.054905)$$

Prej këtui del se betoni e ka klasën e caktuar.

Nëse shfrytëzojmë rezultatin e dhënë nga Miller kemi:

$$\frac{s}{\bar{x}} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2 \left[0.5 + \left(\frac{s}{\bar{x}}\right)^2\right]}$$

Kryejmë veprimet për të dhënat e mësipërme:

$$0.040841867 \pm 1.96 \cdot 0.005371738 = 0.040841867 \pm 0.010528606$$

Kjo do të thotë se $\gamma \in (0.030313261; 0.051370474)$

Pra, edhe sipas Miller, betoni e ka klasën e caktuar. Të dy rrugët e ndjekura na çojnë në të njëjtin konkluzion.

5.5. Intervali me një besueshmëri të caktuar për p -kuantilin c_p .

Më parë kemi treguar se nëse $X' = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ është zgjedhje nga bashkësia $N(\mu, \sigma^2)$, atëherë statistika:

$$c = \frac{s}{\bar{x}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} (1 + 2\gamma^2)\right) \quad (5.5.1)$$

pra:

$$c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2}) \quad \text{ku } \mu^* = \frac{\sigma}{\mu} = \gamma; \sigma^{*2} = \frac{\gamma^2}{2(n-1)} (1 + 2\gamma^2)$$

Quajmë: $F(x) = P(c < x), \forall x \in R^1$, funksionin e shpërndarjes së madhësisë c (në rastin tonë është ligji normal).

Nga kjo bashkësi me funksion shpërndarje të vazhduar $F(x)$ nxjerrim zgjedhjen:

$$C' = (c_1, c_2, \dots, c_n) \quad (5.5.2)$$

dhe shënojmë:

$$(c_{(1)}, c_{(2)}, \dots, c_{(n)}) \quad (5.5.3)$$

statistikën e renditur të kësaj zgjedhje.

Le të jenë $c_{k_1}, c_{k_1+k_2}$ dy statistika çfarëdo të renditura.

Shënojmë:

$$\begin{aligned} U &= F(c_{(k_1)}) = U_1 + U_2 + \dots + U_{k_1} \\ V &= F(c_{(k_1+k_2)}) = U_1 + U_2 + \dots + U_{k_1} + \dots + U_{k_1+k_2} \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

ku: $U_1 = F(c_{(1)})$

$$U_2 = F(c_{(2)}) - F(c_{(1)})$$

$$\dots\dots\dots (5.5.5)$$

$$U_n = 1 - F(c_{(n)})$$

Dihet se vektori i rastit (U, V) ka shpërndarje të renditur Dirihle me dy përmasa, pra:

$(U, V) \sim D^*(k_1, k_2, n - k_1 - k_2 + 1)$, me funksion të densitetit:

$$f(u, v) = \begin{cases} \frac{\Gamma(n+1) \cdot u^{k_1-1} \cdot (v-u)^{k_2-1} \cdot (1-v)^{n-k_1-k_2}}{\Gamma(k_1) \cdot \Gamma(k_2) \cdot \Gamma(n-k_1-k_2+1)} & 0 < u < v < 1 \\ 0 & v, u - \text{të tjera} \end{cases}$$

Në këto kushte formulojmë këtë teoremë:

Teoremë 5.5.1

Në qoftë se $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ është zgjedhje nga bashkësia $\{c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2})\}$, ku $\mu^* = \frac{\sigma}{\mu} = \gamma$; $\sigma^{*2} = \frac{\gamma^2}{2(n-1)}(1 + 2\gamma^2)$ dhe $c_{k_1}, c_{k_1+k_2}$ janë dy statistika të renditura përkatësisht e k_1 - ta dhe $k_1 + k_2$ - ta të kësaj zgjedhje, atëherë intervali $(c_{(k_1)}; c_{(k_1+k_2)})$ përmban vlerën:

$c_p, \forall 0 < p < 1$ të dhënë, me probabilitet:

$$1 - \alpha = \beta_p(k_1, n - k_1 + 1) - \beta_p(k_1 + k_2, n - k_1 - k_2 + 1), \quad (5.5.6)$$

ku α është niveli i rëndësisë dhe β_p është beta funksioni jo i plotë.

(Leka, 1989, Buletini i Shkencave të Natyrës).

Me qenë se numrat k_1, k_2 janë të plotë pozitiv, intervali i besimit për c_p , gjendet duke përdorur statistikën e renditura $c_{(k_1)}; c_{(k_1+k_2)}$, vetëm për të tillë probabilitet sigurie “ $1 - \alpha$ ” që i takojnë zonës së vlerave të anës së djathtë të barazimit (5.5.6). Me anë të këtij barazimi për α, n, k_1, k_2 të dhënë gjejmë intervalin e besimit për p-kuantilin c_p .

Në pjesën e parë të këtij kapitulli, ne përcaktuam p-kuantilin c_p si kufi të sipërm. Sipas rezultateve të arritura në këtë paragraf ne realizojmë vlerësimin intervalor të p-kuantilit c_p , duke njohur kështu zonën e vlerave të c_p - së, me anë të cilës vlerësojmë cilësinë e partisë sipas kriterit c me një informacion më të plotë.

5.6 Kriteri për krahasimin e koeficientëve të variacionit të dy popullimeve normale.

Koeficienti i variacionit të një ndryshore rasti siguron një numër pa njësi për matjen e ndryshueshmërisë relative. Kjo është shumë e rëndësishme në mjekësi, financë, biologji etj. Popullimet mund të kenë të njëjtën ndryshueshmëri edhe në rastin kur mesataret dhe variancat e ndryshoreve, për të cilat jemi të interesuar, janë të ndryshme. Në situata të tilla, mundet që të transformohet ndryshorja e varur në mënyrë që variancat të jenë të njëjta dhe më pas mund të përdorim procedurën ANOVA për të krahasuar mesataret. Megjithatë, ndodh që nuk është e mundur të gjejmë një transformim që të mundësojë supozimin e variancave të barabarta ose është me interes krahasimi i ndryshueshmërisë relative. Në këto raste sugjerohet të bëhet testi për barazinë e koeficientëve të variacionit të dy bashkësive. Më poshtë, janë paraqitur rezultatet e propozuara nga Miller (Miller, 1991, 3351-3363) dhe Dudewicz dhe Mishra (Dudewicz dhe Mishra, 1988) të testeve për krahasimin e koeficientëve të variacionit të dy popullimeve normale.

Testi i propozuar nga Miller, për krahasimin e koeficientëve të variacionit të dy popullimeve normale, bazohet në faktin e njohur që shpërndarja e koeficientit të variacionit të zgjedhjes është asimptotikisht normale.

Madhësinë e rastit $c \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu^*, \sigma^{*2})$ e studiojmë në dy bashkësi të përgjithshme, asimptotikisht normale, që i shënojmë:

të parin $c_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu_1^*, \sigma_1^{*2})$; të dytin $c_2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(\mu_2^*, \sigma_2^{*2})$. Madhësitë c_1, c_2 janë të pavarura.

Nga dy bashkësitë marrim përkatësisht zgjedhjet:

$$c'_1 = (c_1, c_2, \dots, c_{n_1}), c'_2 = (c_1^0, c_2^0, \dots, c_{n_2}^0)$$

dhe ndërtojmë statistikën:

$$\bar{c}_1 = \frac{1}{n_1} \sum_{i=1}^{n_1} c_i \quad s_{c_1}^2 = \frac{1}{n_1 - 1} \sum_{i=1}^{n_1} (c_i - \bar{c}_1)^2 \quad (5.6.1)$$

$$\bar{c}_2 = \frac{1}{n_2} \sum_{i=1}^{n_2} c_i^0 \quad s_{c_2}^2 = \frac{1}{n_2 - 1} \sum_{i=1}^{n_2} (c_i^0 - \bar{c}_2)^2$$

Ngrejmë hipotezën $H_0: \mu_1^* = \mu_2^* = \mu^*$, që e kontrollojmë me nivel rëndësie α dhe hipotezë alternative $H_a: \mu_1^* \neq \mu_2^*$, duke supozuar $\sigma_1^{*2} = \sigma_2^{*2} = \sigma^{*2}$

Në hapësirat parametrike:

$$\Omega = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \sigma^{*2} / \mu_i^* \in (0; +\infty); \sigma^{*2} \in (0; +\infty)\} \quad (5.6.2)$$

$$\omega = \{\mu_1^*, \mu_2^*, \sigma^{*2} / \mu_i^* = \mu^*; \sigma^{*2} \in (0; +\infty)\} \quad (5.6.3)$$

dihet se vlerësimet e përgjasisë maksimale për parametrat në Ω :

$$\begin{aligned} \widetilde{\mu}_1^* &= \bar{c}_1, \quad \widetilde{\mu}_2^* = \bar{c}_2 \\ \widetilde{\sigma^{*2}} &= \frac{1}{n_1+n_2} [\sum_{i=1}^{n_1} (c_i - \bar{c}_1)^2 + \sum_{i=1}^{n_2} (c_i^0 - \bar{c}_2)^2] \end{aligned} \quad (5.6.4)$$

dhe në hapësirën ω :

$$\widetilde{\mu}^* = \frac{n_1 \cdot \bar{c}_1 + n_2 \cdot \bar{c}_2}{n_1 + n_2}; \quad \widetilde{\sigma^{*2}} = \frac{1}{n_1 + n_2} [\sum_{i=1}^{n_1} (c_i - \widetilde{\mu}^*)^2 + (c_i^0 - \widetilde{\mu}^*)^2] \quad (5.6.5)$$

Me supozimin se H_0 është e vërtetë, Miller propozoi për të përdorur testin e mëposhtëm me shpërndarje asimptotike normale të normuar:

$$S = \frac{\bar{c}_1 - \bar{c}_2}{\left\{ \left(\frac{1}{n_1-1} + \frac{1}{n_2-1} \right) R^2 [0.5 + R^2] \right\}^{1/2}} \quad (5.6.6)$$

Ndërsa në rastin e k zgjedhjeve, propozoi testin e mëposhtëm me shpërndarje asimptotike chi-square me k-1 shkallë lirie:

$$S_k = \{R^2 [0.5 + R^2]\}^{-1} [\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \bar{c}_i^2 - \frac{1}{N} (\sum_{i=1}^k (n_i - 1) \bar{c}_i)^2]$$

Në praktikë, madhësia R mund të vlerësohet si më poshtë:

$$R = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \bar{c}_i \quad (5.6.7)$$

Ndërsa Dudewicz dhe Mishra, për testimin e hipotezave:

$$H_0: \mu_1^{*2} = \mu_2^{*2} = \mu^{*2},$$

me hipotezë alternative

$$H_a: \mu_1^{*2} \neq \mu_2^{*2}$$

propozuan testin e mëposhtëm me shpërndarje normale të normuar për rastin e zgjedhjeve të mëdha:

$$Z = \frac{a (\bar{c}_1 - \bar{c}_2)}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{\mu^{*2}}{2} + \mu^{*4} \right) \right]^{1/2}} \quad (5.6.8)$$

Parametri i panjohur μ^{*2} , mund të zëvendësohet nga vlerësuesi i përgjasisë maksimale $\hat{\mu}^{*2}$, i cili jepet nga barazimi:

$$\hat{\mu}^{*2} = \frac{A}{B^2} \quad (5.6.9)$$

ku:

$$B = \bar{x}_1[\bar{x}_2^2 + 2s_2^2]^{1/2} + \bar{x}_2[\bar{x}_1^2 + 2s_1^2]^{1/2}$$

$$A = 2[(\bar{x}_1^2 + 2s_1^2)(\bar{x}_2^2 + 2s_2^2)]^{1/2} \left\{ \left[\frac{\bar{x}_1^2 + 2s_1^2}{\bar{x}_2^2 + 2s_2^2} \right]^{1/2} - \bar{x}_1, \bar{x}_2 \right\}$$

$$a = \sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

Ndërkaq, vlerësuesit e përgjasisë maksimale për mesataret e dy popullimeve janë si më poshtë:

$$\hat{\mu}_1 = \frac{\bar{x}_1}{2} + \frac{\bar{x}_2}{2} \left[\frac{\bar{x}_1^2 + 2s_1^2}{\bar{x}_2^2 + 2s_2^2} \right]^{1/2}$$

$$\hat{\mu}_2 = \frac{\bar{x}_2}{2} + \frac{\bar{x}_1}{2} \left[\frac{\bar{x}_2^2 + 2s_2^2}{\bar{x}_1^2 + 2s_1^2} \right]^{1/2}$$

ku:

$\bar{x}_i$ është mesatarja e zgjedhjes së i-të dhe s_i^2 është vlerësuesi i përgjasisë maksimale i σ_i^2 .

Më poshtë, bazuar në të dhënat e marra prej kompanisë Ferro-Beton, janë krahasuar rezultatet e dala nga zbatimi i të dy testeve të mësipërme.

Prej të dhënave të marra nga kompania Ferro-Beton, nga kontrolli i $n = 30$ mostrave për secilën nga klasat 30Mpa dhe 15Mpa, u llogaritën vlerat:

$$\bar{c}_1 = 5\%, \bar{x}_1 = 33.6, s_1 = 1.4, \bar{c}_2 = 7\%, \bar{x}_2 = 17, s_2 = 1.2$$

Të kontrollojmë me $\alpha = 0,05$, nëse ndryshimet e koeficientëve të variacionit të dy llojeve janë esenciale apo të rastit.

Së pari, llogarisim vlerën e kriterit të propozuar nga Dudewicz dhe Mishra:

$$a = \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{\frac{30}{29}} = 1.02$$

$$A = 2[(\bar{x}_1^2 + 2s_1^2)(\bar{x}_2^2 + 2s_2^2)]^{1/2} \left\{ \left[\frac{\bar{x}_1^2 + 2s_1^2}{\bar{x}_2^2 + 2s_2^2} \right]^{1/2} - \bar{x}_1, \bar{x}_2 \right\}$$

$$A = 5350.149$$

$$B = \bar{x}_1[\bar{x}_2^2 + 2s_2^2]^{1/2} + \bar{x}_2[\bar{x}_1^2 + 2s_1^2]^{1/2}$$

$$B = 34 \sqrt{17^2 + 2 \cdot 1.2^2} + 17 \sqrt{34^2 + 2 \cdot 1.4^2} = 1161.1$$

$$\hat{\mu}^{*2} = \frac{A}{B^2}$$

$$\hat{\mu}^{*2} = \frac{5350.149}{1348153} = 0.003969$$

Atëherë kemi:

$$Z = \frac{a(\bar{c}_1 - \bar{c}_2)}{\left[\frac{2}{n} \left(\frac{\mu^{*2}}{2} + \mu^{*4} \right) \right]^{1/2}}$$

$$Z = \frac{1.02(0.05 - 0.07)}{\sqrt{\frac{2}{30} \cdot \left(\frac{0.003969}{2} - 0.003969^2 \right)}} = -1.78$$

Nga tabela e shpërndarjes normale të normuar, për $\alpha = 0,05$, gjejmë $z_{\alpha/2} = 1.96$. Meqë $z = -1.78 > -z_{\alpha/2} = -1.96$, konkludojmë se nuk ka arsye që koeficientët e variacionit për dy llojet të konsiderohen të ndryshme, pra këto ndryshime janë rastësore. Kjo do të thotë që është arritur të sigurohet prodhimi i çimentos me koeficient variacioni pothuajse të njëjtë. Llogarisim tani vlerën kriterit të propozuar nga Miller:

$$S = \frac{\bar{c}_1 - \bar{c}_2}{\left\{ \left(\frac{1}{n_1 - 1} + \frac{1}{n_2 - 1} \right) R^2 [0.5 + R^2] \right\}^{1/2}} \quad (5.7.10)$$

$$R = \frac{1}{n - k} \sum_{i=1}^k (n_i - 1) \bar{c}_i \quad (5.7.11)$$

Prej të dhënave të marra nga kompania Ferro-Beton, nga kontrolli i $n_1 = 6$ mostrave për klasën 30Mpa, u llogarit vlera: $\bar{c}_1 = 6\%$ dhe nga kontrolli i

$n_2 = 8$ mostrave për klasën 15Mpa, u llogarit vlera: $\bar{c}_2 = 9\%$.

Të kontrollojmë me $\alpha = 0,05$, nëse ndryshimet e koeficientëve të variacionit të dy llojeve janë esenciale apo të rastit.

Duke zëvendësuar tek formula (5.7.11) kemi:

$$R = \frac{5 \cdot 0.06 + 7 \cdot 0.09}{6 + 8 - 2} = 0.0775$$

Zëvendësojmë tani tek formula (5.7.10) dhe kemi:

$$S = \frac{0.06 - 0.09}{\left\{ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) 0.0775^2 [0.5 + 0.0775^2] \right\}^{1/2}} = -0.933751$$

Meqë $|s| < z_{\alpha/2} = 1.96$, pohojmë se nuk ka arsye që koeficientët e variacionit për dy llojet të konsiderohen të ndryshme. Duke krahasuar rezultatet e dy testeve shohim që konkluzionet janë të njëjta.

Aneks**Të dhënat eksperimentale**

(Për efekt të ngjashmërisë së të dhënave, më poshtë janë paraqitur rezultatet e 30 matjeve nga 200 të bëra)

Matja	Klasa							
	C8/10	C12/15	C16/20	C20/25	C25/30	C30/37	C35/45	C40/50
1	12.3	15.9	24.5	28.3	32.6	39.5	48.5	54.2
2	13.5	18.2	26.3	27.4	35.4	40.2	47.4	53.8
3	11.3	17.4	25.1	29.2	34.1	39.3	47.8	54.1
4	14.3	19.2	23.2	25.9	32.5	37.8	49.2	51.8
5	13.2	16.2	22.8	26.8	35.8	38.5	46.5	56.2
6	10.6	15.1	24.1	27.1	35.9	40.2	46.4	52.3
7	15.2	16.9	21.5	25.8	31.4	41.5	47.1	54.1
8	14.1	15.8	25.2	29.1	32.1	42.3	49.3	52.1
9	12.6	17.8	26.3	30.5	31.9	38.5	48.3	54.3
10	11.6	18.5	23.8	28.9	33.4	39.7	50.2	54.7
11	12.4	16.3	22.3	27.4	34.2	37.4	49.9	51.3
12	13.4	17.3	25.1	26.8	32.2	38.4	48.5	52.3
13	11.2	15.9	24.3	26.3	32.3	38.9	47.6	51.7
14	13.4	18.3	22.1	28.9	35.2	37.2	45.6	54.2
15	14.2	19.1	21.7	27.5	34.6	38.1	47.2	55.3
16	14.5	15.8	24.2	25.9	33.1	39.1	48.6	51.9
17	15.7	17.6	23.4	27.2	34.1	37.4	46.3	55.5
18	14.3	17.7	23.5	28.1	32.7	38.5	45.9	54.9
19	12.4	18.3	24.6	29.9	32.8	37.2	46.7	56.4
20	13.5	17.4	24.5	28.4	34.6	38.9	45.8	54.3
21	13.7	16.3	23.1	26.7	35.3	38.2	49.1	54.1
22	15.2	16.8	23.4	25.6	33.9	37.9	46.7	55.1
23	13.6	17.4	23.5	29.9	32.7	38.2	46.9	55.2
24	11.3	18.1	21.5	29.6	34.9	39.9	47.6	56.1
25	14.6	15.2	23.6	26.8	35.1	37.5	48.2	55.3
26	10.1	16.6	24.5	25.3	35.6	38.5	48.4	56.1
27	13.4	17.1	24.8	27.5	33.7	38.6	46.6	55.4
28	14.2	15.9	25.2	27.7	31.6	39.2	49.2	51.1
29	11.3	16.3	23.1	26.1	32.1	38.1	50.1	52.1
30	12.8	19.3	24.6	28.1	33	40.4	50.5	52.3
R-mes	13.13	17.12333	23.86	27.62333	33.62667	38.83667	47.87	53.94
Dev Stand	1.439145	1.176108	1.272413	1.417789	1.373376	1.229096	1.401514	1.632768
Koef i variacionit	0.109607	0.068685	0.053328	0.051326	0.040842	0.031648	0.029278	0.03027

Lista e standardeve

1. Standardet për betonin

SK EN 206-1:2002	Betoni – pjesa 1. Specifikimet, vetitë, prodhimi dhe konformiteti (EN 206-1:2000)
SK EN2061/A1:2004	Betoni–pjesa 1. Specifikimet, vetitë, prodhimi dhe konformiteti (EN 206-1:2000/A1:2004)
SK EN 206-1/A2	Betoni–pjesa 1. Specifikimet, vetitë, prodhimi dhe konformiteti (EN 206-1:2000/prA2:2004)

2. Standarde të tjera

EN 12350-1	Ekzaminimi i betonit të njomë– pjesa 1. Mostrimi
EN 12350-2	Ekzaminimi i betonit të njomë – pjesa 2. Metoda e uljes
EN 12350-3	Ekzaminimi i betonit të njomë– pjesa 3. Metoda e Vebe-së
EN 12350-4	Ekzaminimi i betonit të njomë – pjesa 4. Metoda e ngjeshmërisë
EN 12350-5	Ekzaminimi i betonit të njomë– pjesa 5. Metoda e përhapjes
EN 12350-6	Ekzaminimi i betonit të njomë – pjesa 6. Densiteti
EN 12350-7	Ekzaminimi i betonit të njomë – pjesa 7. Përmbajtja e poreve–metoda e shtypjes
EN 12390-1	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar– pjesa 1. Forma, dimensionimi dhe kërkesa të tjera për mostra dhe kallëpe
EN 12390-2	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – pjesa 2. Përgatitja dhe mirëmbajtja e mostrave për ekzaminimin e rezistencës
EN 12390-3	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – 3. pjesa Ekzaminimi i rezistencës në shtypje i mostrave
EN 12390-6	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – 6. Ekzaminimi i soliditetit në tërheqje i mostrave
EN 12390-7	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – 7. Pjesa: Dendësia e betonit të ngurtësuar
EN 12390-8	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – 8. Pjesa: Thellësia e depërtimit të ujit nën shtypje
prCEN/TS 12390-9	Ekzaminimi i betonit të ngurtësuar – 9. Pjesa: rezistenca ndaj ngrirje shkrije me grisje (qërim)
ISO 2859-1	Plani i mostrimit për inspektim sipas karakteristikave- 1.Pjesa: Skema e marrjes së mostrave të treguara nga kufiri i cilësisë së pranimit (AQL) për inspektim parti pas partie
ISO 3951	Procedurat e marrjes së mostrave dhe kartela e inspektimit me variablat e jokonformitetit.
U. M1. 057	Përbërja granulometrike e përzierjes së agregatit për beton
U. M1. 016	Betoni. Ekzaminimi i rezistencës ndaj veprimit të cikleve të ngrirje-shkrires
EN 480-11	Shtesat e betonit, llaçi dhe llaçi vazhdues– Metodat e ekzaminimit – pjesa 11.: përcaktimi i karakteristikave të poreve të ajrit në betonin e ngurtësuar

EN12504-1	Ekzaminimi i betoneve në konstruksione– pjesa 1: mostrat e nxjerrura – marrja, ekzaminimi dhe ekzaminimi i rezistencës në shtypje
EN 12504-2	Ekzaminimi i betonit në konstruksione– pjesa 2.: Ekzaminimet jodestruktive– përcaktimi i numrit të goditjeve
EN 12504-3	Ekzaminimi i betonit në konstruksione – pjesa 3. Përcaktimi i forcës shkëputëse
EN 12504-4	Ekzaminimi i betonit në konstruksione – pjesa 4. Përcaktimi i shpejtësisë së përhapjes së impulseve (Ultrasonic method)
prEN 13791:2003	Vlerësimi i soliditetit në shtypje të betonit në konstruksione ose në elemente konstruktive

Konkluzione

- ❖ Statistika inferenciale, bazë të suksesit të saj në dhënien e konkluzioneve, ka gjetjen e momenteve dhe / ose shpërndarjeve të statistikave të ndryshme. Ka mjaft raste, në të cilat, ne nuk jemi në gjendje të gjejmë ekzaktësisht momentet ose shpërndarjet e statistikave të ndryshme, veçanërisht kur rasti nuk është parametrik.

Në praktikë, kur vëllimi i zgjedhjes është mjaft i madh, na lejon të përafrojmë momentet dhe shpërndarjet e statistikave të panjohura, duke përdorur aparatin e teorisë asimptotike. Ky aparat mund të përdoret edhe për gjetjen e shpërndarjeve të përafërta të statistikave të cilat paraqesin vështirësi në përdorimin praktik. Përafrimi rritet me rritjen e numrit të elementeve të zgjedhjes.

- ❖ Për të arritur tek shpërndarja teorike ose asimptotike e një statistike, mund të ndjekim këto rrugë:

1. Nisur nga të dhënat e një zgjedhje me vëllim “n”, ndërtohet funksioni empirik $F_n(x)$. Për vargun $F_n(x)$, gjejmë:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x)$$

Nëse ky limit ekziston dhe është i barabartë me $F(x)$ në të gjitha pikat ku $F(x)$ është i vazhdueshëm, atëherë themi se vargu $\{X_n\}$ konvergjon sipas shpërndarjes tek X me funksion shpërndarje $F(x)$ dhe shënohet kështu:

$$\{X_n\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{shpërndarje}} X.$$

Shpërndarja $F(x)$ quhet shpërndarje limite ose asimptotike e vargut $\{X_n\}$.

2. Vektorit $(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)$, ku X_i janë ndryshore rasti, i gjejmë funksionin karakteristik $C_n(x)$, të cilit, i korrespondon një dhe vetëm një ligj i shpërndarjes probabilitare $F(x)$, që do të thotë:

$$C_n(x) \xleftrightarrow{\text{bijeksion}} F(x).$$

Në këto kushte, funksioni i shpërndarjes për ndryshoren X , do të jetë $F(x)$.

- ❖ Trajtimi i bërë në këtë punim ndihmohet nga informacioni i marrë prej funksioneve prodhuese të momenteve, funksioneve karakteristike, nga teoremat qendrore limite, ligjet e numrave të mëdhenj, funksioni i shpërndarjes, densiteti i shpërndarjes etj.
- ❖ Shpërndarja e statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}}$, kur zgjedhja është nxjerrë nga bashkësia normale, mund të përafrohet me shpërndarjen normale:

$$N(\gamma; \frac{\gamma^2}{2(n-1)} (1 + 2\gamma^2))$$

ku γ është koeficienti i variacionit të bashkësisë së përgjithshme.

- ❖ Bazuar në përafrimin normal të statistikës $c = \frac{s}{\bar{x}}$, kur zgjedhja është nxjerrë nga bashkësia normale, mund të:
 1. Ndërtojmë kartën e kontrollit për koeficientin e variacionit të zgjedhjes të nxjerrë nga popullimi normal.
 2. Përdorim statistikën c dhe s^2 për kontrollin e cilësisë së prodhimit për zgjedhjet nga bashkësia normale.
 3. Ndërtojmë kartën e kontrollit të mostrës me anë të statistikave $\bar{c}$ dhe s_c .
 4. Gjejmë intervalin me një besueshmëri të caktuar për koeficientin e variacionit $\gamma = \frac{\sigma}{\mu}$ të popullimit normal.
 5. Gjejmë intervalin me një besueshmëri të caktuar për p-kuantilin c_p .
 6. Gjejmë kriterin për krahasimin e koeficientëve të variacionit të dy popullimeve.
- (Për çdo rast të trajtuar, janë bërë zbatime me të dhënat konkrete të marra nga kompania Ferro-Beton)

Bibliografia:

1. Arnold S.F.,(1990), “ Mathematical Statistics”, Prentice-Hall, New Jersey, NJ, USA.
2. Anderson T.W ; Darling D.A,(1952), “Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes”, Burimi: Ann. Math. statist. Vëllimi 23, Numri 2, fq 193-212.
3. Bain L.J & Engelhardt M.,(1987), “ Introduction to probability and mathematical statistics”, Duxbury Press, Boston.
4. Barnett V.D,(1975), “ Comparative statistical inference”, Wiley, New York.
5. Breiman L,(1992), “ Probability”, Siam.
6. Brockwell P ; Davis R,(1991), “Time Series: Theory and Methods”, Springer.
7. Bulmer, M.G.,(1979), “ Principles of Statistics”, Dover, fq 75–79.
8. Casella, George; Berger, Roger,(2002), “ Statistical Inference”, edicioni i dytë, fq.59–68, Duxbury, ISBN 978-0-534-24312-8.
9. Cicchitelli G,(2000), “ Probabilita e Statistica”, botimi i dytë, Maggioli Editore.
10. Cox D.R., (2006), “ Principles of Statistical Inference”, Cambridge University Press, Cambridge.
11. Lubian D.,(1999), “Appunti di Teoria delle Distribuzioni Limite”, fq.6.
12. E. J. Dudewicz E.J. dhe S. N. Mishra,(1988), “ Modern Mathematical Statistics”, JohnWiley & Sons, New York.
13. Ehrenfeld S.; Littauer S., (1964), “ Introduction to statistical method”, McGraw-Hill, New York.
14. Fisz M., (1967), “ Probability theory and mathematical statistics”, Wiley, New York.
15. R.L.Graham R.L., D. E. Knuth, dhe O.Patashink,(1994), “ Answer to Problem 9.60 in Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science”, Addison-Wesley, Reading, Pa, USA.
16. G. Edward Miller; (1991), “Asymptotic test statistics for coefficients of variation”, Communications in Statistics - Theory and Methods, Volume 20, Issue 10, fq 3351-3363.
17. Gut A., (2005), “Probability: A graduate course”, Springer Science+Business Media, Inc., 233 Spring Street, New York, NY 10013, USA, ISBN 0-387-22833-0.
18. Hardy, G. H., (1949), “Divergent Series”, Oxford University Press.
19. Herrndorff, N.,(1983), “ Stationary strongly mixing sequences not satisfying the central limit theorem”, Ann. Probab. **11**, 809–813.
20. Hoel P.G; S. C. Port ; C. J. Stone,(1971), “ Introduction to Probability Theory”, Houghton Mifflin Company.
21. James L. Powell,(2005), “ Elements of Asymptotic Theory”, Department of Economics, University of California, Berkeley.

22. Jacod J.; Protter P.,(2000), “Probability Essentials”, Springer, ISBN 3540438718, fq 144.
23. Jun Shao,(2003), “ Mathematical Statistics”, edicioni i dytë, Springer, ISBN-13 978-0-387-95382-3.
24. Kahane, J.P.,(1985), “ Some Random Series of Functions”, edicioni i dytë, Cambridge University Press, Cambridge.
25. Kallenberg, O.,(2001), “ Foundations of Modern Probability”, edicioni i dytë, Springer-Verlag, New York.
26. Katz, M.,(1963), “ The probability in the tail of a distribution”, Ann. Math. Statist. 34, 312–318.
27. Le Cam L.; Yang G.L.,(2000), “ Asymptotics in statistics (some basic concepts)”, edicioni i dytë, Springer, ISBN 0-387-95036-2.
28. Lecoutre, B., (2007), “Another look at confidence intervals for the Noncentral T distribution”, Journal of Modern Applied Statistical Methods 6(1): 107 – 116
29. Leka Sh,(2004), “ Teoria e Probabiliteteve dhe Statistika Matematike”, Tiranë.
30. Leka Sh,(2011), “Një kriter për kontrollin e koeficientit të variacionit të zgjedhjes të nxjerrë nga bashkësia e përgjithshme normale”, Studime të avancuara në inxhinierinë matematike, fizike dhe kimike, fq 15, Tiranë.
31. Leka Sh, (1989), “Zona e besimit për kuantilin c_p ”, Buletini i Shkencave të Natyrës, Nr 3.
32. Lehmann E.L., (1959), “Testing Statistical Hypotheses”, J. Wiley, New York.
33. Lehmann E.L.; Casella G., (1998), “ Theory of Point Estimation”, edicioni i dytë, Springer-Verlag, New York.
34. Li D.; Wang X.; Rao M.B, (1992), “ Some results on convergence rates for probabilities of moderate deviations for sums of random variables”, Internat. J.Math. & Math. Sci. 15, 481– 498.
35. Lin, Gwo Dong,(1986), “ On a moment problem”, Tohoku Mathematical Journal 38 (1986), no. 4, 595--598. doi: 10.2748/tmj/1178228411. <http://projecteuclid.org/euclid.tmj/1178228411>.
36. Lin G.D.; Stoyanov, J.M,(2002), “ On the moment determinacy of the distributions of compound geometric sums”, J. Appl. Probab. 39, 545–554.
37. Lindgren B. W, (1976), “ Statistical theory”, Macmillan, New York.
38. Mahmoudvand, R., Hassani, H.,(2008), “ Two new confidence intervals for the coefficient variation in a normal distribution”, Journal of Applied Statistics 00(0): 1-14.
39. Meyer, P.L., (1970), “ Introductory Probability and Statistical Applications”, botimi i dytë, Addison – Wesley, reading, Mas, fq 210 – 217.
40. Mood A.M.; Graybill F.A.; Boes D.C., (1988), “ Introduzione alla Statistica”, McGraw-Hill Italia, Milano.
41. Papoulis A, (1973), “ Probabilita variabili aleatorie e processi stocastici”, Boringhieri, Torino.

42. Paris R. B;Kaminsky D.,(2001), “ Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals”, Cambridge University Press.
43. Pfeiffer P. E., (1978), “ Concepts of Probability Theory”, Dover Publications.
44. Rahim, M., Hossein, H., dhe Rob, W., (2007),” Is the sample coefficient of variation a good estimator for the population coefficient of variation?”, Cardiff University, UK.
<http://mpira.ub.uni-muenchen.de/6106/>
45. Rao C.R.,(1973), “Linear Statistical Inference”, Wiley, New York.
- 46.Reh W.; Scheffler B.; (1996), “Significance tests and confidence intervals for coefficients of variation”,Original Research Article from “Computational Statistics & Data Analysis”, The Official Journal of the International Association for Statistical Computing (IASC), Volume 22, Issue 4, fq 345-460.
47. R'enyi A.,(1957), “ On the asymptotic distribution of the sum of a random number of independent random variables”, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **8**, 193–199.
48. Resnick S. I., (1999), “ A Probability Path”, Birkhauser.
49. Ross S.,(1984), “ A First Course in Probability”, Macmillan Publishing Company, edicioni i dytë.
- 50.Ross S.M., (2008), “ Probabilità e statistica per l'ingegneria e le scienze”, edicioni i dytë, Apogeo, Milano.
51. Sergei V.Kerov,(2003), “ Asymptotic Representation Theory of the Symmetric Group and its Applications in Analysis”, (Translations of Mathematical Monographs), American Mathematical Society (July 1, 2003), ISBN-10: 0821834401, ISBN-13: 978-0821834404.
52. Tian, L., (2006), “Inferences on the within-subject coefficient of variation”, Statistics in Medicine 25: 2008 – 2017
53. Van der Vaart, A.W., (1998), “Asymptotic statistics”, Cambridge University Press, ISBN 978-0-521-49603-2.
54. Vangel, M.G., (1996), “Confidence intervals for a coefficient of variation”, The American Statistician 15(1): 21 – 26
55. Wararit Panichkitkosolkul, (2013), “Confidence Intervals for the Coefficient of Variation in a Normal Distribution with a Known Population Mean”, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Probability and Statistics, Volume 2013, Article ID 324940, 11 pages, <http://dx.doi.org/10.1155/2013/324940>.
- 56.Whittaker E. T.; Watson G. N.,(1963), “ A Course in Modern Analysis”, botimi i katërt, Cambridge University Press.
- 57.Wijsman, R.A, (1988), “Similar tests of hypotheses concerning the ratio of mean to standard deviation in a normal population.Ann.Math.statist.39,936,Abstract No.41.
58. Wilks S.S., (1963), “ Mathematical Statistics”, J. Wiley, New York.
- 59.Wilson, E., Hilferty,M.M., (1931), “The distribution of chi-squared”, Proc.Natl.Acad.Sci.USA 17(12):684-688).
60. Williams D,(1991), “ Probability with Martingales”, Cambridge University Press.
- 61.<http://www.unibas.it/utenti/dinardo/quindicilezio.pdf>
62. <http://www.dip-statistica.uniba.it/html/docenti/pollice/cp2012/DisPro5.pdf>

- 63. <http://w3.uniroma1.it/isabella/INFERENZA2011/Vitali.Cap8.pdf>
- 64. http://www.researchgate.net/publication/237356389_Conformity_and_Safety_of_Concrete_According_to_prEN_206_and_Eurocodes
- 65. <http://www.betonopus.hu/some/acceptance.pdf>
- 66. <http://mcs.une.edu.au/~stat261/notes.pdf>
- 67. <http://galton.uchicago.edu/~wichura/Stat304/Handouts/L12.cf2.pdf>
- 68. <http://personal.lse.ac.uk/PIFFER/powell.pdf>
- 69. http://www.ems.bbk.ac.uk/for_students/msc_finEng/math_methods/lecture7.pdf
- 70. http://www.sefindia.org/forum/files/properties_of_concrete_for_use_in_eurocode_2_135.pdf