

FIM&IF

**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

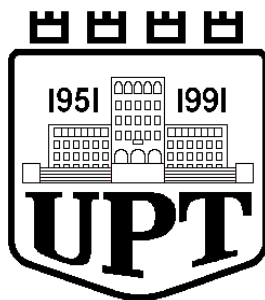
**KONTRIBUT NË RAPORTE TË DISA STRUKTURAVE
ALGJEBRIKE ME GJEOMETRINË AFINE PLANE DHE
APLIKIME.**

**DISERTACION PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE
“DOKTOR”**

Kandidati
MSC. ORGEST ZAKA

Udhëheqësi shkencor
PROF.DR.KRISTAQ FILIPI

TIRANË, 2016



FIM&IF

**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

**KONTRIBUT NË RAPORTE TË DISA STRUKTURAVE
ALGJEBRIKE ME GJEOMETRINË AFINE PLANE DHE
APLIKIME.**

**DISERTACION PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE
“DOKTOR”**

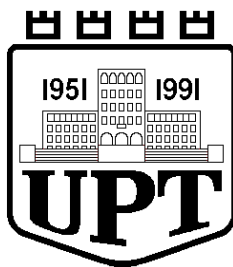
Punoi:
Kandidati:

ORGEST ZAKA

Miratohet:
Udhëheqësi shkencor:

PROF.DR.KRISTAQ FILIPI

TIRANË, 2016



FIM&IF

**REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

DISERTACION

i paraqitur nga:

Orgest ZAKA

Udhëhequr nga:

Prof. Dr. Kristaq FILIPI

Për marrjen e gradës shkencore

“DOKTOR”

**Tema: KONTRIBUT NË RAPORTE TË DISA STRUKTURAVE
ALGJEBRIKE ME GJEOMETRINË AFINE PLANE DHE
APLIKIME**

Mbrohet me date: 23 / 09 / 2016 para jurisë:

1. PROF.ASOC.SHKELQIM KUKA	KRYETAR	(OPONENT)
2 . PROF.DR.PETRO KARAJANI	ANËTAR	
3 . PROF.DR.KOSTAQ HILA	ANËTAR	(OPONENT)
4 . PROF.DR.LULËZIM HANELLI	ANËTAR	
5 . PROF.ASOC.AZIR JUSUFI	ANËTAR	

TIRANË, 2016

MIRËNJOHJE DHE FALENDERIME

Fillimisht dëshiroj të shpreh mirnjohjen dhe falenderimet për udhëheqësin tim shkencor Prof. Dr. Kristaq FILIPI, për udhëheqjen, bashkëpunimin e tij të pa kursyer dhe mbështetjen që më ka ofruar gjatë gjithë kohës së përgatitjes së këtij disertacioni.

Gjithashtu falenderoj familjen time, bashkshorten Atixhen dhe djemtë e mi Bernardin dhe Henrin, për qetsinë, mbështetjen dhe komoditetin që më kanë ofruar për gjithë këtë kohë. Ju kërkoj ndjesë që gjatë gjithë kësaj kohe kam qënë mjaft i zënë e nuk kam patur në dispozicion, kohën dhe mundësinë që tju përkushtohesha mjaftueshëm.

Një falenderim shkon për të gjithë ata kolegë, të cilët më kanë mbështetur gjatë këtij punimi, pa çka se ndoshta i kam lodhur me diskutimet që bëja për punën time, pavarësisht këtyre, opinionet e tyre më kanë vlejtur shumë.

Falenderoj Profesorët e shkollës së doktoraturës së matematikës pranë FIM&IF-së për mbështetjen e pakursyer që më kanë ofruar. Dhe një pjesë e konsiderueshme e stafit akademik veçanërisht të departamentit të matematikës në FIM&IF dhe në fakultete të tjera.

Falenderoj të gjithë profesorët e mi, që nga viti i parë i degës së matematikës dhe deri në vitin e pestë të matematikës speciale në fakultetin e shkencave të natyrës, për formimin që më kanë dhënë dhe për punën e tyre të palodhur.

Nga këta profesorë falenderimi më i veçantë shkon për profesorin tim të Gjeometrisë Prof.Dr.Agim BARDULLA (ndjesë pastë), ishte ky profesor që më hapi dritaren e parë në këtë fushë të matematikës, në rekomandimin që më dha për temën e diplomës në vitin e pestë të studimeve të mia në kursin special të matematikës.

Një falenderim shkon edhe për ato faqe apo operatorë kërkimi në internet nëpërmjet të cilave unë kam aritur të siguroj gjithë literaturën e mjaftueshme për këtë disertacion.

PËRMBAJTJA.

MIRËNJOHJA.....	iii
PËRMBAJTJA	iv
ABSTRACT.....	vi
HYRJE.....	ix

KREU 1

STRUKTURA E INCIDENCËS, PLANI AFIN

1.1. RELACIONI I INCIDENCËS DHE STRUKTURA E INCIDENCËS....	1
1.2. PLANI AFIN.....	6
1.3. PLANET AFINE TË FUNDME.....	10
1.4. NJË ZBATIM I PLANIT AFIN TË FUNDËM TË RENDIT n , NË NJË PLANIFIKIM EKSPERIMENTI.....	22

KREU 2

**NDËRTIMI I NJË TRUPI MBI NJË DREJTËZ NË PLANIN AFIN
TË DESARGUT**

2.1. TEOREMA E DESARGUT NË NJË PLAN AFIN.....	27
2.2. PLANI AFIN I DESARGUT.....	31
2.3. MBLEDHJA E PIKAVE TË NJË DREJTËZE TË PLANIT TË DESARGUT DHE VETI TE SAJ.....	35
2.4. SHUMËZIMI I PIKAVE TË NJË DREJTËZE TË PLANIT TË DESARGUT DHE VETI TE SAJ.....	45

KREU 3

NDËRTIMI I NJË TRUPI MBI NJË PLAN AFIN.....	63
3.1. GRUPI I KOLINEACIONEVE TË NJË PLANI AFIN.....	64
3.2. GRUPI I ZGJERIMEVE TË NJË PLANI AFIN.....	65
3.3. GRUPI I ZHVENDOSJEVE TË NJË PLANI AFIN.....	76
3.4. ALGJEBRA E ENDOMORFIZMAVE TË GRUPIT Zh_{v_A} MBI VETEN.....	84
3.5. TRUPI I ENDOMORFIZMAVE GJURMËRUJTËS TË GRUPIT Zh_{v_A} MBI VETEN.....	90

KREU 4

NDËRTIMI I NJË PLANI AFIN MBI NJË TRUP

4.1. SHNDËRIMI I NJË STRUKTURE INCIDENCE NË LIDHJE ME NJË TRUP NË NJË PLAN AFIN.....	98
4.2. PLANI AFIN I KUATERNIONEVE.....	124
4.2.1. TRUPI I KUATERNIONEVE.....	124
4.2.2 TRUPI $\mathbb{H}$ I KUATERNIONEVE SI ZGJERIM I FUSHËS $\mathbb{C}$	130
4.2.3. TRAJTA ALGJEBRIKE E NJË KUATERNIONI.....	132
4.2.4. NJË PLAN AFIN MBI KUATERNIONE.....	134
PËRFUNDIME.....	139
REKOMANDIME.....	143
LITERATURA.....	144

Abstract

This dissertation is a study of the spread between the two mathematical disciplines, Abstract Algebra and Affine Geometry. It focuses on the discovery of some reports, on the one hand, the algebraic structure of the corps (skew fields) and other algebraic structures associated with him, and, in turn, affine finite plans or not finite affine planes, and conversely.

In the first chapter dealt with issues of affine plane geometry. In this context, it examines the of incidence structure, which is essentially the incidence relation between two distinct communities; It called one set of point and another set of straight lines.

Further defined affine plane such as a incidence structure $\mathcal{A}$ that satisfies certain three axioms **A1**, **A2**, **A3**. Then brought a series of statements necessary to further treatment of the dissertation, which phrase certain properties of straight lines and points of a affine plane, some of them with the relevant original proof, focusing and in the affine finite plane. Dissertation requires support them in these sets initially step by step, algebraic structures of groups, associative rings and corps (skew fields).

The second chapter is aimed at the sets's appearance to a straight line-points of a affine plane as an algebraic structure, precisely as a corps.

Apparently, this can not be achieved in a whatever affine plane, but can be reached in a straight line to a affine Desargues plane [86],.

For this, first given meaning projective plan as an incidence structure $\mathcal{A}$ that satisfies three axioms $P1$, $P2$, $P3$. Regarding the formulated Desarguese Theorem. ased on this theorem and the theorem known expansion to an affine plane in a projective

plane by means of points and the of ideal straight lines, prove propositions, who have labeled the *affine Desargues plane Theorem*, which in other formulation, known as D2 axioms of Desargues [9]. Then with an original proof indicated that, the little Pappus Theorem holds and in the affine Desargues plane (Hessengergues Theorem), which is used in many further proof. These fulfillments provide plans affine geometry theoretical basis of the introduction of two double actions addition and multiplication of points in a straight line of the affine Desargues plane and proofs of a number of statements and algebraic theorems that turn it straight line on the algebraic structure of a corps.

Further, in the third chapter, the basic theoretical conclusions are drawn mainly from abstract algebra. Elements of algebraic structures studied in this phase are the algebraic objects of bijections (bijections of the sets of point in the affine plane, to preserve a straight line, to called collineations form the sets $\mathbf{Kol}_{\mathcal{A}}$), of endomorphisms and the so-called the tracer endomorphisms to groups of a particular type bijections in the affine plane, which called translations. Gradually studied:

- Ordered pairs $(\mathbf{Zgj}_{\mathcal{A}}, \circ)$ of dilatatlions and composition, that apart from $\mathbf{Kol}_{\mathcal{A}}$ as collineation to guard parallelism of straight lines, for confirming that it is group;
- groups $(\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \circ)$ of translations, that apart from $\mathbf{Zhgj}_{\mathcal{A}}$ as dilatations, who have no fixed points, but involving and $\mathbf{id}_{\mathcal{P}}$, or which it would prove abeljan group;
- set $(\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}$ to reflections of the dilatations a affine plane $\mathcal{A}$ on himself, to the which is said substructure to algebra $((\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}, +, \circ)$ to reflections of $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ on herself.
- Ordered pairs $(\mathbb{k}_{\mathcal{A}}, +)$, where $\mathbb{k}_{\mathcal{A}}$ is a set of trace retentive endomorphisms of $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ on herself, to which been proven that in the commutative group with addition.
- algebra $(\mathbb{k}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$ for which recently which been proven that which it is a corps.

The dissertation examines and inverse problem in the form of an constructions of a affine plane starting from a unsolicited corps $(K, \oplus, \otimes)$. This constitutes the object study of the fourth chapter. Calling points the ordered pairs (α, β) , where α and β are elements of corps K , whereas the straight community of the points that satisfy equations of the form $x \otimes a \oplus y \otimes b = c$, where $a \neq 0_K$ or $b \neq 0_K$, constructions a incidence structure $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, which called the incidence structure connected with corps K . Her study leads us to prove the Theorem 4.1.4 “The incidence structure $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ connected with corps K , is a affine plane connected with it corps”.

A particular place in the dissertation occupy also:

- study of some finite affine planes in the chapter one, in the second order in fifth order, focusing on the design of figures, the determination of the matrix of incidenēs and determination of equivalence classes by the parallelism of straight lines for any such plan;
- application of the finite affine planes to design their problems in planning experiment.
- application of Theorem 4.1.4 in construction of the affine plane in the concrete quaternion corps and use of soft MATLAB, by way of an example, finding fitting straight line that passes through two data points of this quaternion affine plane.

HYRJE.

Ky disertacion është një studim i shtrirë midis dy disiplinave matematikore, Algjebrës Abstrakte dhe Gjeometrisë Afine.

Në interesin tonë gjatë përgatitjes së këtij disertacioni ka qënë studimi i raporteve të strukturave algjebrike dhe kryesisht Trupit, me planin afën dhe anasjelltas. Duke mos qënë e nevojshme vetia komutative e veprimit të dytë binar të strukturës algjebrike të trupit, në punën tonë gjatë këtij disertacioni kemi përballuar nivele të ndryshme vështirësish, por në mendimin tonë kjo e ka bërë atë mjaft interesante dhe të bukur. Ka një literaturë të gjerë, që trajton në mënyrë të detajuar këtë strukturë, por ne jemi mbështetur kryesisht në titujt “*Algjebra Abstrakte*” [1](2013), “*Skew fields. Theory of general division rings*” [81](1995), “*Representation of rings over skew fields*” [82](1985), “*Valuations of Skew Fields and Projective Hjelmslev Spaces*” [83](1986), “*Units in Skew Fields*” [84](2000). Si një nga Trupat më klasikë është trupi i kuaternioneve, i paraqitur nga matematikani irlandez Wiliam Rowan Hamilton në vitin 1843 në veprën “*Lectures on Quaternions dhe Elements of Quaternions*”. Për kuaternionet mund të përmendim veprat bashkëkohorë “*Visualizing quaternions*” të Andrew Hanson, botuar në vitin 2006, “*Quaternion Algebra and Calculus*” të David Eberly, botuar në vitin 2015 etj., që përmbajnë dhe një mori aplikimesh.

Më saktë jemi në një ndërthurje të Algjebrës Gjeometrike me Gjeometrinë Algjebrike. Të dyja këto disiplina relativisht të reja, kanë prodhuar mjaft risi interesante në përparimin e matematikës. Po përmend disa nga veprat më kryesore të këtyre disiplinave. Në vitin 1957 Matematikani brilant Emil Artin botoi librin “*Geometric Algebra*”, në të cilin dha një trajtë klasike të paraqitjes së nocioneve algjebrike nëpërmjet koncepteve gjeometrike. Duke përpunuar nocionet themelore të strukturave algjebrike, ai bën interpretimin e tyre në planet afine dhe projektive. Në punimet e tij

është për tu përmendur ndërtimi i gjeometrive ortogonale me ndihmën e hapësirave vektoriale. Matematikani H. S. M. COXETER, i quajtur nga shumë matematikanë si ringjallësi i gjeometrisë (vlerësuar si më i madhi që nga koha e Hilbertit) dha një kontribut shumë të madh me punimet e tij mbi gjeometrinë. Një kontribut të vyer në këtë fushë, duke ndjekur po këtë frymë, dha edhe matematikani francez Marcel Berger me anë të punimeve të tij të paraqitura në librat “*Geometry I*”(1987), *Geometry II*, “*Geometry Revealed*”(2010). Një paraqitje mjaft të bukur dhe interesante, të ngjajshme me linjën e Artinit e gjejmë në një nga librat GTM (Graduate Text in Mathematics) vol 49, me titull “*Linear Geometry*” me autorë W. Gruenberg & A. J. Weir. Në vitin 1974, listës së librave GTM i shtohet texti “*Projective Planes*” me autorë Daniel R. Hughes dhe Fred C. Piper të cilët dhanë një kontribut të veçantë në studimin e vetive të strukturave algjebrike dhe vetive gjeometrike të planeve projektive, duke zbuluar lidhje midis tyre. Georg Jeanis, në vitin 1994, botoi librin me titull “*Modern Geometry with Applications*”. Vlejnë të përmendim punimet e matematikanit Robin Hartshorne të pasqyruara në librat me tituj “*Foundations of projective geometry*”(1867) dhe “*Geometry: Euclid and Beyond*”(2000). Një libër i këtij autori, nga më klasikët e linjës së Gjeometrisë Algjebrike, me titull “*Algebraic Geometry*”, është botuar fillimisht në vitin 1977 dhe është ribotuar 8 herë deri në vitin 1997.

Vitet e fundit ka shumë botime që ecin në frymën e ndërthurjes së Algjebërës abstrakte me Gjeometrinë. Në këtë numër përmendim botimin e Eric Lord në vitin 2013 të librit “*Symmetry and Pattern in Projective Geometry*”[84], në të cilin paraqiten mjaft lidhje të Algjebërës abstrakte me Gjeometrinë, kryesisht me Gjeometrinë e fundme.

Algjebra Abstrakte, Gjeometria Algjebrike, Algjebra Gjeometrike dhe Gjeometitë e Fundme, gjejnë sot aplikime me shtrirje të gjerë në shumë disiplina si fizika teorike, shkencat kompjuterike, shkencat inxhinierike, shkencat e informacionit, teoria e kodimit, kriptografia, hapësirat topologjike etj. Kjo ka motivuar shumë studiues për kërkime të ndryshme në këto fusha, përfshirë edhe zbulimin e lidhjeve reciproke ndërmjet tyre. Në këtë kontekst, hartimi i këtij disertacioni ka si qëllim të japi një

kontribut në zbulimin e raporteve të tjera midis strukturave algjebrike, kryesisht të grupeve, unazave dhe Trupave dhe gjeometrisë së planeve afine të fundme ose jo, që mund të gjejnë aplikime në disiplinat e mësipërme.

Disertacioni është i ndarë në katër krerë.

Në **kreun e parë** trajtohen çështje të gjeometrisë afine plane. Në këtë kuadër përshkruhet relacioni e incidencës midis dy bashkësive të dallueshme; njera quhet bashkësi e pikave dhe tjetra bashkësi e drejtëzave. Krahas kuptimit të strukturës së incidencës, jepet edhe ai i nënstrukturës të saj. Përkufizohet më tej plani afín si një strukturë incidence $\mathcal{A}$ që kënaq tre aksioma:

A1. *Për çdo dy pika të ndryshme P dhe Q , ekziston një dhe vetëm një drejtëz ℓ që kalon nga ato pika.*

A2. *Për një pikë P dhe një drejtëz ℓ , që nuk e përmban atë, ekziston një dhe vetëm një drejtëz r , që kalon nga pika P dhe s'ka pikë të përbashkët me ℓ .*

A3. *Në $\mathcal{A}$ ekzistojnë tri pika joincidente me një drejtëz.*

Pastaj sillen një sërë pohimesh të domosdoshme në trajtimin e mëtejshëm të disertacionit, disa prej të cilave me vërtetimet përkatëse, duke u ndalur edhe në planet afine të fundme. Gjatë Kreut I sillen një mori shembujsh nga strukturat e incidences dhe nga planet afine të fundme, nga rendi i dytë në rendin e pestë, duke u fokusuar në dizenjim figure, në përcaktim të matrices së incidenës dhe në përcaktim të klasave të ekuivalencës sipas paralelizmit të drejtëzave për çdo plan të tillë. Në pjesën e fundit të këtij kreu sillet një aplikim i planit afín të fundëm, në dy probleme me planifikim eksperimentesh dhe ilustruhet me një shembull në planin afín të rendit të tretë.

Në **kreun e dytë** synohet paraqitja e bashkësisë së pikave të një drejtëze të një plani afín si një strukturë algjebrike, pikërisht si një trup. Me sa duket, kjo nuk mund të arrihet në një plan afín çfarëdo, por mund të arrihet për një drejtëz të një plani afín të Desargut.

Për këtë, jepet më parë kuptimi i planit projektiv si një strukturë incidence $\mathcal{A}$ që kënaq tre aksioma:

P1. Çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz të vetme.

P2. Çdo dy drejtëza të ndryshme janë incidente me një pikë të vetme.

P3. Ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave janë joincidente me një drejtëz.

Lidhur me të formulohet Teorema e Desargut. Më tej nënvizohet mundësia e shndrrimit të një plani projektiv në një plan afin dhe anasjellas. Kjo e fundit lejon paraqitjen e Teoremës së Desargut në një formulim, përshtatur për planin afin. Mandej vërtetohet që Teorema e vogël e Pappusit vlen edhe në planin afin të Desargut, gjë që shfrytëzohet në shumë vërtetime të mëtejshme. Këto plotësime të gjeometrisë afine plane japin bazën teorike të futjes së dy veprimeve dyshe të mbledhjes dhe të shumëzimit të pikave të një drejtëze të planit desargian dhe vërtetimin e një sërë pohimesh dhe teoremath algjebrike që e kthejnë atë drejtëz në strukturën algjebrike të një trupi.

Në ndryshim nga Kreu II ku baza teorike e tij është kryesisht nga gjeometria afine plane, **në Kreun e tretë** baza teorike është kryesisht nga Algjebra abstrakte. Këtu synohet ndërtimi i strukturës algjebrike të trupit, ku elementet janë objektet algjebrike të endomorfizmave të ashtuquajtura gjurmëlënëse të grupit të një lloji të veçantë bijeksionesh të një plani afin, të cilat quhen zhvendosje. Për këtë shqyrtohen fillimisht kolineacionet e një plani afin si bijeksione të bashkësisë së pikave të tij mbi veten, që ruajnë drejtëzat. Më pas prej tyre veçohen ato kolineacione, që ruajnë paralelizmin e drejtëzave, të cilat quhen zgjerime dhe nga zgjerimet veçohen të ashtuquajturat zhvendosje. Më tej studiohet grupi $(Zgj_{\mathcal{A}}, o)$ i zgjerimet të një plani afin lidhur me përbërjen e tyre dhe grupi komutativ $(Zhv_{\mathcal{A}}, o)$ i zhvendosjeve lidhur me përbërjen.

Për më tepër vërtetohet që grupi $(Zhv_{\mathcal{A}}, o)$ i zhvendosjeve të planit afin $\mathcal{A}$ është nëngrup normal i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, o)$ të zgjerimeve të atij plani. Studiohet pastaj bashkësia

$(Zhv_{\mathcal{A}})^{Zhv_{\mathcal{A}}}$ e pasqyrimeve të zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ mbi veten, duke u ndalur tek endomorfizmat gjurmëruajtëse të grupit $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ mbi veten. Duke e shënuar këtë bashkësi me $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$ dhe, duke e pajisur atë, krahas përbërjes $\circ$ edhe me një veprim tjetër dysh të quajtur mbledhje, arrihet së fundi në ndërtimin e algjebërën $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$, për të cilën vërtetohet se është një trup.

Në kreun e katërt synohet dhënie e një zgjidhjeje të problemit të anasjellë të ndërtimit të një plani afin në lidhje me një trup të çfarëdoshëm $(K, \oplus, \otimes)$. G. Erik Moorhouse në librin e tij “Incidences Geometry”[49], botuar në vitin 2007 thotë se një plan afin mund të ndërtohet mbi një fushë F . Edhe në libra të tjerë si [3], [4], [23] haset kjo konsideratë. Po mbi një trup a mund të ndërtohet një plan afin? Kreu 4 i jep përgjigje pozitive kësaj pyetjeje. Pikat e planit afin konceptohen si çifte të radhitura (α, β) , ku α dhe β janë elemente të trupit $(K, \oplus, \otimes)$, kurse drejtëzat në të konceptohen nëpërmjet ekuacionesh të tipit $x \otimes a \oplus y \otimes b = c$, ku $a \neq 0_K$ ose $b \neq 0_K$, ku ndryshoret dhe koeficientët janë elemente nga ai trup. Për të arritur këtë ndërtim vërtetohen disa teorema që tregojnë se një strukturë incidence $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K kënaq aksiomat **A1**, **A2**, **A3** të përkufizimit të planit afin. Të gjitha vërtetimet mbështeten në kuptimin e trupit si unazë dhe në vetitë e tij që rrjedhin nga ai përkufizim. Në pjesën e dytë të këtij Kreu paraqitet një trajtim origjinal për trupin e Kuaternioneve dhe ilustruhet plani afin i ndërtuar mbi këtë trup. Më anë të një shembulli, se fundi jepet një aplikim i MATLAB-it për gjetjen e drejtëzës që kalon nëpër dy pika të dhëna të këtij plani afin kuaternionesh.

KREU 1

STRUKTURA E INCIDENCËS, PLANI AFIN

Në këtë kapitull do të përshkruajmë relacionin e incidencës midis dy bashkësive të dallueshme (disjunktive) që do ti quajmë bashkësi e pikave dhe bashkësi e drejtëzave. Do të japim kuptimin e strukturës dhe nënstrukturës së incidencës. Do të përkufizojmë planin afin dhe do të japim kuptimin e paralelizmit të drejtëzave në të; do të sjellim një sërë pohimesh të domosdoshme në trajtimin e mëtejshëm të disertacionit. Gjithashtu do të bëjmë një përshkrim të planeve affine të fundme dhe do të sjellim një mori shembujsh nga strukturat e incidencës dhe nga planet affine të fundme. Në pjesën e fundit të këtij kreu paraqesim një aplikim në planin afin të fundëm në planifikim eksperimentesh.

1.1. RELACIONI I INCIDENCËS DHE STRUKTURA E INCIDENCËS

Le të kemi bashkësitë $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ të ndryshme nga boshe, dhe nënbashkësinë $\mathcal{I}$ të prodhimit kartezi $\mathcal{P} \times \mathcal{D}$.

Përkufizim 1.1.1. *Strukturë e incidencës quhet një treshe e radhitur $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ ku $\mathcal{P} \cap \mathcal{D} = \emptyset$ dhe $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{D}$.*

Pra, treshja $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ është strukturë e incidencës, në qoftë se $\mathcal{P}$, $\mathcal{D}$ janë bashkësi të dallueshme dhe $\mathcal{I}$ është një lidhje dyshe e bashkësisë $\mathcal{P}$ me bashkësinë $\mathcal{D}$. Elementet e bashkësisë $\mathcal{P}$ i quajmë *pika* dhe do t'i shënojmë me germa të mëdha të alfabetit, kurse ato të bashkësisë $\mathcal{D}$ i quajmë *drejtëza* (blloqe) dhe do ti shënojmë me germa të vogla të alfabetit. Faktin $(P, d) \in \mathcal{I}$ do ta shënojmë edhe $P \mathcal{I} d$. Në këto raste lexojmë pika

P është incidente me drejtëzën d (apo drejtëza d ka incidente pikën P , [3], [5], [7], [9], [11], [12], [16], [22], [23], [62], [69].

Le të jenë dy struktura incidence $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ dhe $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{D}', \mathcal{I}')$.

Përkufizim 1.1.2. [30] Një strukturë incidence $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ do të quhet **konfiguracion** në qoftë se :

- a) çdo dy pika të ndryshme janë incidente të shumtën me një drejtëz;
- b) çdo dy drejtëza të ndryshme janë incidente të shumtën me një pikë.

Do të shohim më poshtë që gjeometria Fano është një konfiguracion, i cili quhet konfiguracioni Fano [9], [17], [18], [22], [24], [25], [62]. Kurse në shembujt 1.1.1 dhe 1.1.2 më poshtë strukturat e incidences përkatëse nuk janë konfiguracione.

Përkufizim 1.1.3. [9],[30] Struktura e incidences $\mathcal{S}' = (\mathcal{P}', \mathcal{D}', \mathcal{I}')$ quhet **nënstrukturë** e strukturës $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ në qoftë se $\mathcal{P}' \subseteq \mathcal{P}$, $\mathcal{D}' \subseteq \mathcal{D}$ dhe $\mathcal{I}' = \mathcal{I} \cap \mathcal{P}' \times \mathcal{D}'$.

Përkufizim 1.1.4. Një strukturë incidente $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{B}, \mathcal{I})$ do të quhet **e fundme** nëse $\text{Card}(\mathcal{P})$ është një numër i fundëm.

Në një strukturë incidence $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ për një pikë të veçantë $P \in \mathcal{P}$, bashkësia $\mathcal{D}_P = \{d \in \mathcal{D} \mid PId\}$ e drejtëzave incidente me të quhet **përmbajtje** e pikës P , kurse kardinali i saj $\text{card } \mathcal{D}_P$ quhet **fuqi** e pikës P , kurse për një drejtëz të veçantë $d \in \mathcal{D}$, bashkësia $\mathcal{P}_d = \{P \in \mathcal{P} \mid PId\}$ e pikave incidente me atë drejtëz quhet **përmbajtje** e drejtëzës d , ndërsa kardinali i saj $\text{card } \mathcal{P}_d$ quhet **fuqi** (ose *madhësi*) e drejtëzës d .

LEMË 1.1.1.[30] *Në një strukturë të fundme $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$, shuma e fuqive të pikave është e barabartë me shumën e fuqive të drejtëzave (blloqeve).*

Strukturat e fundme të incidencës zakonisht shoqërohen edhe më matricën e incidencës, që përftohet si më poshtë: ndërtohet një tabelë drejtkëndëshe, ku majtas vertikalisht shënohet bashkësia e nisjes $\mathcal{P}$ me r pikat e saj dhe sipër horizontalisht, bashkësia $\mathcal{D}$ me s drejtëzat e saj. Rreshtat dhe shtyllat bosh të tabelës mbushen me 1 ose 0 sipas rastit kur

$(P_i, d_j) \in \mathcal{I}$ ose $(P_i, d_j) \notin \mathcal{I}$. Matrica me $r \times s$ përmasa e përftuar në këtë mënyrë quhet *matrica e incidencës* [1], [9], [22], [23], [26], [27].

Disa shembuj të strukturave të incidencës.

Shembull 1.1.1. Në qoftë se elementet e bashkësisë $\mathcal{P} = \{P, Q\}$ i quajmë pika, elementet e bashkësisë $\mathcal{D} = \{\ell, m\}$ i quajmë drejtza dhe lidhjen dyshe $\mathcal{I} = \{(P, \ell), (P, m), (Q, \ell), (Q, m)\}$, ku $\mathcal{I}$ është përkatësia e zakonshme (Fig.1),

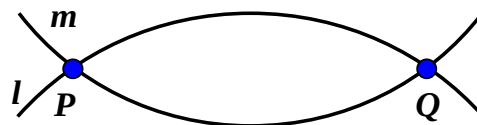


Fig.1.

e konsiderojmë si lidhje incidence, atëherë $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence (figura e mësipërme quhet *di-gon*).

Shembull 1.1.2. Le të kemi bashkësinë e pikave $\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4\}$, bashkësinë e rrrathëve $\mathcal{D} = \{a, b, c, d\}$ (Fig.2) dhe relacionin e incidencës

$$\mathcal{I} = \{(1, a), (2, a), (4, a), (1, b), (3, b), (4, b), (1, c), (2, c), (3, c), (2, d), (3, d), (4, d)\}.$$

Vërejmë që kemi një strukturë incidence $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$.

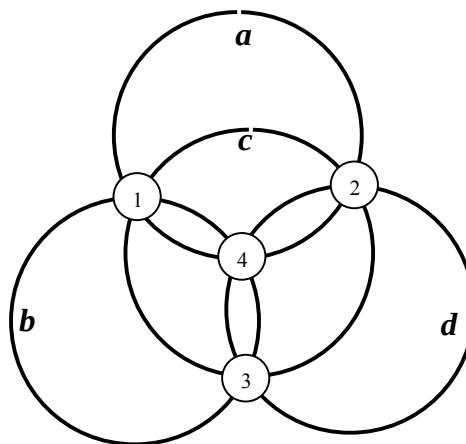


Fig.2.

Shembulli 1.1.3. Le të kemi bashkësinë e pikave $\mathcal{P} = \{P, Q, R, S, T\}$, bashkësinë e drejtzave $\mathcal{D} = \{\ell, m, n, r\}$, ku $\ell = \{P, Q, S, T\}$, $m = \{P, R\}$, $n = \{Q, R\}$, $r = \{S\}$, dhe relacionin e incidencës si përkatësi

$$\mathcal{I} = \{(P, \ell), (P, m), (Q, \ell), (Q, n), (T, \ell), (S, \ell), (S, r), (R, m), (R, n)\}.$$

Atëherë $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence. Vërejmë që pika P është incidente me dy drejtëza ℓ dhe m , por jo në drejtëzat n dhe r , gjithashtu drejtëza ℓ përmban katër pikat P, Q, S, T , por jo R . Njëlloj, pika Q është incidente me dy drejtëzat ℓ dhe n , por jo me drejtëzat m dhe r , etje. Struktura e incidencës $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ paraqitet në figurën e mëposhtme (Fig.3).

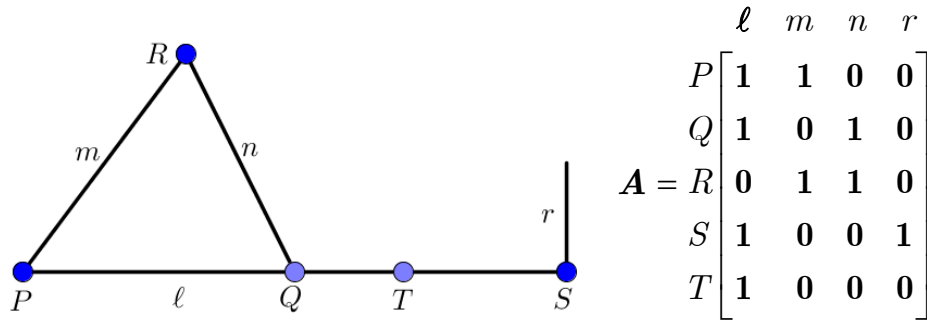


Fig.3.

Në të djathtë të figurës është matrica e incidencës së kësaj strukture, elementet e së cilës janë 1, kur pika është incidente me drejtëzën dhe 0, kur pika nuk është incidente me drejtëzën.

Paraqitja e një strukturë incidence me anë të një figure, kuptohet, mund të bëhet me figura të ndryshme. Për shembull struktura e mësipërme mund të paraqitet edhe me anë të figures 4.

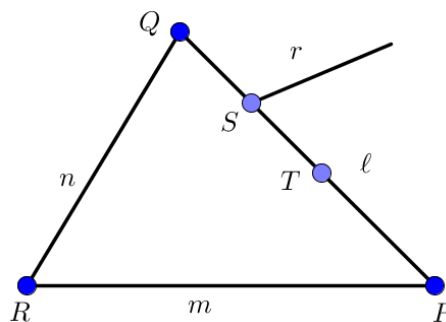


Fig. 4

Shembull 1.1.4. Në figurë janë dhënë shtatë pika dhe shtatë vija (Fig. 5). Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e atyre pikave, $\mathcal{D}$ bashkësia e atyre vijave dhe $\mathcal{I}$ përkatësia $\in$ e një pike në një vijë.

Është e qartë se $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{D}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence, ku pikat janë pikat e dhëna dhe drejtëzat janë vijat e dhëna në figurë. Në këtë gjeometri duket se çdo dy drejtëza të ndryshme ndërpriten në një pikë dhe çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz.

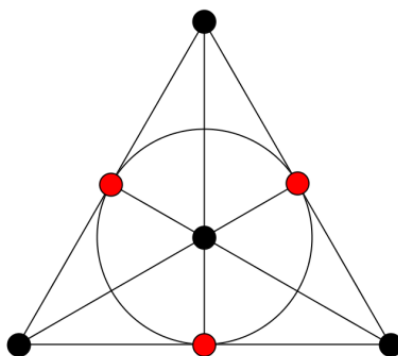


Fig. 5

Ajo njihet si *gjeometria Fano*. Të tilla janë dhe gjeometritë e paraqitura në Fig. 6 dhe në Fig. 7.

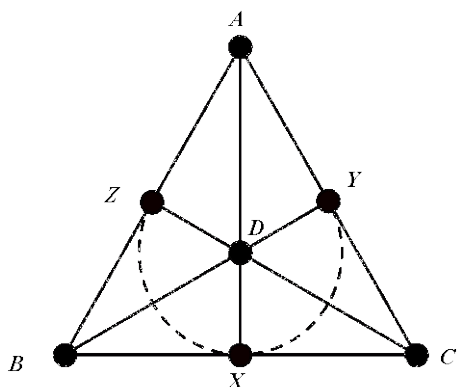


Fig. 6

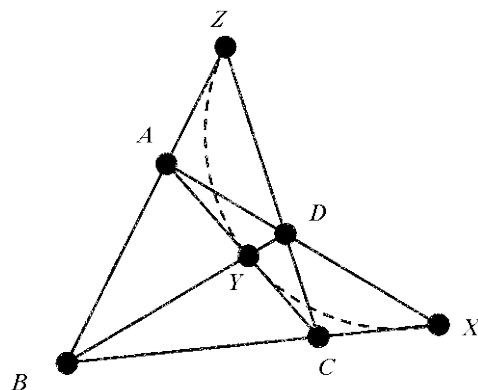


Fig. 7

Vihet re se në një gjeometri Fano ka saktësisht tri pika incidente në çdo drejtëz dhe tri drejtëza incidente me çdo pikë.

1.2. PLANI AFIN

Planin afin do ta konsiderojmë si një strukturë incidence, për të cilën pranohet që pikat dhe drejtëzat e saj gëzojnë disa veti që shprehen me anë të tre aksiomave si më poshtë. Le të jetë $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një strukturë incidence. Faktin $(P, \ell) \in \mathcal{I}$ (të njëvlershëm me $P \mathcal{I} \ell$) do ta shënojmë $P \in \ell$ dhe do t'a lexojmë pika P është incidente me drejtëzën ℓ apo drejtëza ℓ kalon nga pika P (përmban pikën P).

Përkufizim 1.2.1.[3],[9],[29] Plan afin quhet struktura e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ që kënaq aksiomat e mëposhtëme:

A1: Për çdo dy pika të ndryshme P dhe $Q \in \mathcal{P}$, ekziston një dhe vetëm një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$ që kalon nga ato pika. ▲

Drejtëzën ℓ , të përcaktuar nga pikat P dhe Q do t'a shënojmë PQ .

A2: Për një pikë $P \in \mathcal{P}$, dhe një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$ të tilla që $(P, \ell) \notin \mathcal{I}$, ekziston një dhe vetëm një drejtëz $r \in \mathcal{L}$, që kalon nga pika P dhe e tillë që $\ell \cap r = \emptyset$.

A3: Në $\mathcal{A}$ ekzistojnë tri pika joincidente me një drejtëz.

Nga A1 rrjedh se dy drejtëza të ndryshme të $\mathcal{L}$ kanë e shumta një pikë të përbashkët, me fjalë të tjera dy drejtëza të ndryshme të $\mathcal{L}$ ose s'kanë pika të përbashkëta ose kanë vetëm një pikë të përbashkët.

Përkufizim 1.2.2. Dy drejtëza $\ell, m \in \mathcal{L}$ që përputhen ose nuk kanë pika të përbashkëta i quajmë paralele dhe në këtë rast shkruajmë $\ell \parallel m$, kurse kur kanë vetëm një pikë të përbashkët themi se ato priten.

Përkufizim 1.2.3. Lidhje e ekuivalencës mbi një bashkësi X quhet një lidhje njëherësh refleksive, simetrike dhe kalimtare [1], [31], [33], [36].

Përkufizim 1.2.4. Bashkësia e elementeve të bashësisë X që janë ekuivalente me elementin e dhënë $a \in X$ sipas lidhjes së ekuivalencës ρ , quhet klasë ekuivalence sipas ρ , [1], [15], [32], [34], [63], [64], [67].

POHIM 1.2.1. Lidhja e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence në $\mathcal{L}$.

Vërtetim. Kjo lidhje është në mënyrë evidente refleksive dhe simetrike. Ajo është dhe kalimtare. Me të vërtetë, le të kemi $\ell_1 // \ell_2$ dhe $\ell_2 // \ell_3$. Në qoftë se dy prej këtyre tri drejtëzave do të përputhen vërtetësia është evidente. Në rastin kur ℓ_1, ℓ_2 dhe ℓ_3 janë të ndryshme, supozojmë që ℓ_1 e ℓ_3 priten në një pikë P (që sigurisht nuk ndodhet në ℓ_2). Nga aksioma **A2**, do të kishim njëherësh dy drejtëza të ndryshme që kalojnë nga një pikë P dhe janë paralele me drejtëzën ℓ_2 . Ky kontradiksion na thotë që $\ell_1 // \ell_3$.

Përkufizim 1.2.5. Tri pika të ndryshme $P, Q, R \in \mathcal{P}$ i quajmë *kolineare*, në qoftë se janë incidente me të njejtën drejtëz.

Radhitim tani disa pohime të vërteta për planet afine.

POHIM 1.2.2. [9] *Në një plan afin $\mathcal{A}$ ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave nuk janë incidente me një drejtëz (tri pika të tilla quhen jokolineare).*

Pohimit 1.2.2 mund t'i japim edhe këtë formulim :

Në një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, për çdo tri pika $A, B, C \in \mathcal{P}$, joincidente me një drejtëz, ekziston vetëm një pikë $D \in \mathcal{P}$, që katërbrinjëshi $ABCD$ të jetë paralelogram (d. m. th. i tillë që $AB // DC$ dhe $AD // BC$).

RRJEDHIM. *Në një plan afin $\mathcal{A}$ ekzistojnë katër drejtëza të ndryshme, dy nga dy paralele.*

Shembull 1.2.1. Në Fig.8 janë dhënë katër pika dhe gjashtë drejtëza (çdo drejtëz është bashkësi prej dy pikash). Le të jetë $\mathcal{P}$ bashkësia e atyre katër pikave, $\mathcal{L}$ bashkësia e atyre gjashtë drejtëzave dhe $\mathcal{I}$ përkatësia $\in$ e një elementi në një bashkësi.

Është e qartë se $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një strukturë incidence. Verifikohet lehtë se kjo gjeometri kënaq aksiomat **A1**, **A2**, **A3**, prandaj është një plan afin, në të cilin p.sh. kemi drejtëzat paralele $P_1 P_2 // P_3 P_4$, $P_2 P_3 // P_1 P_4$ etj.

Kemi gjithashtu këto çifte drejtëzash që priten:

$P_1 P_2 // P_2 P_3$ në pikën P_2 ,

$P_2 P_3 // P_3 P_4$ në pikën P_3 etj.

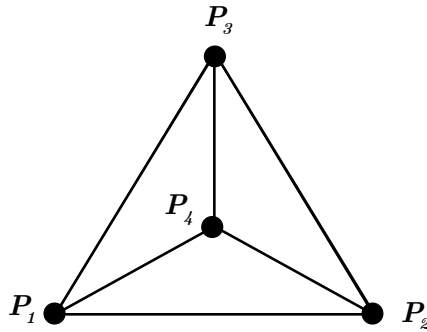


Fig.8

POHIM 1.2.3. *Në një plan afin $\mathcal{A}$ çdo drejtëz është incidente me të paktën dy pika të ndryshme.*

Vërtetim. Nga aksioma **A3** në planin afin kemi tri pika jokolineare A, B dhe C (Fig. 9). Nga aksioma **A1**, kemi drejtëzat AB dhe AC ; nga aksioma **A2**, ekzistojnë drejtëzat m dhe m' , që kalojnë nga pika C dhe janë paralele përkatësisht me AB dhe AC .

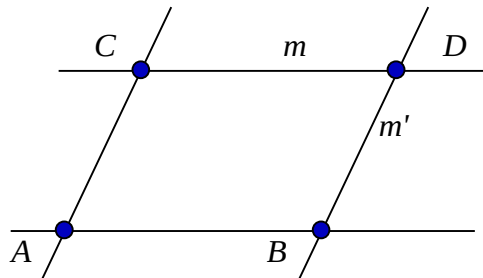


Fig. 9

Drejtëzat m dhe m' do të kishin një pikë të përbashkët D , pasi në të kundërt do të ishin paralele. Nga fakti që paralelizmi është relacion kalimtar, do të kishim tri pikat A , C dhe B kolineare, në kundërshtim me kushtin.

POHIM 1.2.4. *Në një plan afin $\mathcal{A}$ çdo pikë është incidente të paktën me tri drejtëza.*

Vërtetim. Le të kemi një pikë $A \in \mathcal{P}$ dhe një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$. Nga pohimi 1.2.3, ekzistojnë pikat B dhe C në ℓ të tilla që A , B dhe C të jenë jokolineare (Fig.10).

Nga aksioma **A2**, ekziston vetëm një drejtëz m që kalon nga pika A dhe $m \parallel \ell$.

Nga aksioma **A1**, ekzistojnë drejtëzat e ndryshme $n = AB$ dhe $p = AC$. Pra pika A është incidente me tri drejtëzat m, n, p .

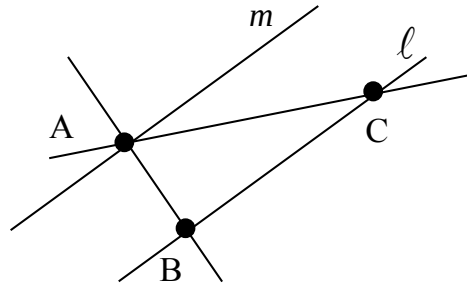


Fig. 10

TEOREMË 1.2.1 *Për çdo dy drejtëza të ndryshme ℓ dhe m të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, ekziston një bijeksion midis pikave të tyre.*

Vërtetim. Rasti 1. $\ell \cap m = O \in \mathcal{P}$ (Fig.11.a). Zgjedh pikat $A \in \ell$ dhe $A' \in m$ të ndryshme nga pika O . Për një pikë të çfarëdoshme $B \in \ell$ të ndryshme nga pikat O dhe A , le të jetë k drejtëza që kalon nga B dhe është paralele me drejtëzën AA' . Drejtëza k nuk është paralele me drejtëzën m , në të kundërt drejtëza m do të puthitej me drejtëzën AA' , sepse do të ishin paralele me drejtëzën k . Pra drejtëza k do të pritet me drejtëzën m në një pikë të vetme, të cilën po e quajmë B' . Përkufizojmë tani një pasqyrim $f : \ell \rightarrow m$ të tillë që $f(O) = O$, $f(A) = A'$ dhe $f(B) = B'$. Është e qartë që f është një bijeksion.

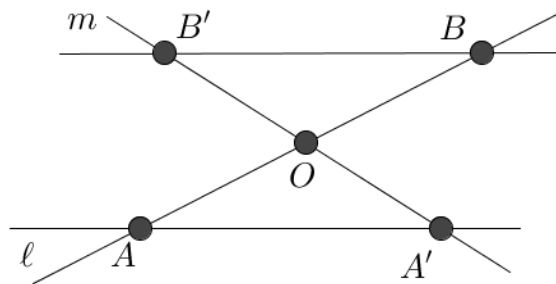


Fig. 11.a

Rasti 2. $\ell \parallel m$ (Fig.11.b). Le të kemi $O \in \ell$ dhe $O' \in m$. Atëherë $\ell \cap OO' = O$, sipas rastit 1 kemi një bijeksion $f : \ell \rightarrow OO'$; njëjloj kemi një bijeksion $g : OO' \rightarrow m$. Pasqyrimi i përbërë $g \circ f : \ell \rightarrow m$ rezulton kështu një bijeksion [1], [33], [36].

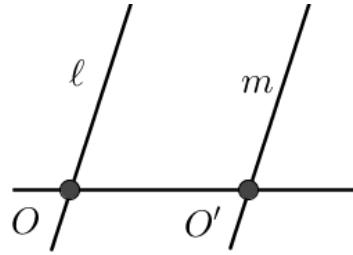


Fig. 11. b

RRJEDHIM. *Drejtëzat e një plani afin kanë të njejtin cardinal pikash.*

1.3. PLANET AFINE TË FUNDME

Po paraqesim tani një trajtim përmbledhës për planet affine të fundme, duke paraqitur me figurë dhe me matricë incidence disa prej tyre, nga rendi i dytë deri tek rendi i pestë [3], [4], [6], [8], [10], [13], [16], [14], [21] [41].

Përkufizim 1.3.1. *Një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, që ka një numër natyror pikash do ta quajmë plan afin të fundëm.*

POHIM 1.3.1. [9] *Në një plan afin të fundëm $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ çdo drejtëz përmban numër të njejtë pikash dhe nëpër çdo pikë kalon numër i njëjtë drejtëzash. Për më tepër ekziston numri natyror $n \in \mathbb{N}(n \geq 2)$ për të cilin janë të vërteta pohimet e mëposhtëme:*

- 1) *Në çdo drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$, numri i pikave incidente me të është n .*
- 2) *Për çdo pikë $P \in \mathcal{P}$, ka $n + 1$ drejtëza incidente me të.*
- 3) *Në planin afin $\mathcal{A}$ ka n^2 pika.*
- 4) *Në planin afin $\mathcal{A}$ ka $n \cdot (n + 1)$ drejtëza.*

Përkufizim 1.3.2. *Numri n në Pohimin 1.3.1 quhet rend i planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.*

Është e qartë se rendi më i vogël i një plani afin të fundëm është $n = 2$. Një plan i tillë afin është ai me katër pika dhe me gjashtë drejtëza i paraqitur në Shembullin 1.2.1.

POHIM 1.3.2. *Në një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ të rendit n ka $n + 1$ klasa ekuivalence sipas paralelizmit të drejtëzave dhe secila prej tyre ka n drejtëza.*

Vërtetim. Marrim në konsideratë n^2 pikat e bashkësisë $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_{n^2}\}$ (Fig.12). Le të jenë $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell_{n+1} \in \mathcal{L}$ drejtëzat incidente me pikën P_1 ,

$m_1, m_2, \dots, m_n, m_{n+1} \in \mathcal{L}$ drejtëzat incidente me pikën P_2 dhe përkatësisht paralele me drejtëzat $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell_{n+1} \in \mathcal{L}$, d. m. th.

$$\ell_1 \parallel m_1, \ell_2 \parallel m_2, \dots, \ell_n \parallel m_n, \ell_{n+1} \parallel m_{n+1}.$$

E kështu me radhë le të jenë $z_1, z_2, \dots, z_n, z_{n+1} \in \mathcal{L}$ drejtëzat incidente me pikën P_{n^2} dhe përkatësisht paralele me drejtëzat $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \ell_{n+1} \in \mathcal{L}$, d. m. th.

$$\ell_1 \parallel z_1, \ell_2 \parallel z_2, \dots, \ell_n \parallel z_n, \ell_{n+1} \parallel z_{n+1}.$$

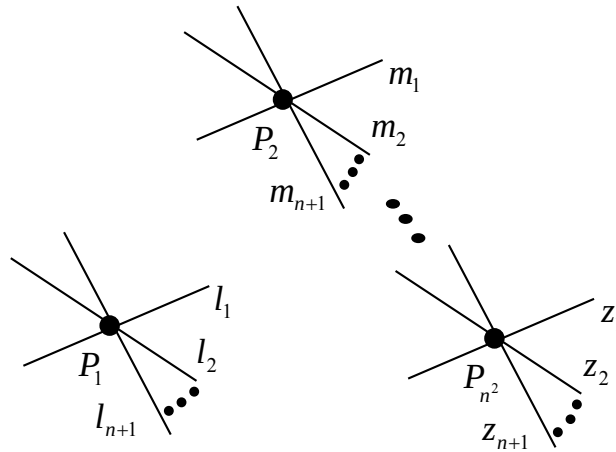


Fig. 12

Meqënëse, sipas Pohimit 1.2.1, paralelizmi i drejtëzave të një plani afin është relacion ekuivalence, kemi

$$\ell_1 \parallel m_1 \parallel \dots \parallel z_1, \ell_2 \parallel m_2 \parallel \dots \parallel z_2, \dots$$

$$\dots, \ell_n \parallel m_n \parallel \dots \parallel z_n, \ell_{n+1} \parallel m_{n+1} \parallel \dots \parallel z_{n+1},$$

pra kemi $n + 1$ klasa ekuivalence sipas paralelizmit të drejtëzave:

$$\{\ell_1, m_1, \dots, z_1\}; \{\ell_2, m_2, \dots, z_2\}; \dots$$

$$\dots, \{\ell_n, m_n, \dots, z_n\}; \{\ell_{n+1}, m_{n+1}, \dots, z_{n+1}\}.$$

Një klasë ekuivalence sipas paralelizmit të drejtëzave që përmban një drejtëz $d \in \mathcal{L}$ zakonisht e shënojmë K_d . Në këtë rast bashkësia e tyre $\{K_{\ell_1}, K_{\ell_2}, \dots, K_{\ell_{n+1}}\}$ është bashkësia herës $\mathcal{L}/\parallel$. Siç dihet [1], një bashkësi herës është një coptim për bashkësinë $\mathcal{L}$, dhe, meqënëse bashkësia $\mathcal{L}$ ka $n(n + 1)$ drejtëza, atëherë çdo klasë ekuivalence sipas paralelizmit do të ketë n drejtëza.

DISA SHEMBUJ TË PLANEVE AFINE TË FUNDME.

Shembull 1.3.1. Modeli më i vogël i një plani afin ka rendn 2. Ai përmban 4 pika

$$\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$$

dhe 6 drejtëza (Fig.13)

$$\mathcal{L} = \{(A, B), (A, C), (A, D), (B, C), (B, D), (C, D)\}.$$

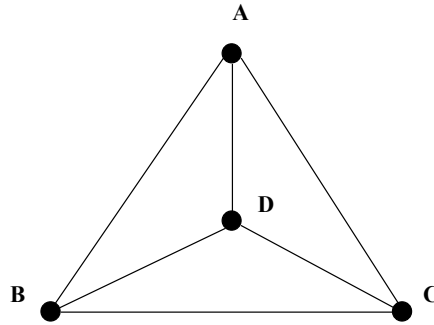


Fig. 13

Në këtë model kemi tri klasa ekuivalence të drejtëzave paralele

$$\{(A, B), (C, D)\}; \{(A, D), (B, C)\}; \{(A, C), (B, D)\}.$$

Matrica e incidencës për këtë plan është

$$A_{4 \times 6} = \begin{matrix} & \begin{matrix} \{A,B\} & \{A,C\} & \{A,D\} & \{B,C\} & \{B,D\} & \{C,D\} \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Shembull 1.3.2. Plani afin i rendit 3 është me 9 pika dhe me 12 drejtëza. Në të çdo drejtëz ka 3 pika (Fig.14):

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\mathcal{L} = \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12}\}$$

ku

$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{1, 2, 3\}; & \ell_2 &= \{4, 5, 6\}; & \ell_3 &= \{7, 8, 9\}; \\ \ell_4 &= \{1, 4, 7\}; & \ell_5 &= \{2, 5, 8\}; & \ell_6 &= \{3, 6, 9\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell_7 &= \{1, 5, 9\}; & \ell_8 &= \{2, 6, 7\}; & \ell_9 &= \{3, 4, 8\}; \\ \ell_{10} &= \{1, 6, 8\}; & \ell_{11} &= \{2, 4, 9\}; & \ell_{12} &= \{3, 5, 7\}.\end{aligned}$$

Matrica e incidencës së këtij plani është:

$$A_{9 \times 12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

ku rrjeshtat i përgjigjen pikave $1, 2, \dots, 9$ dhe shtyllat drejtëzave $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{12}$.

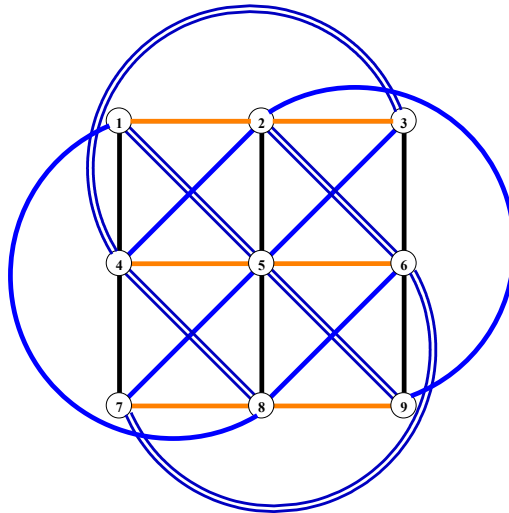


Fig. 14

Në këtë shembull kemi katër klasa ekuivalence të drejtëzave paralele (Fig.15):

$$\begin{aligned}K_1 &= \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}; & K_2 &= \{\ell_4, \ell_5, \ell_6\}; \\ K_3 &= \{\ell_7, \ell_8, \ell_9\}; & K_4 &= \{\ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12}\};\end{aligned}$$

Është e qartë që këto katër klasa janë coptim i figurës së mësipërme:

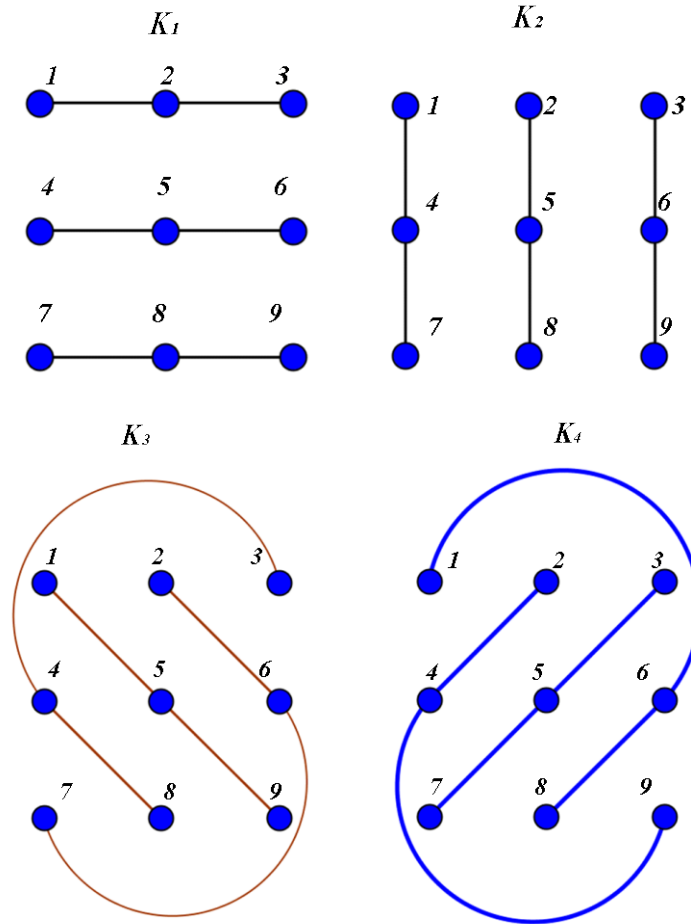


Fig. 15

Shembull 1.3.3. Plani afín i rendit 4 ka 16 pika dhe 20 drejtëza:

$$\mathcal{P} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16\}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{array}{l} \ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}, \\ \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{14}, \ell_{15}, \ell_{16}, \ell_{17}, \ell_{18}, \ell_{19}, \ell_{20} \end{array} \right\}$$

ku

$$\ell_1 = \{1, 2, 3, 4\}; \ell_2 = \{1, 5, 9, 14\}; \ell_3 = \{4, 5, 10, 13\};$$

$$\ell_4 = \{2, 6, 10, 14\}; \ell_5 = \{2, 7, 12, 13\}; \ell_6 = \{3, 8, 10, 16\};$$

$$\ell_7 = \{3, 5, 12, 15\}; \ell_8 = \{5, 6, 7, 8\}; \ell_9 = \{4, 7, 9, 16\};$$

$$\ell_{10} = \{4, 8, 12, 14\}; \ell_{11} = \{1, 6, 12, 16\}; \ell_{12} = \{1, 7, 10, 15\};$$

$$\ell_{13} = \{3, 6, 9, 13\}; \ell_{14} = \{2, 8, 9, 15\}; \ell_{15} = \{9, 10, 11, 12\};$$

$$\ell_{16} = \{3, 7, 11, 14\}; \ell_{17} = \{4, 6, 11, 15\}; \ell_{18} = \{13, 14, 15, 16\};$$

$$\ell_{19} = \{2, 5, 11, 16\}; \ell_{20} = \{1, 8, 11, 13\}.$$

Në këtë plan çdo drejtëz ka 4 pika. Matrica e incidencës do të ishte:

$$A_{20 \times 16} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Më poshtë japim paraqitjen e planit afn të rendit të katërt në figurën 16, ku në një tabelë paraqiten edhe klasat e ekuivalencës së paralelizmit të drejtëzave paralele.

$$K_1 = \{\ell_1, \ell_8, \ell_{15}, \ell_{18}\}; K_2 = \{\ell_2, \ell_5, \ell_6, \ell_{17}\};$$

$$K_3 = \{\ell_3, \ell_{11}, \ell_{14}, \ell_{16}\}; K_4 = \{\ell_4, \ell_7, \ell_9, \ell_{20}\};$$

$$K_5 = \{\ell_{10}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{19}\};$$

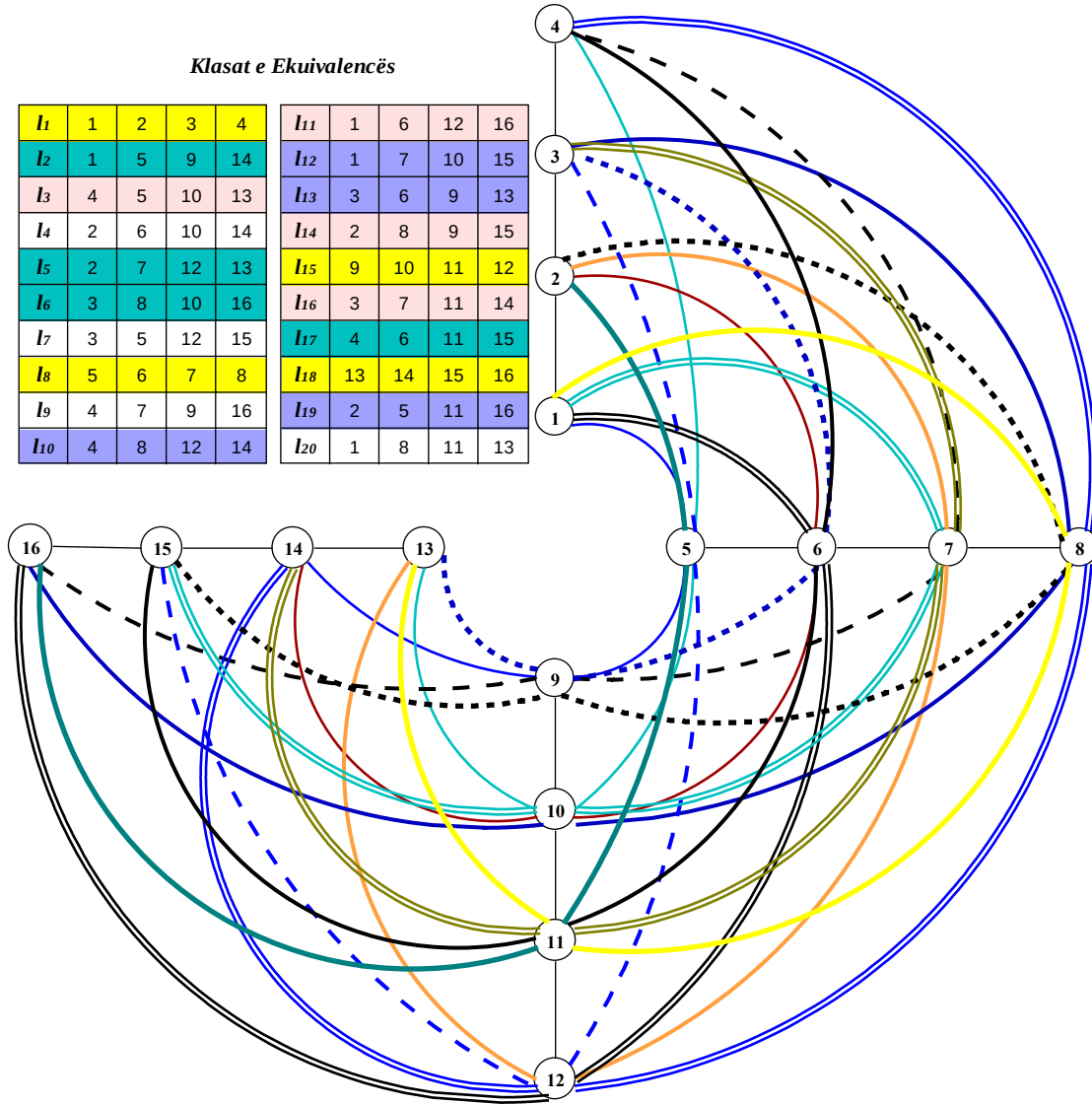


Fig. 16

Në figurën e mëposhtme (Fig. 17) po japim ilustrimet për këto pesë klasat e ekuivalencës.

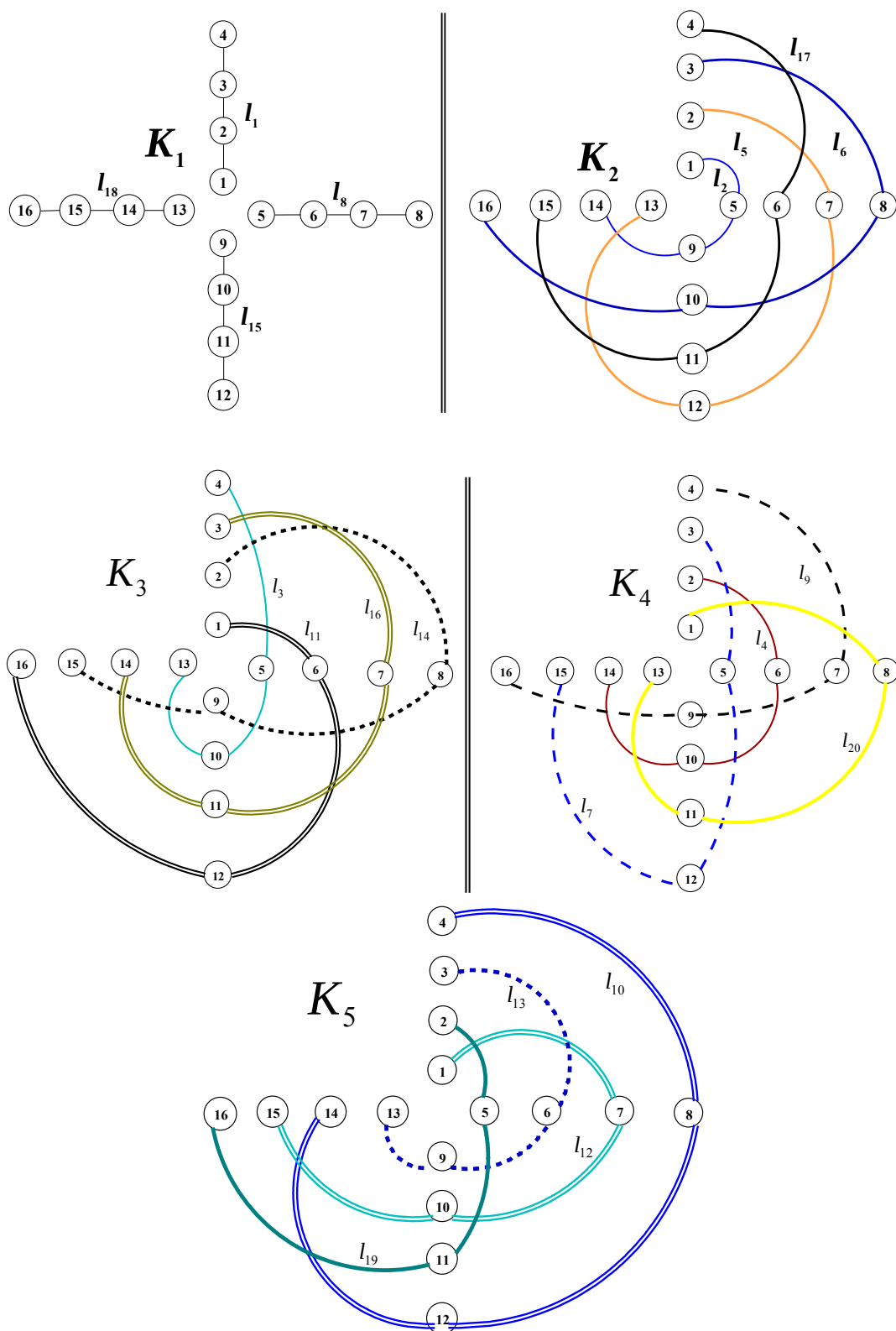


Fig. 17

Shembull 1.3.4. Plani afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ i rendit të 5 ka 25 pika, 30 drejtëza dhe 6 klasa ekuivalence të drejtëzave paralele me nga 5 drejtëza në çdo klasë:

$$\mathcal{P}=\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q, R, S, T, U, \\ V, W, X, Y\},$$

$$\mathcal{L}=\{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5, \ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}, \ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{14}, \ell_{15}, \ell_{16}, \ell_{17}, \ell_{18}, \ell_{19}, \ell_{20}, \\ \ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}, \ell_{24}, \ell_{25}, \ell_{26}, \ell_{27}, \ell_{28}, \ell_{29}, \ell_{30}\}$$

ku

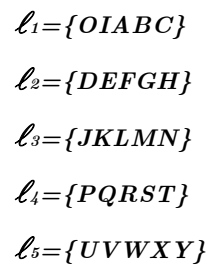
$$\begin{aligned} \ell_1 &= \{O, I, A, B, C\}; & \ell_2 &= \{D, E, F, G, H\}; & \ell_3 &= \{J, K, L, M, N\}; & \ell_4 &= \{P, Q, R, S, T\}; \\ \ell_5 &= \{U, V, W, X, Y\}; & \ell_6 &= \{O, H, M, R, V\}; & \ell_7 &= \{I, D, N, S, W\}; & \ell_8 &= \{A, E, J, T, X\}; \\ \ell_9 &= \{B, F, K, P, Y\}; & \ell_{10} &= \{C, G, L, Q, U\}; & \ell_{11} &= \{O, D, J, P, U\}; & \ell_{12} &= \{I, E, K, Q, V\}; \\ \ell_{13} &= \{A, F, L, R, W\}; & \ell_{14} &= \{B, G, M, S, X\}; & \ell_{15} &= \{C, H, N, T, Y\}; & \ell_{16} &= \{O, G, K, T, W\}; \\ \ell_{17} &= \{I, H, L, P, X\}; & \ell_{18} &= \{A, D, M, Q, Y\}; & \ell_{19} &= \{B, E, N, R, U\}; & \ell_{20} &= \{C, F, J, S, V\}; \\ \ell_{21} &= \{O, E, L, S, Y\}; & \ell_{22} &= \{C, D, K, R, X\}; & \ell_{23} &= \{B, H, J, Q, W\}; & \ell_{24} &= \{A, G, N, P, V\}; \\ \ell_{25} &= \{I, F, M, T, U\}; & \ell_{26} &= \{O, F, N, Q, X\}; & \ell_{27} &= \{I, G, J, R, Y\}; & \ell_{28} &= \{A, H, K, S, U\}; \\ \ell_{29} &= \{B, D, L, T, V\}; & \ell_{30} &= \{C, E, M, P, W\}. \end{aligned}$$

Klasat e ekuivalencës sipas paralelizmit të drejtëzave janë:

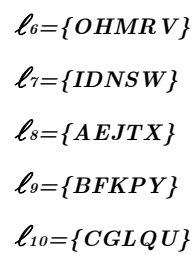
$$\begin{aligned} \mathcal{K}_1 &= \{\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4, \ell_5\}; & \mathcal{K}_2 &= \{\ell_6, \ell_7, \ell_8, \ell_9, \ell_{10}\}; \\ \mathcal{K}_3 &= \{\ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}, \ell_{14}, \ell_{15}\}; & \mathcal{K}_4 &= \{\ell_{16}, \ell_{17}, \ell_{18}, \ell_{19}, \ell_{20}\}; \\ \mathcal{K}_5 &= \{\ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}, \ell_{24}, \ell_{25}\}; & \mathcal{K}_6 &= \{\ell_{26}, \ell_{27}, \ell_{28}, \ell_{29}, \ell_{30}\}; \end{aligned}$$

Më poshtë kemi bërë një ndarje të klasave të ekuivalencës së drejtëzave paralele (Fig.18-Fig.23). (Kemi specifikuar edhe drejtëzat si bashkësi pikash në çdo klasë). Figurën e planit nuk po e paraqesim pasi është shumë e ngarkuar.

Drejtëzat:

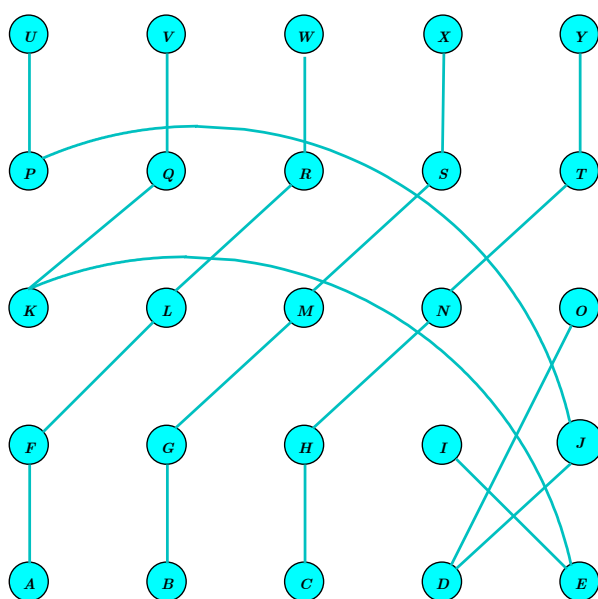


Drejtëzat:

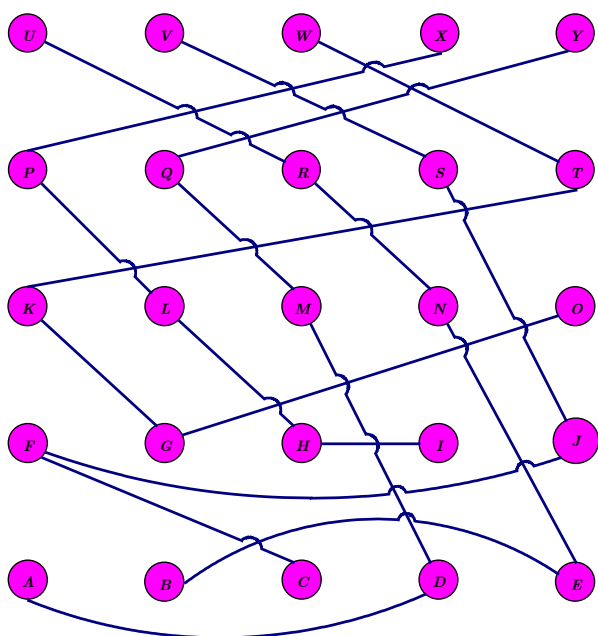


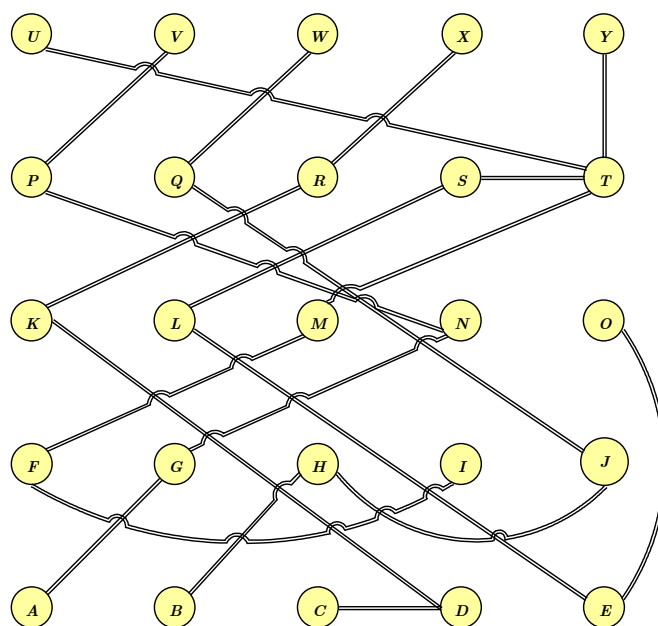
19

Drejtëzat:


$$\begin{aligned}\ell_{11} &= \{ODJPU\} \\ \ell_{12} &= \{IEKQV\} \\ \ell_{13} &= \{AFLRW\} \\ \ell_{14} &= \{BGMSX\} \\ \ell_{15} &= \{CHNTY\}\end{aligned}$$

Drejtëzat:


$$\begin{aligned}\ell_{16} &= \{OGKTW\} \\ \ell_{17} &= \{IHLPX\} \\ \ell_{18} &= \{ADMQY\} \\ \ell_{19} &= \{BENRU\} \\ \ell_{20} &= \{CFJSV\}\end{aligned}$$

Klasa K_5 .


Drejtëzat:

$$\ell_{21} = \{OELSY\}$$

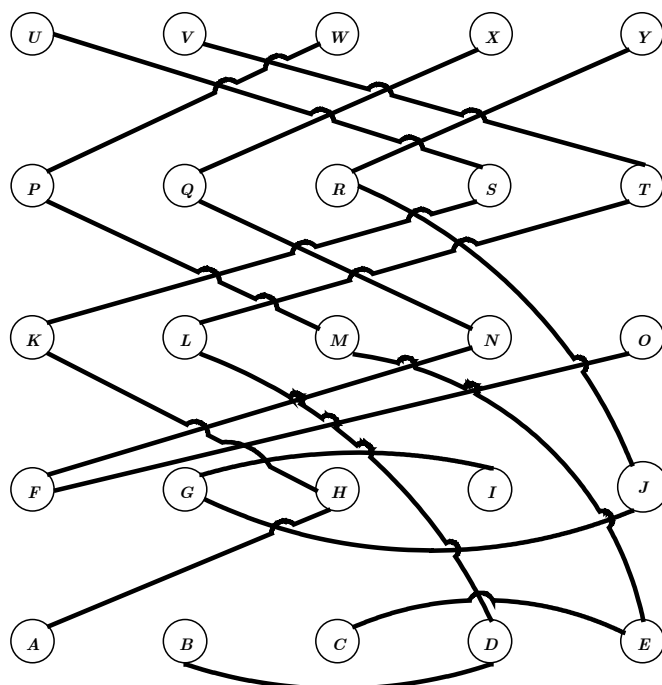
$$\ell_{22} = \{CDKRX\}$$

$$\ell_{23} = \{BHJQW\}$$

$$\ell_{24} = \{AGNPV\}$$

$$\ell_{25} = \{IFMTU\}$$

Fig. 22

Klasa K_6 .


Drejtëzat:

$$\ell_{26} = \{OFNQX\}$$

$$\ell_{27} = \{IGJRY\}$$

$$\ell_{28} = \{AHKSU\}$$

$$\ell_{29} = \{BDLTV\}$$

$$\ell_{30} = \{CEMPW\}$$

Fig. 23

1.4. NJË ZBATIM I PLANIT AFIN TË FUNDËM TË RENDIT n , NË NJË PLANIFIKIM EKSPERIMENTI

Shembujt e ndërtimit të planeve afine të fundme të sjellura në pikën e mësipërme gjejnë përdorim interesant në planifikim eksperimenti.

PROBLEMI 1.

Supozojmë se duhet të kryhet një eksperiment në ' n ' nivele. Në një provë supozojmë se kemi n tipare ndikuese. Secilin nga n tiparet ndikuese e ndajmë në n nivelet. Po të kryejmë një provë direkte do të na duheshin n^{n+1} mostra, pasi kaq janë kombinimet e mundshme. Duke i marrë mostrat si pika të një plani afín të rendit n , do të na nevojiteshin n^2 mostra. Dobia e mbështetjes së planifikimit eksperimental në e një plan afín, konsiston në *shmangien e përsëritjes së pjesëshme të* (të paktën dy herë për dy nivele të ndryshme nga aksioma A1 e planit afín) *kombinimeve brenda një prove*. Me anë të kësaj metode planifikimi do të kishim një kosto më të vogël të eksperimentit.

Nga Pohimi 1.3.1, në një plan afín kemi

1. n^2 pika. Pikat për ne do të jenë mostrat.
2. Çdo drejtëz ka n -pika. Prova dhe tiparet ndikuese ndahen në n -nivele.
3. Në një plan afín kemi $n(n+1)$ drejtëza. Në planifikimin tonë këto do të jenë të gjitha niveleve të provës së bashku me nivelet e tipareve ndikuese.

Nga Pohimi 1.3.2, kemi $n+1$ klasa ekujvalence sipas paralelizmit, të drejtëzave paralele. Njëra klasë do të jetë prova dhe n -klasat e tjera të saj janë tiparet ndikuese. Dhe secila klasë ka nga n -nivelet (drejtëzat) e saj.

Shembull 1.4.1. Supozojmë se një firmë kërkimore mjekësore dëshiron të provojë të mirat e një medikamenti të ri. Në këtë eksperiment, medikamenti duhet të administrohet në tre nivele dozimi;

Niveli I, Niveli II dhe Niveli III.

Me tri tipare ndikuese të ndara në tri nivele secili.

Tipari ndikues **1**, Tipari ndikues **2**, Tipari ndikues **3**, me nga tri nivele secili. Këto të dhëna po i paraqesim në tabelën e mëposhtme:

Tipari ndikues Niveli	Tipari ndikues T.N.1.	Tipari ndikues T.N.2.	Tipari ndikues T.N.3.
<i>1</i>	<i>(a)</i>	<i>(1)</i>	<i>(A)</i>
<i>2</i>	<i>(b)</i>	<i>(2)</i>	<i>(B)</i>
<i>3</i>	<i>(c)</i>	<i>(3)</i>	<i>(C)</i>

Një mënyrë për të qënë të sigurt që kemi balancuar secilin nga tre grupet me mostrat e zgjedhura në secilën nga shtrirjet e mësipërme (Tipari Ndikues **1**- Tipari Ndikues **2**- Tipari Ndikues **3**), si dhe zvogëlimin e efekteve të kombinimeve të ndryshme të këtyre faktorëve, duhet të provojmë kombinimet e mëposhtme të tipareve dhe trajnimit në nivele të ndryshme të **81** mostrave:

I-(a)-1-A; I-(a)-1-B;

I-(a)-1-C; I-(a)-2-A;

I-(a) -2-B; I-(a)-2-C;

I-(a)-3-A; I-(a) -3-B;

I-(a)-3-C; Etje...

deri tek kombinimi i fundit **III-(c)-3-C;**

Por kjo kërkon 81 mostra (ose më shumë nëse ne përpiqemi për të provuar disa mostra me çdo kombinim të mundshëm të tipareve ndikuese në secilin nga tre nivelet e trajtimit) në fakt mund të jetë shumë e vështirë për të gjetur mostra me të gjitha kombinimet e mundshme të tipareve.

Një mënyrë e “lehtë” e cila mund të sigurojë ekuilibër të kënaqshëm është që të zgjedhim vetëm nëntë individët me kombinimet e mëposhtme të tipareve dhe trajtimet të cilat po i skicojmë në Fig.24:

I-(a)-1-B.(Niveli I provohet në mostrën 1, me T.N.1(a), T.N.2(1) dhe T.N.3.(B))

I-(b)-3-C.(Niveli I provohet në mostrën 2, me T.N.1(b), T.N.2(3) dhe T.N.3.(C))

I-(c) -2-A.(Niveli I provohet në mostrën 3, me T.N.1(c), T.N.2(2) dhe T.N.3.(A))

II-(a)-3-A.(Niveli II provohet në mostrën 4, me T.N.1(a), T.N.2(3) dhe T.N.3.(A))

II-(b)-2-B(Niveli II provohet në mostrën 5, me T.N.1(b), T.N.2(2) dhe T.N.3.(B))

II-(c)-1-C (Niveli II provohet në mostrën 6, me T.N.1(c), T.N.2(1) dhe T.N.3.(C))

III-(a)-2-C.(Niveli III provohet në mostrën 7, me T.N.1(a), T.N.2(2) dhe T.N.3.(C))

III-(b)-1-A.(Niveli III provohet në mostrën 8, me T.N.1(b), T.N.2(1) dhe T.N.3.(A))

III-(c)-3-B.(Niveli III provohet në mostrën 9, me T.N.1(c), T.N.2(3) dhe T.N.3.(B))

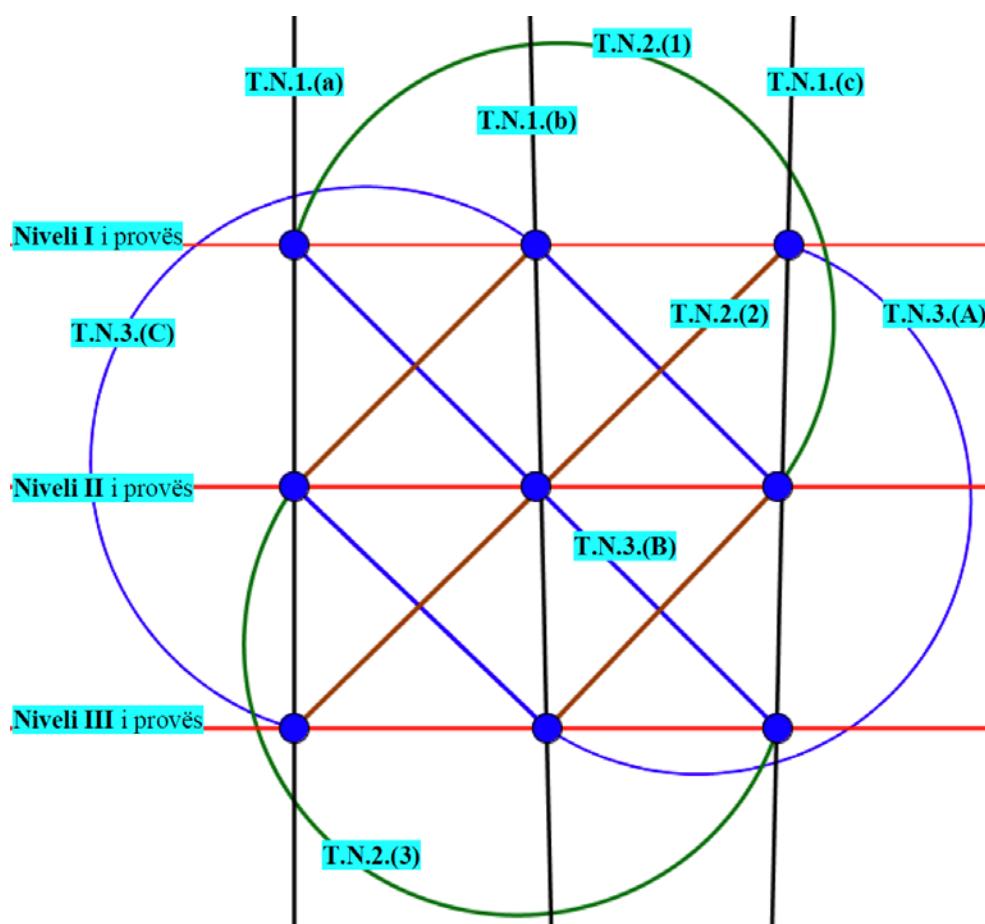


Fig. 24.

Këtu ne shohim planin afine e rendit **3**-të, në të cilën nëntë pikë janë të nëntë *personat*, dhe dymbëdhjetë *drejtëzat* përfaqësojnë *nivelet e trajtimit* apo shtrirjet e një tipari të veçantë. Drejtëzat paralele përfaqësojnë nivelet e ndryshme të njëjtës cilësie (ose niveleve të ndryshme të provës). Në qoftë se ne testojmë nëntë mostra me kombinimet e treguara të tipareve gjatë një periudhe një-javore, atëherë një ANOVA e kujdes'shme (analizës së variancës) do të japë një tabelë me rezultate se sa efektiv do të ishte medikamenti, dhe do të tregojë se si varjon dobishmëria për individët me tipare të ndryshme.

Dizenjimet e figurave të gjeometrive të fundme afine të madhësive të ndryshme mund të përdoren në planifikim eksperimenti, në mënyrë që të merret një sasi më e madhe informacioni për një kosto sa më të vogël të mundshme.

PROBLEMI 2.

Supozojmë se duhet të kryhet një eksperiment në '*k*' nivele. Në një provë supozojmë se kemi *m* tipare ndikuese. Secilin nga '*m*' tiparet ndikuese e kemi të ndarë në përkatësisht $q_1, q_2, \dots, q_m$ nivele.

Përpara se të fillojë eksperimenti, rekomandojmë të bëhet një plotësim për ta sjellë problemin në trajtën e **Problemit 1**. Ky plotësim rekomandohet të bëhet nëse numri total i kombinimeve të provës është më i madh se *katrori* i numrit më të madh të treguesve midis niveleve të proves, numrit të tipareve ndikuese dhe numrit të niveleve të tipareve ndikuese, pra n.q.se

$$\left[\max \{k, m, q_1, q_2, \dots, q_m\} \right]^2 < k \cdot m \cdot \prod_{i=1}^m q_i.$$

vetëm kështu kjo metodë do të ishte efiçente.

Po supozojmë se jemi në kushtet kur kjo metodë do të ishte e përshtatshme. Do të veprojmë me ndihmën e këtij algoritmi plotësimi:

Hapi 1. Shënohet $n = \max \{k, m, q_1, q_2, \dots, q_m\}$

Hapi 2. Plotësohen prova dhe tiparet ndikuese me nga *n*-nivele (nivelet e shtuara i mendojmë nivele fiktive).

Hapi 3. Planifikojmë eksperimentin mbi planin afine të rendit *n*. Dallojmë bashkësinë e të gjitha drejtëzave të këtij plani, këto drejtëza do të jenë përkatësisht nivelet e provës dhe nivelet e tipareve ndikuese.

Hapi 4. Nga planifikimi i eksperimentit mbi planin e fundmë afn të rendit n , merren kombinimet për tu eksperimentuar.

Kujtojmë që pikat e planit afn janë mostrat që duhet të marrim për eksperimentim.

Shembull. 1.4.2. Na duhet të kryejmë një provë në 5-nivele të saj. Për kryerjen e kësaj prove kemi 3 tipare ndikuese: T_1 , T_2 dhe T_3 , me nga 2, 3 dhe 4 nivele secili përkatësisht. Sa mostra na nevojiten për të kryer këtë provë?

Në mënyrë direkte për të patur të gjitha kombinimet do të na duheshin:

$$5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 360$$

mostra. Po të ndjekim *rekomandimin* në Problemin 2. Do të na duhej të shtonim nivelet në tiparet ndikuese T_1 , T_2 dhe T_3 , madje duhet të shtojmë edhe dy tipare të tjera ndikuese T_4 dhe T_5 me nga 5 nivele secilin (shtesat kemi thënë që janë fiktive, por mund të jenë edhe tipare me ndikim shumë të vogël, tek shtimi i ndarjeve në një tipar ndikues ne patjetër që marrim më shumë informacion).

Tani duke ndjekur dizenjimin mbi planin afn të rendit të 5-të, ne na duhen vetëm **25** mostra, për të kryer eksperimentin.

KREU 2

NDËRTIMI I NJË TRUPI MBI NJË DREJTËZ
NË PLANIN AFIN TË DESARGUT

Në këtë Kre tregojmë se si mund të ndërtohet një trup mbi një drejtëz të një plani afín të Desargut. Për këtë, më parë ndalemi tek kuptimi i planit projektiv, lidhur me të cilin formulojmë Teoremën e Desargut. Më tej tregojmë mundësinë e shndërrimit të një plani projektiv në një plan afín dhe anasjellas. Kjo e fundit lejon paraqitjen e Teoremës së Desargut në një formulim, përshtatur për planin afín. Mandej tregojmë që Teorema e vogël e Pappusit, që shfrytëzohet në shumë vërtetime në ndërtimin e trupit mbi një drejtëz të planit desargian, vlen edhe në planin afín të Desargut.

2.1. TEOREMA E DESARGUT NË NJË PLAN AFIN

Përkufizim 2.1.1. [29] *Një strukturë incidence $\Pi=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ quhet plan projektiv në qoftë se kënaq aksiomat:*

P1. Çdo dy pika të ndryshme janë incidente me një drejtëz të vetme.

P2. Çdo dy drejtëza të ndryshme janë incidente me një pikë të vetme.

P3. Ekzistojnë katër pika, çdo tri prej të cilave janë joincidente me një drejtëz.

Edhe këtu faktin $P \mathcal{I} \ell$ do ta shënojmë $P \in \ell$ dhe do t'a lexojmë pika P është incidente me drejtëzën ℓ apo drejtëza ℓ kalon nga pika P apo përmban pikën P . Po ashtu si në një plan afín edhe në një plan projektiv një drejtëz do ta konsiderojmë si bashkësinë e pikave incidente me të.

Përkufizim 2.1.2. Bashkësia e tri pikave të ndryshme jokolineare A, B, C së bashku me drejtëzat AB, BC, CA quhet *trekulmësh* dhe shënohet ABC . Pikat A, B, C quhen *kulme*, ndërsa drejtëzat AB, BC, CA quhen *brinjë* të trekulmëshit ABC .

Le të jenë ABC dhe $A'B'C'$ dy trekulmësha të ndërtuar si në figurën e mëposhtme që njihet me emrin **konfiguracioni i Desargut** (Fig.1).

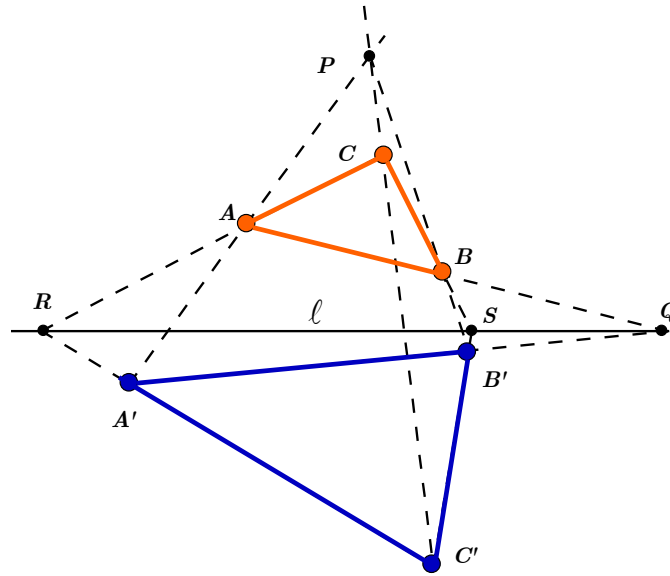


Fig.1

Për trekulmëshat ABC dhe $A'B'C'$ në konfiguracionin e Desargut thuhet se janë *perspektiv nga pika P* dhe nga drejtëza ℓ . Në këtë rast pika P quhet *kulmi* i perspektivitetit, ndërsa drejtëza ℓ quhet *boshti i perspektivitetit* [29], [62], [69].

TEOREMË 2.1.1 (Teorema e Desargut) [4],[7],[75]. **Le të jenë ABC dhe $A'B'C'$ dy trekulmësha me kulme jo të njejta në një plan projektiv $\Pi=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Ata janë perspektivë nga një pikë, vetëm atëherë kur ata janë perspektivë nga një drejtëz; ndryshe, ka vend njëvlerësia**

$$(\exists P \in \mathcal{P}, AA' \cap BB' \cap CC' = P) \Leftrightarrow (\exists \ell \in \mathcal{L}, \text{ që } AB \cap A'B', AC \cap A'C', BC \cap B'C' \in \ell).$$

Le të jetë $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një strukturë incidence dhe ℓ një drejtëz e caktuar në të. Shënojmë $\mathcal{P}^\ell$ nënbashkësinë e bashkësisë $\mathcal{P}$ të pikave të strukturës, që përftohet mbasi largohen

prej saj pikat e drejtëzës ℓ , d. m. th. $\mathcal{P}^\ell = \{P \in \mathcal{P} \mid P \notin \ell\}$; shënojmë gjithashtu $\mathcal{L}^\ell$ nënbashkësinë e bashkësisë $\mathcal{L}$ të drejtëzave të strukturës, që përftohet mbasi largohet prej saj drejtëza ℓ , d. m. th. $\mathcal{L}^\ell = \{d \in \mathcal{L} \mid d \neq \ell\}$ dhe $\mathcal{I}^\ell = \mathcal{I} \cap (\mathcal{P}^\ell \times \mathcal{L}^\ell)$. Sipas Përkufizimit 1.1.3, treshja $(\mathcal{P}^\ell, \mathcal{L}^\ell, \mathcal{I}^\ell)$ është nënstrukturë e strukturës së incidencës $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

TEOREMË 2.1.2 [9]. *Në qoftë se struktura $\Pi = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një plan projektiv dhe ℓ është një drejtëz e caktuar në të, atëherë nënstruktura $\Pi^\ell = (\mathcal{P}^\ell, \mathcal{L}^\ell, \mathcal{I}^\ell)$ e tij është një plan afin.*

Teorema e mësipërme tregon se me largimin e një drejtëze dhe pikave të saj nga një plan projektiv ai shndërrohet në një plan afin. Do të tregojmë tani mënyrën e shndërrimit të një plani afin në një plan projektiv.

Le të jetë $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan afin. Sipas Pohimit 1.2.1, lidhja $\parallel$ e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence. Klasat K të ekuivalencës së saj i quajmë *klasa paralelizmi*. Çdo njëra prej tyre është bashkësia e drejtëzave paralele me një drejtëz të dhënë dhe dy drejtëza që i takojnë klasave të ndryshme janë joparalele. Krahas tij ndërtojmë në mënyrën e mëposhtme strukturën e incidencës $(\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$:

1. Çdo klasë paralelizmi K të planit afin $\mathcal{A}$ e quajmë *pikë ideale*, e shënojmë P_K dhe pranojmë që $P_K \in \ell$, $\forall \ell \in K$. E zgjerojmë bashkësinë $\mathcal{P}$ të pikave të planit $\mathcal{A}$ me pikat ideale P_K ; bashkësinë e zgjeruar në këtë mënyrë e shënojmë $\mathcal{P}^*$.

2. Bashkësinë $\mathcal{L}$ të drejtëzave të planit $\mathcal{A}$ e zgjerojmë me një të ashtuquajtur *drejtëz ideale* (ose *drejtëz infinite*), që e shënojmë ℓ_∞ , për të cilën pranojmë që $P_K \in \ell_\infty$, $\forall P_K \in \mathcal{P}^*$. Bashkësinë e zgjeruar në këtë mënyrë e shënojmë $\mathcal{L}^*$.

3. Përcaktojmë një relacion incidence $\mathcal{I}^*$ ndërmjet pikave të $\mathcal{P}^*$ dhe drejtëzave të $\mathcal{L}^*$ si më poshtë:

$$PI^* \ell \text{ është } PI \ell, \text{ për } P \in \mathcal{P} \text{ dhe } \ell \in \mathcal{L};$$

$$PI^* \ell \text{ është } P_K \in \ell, \text{ për } P = P_K \text{ dhe } \ell \in K, \forall K;$$

$PI^* \ell$ është $P_K \in \ell_\infty$, për $P=P_K$ dhe $\ell = \ell_\infty$.

TEOREME 2.1.3.[7], [9] Në qoftë se struktura $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, është një plan afin, atëherë struktura $\Pi = (\mathcal{P}^*, \mathcal{L}^*, \mathcal{I}^*)$ ndërtuar më sipër është një plan projektiv.

TEOREMË 2.1.4 (Teorema afine plane e Desargut). Le të jenë ABC dhe $A'B'C'$ dy trekulmësha me kulme jo të njejta në një plan afin $\mathcal{A}$. Ata janë perspektivë nga një pikë, vetëm atëherë kur $AC \parallel A'C'$ dhe $BC \parallel B'C'$ sjell $AB \parallel A'B'$.

Vërtetim. E shndërrojmë planin afin $\mathcal{A}$, sipas Teoremës 2.1.3, në planin projektiv Π , d.m.th. duke e plotësuar atë me pikat ideale, ku takohen drejtëzat paralele të klasave të paralelizmit, dhe me drejtëzën ideale (infinite) ℓ_∞ , ku ndodhen ato.

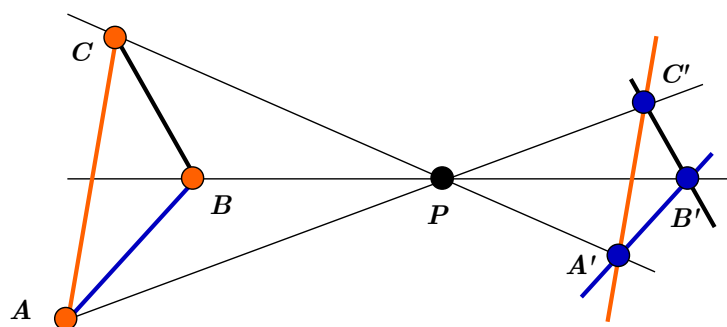


Fig. 2

Trekulmëshat ABC dhe $A'B'C'$, në këtë plan projektiv le të jenë perspektiv nga pika P (Fig.2). Atëherë, sipas Teoremës 2.1.1 të Desargut, ato janë perspektivë edhe nga një drejtëz në të. Meqenëse $AC \parallel A'C'$, ato priten në një pikë ideale të ℓ_∞ . Po ashtu edhe $BC \parallel B'C'$, prandaj edhe këto priten në një pikë ideale të ℓ_∞ . Për rrjedhojë në këtë drejtëz ndodhet edhe pika e prerjes së drejtëzës AB me drejtëzën $A'B'$. Meqenëse ato priten në një pikë ideale të planit projektiv Π , rezulton që janë paralele në planin afin $\mathcal{A}$. Në këtë rrugë tregohet dhe vërtetësia e të anasjellës.

Vërejtje. Figura 2 ilustron vetëm një nga rastet e veçanta të teoremës afine plane të Desargut. Në këtë rast teoremës mund t'i jepet dhe formulimi:

Le të jetë ABP një trekulmësh dhe C një pikë, që nuk ndodhet në ndonjë nga brrinjët e tij. Le të jetë C' një pikë në CP dhe A' pikëprerja e AP me drejtëzën që kalon nga pika C' paralele me AC . Le të jetë B' pikëprerja e BP me drejtëzën që kalon nga pika C' paralele me BC . Atëherë $A'B' \parallel AB$.

Një rast tjetër më afër konfiguracionit të Desargut, dhënë në Fig. 1, paraqitet në Fig. 3, ku boshti i perspektivitetit është drejtëza ideale në pafundësi ℓ_∞ .

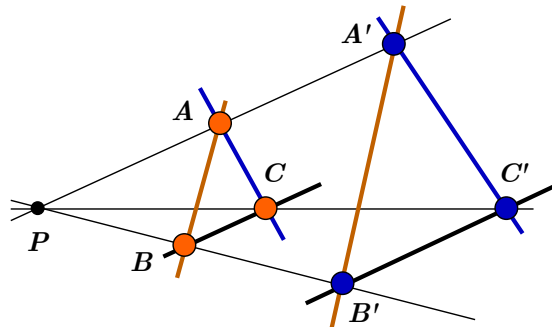


Fig. 3

2.2. PLANI AFIN I DESARGUT

Në planin afin euklidian ka vend ky

POHIM D1. (Aksioma I e Desargut) Në qoftë se AA_1 , BB_1 , CC_1 janë tri drejtëza të ndryshme paralele (Fig. 4), atëherë

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1, \\ BC \parallel B_1C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow AC \parallel A_1C_1.$$

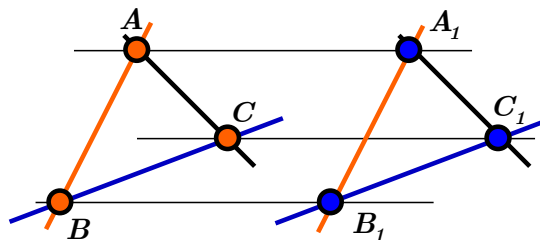


Fig. 4

Ka plane afine, ku nuk vlen Pohimi D1. I tillë është plani i Moultonit siç tregohet në shembullin e mëposhtëm.

Shembull 2.2.1.[9] Le të jetë $\mathbf{R}^2$ plani euklidian i koordinatizuar nga sistemi karezi i kënddrejtë oxy . Quajmë plan të Moultonit strukturën e incidencës $(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ të përcaktuar si më poshtë:

1. Pikat e $\mathcal{P}$ janë pikat e $\mathbf{R}^2$.
2. Drejtëzat e $\mathcal{L}$ janë bashkësitë e pikave (x, y) , që kënaqin kushtet:
 - a) $x=a$ për çdo a të fiksuar reale;
 - b) $y=b$ për çdo b të fiksuar reale;
 - c) drejtëzat euklidiane $y=mx+b$, ku $m < 0$;
 - d) drejtëzat e thyera $y = \begin{cases} \frac{1}{2}m(x-a), & \text{për } y \geq 0; \\ m(x-a), & \text{për } y < 0. \end{cases}$
3. Incidenca është përkatësia e zakonshme e elementit në bashkësi.

Me këto të dhëna provohet lehtë se plani i Moultonit (Fig. 5.a) është plan afim.

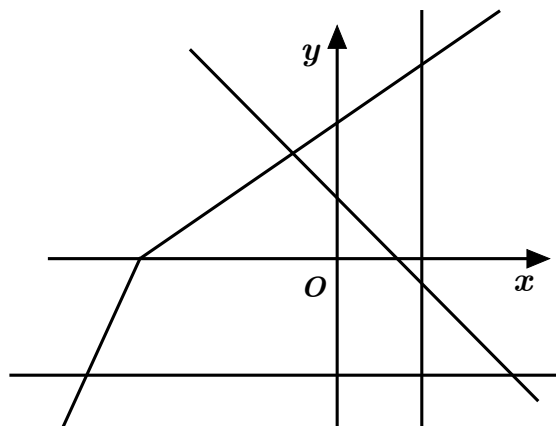


Fig. 5.a

Nga Fig. 5.b duket që, megjithëse për drejtëzat AA_1 , BB_1 , CC_1 në planin e Moultonit kemi $AB \parallel A_1B_1$ dhe $BC \parallel B_1C_1$, drejtëzat AC, A_1C_1 nuk janë paralele.

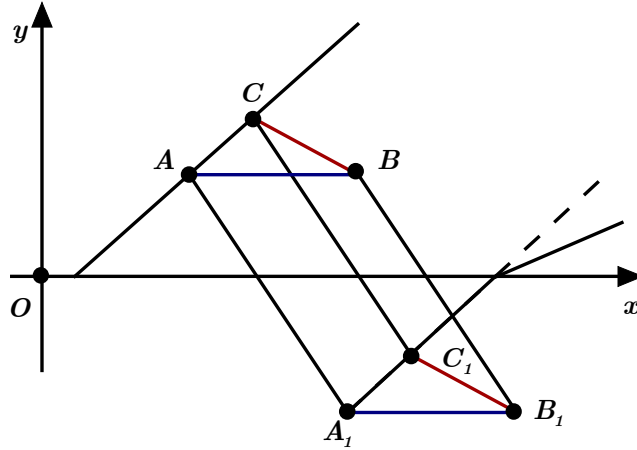


Fig. 5.b

Pohimi D1 njihet si aksioma e parë e Desargut.

Përkufizim 2.2.1. [2], [4], [5], [9] Një plan afën, të plotësuar me aksiomën D1 të Desargut do ta quajmë plan të Desargut.

Është e qartë që, në qoftë se kemi pikat A, B, C, A_1, B_1, C_1 (Fig. 4) në një plan të Desargut të tilla që $AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$, atëherë

$$\left. \begin{array}{l} AB \parallel A_1B_1, \\ BC \parallel B_1C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow AC \parallel A_1C_1.$$

Le të jenë tani A, B, C tre pika të ndryshme të një drejtëze dhe A_1, B_1, C_1 tre pika të ndryshme të një drejtëze tjetër paralele me të parën (Fig.6). Në qoftë se $AB_1 \parallel BC_1$ dhe $A_1B \parallel B_1C$ mund të pohojmë që gjithashtu $AA_1 \parallel CC_1$? Ndryshe, shtojmë problemin nëse është i vërtetë ky

POHIM 2.2.1 [76], [77] (Teorema e vogël e Pappusit). *Le të jenë A, B, C dhe A_1, B_1, C_1 dy treshë pikash që ndodhen në dy drejtëza paralele (Fig. 6). Në qoftë se $AB_1 \parallel BC_1$ dhe $BA_1 \parallel CB_1$, atëherë kemi që $AA_1 \parallel CC_1$.*

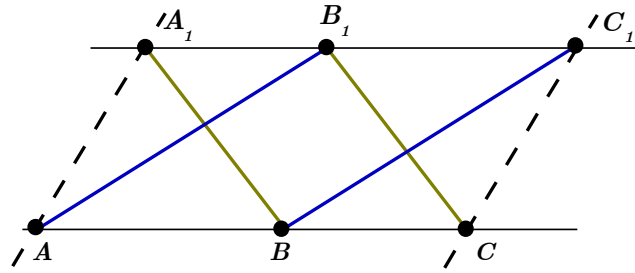


Fig. 6.

Përgjigjen e jep kjo

TEOREMË 2.2.2 [76] (Teorema e vogël e Hessenberg-ut). Në planin e Desargut është i vërtetë Pohimi 1.2.1, d. m. th. vlen Teorema e vogël e Pappusit.

Vërtetim. Le të kemi dy treshet e pikave A, B, C dhe A_1, B_1, C_1 në dy drejtëza paralele të tilla që $AB_1 \parallel BC_1$ dhe $BA_1 \parallel CB_1$ (Fig. 7).

Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{AB_1}^C$ (drejtëza që kalon nga pika C dhe është paralele me drejtëzën AB_1), dhe drejtëzën $\ell_{BA_1}^A$ (drejtëza që kalon nga pika A dhe është paralele me drejtëzën BA_1). Shënojmë $D = \ell_{AB_1}^C \cap \ell_{BA_1}^A$. Ndërtojmë gjithashtu drejtëzën DB (Fig. 7)

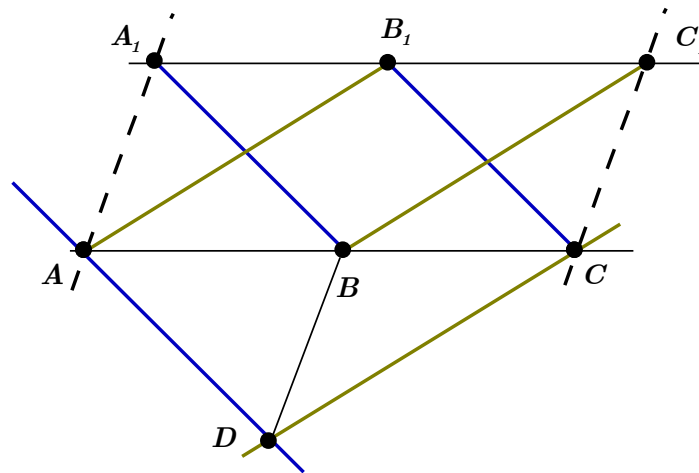


Fig. 7.

Nga kushti i Pohimit 2.2.1 kemi $AB_1 \parallel BC_1$ dhe $BA_1 \parallel CB_1$. Kjo sjell paralelizmin e drejtëzave $AB_1, BC_1, \ell_{AB_1}^C$, si dhe paralelizmin e drejtëzave $BA_1, CB_1, \ell_{BA_1}^A$. Në këto kushte, trekulmëshat CC_1B_1 dhe DBA i kanë kulmet në drejtëzat e ndryshme

paralele AB_1 , BC_1 , $\ell_{AB_1}^C$ dhe brinjët e tyre plotësojnë kushtin $AB \parallel B_1C_1$ dhe $AD \parallel B_1C$. Prandaj, sipas aksiomës D1, kemi gjithashtu $CC_1 \parallel DB$.

Po ashtu, trekulmëshat AA_1B_1 dhe DBC i kanë kulmet në drejtëzat e ndryshme paralele BA_1 , CB_1 , $\ell_{BA_1}^A$ dhe brinjët e tyre plotësojnë kushtin $BC \parallel A_1B_1$ dhe $DC \parallel AB_1$. Prandaj, sipas aksiomës D1, kemi gjithashtu $DB \parallel AA_1$. Duke krahasuar të dy përfundimet e zbatimit të aksiomës D1, arrijmë në përfundimin $AA_1 \parallel CC_1$.

2.3. MBLEDHJA E PIKAVE TË NJË DREJTËZE TË PLANIT TË DESARGUT DHE VETI TE SAJ

Në një plan të Desargut $\mathcal{D}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ fiksojmë dy pika të ndryshme $O, I \in \mathcal{P}$, të cilat, sipas aksiomës A1, përcaktojnë një drejtëz $OI \in \mathcal{L}$. Në këtë plan, një drejtëz konsiderohet si bashkësia e pikave të tij, që janë incidente me atë drejtëz. Le të jenë A dhe B dy pika të çfarëdoshme të drejtëzës OI . Zgjedhim në planin $\mathcal{D}$ një pike B_1 jo incidente me OI : $B_1 \notin OI$. Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{OI}^{B_1}$, e cila është e vetme sipas aksiomës A2. Ndërtojmë pastaj drejtëzën $\ell_{OB_1}^A$, e cila gjithashtu është e vetme sipas aksiomës A2. Pikëprerjen e tyre e shënojmë $P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A$. Ndërtojmë së fundi drejtëzën $\ell_{BB_1}^{P_1}$. Me qenë se BB_1 pret OI në pikën B , atëherë kjo drejtëz, paralele me BB_1 , pret drejtëzën OI në një pikë të vetme C (Fig. 8).

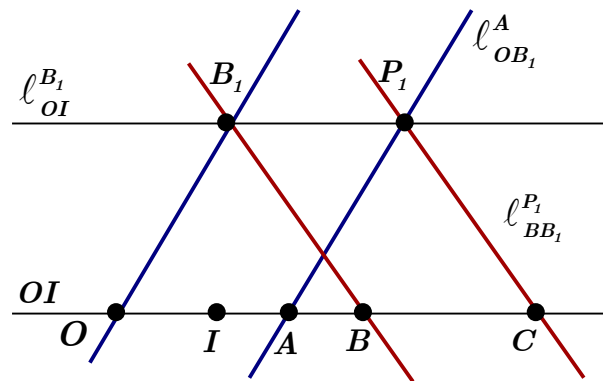


Fig. 8

Procesin e ndërtimit të pikës C , duke u nisur nga dy pika të çfarëdoshme A, B të drejtëzës OI , e paraqesim në trajtën e algoritmit

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Në procesin e ndërtimit të pikës C , veç dyshes (A, B) të pikave $A, B \in OI$, është e nevojshme dhe zgjedhja e pikës $B_1 \notin OI$, të cilën e quajmë *pikë ndihmëse* të pikës C . Ndikon kjo zgjedhje në pozicionin e pikës C në drejtëzën OI ?

TEOREMË 2.3.1. *Për çdo dy pika $A, B \in OI$, algoritmi (3) përcakton një pikë të vetme $C \in OI$, e cila nuk varet nga zgjedhja e pikës ndihmëse B_1 .*

Vërtetim. Le të jetë (A, B) një çift pikash të drejtëzës OI . Sipas (3), duke zgjedhur pikën B_1 , ndërtojmë pikën C . Zgjedhim tani një pikë tjetër B_2 . Atëherë, po sipas (3), ndërtojmë pikën analoge C' , që në këto kushte merr pamjen

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{OB_2}^A = P_2, \\ 3. \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI = C'. \end{array} \right\} \quad (3')$$

Dallojmë këto katër raste të pozicionit të pikave A, B në lidhje me pikën fikse O të drejtëzës OI .

Rasti I. $A=B=O$. Në këtë rast, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (3) kemi

$$P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^O = \ell_{OI}^{B_1} \cap OB_1 = B_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = O;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (3') kemi

$$P_2 = \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{OB_2}^O = \ell_{OI}^{B_2} \cap OB_2 = B_2 \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI = O.$$

Për rrjedhojë (Fig. 8.a) marrim

$$C = C' = O \quad (4)$$

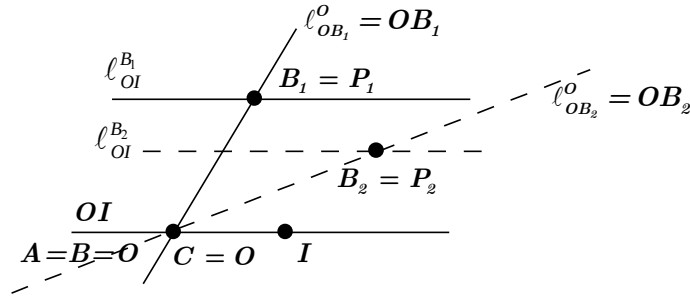


Fig. 8.a

Rasti II. $A = O \neq B$. Në këtë rast, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (3) kemi

$$P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^O = \ell_{OI}^{B_1} \cap OB_1 = B_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{B_1} \cap OI = BB_1 \cap OI = B;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (3') kemi

$$P_2 = \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{OB_2}^O = \ell_{OI}^{B_2} \cap OB_2 = B_2 \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{B_2} \cap OI = BB_2 \cap OI = B.$$

Për rrjedhojë (Fig. 8.b) marrim

$$C = C' = B \quad (5)$$

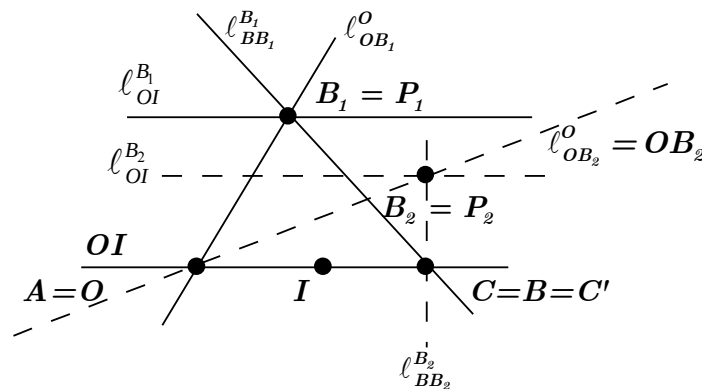


Fig. 8.b

Rasti III. $A \neq O = B$. Në këtë rast, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (3) kemi

$$P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A \Rightarrow C = \ell_{OB_1}^{P_1} \cap OI = AP_1 \cap OI = A;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (3') kemi

$$P_2 = \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{OB_2}^A \Rightarrow C' = \ell_{OB_2}^{P_2} \cap OI = AP_2 \cap OI = A.$$

Për rrjedhojë (Fig. 8.c) marrim

$$C = C' = A \quad (5')$$

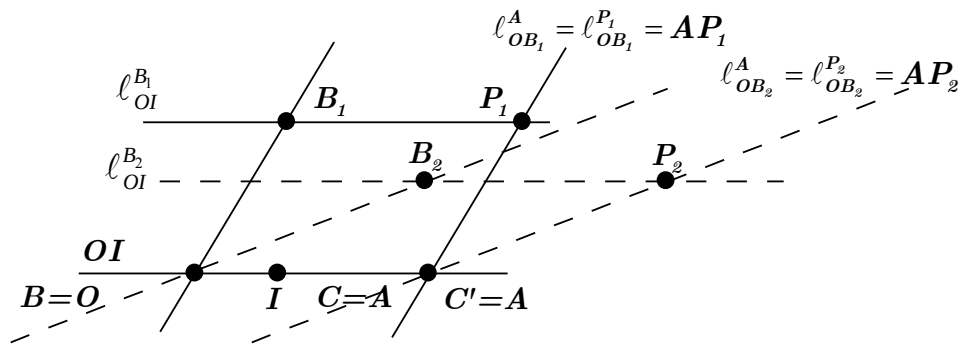


Fig. 8.c

Rasti IV. $A \neq B \neq O$. Këtu dallojmë dy nënraste.

a) Pikat O , B_1 , B_2 janë kolineare. Në këtë rast, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (3) kemi

$$P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{BB_1}^A \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (3') kemi

$$P_2 = \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{BB_2}^A \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI.$$

Nga (3) dhe (3') del gjithashtu që, kolineariteti i pikave O , B_1 , B_2 sjell kolinearitetin e pikave A , P_1 , P_2 . Supozojmë tani që $C \neq C'$ (Fig. 8.d).

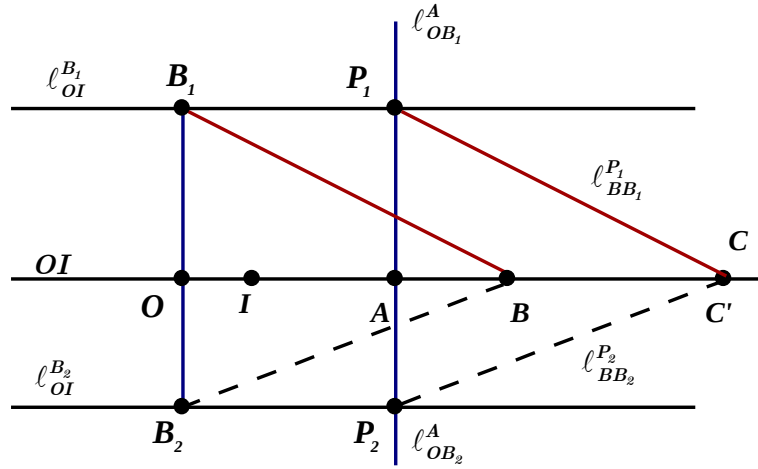


Fig. 8.d

Shqyrtojmë trekulmëshat BB_1B_2 dhe CP_1P_2 . Vëmë re se $AP_1 = \ell_{OB_1}^A \parallel OB_1$, $P_2 \in AP_1$, $B_2 \in OB_1$, që sjellin $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Por $C \in \ell_{BB_1}^{P_1} \parallel BB_1$, prandaj $BB_1 \parallel CP_1$. Prej këndeje, nga aksioma D1 e Desargut, rezulton $B_2B \parallel P_2C$. Nga ana tjetër, $C' \in \ell_{BB_2}^{P_2}$, që sjell $P_2C' \parallel B_2B$, e cila është paralele me P_2C . Për rrjedhojë $C' \in P_2C$. Por P_2C me OI priten në një pikë të vetme, që sjell $C = C'$, në kundërshtim me supozimin që $C \neq C'$.

b) Pikat O , B_1 , B_2 janë jokolineare. Në këtë rast, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (3) kemi

$$P_1 = \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{BB_1}^A \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (3') kemi

$$P_2 = \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{BB_2}^A \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI.$$

Supozojmë tani që $C \neq C'$ (Fig. 8.e). Nga (3) dhe (3') del gjithashtu që, jokolineariteti i pikave O , B_1 , B_2 sjell jokolinearitetin e pikave A , P_1 , P_2 .

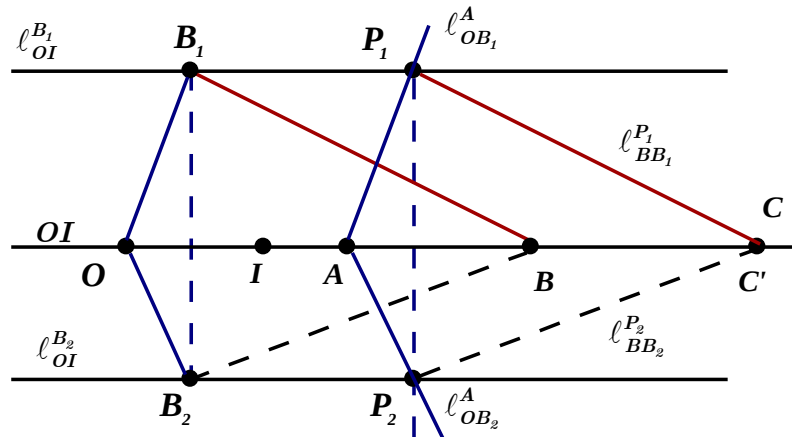


Fig. 8.e

Shqyrtojmë trekulmëshat OB_1B_2 dhe AP_1P_2 . Vemë re se $AP_1 = \ell_{OB_1}^A \parallel OB_1$ dhe $AP_2 = \ell_{OB_2}^A \parallel OB_2$, prandaj nga aksioma D1, rezulton $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Shqyrtojmë tani trekulmëshat BB_1B_2 dhe CP_1P_2 . Fakti, që $C \in \ell_{BB_1}^{P_1} \parallel BB_1$, sjell $BB_1 \parallel CP_1$. Nga më sipër, kemi edhe $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Prandaj, përsëri nga aksioma D1, rezulton $B_2B \parallel P_2C$. Nga ana tjetër, $C' \in \ell_{BB_2}^{P_2}$, që sjell $P_2C' \parallel B_2B$. Për rrjedhojë $C' \in P_2C$, që sjell $C=C'$, në kundërshtim me supozimin që $C \neq C'$.

Le të jenë A dhe B dy pika të çfarëdoshme të drejtëzës OI . I shoqërojmë çiftit $(A, B) \in OI \times OI$ pikën $C \in OI$, që përcakton algoritmi (3). Sipas Teoremës së më sipërme, pika C përcaktohet në mënyrë të vetme nga (3). Përftojme kështu një pasqyrim $OI \times OI \rightarrow OI$.

Përkufizim 2.3.1. Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin

$$+ : OI \times OI \rightarrow OI,$$

përcaktuar nga $(A, B) \mapsto C$ për çdo $(A, B) \in OI \times OI$ e quajmë mbledhje në OI .

Sipas këtij Përkufizimi, mund të shkruajmë

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ \forall A, B \in OI, \quad 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right] \Leftrightarrow A + B = C. \quad (6)$$

Nga ku, duke iu referuar rasteve I, II, III të Teoremës 2.3.1, del menjëherë i vërtetë ky

POHIM 2.3.1. **Mbledhja në OI ka element zero pikën O:**

$$\forall A \in OI, \quad O + A = A + O = A. \quad (7)$$

Vlejnë gjithashtu edhe pohimet e mëposhtme.

POHIMI 2.3.2. **Mbledhja është komutative në OI:**

$$\forall A, B \in OI, \quad A + B = B + A \quad (8)$$

Vërtetim. Në rastin kur $A=B$ pohimi është evident, kurse kur $A=O$ ose $B=O$, pohimi vlen sipas (7). Ndalemi në rastin kur $A, B \neq O$ dhe $A \neq B$. Shënojmë $A+B=C$ dhe $B+A=C'$. Pikën ndihmëse B_1 të shumës $A+B$ dhe pikën ndihmëse A_1 të shumës $B+A$ i marrim të njëjta (Fig.9). Në këtë rast, sipas (6), kemi

$$\left[\begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right] \Leftrightarrow A+B=C \text{ dhe } \left[\begin{array}{l} 1. A_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{A_1} \cap \ell_{OA_1}^B = P_2, \\ 3. \ell_{AA_1}^{P_2} \cap OI = C'. \end{array} \right] \Leftrightarrow B+A=C'. \quad (6')$$

Është e qartë se $A+B=B+A$ do të thotë se pikat C dhe C' përputhen. Për këtë përdorim Pohimin 2.2.1(Teoremën e vogël të Pappusit). Supozojmë tani që $C \neq C'$ (Fig. 9). Shqyrtojmë treshen kolineare të pikave A, B, C dhe treshen tjetër kolineare të pikave B_1, P_1, P_2 , që ndodhen në drejtëza paralele. Sipas (6'), $AP_1 \parallel BP_2$ dhe $BB_1 \parallel CP_1$. Jemi në kushtet e Teoremës së vogël të Pappusit, prandaj rezulton $CP_2 \parallel AB_1$, ndryshe $CP_2 \parallel AA_1$. Por nga (6') kemi gjithashtu $C'P_2 \parallel AA_1$, që sjell $C=C'$, në kundërshtim me supozimin që $C \neq C'$.

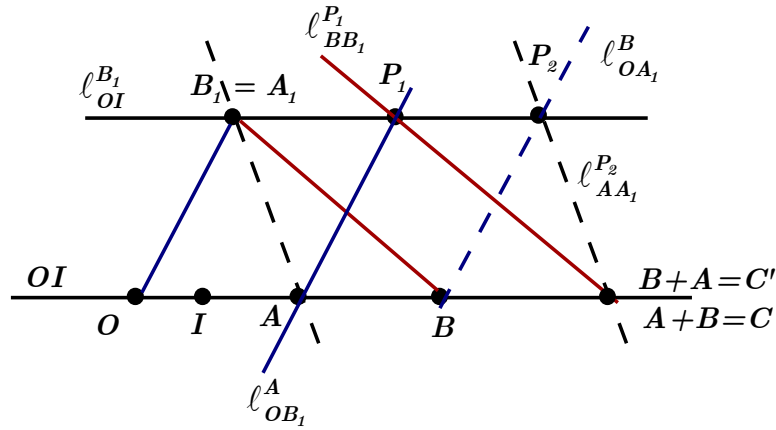


Fig. 9

POHIMI 2.3.3. *Mbledhja është associative në OI:*

$$\forall A, B, D \in OI, (A+B)+D = A+(B+D). \quad (9)$$

Vërtetim. Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, D është O pohimi vlen sipas (7), kurse kur $A=D$, pohimi vlen sipas (8). Ndalemi në rastin kur $A, B, D \neq O$ dhe $A \neq B \neq D$, (arsyetohet njëloj edhe në rastet e tjera). Ndëtojmë në fillim shumën $(A+B)+D$. Në këtë rast (Fig. 10), sipas (6), për $A+B$ kemi

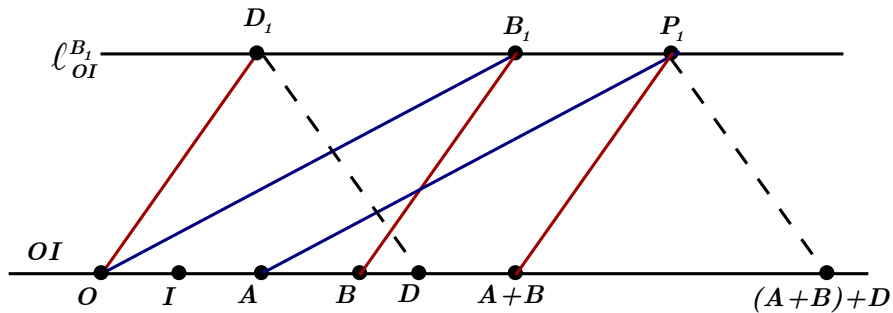


Fig. 10

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right] \Rightarrow A+B = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI,$$

Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{(A+B)P_1}^O$ dhe shënojmë $D_1 = \ell_{(A+B)P_1}^O \cap OI$. Zgjedhim pikën D_1 si pikë ndihmëse për ndërtimin e shumës $(A+B)+D$. Atëherë, sipas (6) kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. D_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{D_1} \cap \ell_{OD_1}^{A+B} = P_1, \\ 3. \ell_{DD_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow (A+B)+D = \ell_{DD_1}^{P_1} \cap OI. \quad (*)$$

Në mënyrë të njëjtë njëjtë ndërtojmë tani shumën $A+(B+D)$. Në këtë rast, zgjedhim si pikë ndihmëse për $B+D$ pikën D_1 (Fig. 11). Me këtë, në rolin e pikës P_1 është pika B_1 . Duke ndërtuar drejtëzën $\ell_{DD_1}^{B_1}$, sipas (6), gjejmë $B+D = \ell_{DD_1}^{B_1} \cap OI$. Prej nga del që $(B+D)B_1 \parallel DD_1$. Zgjedhim tani si pikë ndihmëse për shumën $A+(B+D)$ pikën B_1 .

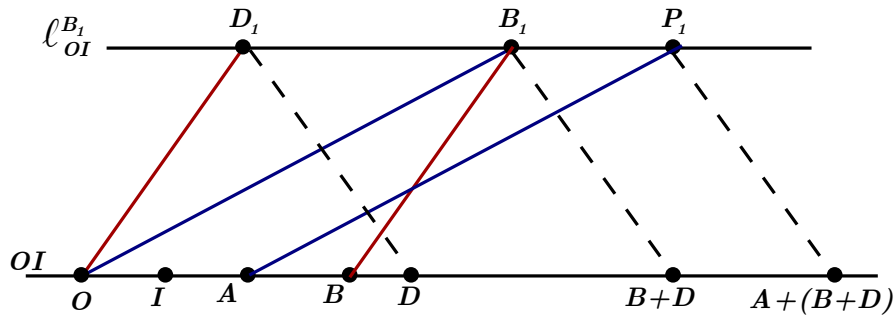


Fig. 11

Atëherë, sipas (6) kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{(B+D)B_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow (A+B)+D = \ell_{(B+D)B_1}^{P_1} \cap OI.$$

Por $(B+D)B_1 \parallel DD_1$, që sjell $\ell_{(B+D)B_1}^{P_1} = \ell_{DD_1}^{P_1}$. Përfundimisht, sipas (*), kemi:

$$(A+B)+D = \ell_{DD_1}^{P_1} \cap OI = \ell_{(B+D)B_1}^{P_1} \cap OI = (A+B)+D.$$

POHIM 2.3.4. *Për çdo pike në OI ekziston simetrikja e djathtë e saj sipas mbledhjes:*

$$\forall A \in OI, \exists \bar{A} \in OI, A + \bar{A} = O. \quad (10)$$

Vërtetim. Dallojmë dy raste: $A = O$ dhe $A \neq O$.

Në qoftë se $A = O$, atëherë $\bar{A} = O$, sepse, sipas (7), $O + O = O$.

Në qoftë se $A \neq O$, kërkohet pika $\bar{A}$ e tillë që

$$\left. \begin{array}{l} 1. \bar{A}_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{\bar{A}_1} \cap \ell_{O\bar{A}_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{\bar{A}\bar{A}_1}^B \cap OI = O. \end{array} \right\}$$

Nisur nga kjo, marrim fillimisht një pikë $\bar{A}_1 \notin OI$ dhe ndërtojmë drejtëzën $\ell_{OI}^{\bar{A}_1}$ e pastaj drejtëzën $\ell_{O\bar{A}_1}^A$, të cilat ndërpriten në pikën P_1 . Më tej ndërtojmë OP_1 e paralel me të nga pika $\bar{A}_1$ drejtëzën $\ell_{OP_1}^{\bar{A}_1}$. Kjo e fundit nuk është paralele me drejtëzën OI , pra e pret atë në një pike. Është e qartë që kjo pikë është pika e kërkuar $\bar{A}$, pra $\bar{A} = \ell_{OP_1}^{\bar{A}_1} \cap OI$ (Fig.12).

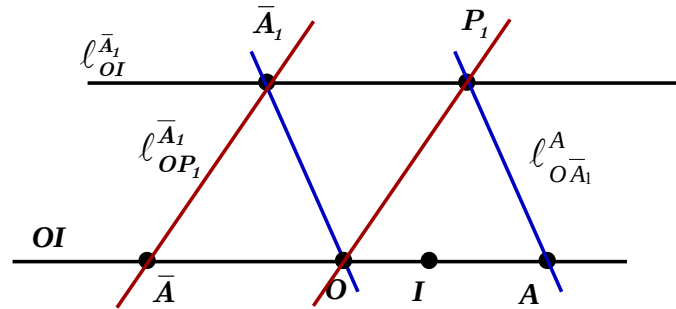


Fig. 12

Pohimet 2.3.1, 2.3.2, 2.3.3, 2.3.4 tregojnë se vlen kjo

TEOREMË 2.3.2. *Grupoidi $(OI, +)$ është grup komutativ (abeljan).*

2.4. SHUMËZIMI I PIKAVE TË NJË DREJTËZE TË PLANIT TË DESARGUT DHE VETI TE SAJ

Le të jetë $\mathcal{D}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ një plan i Desargut. Në drejtëzën e çfarëdoshme $OI \in \mathcal{L}$, përcaktuar nga pikat e ndryshme $O, I \in \mathcal{P}$, krahas veprimit të mbledhjes së pikave, futim tani dhe veprimin e shumëzimit të tyre. Le të jenë A dhe B dy pika të çfarëdoshme të drejtëzës OI . Zgjedhim në planin $\mathcal{D}$ një pike B_1 joincidente me OI , e cila bashkë me pikën I formojnë drejtëzën IB_1 . Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{IB_1}^A$, e cila është e vetme sipas aksiomës A2 dhe prerëse me drejtëzën OB_1 . Pikëprerjen e tyre e shënojmë $P_1 = \ell_{IB_1}^A \cap OB_1$. Ndërtojmë së fundi drejtëzën $\ell_{BB_1}^{P_1}$. Me qenë se BB_1 pret OI në pikën B , atëherë kjo drejtëz, paralele me BB_1 , pret drejtëzën OI në një pikë të vetme C (Fig. 13).

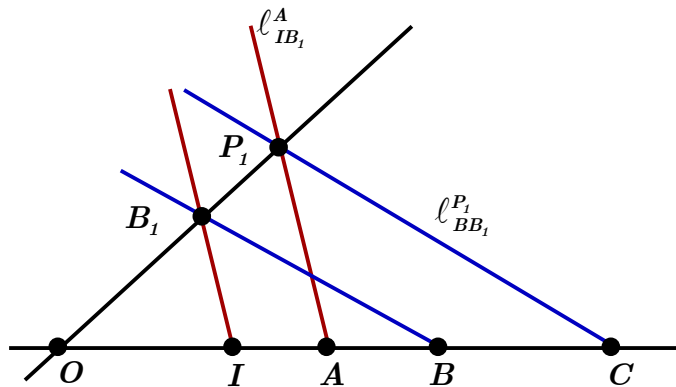


Fig. 13

Procesin e ndërtimit të pikës C , e paraqesim në trajtën e algoritmit

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right] \quad (11)$$

Edhe këtu, në procesin e ndërtimit të pikës C , veç dyshes (A, B) të pikave $A, B \in OI$, është e nevojshme dhe zgjedhja e pikës $B_1 \notin OI$, të cilën përsëri e quajmë *pikë*

ndihmëse të pikës C . Teorema e mëposhtme tregon se zgjedhja e pikës ndihmëse nuk ndikon në pozicionin e pikës C në drejtëzën OI , përcaktuar sipas algoritmit (11).

TEOREMË 2.4.1. *Për çdo dy pika $A, B \in OI$, algoritmi (11) përcakton një pikë të vetme $C \in OI$, e cila nuk varet nga zgjedhja e pikës ndihmëse B_1 .*

Vërtetim. Sipas (11), duke zgjedhur pikën $B_1 \notin OI$ për një çift të dhënë (A, B) pikash të drejtëzës OI , ndërtojmë pikën C . Zgjedhim tani një pikë tjetër B_2 . Atëherë, po sipas (11), ndërtojmë pikën analoge C' , që në këto kushte merr pamjen

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_2} \cap \ell_{OB_2}^A = P_2, \\ 3. \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI = C'. \end{array} \right\} \quad (11')$$

Dallojmë këto katër raste të pozicionit të pikave A, B në lidhje me pikën fikse I të drejtëzës OI .

Rasti I. Në rastin kur $A=B=I$, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (11) kemi

$$P_1 = \ell_{IB_1}^I \cap OB_1 = B_1 \Rightarrow C = \ell_{IB_1}^{B_1} \cap OI = IB_1 \cap OI = I;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (11') kemi

$$P_2 = \ell_{IB_2}^I \cap OB_2 = B_2 \Rightarrow C' = \ell_{IB_2}^{B_2} \cap OI = IB_2 \cap OI = I.$$

Për rrjedhojë marrim $C=C'=I$ (Fig.14.a).

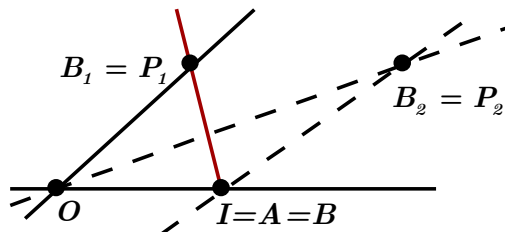


Fig. 14.a

Rasti II. Në rastin kur $A=I \neq B$, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (11) kemi

$$P_1 = \ell_{IB_1}^I \cap OB_1 = B_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{B_1} \cap OI = BB_1 \cap OI = B;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (11') kemi

$$P_2 = \ell_{IB_2}^I \cap OB_2 = B_2 \Rightarrow C = \ell_{BB_2}^{B_2} \cap OI = BB_2 \cap OI = B.$$

Për rrjedhojë në këtë rast marrim $C=C'=B$ (Fig.14.b).

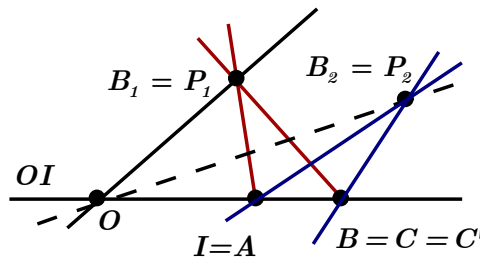


Fig. 14.b

Rasti III. Në rastin kur $A \neq I=B$, situatë është analoge me rastin e dytë, ku rolin e pikës A e ka pika B dhe anasjellash, prandaj në këtë rast kemi $C=C'=A$ (Fig. 14.c).

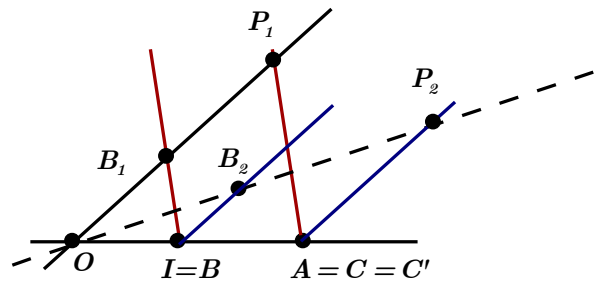


Fig.14.c

Rasti IV. $A \neq B \neq I$. Këtu dallojmë dy nënraste.

a) Në rastin kur pikat I , B_1 , B_2 janë kolineare, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (11) kemi

$$P_1 = \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{B_1} \cap OI;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (11') kemi

$$P_2 = \ell_{IB_2}^A \cap OB_2 \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI.$$

Nga (11) dhe (11') del gjithashtu që, kolineariteti i pikave I, B_1, B_2 sjell kolinearitetin e pikave A, P_1, P_2 . Supozojmë tani që $C \neq C'$ (Fig.14.d).

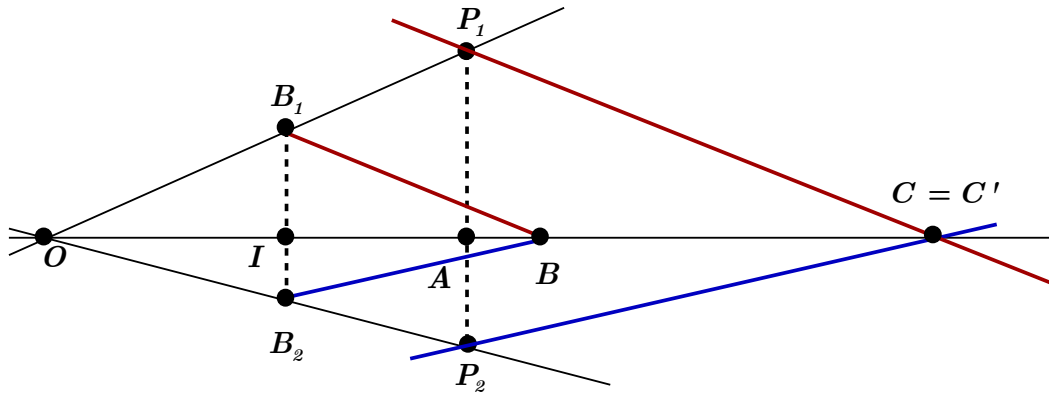


Fig. 14.d

Shqyrtojmë trekulmëshat BB_1B_2 dhe CP_1P_2 . Vemë re se $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Por $C \in \ell_{BB_1}^{P_1} \parallel BB_1$, prandaj $BB_1 \parallel CP_1$. Prej këndeje, nga Teorema afine plane e Desargut (Teorema 2.1.4), rezulton $B_2B \parallel P_2C$. Nga ana tjetër, $C' \in \ell_{BB_2}^{P_2}$, që sjell $P_2C' \parallel B_2B$, e cila është paralele me P_2C . Për rrjedhojë $C' \in P_2C$, që sjell $C=C'$, në kundërshtim me supozimin që $C \neq C'$.

b) Pikat I, B_1, B_2 janë jokolineare.

Këtu dallojmë dy nënraste lidhur me pikën fikse O :

b₁) pikat O, B_1, B_2 janë jokolineare (Fig.14.e); **b₂)** pikat O, B_1, B_2 janë kolineare (Fig.14.f).

Në rastin **b₁)**, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (11) kemi

$$P_1 = \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI;$$

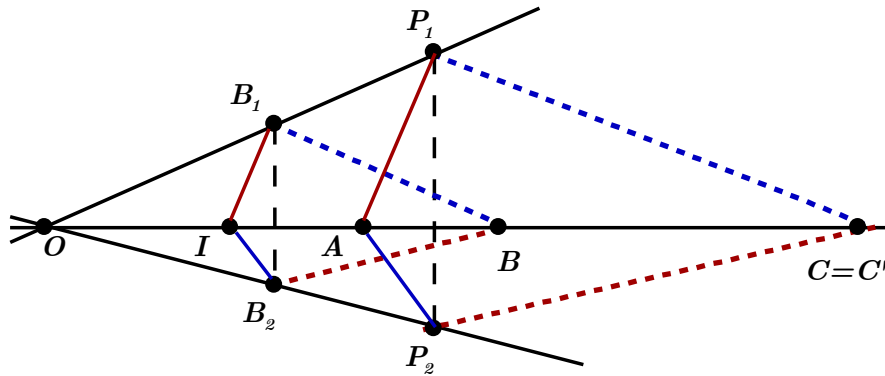


Fig. 14.e

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (11') kemi

$$P_2 = \ell_{IB_2}^A \cap OB_2 \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI.$$

Supozojmë tani që $C \neq C'$. Nga (11) dhe (11') del gjithashtu që, jokolineariteti i pikave I, B_1, B_2 sjell jokolinearitetin e pikave A, P_1, P_2 .

Shqyrtojmë trekulmëshat IB_1B_2 dhe AP_1P_2 . Vemë re se $AP_1 = \ell_{IB_1}^A \parallel IB_1$ dhe $AP_2 = \ell_{IB_2}^A \parallel IB_2$, prandaj nga Teorema afine plane e Desargut, rezulton $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Shqyrtojmë tani trekulmëshat BB_1B_2 dhe CP_1P_2 . Fakti, që $C \in \ell_{BB_1}^{P_1} \parallel BB_1$, sjell $BB_1 \parallel CP_1$. Nga më sipër, kemi edhe $B_1B_2 \parallel P_1P_2$. Prandaj, përsëri nga Teorema afine plane e Desargut, rezulton $B_2B \parallel P_2C$. Nga ana tjetër, $C' \in \ell_{BB_2}^{P_2}$, që sjell $P_2C' \parallel B_2B$. Për rrjedhojë $C' \in P_2C$, që sjell $C=C'$, në kundërshtim me supozimin që $C \neq C'$.

Në rastin b_2), përsëri, nga zgjedhja e pikës B_1 , sipas (11) kemi

$$P_1 = \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 \Rightarrow C = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI;$$

kurse, nga zgjedhja e pikës B_2 , sipas (11') kemi

$$P_2 = \ell_{IB_2}^A \cap OB_2 \Rightarrow C' = \ell_{BB_2}^{P_2} \cap OI.$$

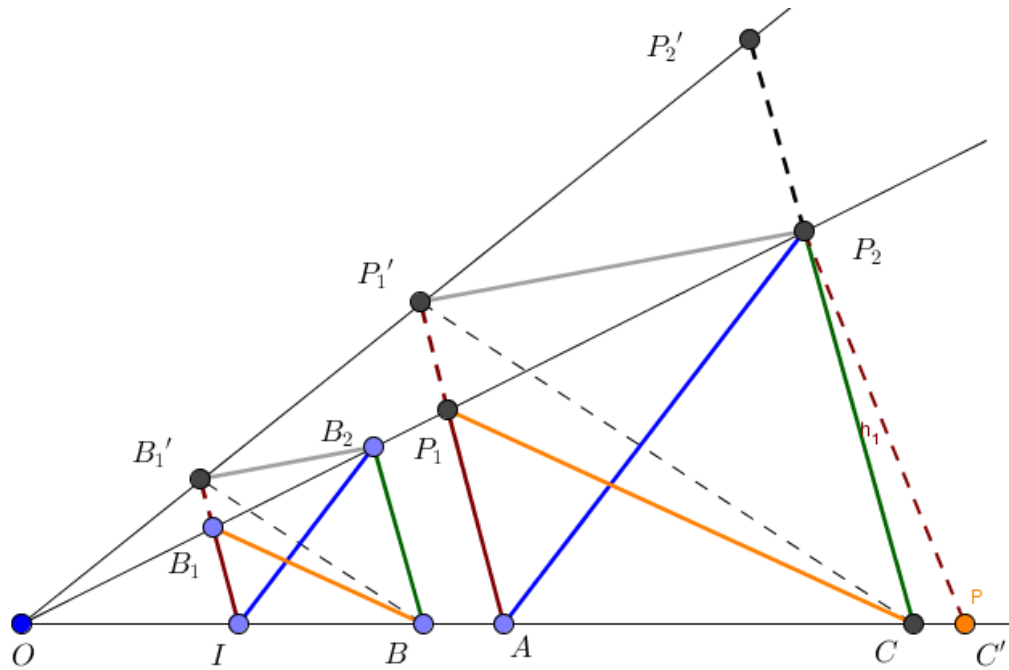


Fig.14.f

Në drejtëzën CP_2 marrim një pikë tjetër P_2' dhe ndërtojmë drejtëzën OP_2' . Shënojmë $B_1' = OP_2' \cap IB_1$ dhe $P_1' = OP_2' \cap AP_1$. Shqyrtojmë trekulmëshat $IB_1'B_2$, $AP_1'P_2$. Kemi: $IB_1' \parallel AP_1'$, $IB_2 \parallel AP_2$, prandaj, nga Teorema afine plane e Desargut, rezulton $B_1'B_2 \parallel P_1'P_2$. Ndërtojmë tani drejtëzat $B_1'B$ dhe $P_1'C$; shqyrtojmë trekulmëshat $B_1'B_2$, CP_1P_1' . Kemi: $IB_1' \parallel AP_1'$, $BB_1 \parallel CP_1$, prandaj, nga Teorema afine plane e Desargut, rezulton $BB_1' \parallel CP_1'$. Shqyrtojmë së fundi trekulmëshat $BB_1'B_2$, $CP_1'P_2$. Kemi: $BB_1' \parallel CP_1'$, $B_1'B_2 \parallel P_1'P_2$, prandaj, nga Teorema afine plane e Desargut, rezulton $BB_2 \parallel CP_2$. Por $BB_2 \parallel C'P_2$, prandaj $C = C'$.

Le të jenë A dhe B dy pika të çfarëdoshme të drejtëzës OI . I shoqërojmë çiftit $(A, B) \in OI \times OI$ pikën $C \in OI$, që përcakton algoritmi (11). Sipas Teoremës së më sipërme, pika C përcaktohet e vetme sipas kësaj mënyre. Përftojme kështu një pasqyrim $OI \times OI \rightarrow OI$.

Përkufizim 2.4.1. Në kushtet e mësipërme, pasqyrimin

$$*: OI \times OI \rightarrow OI,$$

përcaktuar nga $(A, B) \mapsto C$ për çdo $(A, B) \in OI \times OI$ e quajmë shumëzim në OI .

Sipas këtij Përkufizimi, mund të shkruajmë

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ \forall A, B \in OI, 2. \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Leftrightarrow A * B = C. \quad (12)$$

Prej këndeje, del evident pohimi

$$\forall A \in OI, O * A = A * O = O. \quad (13')$$

kurse, sipas rasteve I, II, III të Teoremës 2.4.1, del menjëherë i vërtetë ky

POHIM 2.4.1. Shumëzimi në OI ka element të njëjshëm pikën I :

$$\forall A \in OI, I * A = A * I = A. \quad (13)$$

Vlejnë gjithashtu edhe pohimet e mëposhtme.

POHIMI 2.4.2. Shumëzimi është asociativ në OI :

$$\forall A, B, D \in OI, (A * B) * D = A * (B * D). \quad (14)$$

Vërtetim. Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, D është O , nga (13'), barazimi (14) është evident, kurse në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, D është I , ai del nga (13). Ndalemi në rastin kur $A, B, D \neq O$; $A, B, D \neq I$ dhe $A \neq B \neq D$ (kur të paktën dy pika janë të njëjta, arsyetohet njëjloj).

Ndërtojmë në fillim prodhimin $(A * B) * D$. Në këtë rast (Fig. 15), sipas (12), për $A * B$

lidhur me pikën ndihmëse për shumëzimin kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. OB_1 \cap \ell_{IB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow A * B = \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI, \quad (15)$$

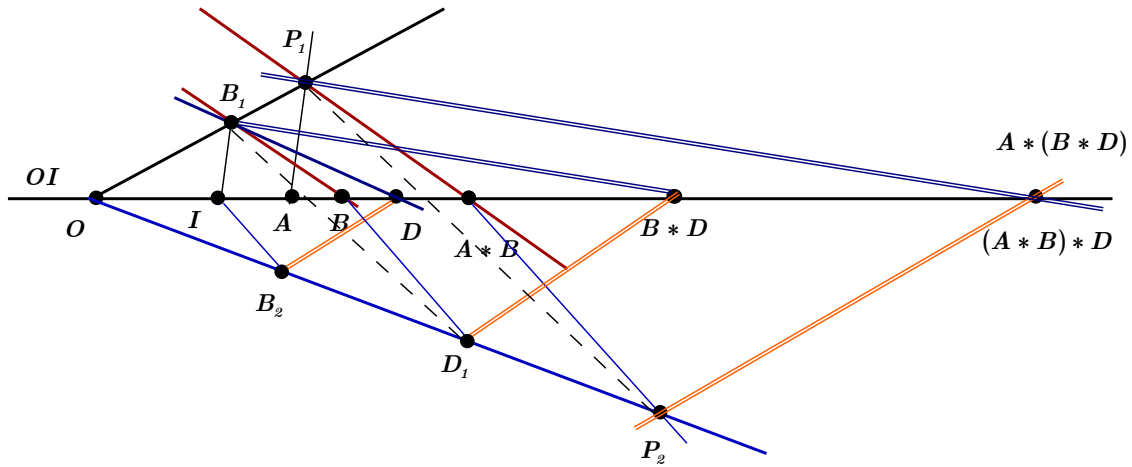


Fig.15.

prej nga marrim

$$\begin{cases} IB_1 \parallel AP_1 \\ BB_1 \parallel (A*B)P_1 \end{cases} \quad (15')$$

Zgjedhim pikën B_2 (Fig. 15) si pikë ndihmëse për ndërtimin e prodhimit $(A*B)*D$.

Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{IB_2}^{A*B}$ dhe shënojmë $P_2 = \ell_{IB_2}^{A*B} \cap OB_2$. Atëherë, sipas (12) kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_2 \notin OI, \\ 2. OB_2 \cap \ell_{IB_2}^{A*B} = P_2, \\ 3. \ell_{DB_2}^{P_2} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow (A*B)*D = \ell_{DB_2}^{P_2} \cap OI, \quad (16)$$

prej nga marrim

$$\begin{cases} IB_2 \parallel (A*B)P_2 \\ DB_2 \parallel [(A*B)*D]P_2 \end{cases} \quad (16')$$

Ndërtojmë tani prodhimin $A*(B*D)$. Zgjedhim si pikë ndihmëse për prodhimin $B*D$

pikën B_2 . Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{IB_2}^B$ dhe shënojmë $D_1 = \ell_{IB_2}^B \cap OB_2$. Atëherë, sipas (12) kemi

$$B*D = \ell_{DB_2}^{D_1} \cap OI. \quad (17)$$

Prej këndeje marrim

$$\begin{cases} IB_2 \parallel BD_1 \\ DB_2 \parallel (B * D)D_1 \end{cases} \quad (17')$$

Zgjedhim pikën B_1 (Fig. 15) si pikë ndihmëse për prodhimin $A*(B*D)$. Ndërtojmë drejtëzën $\ell_{(B*D)B_1}^P$. Atëherë, sipas (12) kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. OB_2 \cap \ell_{IB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{(B*D)B_1}^P \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow A*(B*D) = \ell_{(B*D)B_1}^P \cap OI, \quad (18)$$

prej nga marrim

$$\begin{cases} IB_1 \parallel AP_1 \\ (B*D)B_1 \parallel [A*(B*D)]P_1 \end{cases} \quad (18')$$

Ndërkaq, nga (16') dhe (17'), kemi

$$\begin{cases} BD_1 \parallel (A*B)P_2 \\ (B*D)D_1 \parallel [(A*B)*D]P_2 \end{cases} \quad (19)$$

Shqyrtojmë trikulmëshat BB_1D_1 dhe $(A*B)P_1P_2$, për të cilët, nga (15') kemi $BB_1 \parallel (A*B)P_1$ dhe nga (19) kemi $BD_1 \parallel (A*B)P_2$. Prandaj, nga Teoema afine e Desargut kemi $B_1D_1 \parallel P_1P_2$.

Shqyrtojmë më tej trikulmëshat $(B*D)B_1D_1$ dhe $[(A*B)*D]P_1P_2$, për të cilët, nga më sipër kemi $B_1D_1 \parallel P_1P_2$ dhe, nga (19) kemi $(B*D)D_1 \parallel [(A*B)*D]P_2$. Prandaj, nga Teorema afine e Desargut rezulton $(B*D)B_1 \parallel [(A*B)*D]P_1$. Por, nga (18') kemi gjithashtu $(B*D)B_1 \parallel [A*(B*D)]P_1$, që sjell $[(A*B)*D]P_1 \parallel [A*(B*D)]P_1$, dhe meqënëse pikat $(A*B)*D, A*(B*D) \in OI$, marrim

$$(A*B)*D = A*(B*D).$$

POHIM 2.4.3. Për çdo pikë jo O në OI ekziston e anasjella e djathtë e saj sipas shumëzimit:

$$\forall A \in OI - \{O\}, \quad \exists A^{-1} \in OI, \quad A * A^{-1} = I.$$

POHIM 2.4.4. *Shumëzimi është shpërndarës lidhur me mbledhjen në OI :*

$$\forall A, B, D \in OI, \begin{cases} (i). (A+B)*D = A*D + B*D \\ (ii). A*(B+D) = A*D + A*B \end{cases} \quad (21)$$

Vërtetim. (i) Në rastin kur të paktën njera nga pikat A, B, D është O , nga (13'), barazimi (i) është evident. Ndalemi në rastin kur $A, B, D \neq O$ dhe $A \neq B \neq D$ (kur të paktën dy pika janë të njëjta, arsyetohet njëjloj). Dallojmë dy nënraste: a) të paktën njera nga pikat A, B, D është I ; b) $A, B, D \neq I$.

a) Kur $D=I$, sipas (13), barazimi (i) është evident. Le të jetë tani $A=I$ (rasti $B=I$ sillet në rastin $A=I$, në bazë të vetisë komutative të mbledhjes në OI). Meqenëse $A \neq B \neq D$, kemi $B \neq I$ dhe $D \neq I$ (Fig.17). Barazimi (i), në këtë rast ka pamjen $(I+B)*D = D + B*D$.

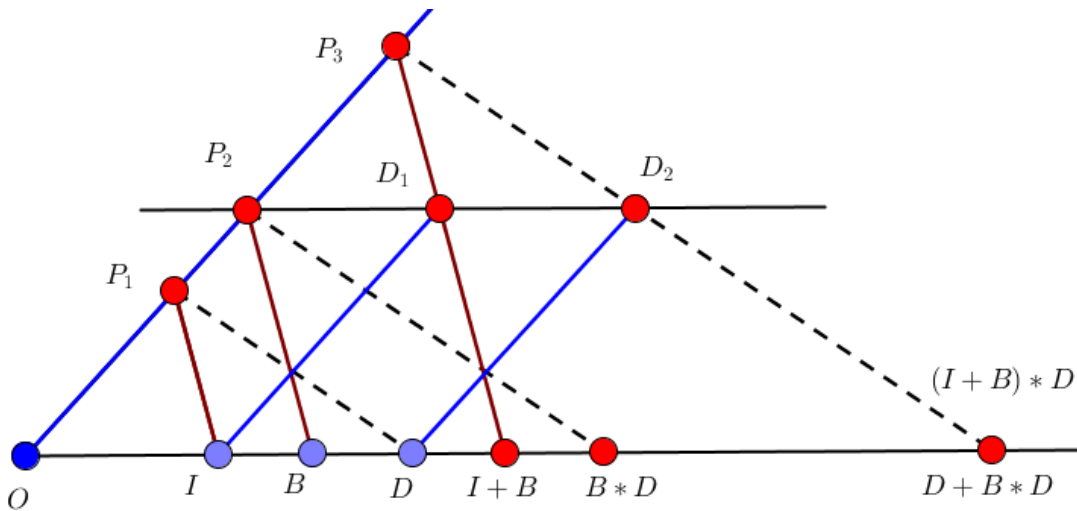


Fig.17.

Në anën e majtë të këtij barazimit është prodhimi $(I+B)*D$. Për ndërtimin e këtij prodhimi, ndërtojmë së pari prodhimin $B*D$, duke marrë pikë ndihmëse të tij pikën $P_1 \notin OI$. Shënojmë $P_2 = OP_1 \cap \ell_{IP_1}^B$. Atëherë, sipas algoritmit (11), ku në rolin e A është B , në rolin e B është D , në rolin e B_1 është P_1 , në rolin e P_1 është P_2 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. P_1 \notin OI, \\ 2. OP_1 \cap \ell_{IP_1}^B = P_2, \\ 3. \ell_{DP_1}^{P_2} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow B * D = \ell_{DP_1}^{P_2} \cap OI, \quad (22)$$

prej nga marrim

$$\left\{ \begin{array}{l} IP_1 \parallel BP_2 \\ DP_1 \parallel (B * D)P_2 \end{array} \right. \quad (22')$$

Ndërtojmë me tej shumën $I+B$, duke marrë pikë ndihmëse të saj pikën $P_2 \notin OI$.

Shënojmë $D_1 = \ell_{OI}^{P_2} \cap \ell_{OP_2}^I$. Atëherë, sipas algoritmit (3), ku në rolin e A është I , në rolin e B_1 është P_1 , në rolin e P_1 është P_2 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. P_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{P_2} \cap \ell_{OP_2}^I = D_1, \\ 3. \ell_{BP_2}^{D_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow I + B = \ell_{BP_2}^{D_1} \cap OI. \quad (23)$$

Prej këndeje marrim

$$\left\{ \begin{array}{l} OP_2 \parallel ID_1, \\ BP_2 \parallel (I + B)D_1. \end{array} \right. \quad (23')$$

Ndërtojmë së fundi prodhimin $(I+B)*D$, duke marrë pikë ndihmëse të tij pikën $P_1 \notin OI$. Shënojmë $P_3 = OP_1 \cap \ell_{IP_1}^{(I+B)}$. Atëherë, sipas algoritmit (11), ku në rolin e A është $I+B$, në rolin e B është D , në rolin e B_1 është P_1 , në rolin e P_1 është P_3 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. P_1 \notin OI, \\ 2. OP_1 \cap \ell_{IP_1}^{(I+B)} = P_3, \\ 3. \ell_{DP_1}^{P_3} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow (I + B) * D = \ell_{DP_1}^{P_3} \cap OI. \quad (24)$$

Prej këndeje marrim

$$\left\{ \begin{array}{l} IP_1 \parallel (I + B)P_3 \\ DP_1 \parallel [(I + B) * D]P_3 \end{array} \right. \quad (24')$$

Ndërtojmë tani anën e djathtë $D+B*D$ të barazimit, duke marrë pikë ndihmëse të shumës pikën $P_2 \notin OI$. Shënojmë $D_2 = \ell_{OI}^{P_2} \cap \ell_{OP_2}^D$. Atëherë, sipas algoritmit (3), ku në rolin e A është D , në rolin e B është $B*D$, në rolin e B_1 është P_2 , në rolin e P_1 është D_2 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. P_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{P_2} \cap \ell_{OP_2}^D = D_2, \\ 3. \ell_{(B*D)P_2}^{D_2} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow D+B*D = \ell_{(B*D)P_2}^{D_2} \cap OI. \quad (25)$$

Prej këndeje marrim

$$\left\{ \begin{array}{l} OP_2 \parallel DD_2, \\ (B*D)P_2 \parallel [D+(B*D)]D_2 \end{array} \right. \quad (25')$$

Nga (22'), (23') dhe (24') kemi që $IP_1 \parallel BP_2 \parallel (I+B)D_1 \parallel (I+B)P_3$, që tregon se pikat $(I+B)$, D_1 dhe P_3 janë kolineare.

Vemë re se trikulmëshat IDP_1 dhe $D_1D_2P_3$ i kanë kulmet përkatëse në drejtëzat paralele $ID_1 \parallel P_1P_2 \parallel DD_2$ dhe plotësojnë kushtet e Teoremës afine të Desargut (TAD), prandaj

$$\left[\begin{array}{l} IP_1 \parallel D_1P_3 \\ ID \parallel D_1D_2 \end{array} \right] \xrightarrow{TAD} DP_1 \parallel D_2P_3. \quad (26)$$

Por, nga (22') dhe (25'), kemi $DP_1 \parallel (D+B*D)D_2$. Meqënëse paralelizmi është relacion ekuivalence, nga (26), kemi $D_2P_3 \parallel (D+B*D)D_2$. Pra, pikat P_3 , D_2 dhe $(D+B*D)$ janë kolineare. Nga (24') kemi $DP_1 \parallel [(I+B)*D]P_3$, që sjell $(D+B*D)P_3 \parallel [(I+B)*D]P_3$. Për rrjedhojë rezulton i vërtetë barazimi

$$(I+B)*D = D+B*D.$$

b) $A, B, D \neq I$, ku $A \neq B \neq D$ (Fig.18).



D -sinas algoritmit (11), lasnärelin A ähtä B -närelin B .

D - duka marmu nika adikmase tã sei nikrã. $D \in OB$

Shënojmë $D_2 = \ell_{\alpha}^{D_2} \cap \ell_{\alpha}^A$. Atëherë, sipas algoritmit (3), ku në rolin e B , është D_2 ,

në rolin e P_1 është D_3 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. D_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{D_2} \cap \ell_{OD_2}^A = D_3, \\ 3. \ell_{D_2B}^{D_3} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow A + B = \ell_{D_2B}^{D_3} \cap OI. \quad (29)$$

Prej nga

$$\left\{ \begin{array}{l} D_2D_3 \parallel OI \\ AD_3 \parallel OD_2 \\ BD_2 \parallel (A+B)D_3 \end{array} \right. \quad (29')$$

Ndërtojmë së fundi prodhimin $(A+B)*D$, duke marrë pikë ndihmëse të tij pikën $B_1 \notin OI$. Shënojmë $D_5 = OB_1 \cap \ell_{IB_1}^{(A+B)}$. Atëherë, sipas algoritmit (11), ku në rolin e A është $A+B$, në rolin e B është D , në rolin e P_1 është D_5 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. OB_1 \cap \ell_{IB_1}^{(A+B)} = D_5, \\ 3. \ell_{DB_1}^{D_5} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow (A+B)*D = \ell_{DB_1}^{D_5} \cap OI. \quad (30)$$

Prej nga

$$\left\{ \begin{array}{l} IB_1 \parallel (A+B)D_5 \\ DB_1 \parallel [(A+B)*D]D_5 \end{array} \right. \quad (30')$$

Ndërtojmë tani anën e djathtë $A*D+B*D$ të barazimit (i), duke marrë pikë ndihmëse të shumës pikën $D_2 \notin OI$. Shënojmë $D_4 = \ell_{OI}^{D_2} \cap \ell_{OD_2}^{A*D}$. Atëherë, sipas algoritmit (3), ku në rolin e A është $A*D$, në rolin e B është $B*D$, në rolin e B_1 është D_2 , në rolin e P_1 është D_4 , kemi

$$\left. \begin{array}{l} 1. D_2 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{D_2} \cap \ell_{OD_2}^{A*D} = D_4, \\ 3. \ell_{D_2(B*D)}^{D_4} \cap OI = C. \end{array} \right\} \Rightarrow A*D + B*D = \ell_{D_2(B*D)}^{D_4} \cap OI. \quad (31)$$

Prej këndeje marrim

$$\begin{cases} OD_2 \parallel (A * D) D_4 \\ (B * D) D_2 \parallel (A * D + B * D) D_4 \end{cases} \quad (31')$$

Nga (28'), (29') dhe (30') kemi

$$IB_1 \parallel AD_1 \parallel BD_2 \parallel (A + B) D_5 \parallel (A + B) D_3, \quad (32)$$

që tregon se pikat $A+B$, D_3 , D_5 , janë kolineare. Për rrjedhojë $D_3 \in (A+B) D_5$, që sjell

$$AD_1 \parallel D_3 D_5 \quad (32').$$

Po ashtu, nga (28'), (31') dhe (30'), del që

$$DB_1 \parallel (A * D) D_1 \parallel (B * D) D_2 \parallel [(A + B) * D] D_5 \parallel (A * D + B * D) D_4 \quad (33)$$

Vëmë re se trikulmëshat $A(A * D) D_1$ dhe $D_3 D_4 D_5$ plotësojnë kushtet e aksiomës D1, pasi, nga (29') dhe (31'), kemi që:

$$D_1 D_5 \parallel AD_3 \parallel (A * D) D_4. \quad (34)$$

Prandaj nga (29') dhe (32') kemi

$$\left[\begin{array}{l} A(A * D) \parallel D_3 D_4 \\ AD_1 \parallel D_3 D_5 \end{array} \right] \xrightarrow{D1} (A * D) D_1 \parallel D_4 D_5 \quad (35)$$

Ndërkaq, nga (33) dhe (35) del që edhe pikat $(A+B)*D$, D_4 , D_5 janë kolineare. Për rrjedhojë $D_4 \in [(A+B)*D] D_5 \parallel DB_1$, që sjell

$$[(A + B) * D] D_4 \parallel (A * D + B * D) D_4,$$

d. m. th.

$$(A + B) * D = A * D + B * D.$$

(ii) Vërtetimi i barazimit (ii) bëhet në mënyrë analoge. Megjithatë, po paraqesim një vërtetim tjetër të tij, duke pranuar që, ngjashmërisht me vërtetimin e barazimit $(I+B) * D = D+B*D$ më sipër, bëhet edhe vërtetimi i barazimit

$$A*(I+D)=A+A*D \quad (36)$$

në rastin kur $A, B, D \neq O$ dhe $A \neq B \neq D$. Në këtë rast, meqenëse $B \neq O$, nga (20) ekziston B^{-1} . Atëherë :

$$\begin{aligned}
 [A * (B + D)] * B^{-1} &\stackrel{(14)}{=} A * [(B + D) * B^{-1}] \\
 &\stackrel{(i)}{=} A * (B * B^{-1} + D * B^{-1}) \\
 &\stackrel{(20)}{=} A * (I + D * B^{-1}) \\
 &\stackrel{(36)}{=} A + A * (D * B^{-1}) \\
 &\stackrel{(13),(14)}{=} A * I + (A * D) * B^{-1} \\
 &\stackrel{(20)}{=} A * (B * B^{-1}) + (A * D) * B^{-1} \\
 &\stackrel{(14)}{=} (A * B) * B^{-1} + (A * D) * B^{-1} \\
 &\stackrel{(i)}{=} (A * B + A * D) * B^{-1}.
 \end{aligned}$$

Prej këndeje kemi

$$[A * (B + D)] * B^{-1} = (A * B + A * D) * B^{-1} \Rightarrow A * (B + D) = A * B + A * D.$$

Duke patur parasysh Teoremën 2.3.2 dhe Pohimet 2.4.1, 2.4.2, 2.4.4 përftojmë këtë

TEOREMË 2.4.3. Në një plan afin të Desargut algjebra $(OI, +, *)$ është unazë e njësishe.

TEOREME 2.4.4. Në një plan afin të Desargut algjebra $(OI, +, *)$ është trup.

Vërtetim. Meqenëse $I \neq O$, në unazën OI ka të paktën një element jo zero. Atëherë, sipas Përkufizimit të një trupi [2], [82], [83], [84], kërkohet të vërtetojmë sa më poshtë:

1. $OI^* = OI - \{O\}$ është nënbashkësi e qëndrueshme e OI në lidhje me shumëzimin .

Me të vërtetë, në qoftë se pikat $A, B \in OI^*$, atëherë edhe $A * B \in OI^*$. E zëmë se $A * B = O$. Meqenëse $A \neq O$, nga (14) dhe (20) kemi

$$B = I * B = (A^{-1} * A) * B = A^{-1} * (A * B) = A^{-1} * O = O.$$

Kjo bie në kundërshtim me kushtin $B \neq O$.

2. Grupoidi $(OI^*, *)$ është grup.

Me të vërtetë, nga 1, ai është nënstrukturë e $(OI, *)$, e cila, sipas Teoremës 2.4.2 është grup. Veç kësaj, po nga 1 dhe nga (20) kemi $\forall A, B \in OI^*, A * B^{-1} \in OI^*$, që tregon [1], [67], [68] se $(OI^*, *)$ është nëngrup i grupit $(OI, *)$, pra është vet grup.

KREU 3

NDËRTIMI I NJË TRUPI MBI NJË PLAN AFIN

Në këtë Kre do të shqyrtojmë fillimisht kolineacionet e një plani afín si bijeksione të bashkësisë së pikave të tij mbi veten, që ruajnë drejtëzat. Më pas do të veçojmë prej tyre ato kolineacione, që ruajnë paralelizmin e drejtëzave, të cilat do t'i quajmë zgjerime dhe nga zgjerimet do të veçojmë të ashtuquajturat zhvendosje. Do të studiojmë pastaj grupin $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimet të një plani afín lidhur me përbërjen e tyre dhe grupin komutativ $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zhvendosjeve lidhur me përbërjen. Për më tepër tregojmë që grupi $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ i zhvendosjeve të planit afín $\mathcal{A}$ është nëngrup normal i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të atij plani. Studiojmë më tej bashkësinë $(Zhv_{\mathcal{A}})^{Zhv_{\mathcal{A}}}$ të pasqyrimeve të zhvendosjeve të një plani afín $\mathcal{A}$ mbi veten. Do të ndalemi tek endomorfizmat gjurmëruajtëse të grupit $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ mbi veten.

Duke e shënuar këtë bashkësi me $\mathbb{k}_{\mathcal{A}}$ dhe, duke e pajisur atë, krahas përbërjes $\circ$ edhe me një veprim tjetër dysh të quajtur mbledhje, arrijmë së fundi të ndërtojmë algjebren $(\mathbb{k}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$, për të cilën tregojmë që është një trup.

3.1. GRUPI I KOLINEACIONEVE TË NJË PLANI AFIN

Përkufizim 3.1.1. Le të jetë $\mathcal{A}=(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$ një plan afin dhe $\mathcal{S} = \{\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P} \mid \text{ku } \psi \text{ - është bijeksion}\}$ bashkësia e bijeksioneve të bashkësisë së pikave $\mathcal{P}$ mbi veten. Kolineacion i planit afin $\mathcal{A}$ quhet një bijeksion $\psi \in \mathcal{S}$, i tillë që

$$\forall \ell \in \mathcal{L}, \psi(\ell) \in \mathcal{L} \quad (1)$$

Ndryshe, një kolineacion i planit afin $\mathcal{A}$ është një bijeksion i $\mathcal{P}$ -së mbi veten, që ruan drejtëzat.

Dihet që bashkësia e bijeksioneve të një bashkësie mbi veten është grup lidhur me veprimin dysh $\circ$ të përbërjes në të, i cili njihet si *grupi total* apo *grupi simetrik* [1], [31], [32], [38], [63], [65], [66],[67],[70], [71].

Në një kolineacion ψ të një plani afin shembëllimin $\psi(P)$ të një pike P të planit shpesh e shënojmë shkurt P' .

POHIM 3.1.1. Çdo bijeksion i bashkësisë së pikave $\mathcal{P}$ mbi veten të planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një kolineacion i tij.

Vërtetim. Le të jetë $\psi : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ një bijeksion dhe ℓ një drejtëz nga $\mathcal{L}$. Nga Pohimi 1.2.3, ℓ është incidente me dy pika të ndryshme $P, Q \in \mathcal{P}$, të cilat bijeksioni ψ i çon në dy pika $P' = \psi(P)$ dhe $Q' = \psi(Q)$, përsëri të ndryshme. Nga aksioma A1 këto pika përcaktojnë një drejtëz të vetme $P'Q' \in \mathcal{L}$, d. m. th., $P'Q' = \psi(PQ) = \psi(\ell) \in \mathcal{L}$.

RRJEDHIM. Bashkësia e kolineacioneve $Kol_{\mathcal{A}}$ e planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ formon grup simetrik në lidhje me përbërjen $\circ$, d. m. th. $(Kol_{\mathcal{A}}, \circ)$ është grup simetrik.

Është e qartë se bijeksioni identik $id_{\mathcal{P}} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ është një kolineacion i planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, të cilin e quajmë kolineacioni identik i $\mathcal{A}$. Në këtë kolineacion, çdo pikë e $\mathcal{P}$ kalon në vetvete, po ashtu dhe çdo drejtëz e $\mathcal{L}$ kalon në vetvete.

Përkufizim 3.1.2. Një pike P e planit afin $\mathcal{A}$ quhet pikë e veçantë e tij lidhur me një kolineacionin δ , në qoftë se përputhet me shembëllimin e vetë $\delta(P)$, shkurt kur

$$P = \delta(P).$$

Sipas këtij përkufizimi, kemi këtë

POHIM 3.1.2. *Çdo pikë e një plani afín është pikë e veçantë lidhur me kolineacionin identik të tij.*

3.2. GRUPI I ZGJERIMEVE TË NJË PLANI AFÍN

Përkufizim 3.2.1. [15], [28] *Zgjerim i një plani afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ quhet një kolineacion δ i tij i tillë që*

$$\forall P \neq Q \in \mathcal{P}, \delta(PQ) \parallel PQ \quad (2)$$

Sipas aksiomës A1 të Përkufizimit të planit afín, drejtëzën që kalon nëpër dy pika të ndryshme P, Q e kemi shënuar PQ . Nga fakti që zgjerimi δ është bijeksion vlen njëvlerësia

$$P \neq Q \Leftrightarrow \delta(P) \neq \delta(Q), \quad (3)$$

prandaj drejtëza $\delta(PQ)$ shkruhet edhe $\delta(P)\delta(Q)$ dhe pohimi (2), në këto rrethana, merr pamjen

$$\forall P \neq Q \in \mathcal{P}, \delta(P)\delta(Q) \parallel PQ \quad (2')$$

Kështu që përkufizimin e zgjerimit të një plani afín mund ta formulojmë dhe në trajtën: *Zgjerim i një plani afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, quhet një kolineacion δ i tij, që për çdo dy pika të ndryshme P, Q , nëse $P'=\delta(P)$ dhe $Q'=\delta(Q)$, atëherë drejtëza $P'Q'$ është paralele me drejtëzën PQ .*

Është e qartë që kolineacioni identik $id_{\mathcal{P}}$ i një plani afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ është një zgjerim i tij, i cili quhet *zgjerimi identik* i tij.

Ndërkaq, duke qenë bijeksion një zgjerim δ i një plani afín, i anasjelli i tij δ^{-1} është gjithashtu bijeksion. Është zgjerim i atij plani afín bijeksioni δ^{-1} ? Sipas (3), tregohet lehtë që është i vërtetë ky

POHIM 3.2.1. *Bijeksioni i anasjellë δ^{-1} i një zgjerimi δ të një plani afín është gjithashtu një zgjerim i atij plani.*

POHIM 3.2.2. *Përbërja e dy zgjerimeve të një plani afín është përsëri një zgjerim i tij.*

Vërtetim. Le të jenë δ_1 dhe δ_2 dy zgjerime të planit afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Për çdo dy pika të planit, sipas (3), kemi:

dhe

Nga njëvlerësia e parë , sipas (2'), kemi:

kurse nga e dyta kemi

Sipas Pohimit 1.2.1, lidhja e paralelizmit në $\mathcal{A}$ është lidhje ekuivalence, prandaj nga vetia kalimtare e saj marrim:

ndryshe,

Si përfundim,

që, sipas (2'), tregon se përbërja $\delta_2 \circ \delta_1$ e zgjerimeve δ_1, δ_2 të planit $\mathcal{A}$ është gjithashtu zgjerim i tij (Fig.1)¹.



¹ Figurat këtu ndihmojnë sa për të patur një përfytyrim

Le të jetë $Zgj_{\mathcal{A}} = \{\delta \in Kol_{\mathcal{A}} \mid \delta \text{ është zgjerim i } \mathcal{A}\}$ bashkësia e zgjerimeve të planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$. Si e tillë ajo është nënbashkësi e kolineacioneve $Kol_{\mathcal{A}}$. Pohimi 3.2.2 tregon se $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ është nënstrukturë e grupit simetrik $(Kol_{\mathcal{A}}, \circ)$ të kolineacioneve të planit afin $\mathcal{A}$. Pohimi 3.2.1 tregon se kjo nënstrukturë është nëngrup i grupit $(Kol_{\mathcal{A}}, \circ)$, [2], [33], [35], [36], [37], [38], [64], [68], [70], [71]. Përftohet në këtë mënyrë kjo

TEOREMË 3.2.1. Bashkësia $Zgj_{\mathcal{A}}$ e zgjerimeve të një plani afin $\mathcal{A}$ formon grup në lidhje me përbërjen $\circ$.

Përkufizim 3.2.2. Le të jetë δ një zgjerim i planit afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, P një pikë e tij. Drejtëza që kalon nga P dhe $\delta(P)$ quhet gjurmë e pikës P lidhur me zgjerimin δ .

Në qoftë se $P \neq \delta(P)$, atëherë, sipas A1, gjurma $P\delta(P)$ është e vetme. Edhe, kur $P = \delta(P)$, gjurmën e pikës P lidhur me δ do ta shënojmë $P\delta(P)$. Në këtë rast gjurma $P\delta(P)$ nuk është e vetme, mbasi, sipas Pohimit 1.2.4, pika P ka të paktën tre gjurmë lidhur me zgjerimin δ .

TEOREMË 3.2.2. Për një pikë P të një plani afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, jo të veçantë lidhur me një zgjerim δ të tij, vlen pohimi

$$\forall Q \in \mathcal{P} - \{P\}, Q \in P\delta(P) \Rightarrow \delta(Q) \in P\delta(P).$$

Ndryshe, çdo pikë e një gjurme të një pike jo të veçantë të një plani afin lidhur me një zgjerim të tij e ka shembëllimin e vet lidhur me atë zgjerim po në atë gjurmë.

Vërtetim. Meqenëse $Q \neq P$ dhe δ është zgjerim i planit $\mathcal{A}$, atëherë, sipas (2), $PQ \parallel \delta(P)\delta(Q)$. Nga kushti, $Q \in P\delta(P)$, që sjell $Q, P, \delta(P) \in PQ$. Nga paralelizmi i drejtëzave $PQ, \delta(P)\delta(Q)$ dhe nga fakti që pika $\delta(P)$ është pikë e përbashkët e tyre, rezulton

$$PQ = \delta(P)\delta(Q),$$

që sjell

$$\delta(Q) \in PQ = P\delta(P).$$

Formulojmë tani një teoremë me karakter konstruktiv të një zgjerimi për një plan afin.

Faktin, që një drejtëz ℓ e një plani afin kalon nga një pikë P e tij dhe është paralele me një drejtëz m të tij, e shënojmë ℓ_m^P .

TEOREMË 3.2.3.[28] *Në qoftë se për dy pika të ndryshme të caktuara P, Q të një plani afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, janë përcaktuar shëmbëllimet e tyre $P'=\delta(P)$ dhe $Q'=\delta(Q)$ sipas një zgjerimi $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të tij, atëherë shëmbëllimi $R'=\delta(R)$ i një pike tjetër $R \in \mathcal{P} - \{P, Q\}$ përcaktohet si më poshtë:*

$$R \notin PQ \Rightarrow \delta(R) = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'},$$

$$R \in PQ \Rightarrow \exists S \in \mathcal{P}, S \notin PQ, \delta(R) = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RS}^{S'}.$$

Vërtetim. Shqyrtojmë rastin e parë, kur pika R nuk është incidente me drejtëzën PQ : $R \notin PQ$. Dallojmë tre nënraste.

a) R nuk është incidente me asnjërën nga gjurmët PP' dhe QQ' . Në këtë rast kemi $P \neq P'$ dhe $Q \neq Q'$, mbasi, nëqoftë se pranojmë që p.sh. $Q=Q'$, atëherë $RQ=RQ'$ dhe, nga (2), $R'Q' \parallel RQ$. Prej këndeje del që:

$$R'Q' \parallel RQ \stackrel{A1}{\Rightarrow} R'Q' = RQ' = RQ \Rightarrow R \in R'Q',$$

në kundërshtim me kushtin.

Ndërtojmë në P' drejtëzën $\ell_{RP}^{P'}$, që është paralele me RP (Fig.2.a). Nga (2), $R'P' \parallel RP$.

Prej këndeje, nga aksioma **A2** e planit afin del që $\ell_{RP}^{P'} = R'P'$. Për rrjedhojë $R' \in \ell_{RP}^{P'}$.

Ndërtojmë tani në Q' drejtëzën $\ell_{RQ}^{Q'}$, që është paralele me RQ .

Njëlloj si më sipër del që $R' \in \ell_{RQ}^{Q'}$. Pra,

$$R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'}.$$

Rezulton në këtë mënyrë i vërtetë pohimi

$$\forall R \in \mathcal{P} - \{P, Q\}, R \notin PQ \Rightarrow R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'}, \quad (4)$$

që tregon se $R'=\delta(R)$ përcaktohet si pikëprerje e drejtëzave:

$$\ell_{RP}^{P'} = \delta(RP) \text{ dhe } \ell_{RQ}^{Q'} = \delta(RQ).$$

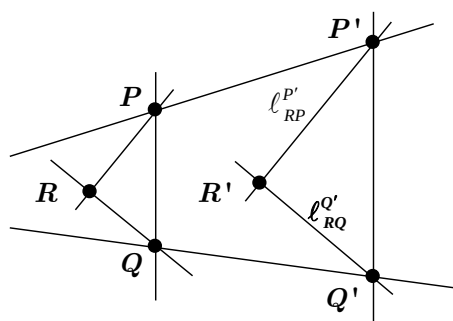


Fig.2.a.

b) R është incidente me njerën nga gjurmët PP' , QQ' , konkretisht me të parën (Fig.2.b). Nga (2), $R'P' \parallel RP$, që sjell $R' \in RP = \ell_{RP}^{P'}$. Si në pikën a) tregohet se $R' \in \ell_{RQ}^{Q'}$. Për rrjedhojë kemi $R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'}$.

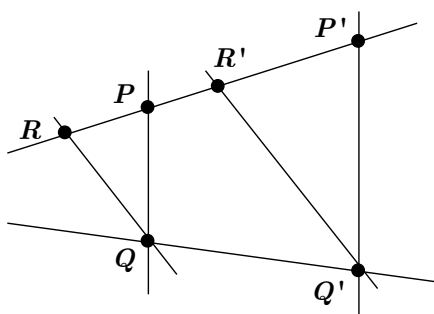


Fig.2.b

c) R është incidente me të dyja gjurmët PP' , QQ' . Me qenë se $R \notin PQ$, atëherë PP' , QQ' janë të ndryshme, prandaj, sipas A1, ato priten në pikën R : $R = PP' \cap QQ'$ (Fig.2.c). Si në pikën b) tregohet se

$$R \in PP' \Rightarrow R' \in RP = \ell_{RP}^{P'}$$

dhe

$$R \in QQ' \Rightarrow R' \in RQ = \ell_{RQ}^{Q'},$$

prandaj

$$R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'} = RP \cap RQ = R. \quad (*)$$

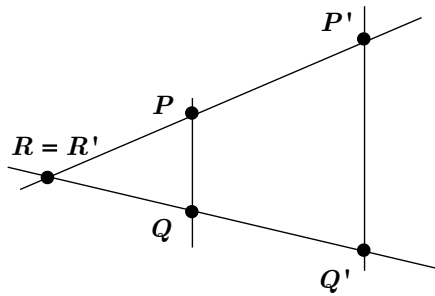


Fig.2.c

Shqyrtojmë tani rastin tjetër, kur pika R është incidente me drejtëzën PQ : $R \in PQ$. Sipas **A3**, në planin afín ka një pikë S jo incidente me PQ (Fig.3). Është e qartë se $R \notin PS$ (në të kundërt PS dhe PQ do të përputheshin sipas aksiomës **A1**, se do të kalonin nga dy pika të ndryshme P e R , gjë që do të sillte në përfundimin e gabuar se $S \in PQ$).

Meqënëse $S \notin PQ$, sipas (4), ndërtohet $S' = \ell_{SP}^{P'} \cap \ell_{SQ}^{Q'}$, $\delta(S) = S'$. Por edhe $R \notin PS$, prandaj sipas (4) ndërtohet më tej edhe $R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RS}^{S'}$. Përmbledhtas ndërtimin e pikës $R' = \delta(R)$ në këto kushte e paraqesim në trajtën

$$\forall R \in \mathcal{P} - \{P, Q\}, R \in PQ \Rightarrow \exists S \notin PQ, S' = \ell_{SP}^{P'} \cap \ell_{SQ}^{Q'} \text{ dhe } R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RS}^{S'} \quad (5)$$

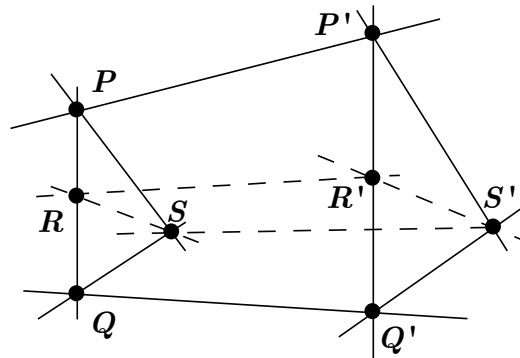


Fig.3.

Është e qartë se, kur gjurmët $P\delta(P)$, $Q\delta(Q)$ të dy pikave P , Q të planit afín janë prerëse, atëherë patjetër $P \neq Q$. Prandaj, nga (*) del i vërtetë dhe ky

RRJEDHIM 1. Në qoftë se gjurmët $P\delta(P)$, $Q\delta(Q)$ të dy pikave P , Q të një plani afin janë prerëse, atëherë pikëprerja e tyre $P\delta(P) \cap Q\delta(Q)$ është pikë e veçantë e tij lidhur me zgjerimin δ .

RRJEDHIM 2. Në qoftë se një pikë Q e planit afin ndodhet në gjurmën $P\delta(P)$ të një pike P të tij, atëherë edhe shembëllimi $\delta(Q)$ i saj ndodhet në atë gjurmë.

Ndryshe, në një plan afin, drejtëza, që është gjurmë e një pike të tij sipas një zgjerimi, është gjurmë për çdo pikë tjetër të saj.

Vërtetim. Rasti 1) Pika Q është pikë e veçuar në lidhje me zgjerimin δ . Në këtë rast kemi që:

$$\delta(Q) = Q$$

Meqënëse nga kushti i rrjedhimit kemi që pika $Q \in P\delta(P)$, kemi që

$$\delta(Q) \in P\delta(P)$$

Rasti 2) Pika Q nuk është pikë e veçantë lidhur me zgjerimin δ . Vërtetësinë e rrjedhimit e kemi nga Teorema 3.2.2.

RRJEDHIM 3. Dy zgjerime $\delta_1 \neq id_{\mathcal{P}}$ dhe $\delta_2 \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plani afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, janë të barabarta atëherë dhe vetëm atëherë, kur për dy pika $P \neq Q \in \mathcal{P}$ vlejnë njëherësh barazimet

$$\delta_1(P) = \delta_2(P) \text{ dhe } \delta_1(Q) = \delta_2(Q) \quad (6)$$

Ndryshe, një zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ i një plani afin është plotësisht i përcaktuar nga dhënia e shëmbëllimeve sipas tij të dy pikave të ndryshme të planit.

Vërtetim. Për dy zgjerime δ_1, δ_2 , vlen njëvlerësia

$$\delta_1 = \delta_2 \Leftrightarrow \forall R \in \mathcal{P}, \delta_1(R) = \delta_2(R), \quad (7)$$

mbasi, duke qenë pasqyrime, për dy pasqyrime $f: X \rightarrow Y$ dhe $g: X \rightarrow Y$ vlen njëvlerësia [1], [32], [33], [40].

$$f=g \Leftrightarrow \forall x \in X, f(x) = g(x). \quad (7')$$

Prej këndeje, kur zgjerimet $\delta_1 \neq id_{\mathcal{P}}, \delta_2 \neq id_{\mathcal{P}}$ janë të barabarta, në veçanti për pikat $P \neq Q \in \mathcal{P}$ kemi $\delta_1(P) = \delta_2(P)$ dhe $\delta_1(Q) = \delta_2(Q)$.

Anasjellas, le të kemi $\delta_1(P) = \delta_2(P)$ dhe $\delta_1(Q) = \delta_2(Q)$ dhe të vërtetojmë që $\delta_1 = \delta_2$. Nga kushti, barazimi vlen për $R=P$ dhe për $R=Q$. Për një pikë e tjetër, d. m. th. për një pikë $R \in \mathcal{P} - \{P, Q\}$, në rastin kur $R \notin PQ$, sipas (4) dhe (6), kemi

$$\delta_1(R) = \ell_{RP}^{\delta_1(P)} \cap \ell_{RQ}^{\delta_1(Q)} = \ell_{RP}^{\delta_2(P)} \cap \ell_{RQ}^{\delta_2(Q)} = \delta_2(R),$$

por edhe në rastin kur $R \in PQ$, sipas (5), (6) dhe nga mësipër, kemi

$$\exists S \notin PQ, \delta_1(R) = \ell_{RP}^{\delta_1(P)} \cap \ell_{RS}^{\delta_1(S)} = \ell_{RP}^{\delta_2(P)} \cap \ell_{RS}^{\delta_2(S)} = \delta_2(R).$$

Pra, $\forall R \in \mathcal{P}, \delta_1(R) = \delta_2(R)$, që sipas (7), tregon se $\delta_1 = \delta_2$.

TEOREMË 3.2.4. Për çdo zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ekzistojnë në atë plan të paktën dy pika jo të veçanta në lidhje me atë zgjerim.

Vërtetim. Fakti që zgjerimi $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ sjell ekzistencën e të paktën një pikë P në planin $\mathcal{A}$ që nuk është e veçantë lidhur me δ , d. m. th. $\delta(P) \neq P$. Patjetër ekziston edhe një pikë tjetër $Q \in \mathcal{P}$ e tillë që $\delta(Q) \neq Q$.

Në të kundërt, në qoftë se $\forall Q \in \mathcal{P} - \{P\}$ do të kishim $\delta(Q) = Q$, atëherë

$$\delta(PQ) \parallel PQ \Rightarrow \delta(P) = P,$$

në kundërshtim me faktin që pika P nuk është e veçantë.

TEOREMË 3.2.5. Në qoftë se një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ ka dy pika të veçanta në lidhje me një zgjerim, atëherë ai zgjerim është zgjerimi identik $id_{\mathcal{P}}$ i tij.

Vërtetim. Le të jenë P, Q dy pika të veçanta në lidhje me një zgjerim δ dhe R një pikë tjetër e planit afin $\mathcal{A}$.

Në qoftë se $R \notin PQ$, sipas (4), shembëllimi i saj R' është

$$R' = \ell_{RP}^{P'} \cap \ell_{RQ}^{Q'} = \ell_{RP}^P \cap \ell_{RQ}^Q,$$

sepse P, Q janë pika të veçanta lidhur me zgjerimin δ . Por $\ell_{RP}^P \cap \ell_{RQ}^Q = R$, që sjell $R'=R$.

Në qoftë se pika $R \in PQ$, nga aksioma A2, ekziston një pikë S e tillë që $S \notin PQ$. Sipas (4), shembëllimi i saj S' është

$$S' = \ell_{SP}^{P'} \cap \ell_{SQ}^{Q'} = \ell_{SP}^P \cap \ell_{SQ}^Q = S,$$

që sjell $S'=S$. Atëherë, sipas (5),

$$R' = \ell_{RP}^P \cap \ell_{RS}^S = R.$$

Sipas kësaj teoreme, në qoftë se, lidhur me një zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, plani ka një pikë të veçantë, ai s'mund të ketë tjetër pikë të veçantë, mbasi në të kundërt, ai do të ishte zgjerimi identik $id_{\mathcal{P}}$. Marrim kështu këtë

RRJEDHIM. *Për çdo zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ në qoftë se në atë plan ka një pikë të veçantë lidhur me atë zgjerim, atëherë ajo është e vetme.*

TEOREMË 3.2.6. *Për çdo zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, që ka një pikë të veçantë V lidhur me atë zgjerim, është i vërtetë pohimi*

$$\forall P \in \mathcal{P}, V \in P\delta(P), \quad (8)$$

ndryshe, të gjitha gjurmët lidhur me zgjerimin δ kalojnë nga pika V .

Vërtetim. Pohimi (8) për $P=V$ është evident. Për $P \neq V$ kemi $P \neq \delta(P)$, sepse, sipas Rrjedhimit, pika e veçantë V lidhur me atë zgjerim δ është e vetme në planin $\mathcal{A}$. Ndërkaq, fakti që δ është zgjerim sjell $VP \parallel V\delta(P)$, sepse $V=\delta(V)$. Drejtëzat VP dhe $V\delta(P)$ kanë të përbashkët pikën V , prandaj $VP = V\delta(P)$, që sjell $V \in P\delta(P)$.

TEOREMË 3.2.7. *Një plan afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ nuk ka pikë të veçantë lidhur me një zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur të gjitha gjurmët $P\delta(P)$ për çdo $P \in \mathcal{P}$ janë paralele ndërmjet tyre.*

Vërtetim. Në qoftëse gjurmët sipas zgjerimit δ në planin $\mathcal{A}$ janë paralele ndërmjet tyre, atëherë ai plan nuk ka pikë të veçantë sipas δ , mbasi në të kundërt, sipas Rrjedhimit të Teoremës 3.2.5, ato nuk do të ishin paralele.

Anasjellas, pranojmë që plani $\mathcal{A}$ nuk ka pikë të veçantë lidhur me zgjerimin $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ dhe të tregojmë që të gjitha gjurmët $P\delta(P)$ për çdo $P \in \mathcal{P}$ janë paralele ndërmjet tyre. Le të jenë P, Q dy pika të çfarëdoshme të planit afin $\mathcal{A}$. Rasti kur $P=Q$ është evident. Edhe kur $P \neq Q$, përsëri gjurmët e tyre janë paralele, se po të pranojmë që $P\delta(P) \nparallel Q\delta(Q)$, atëherë pikëprerja e tyre, sipas Rrjedhimit 1 të Teoremës 3.2.3, do të ishte pikë e veçantë e $\mathcal{A}$ lidhur me zgjerimin δ , që bie në kundërshtim me kushtin. Më tej, paralelizmi ndërmjet të gjitha gjurmëve rrjedh nga fakti që paralelizmi i drejtëzave të një plani afin është relacion ekuivalence.

Teoremës mund t'japim edhe këtë formulim:

Për çdo zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plani afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, vlen pohimi

$$\text{“}\mathcal{A} \text{ nuk ka pikë të veçantë sipas } \delta\text{”} \Leftrightarrow \forall P, Q \in \mathcal{P}, P\delta(P) \parallel Q\delta(Q). \quad (9)$$

Dy teoremat e fundit i përmbledhim në këtë

POHIM 3.2.3. Në një plan afin lidhur me një zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të gjitha gjurmët $P\delta(P)$ për çdo $P \in \mathcal{P}$, ose kalojnë nga një pikë e vetme, ose janë paralele ndërmjet tyre.

Shembull 3.2.1. Pikat e planit afin $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ të rendit të dytë i shënojmë P_1, P_2, P_3, P_4 (Fig.4). Drejtëzat e tij janë $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_1, P_4P_1, P_4P_2, P_4P_3$. Nga figura duket se

a) veç secilës drejtëz paralele me vehten, kemi edhe këto çifte drejtëzash paralele:

$$P_1P_2 \parallel P_3P_4, P_2P_3 \parallel P_4P_1, P_3P_1 \parallel P_2P_4, P_3P_1 \parallel P_2P_4$$

b) kemi gjithashtu këto çifte drejtëzash që priten:

$$P_1P_2 \nparallel P_2P_3 \text{ në pikën } P_2,$$

$$P_2P_3 \nparallel P_3P_4 \text{ në pikën } P_3,$$

$$P_3P_4 \nparallel P_4P_1 \text{ në pikën } P_4,$$

$P_4 \ P_1 \not\parallel P_1 \ P_2$ në pikën P_1 .

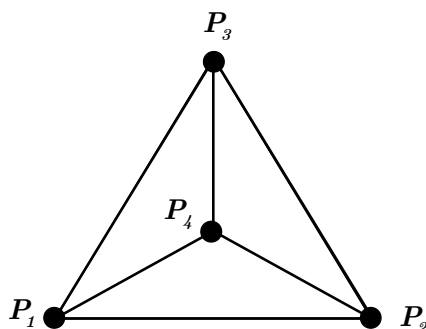


Fig.4.

Le të jetë $\delta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ bijeksioni i tillë që

$$P_1 \mapsto P_3,$$

$$P_2 \mapsto P_4,$$

$$P_3 \mapsto P_1,$$

$$P_4 \mapsto P_2,$$

ndryshe,

$$\delta(P_1) = P_3,$$

$$\delta(P_2) = P_4,$$

$$\delta(P_3) = P_1,$$

$$\delta(P_4) = P_2.$$

Duke patur parasysh drejtëzat paralele a), nga më sipër vemë re se

$$P_1 P_2 \parallel P_3 P_4 \Rightarrow P_1 P_2 \parallel \delta(P_1 P_2),$$

$$P_2 P_3 \parallel P_4 P_1 \Rightarrow P_2 P_3 \parallel \delta(P_2 P_3),$$

$$P_3 P_1 \parallel P_3 P_1 \Rightarrow P_3 P_1 \parallel \delta(P_3 P_1),$$

$$P_4 P_1 \parallel P_2 P_3 \Rightarrow P_4 P_1 \parallel \delta(P_4 P_1),$$

$$P_4 P_2 || P_4 P_2 \Rightarrow P_4 P_2 || \delta (P_4 P_2),$$

$$P_4 P_3 || P_2 P_1 \Rightarrow P_4 P_3 || \delta (P_4 P_3).$$

Për rrjedhojë δ është zgjerim i planit $\mathcal{A}$. lidhur me të cilin ai plan nuk ka pikë të veçanta. Ndërkaq, vemë re se

$$P_1 \delta (P_1) = P_1 P_3, P_2 \delta (P_2) = P_2 P_4, P_3 \delta (P_3) = P_3 P_1$$

dhe

$$P_4 \delta (P_4) = P_4 P_2.$$

Por nga a) kemi

$$P_3 P_1 || P_2 P_4,$$

që do të thotë se:

$$P_1 \delta (P_1) || P_2 \delta (P_2) || P_3 \delta (P_3) || P_4 \delta (P_4).$$

Pra, s'ka dy drejtëza të tipit $P \delta (P)$, që priten, për rrjedhojë ky plan afín lidhur me zgjerimin δ nuk ka pika të veçanta. Shembuj të tjerë të ngjajshëm mund të gjeni në [44].

3.3. GRUPI I ZHVENDOSJEVE TË NJË PLANI AFÍN

Sipas Pohimit 3.2.3, në një plan afín të gjitha gjurmët sipas një zgjerimi të tij ose kalojnë nga një pikë e vetme, ose janë paralele ndërmjet tyre. Ky fakt na çon në këtë

Përkufizim 3.3.1. [15], [14], [28], *Zhvendosje të një plani afín $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, quajmë zgjerimin identik $id_{\mathcal{P}}$ të tij dhe çdo zgjerim tjetër të tij, në lidhje me të cilin ai plan afín nuk ka pika të veçanta.*

Në qoftë se σ është një zhvendosje e ndryshme nga zhvendosja identike $id_{\mathcal{P}}$, atëherë, sipas Teoremës 3.2.7, të gjitha gjurmët lidhur me σ formojnë një bashkësi drejtëzash paralele. Sipas Pohimit 1.2.4, në çdo pikë $P \in \mathcal{P}$ kalojnë të paktën tri drejtëza nga $\mathcal{L}$, ndër të cilat vetëm njera është gjurmë e saj sipas zhvendosjes σ . Meqenëse lidhja $||$ e paralelizmit mbi $\mathcal{L}$ është një lidhje ekuivalence, sipas Pohimit 1.2.1, atëherë $\pi = \mathcal{L}/||$

është një copëtim i $\mathcal{L}$ në klasa ekuivalence sipas paralelizmit [1], [33], [35], [37], [40]. Secila klasë ka përfaqësuese një drejtëz që kalon nga pika e çfarëdoshme P .

Përkufizim 3.3.2. Për një zhvendosje $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$, klasa e ekuivalencës së copimit $\pi = \mathcal{L} / \parallel$, që përmban gjurmët sipas σ të pikave të planit $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ quhet **drejtim** i zhvendosjes σ të tij dhe shënohet π_{σ} .

Pra, për $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$, drejtimi π_{σ} përfaqësohet nga gjurma e vetme sipas σ e çdo pike $P \in \mathcal{P}$. Për zhvendosjen $id_{\mathcal{P}}$, themi se ka drejtim të papërcaktuar. Ndryshe themi se ka drejtim të njëjtë me çdo zhvendosje tjetër σ të planit $\mathcal{A}$, d. m. th. pranojmë të vertetë pohimin:

$$\text{për çdo zhvendosje } \sigma \text{ të planit } \mathcal{A}, \pi_{id_{\mathcal{P}}} = \pi_{\sigma} . \quad (10)$$

Objekt i shqyrtimit në këtë pikë do të jetë bashkësia e zhvendosjeve të planit afín $\mathcal{A}=(\mathcal{P},\mathcal{L},\mathcal{I})$:

$$Zhv_{\mathcal{A}} = \{ \sigma \in Zgj_{\mathcal{A}} \mid \sigma \text{ është zhvendosje e } \mathcal{A} \} .$$

Le të jetë $\alpha : Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$ një pasqyrim i çfarëdoshëm i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten. Për çdo zhvendosje σ , shembëllimi i saj $\alpha(\sigma)$ është përsëri një zhvendosje, që mund të jetë $\alpha(\sigma) = id_{\mathcal{P}}$ ose $\alpha(\sigma) \neq id_{\mathcal{P}}$, pra ka një drejtim të caktuar apo të papërcaktuar. Barazimi i parë, në rasin kur $\sigma = id_{\mathcal{P}}$, merr pamjen $\alpha(id_{\mathcal{P}}) = id_{\mathcal{P}}$, kurse idyti $\alpha(id_{\mathcal{P}}) \neq id_{\mathcal{P}}$, që s'është e mundur se α është pasqyrim. Për ta shmangur këtë, pranojmë akoma që për çdo pasqyrim $\alpha : Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, vlen barazimi

$$\alpha(id_{\mathcal{P}}) = id_{\mathcal{P}} . \quad (10')$$

Shembull 3.3.1. Në Shembullin e mësipërm treguam se zgjerimi δ është i ndryshëm nga $id_{\mathcal{P}}$ dhe s'ka pika të veçanta sipas tij, prandaj δ është një zhvendosje e atij plani afín të rendit të dytë. Drejtimi π_{δ} përcaktohet nga secila prej drejtëzave $P_1\delta(P_1)$, $P_2\delta(P_2)$, $P_3\delta(P_3)$, $P_4\delta(P_4)$, që formojnë bashkësinë e gjurmëve sipas δ të atij plani afín. Duke patur parasysh që në këtë plan kemi

$$\mathcal{L} = \{P_1P_2, P_1P_3, P_1P_4, P_2P_3, P_2P_4, P_3P_4\},$$

drejtimi sipas zhvendosjes δ është $\pi_\delta = \{P_1P_3, P_2P_4\}$, kurse dy klasat e tjera të ekuivalencës sipas paralelizmit janë $\{P_1P_2, P_3P_4\}, \{P_1P_4, P_2P_3\}$.

Sipas Rrjedhimit 3 të Teoremës 3.2.3, një zgjerim i ndryshëm nga identiku i një plani afin është plotësisht i përcaktuar nga dhënia e shembëllimeve sipas tij të dy pikave të ndryshme të planit. Më poshtë tregojmë se për përcaktimin e një zhvendosjeje të tillë mjafton dhënia e shembëllimit sipas saj të një pike .

TEOREMË 3.3.1: *Në qoftë se për një pikë të caktuar P të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, është përcaktuar shëmbëllimi i saj $P' = \sigma(P)$ sipas një zhvendosjeje $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$ të tij, atëherë shëmbëllimi $Q' = \sigma(Q)$ i një pike tjetër $Q \in \mathcal{P} - \{P\}$ përcaktohet si më poshtë:*

$$Q \notin PP' \Rightarrow \sigma(Q) = \ell_{PP'}^Q \cap \ell_{PQ}^{P'} \quad (11)$$

$$Q \in PP' \Rightarrow \exists S \notin PP', S' = \ell_{PP'}^S \cap \ell_{PS}^{P'} \text{ dhe } \sigma(Q) = PP' \cap \ell_{S'Q}^{S'} \quad (11')$$

Vërtetim. Shqyrtojmë në fillim rastin, kur pika Q nuk është pikë e gjurmës PP' të pikës P sipas σ (Fig.5.). Atëherë, sipas Teoremës 3.2.7, gjurma QQ' e saj është paralele me PP' , prandaj $QQ' = \ell_{PP'}^Q$, që tregon se $Q' \in \ell_{PP'}^Q$. Por, duke qënë zhvendosje, σ është zgjerim, prandaj PQ është paralele me $P'Q' = \ell_{PQ}^{P'}$, që tregon se gjithashtu $Q' \in \ell_{PQ}^{P'}$. Rezulton kështu, që shëmbëllimi Q' është pikëprerja e drejtëzave $\ell_{PP'}^Q$ dhe $\ell_{PQ}^{P'}$: $Q' = \ell_{PP'}^Q \cap \ell_{PQ}^{P'}$.

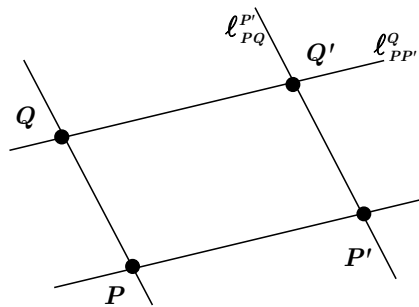


Fig.5.

Shqyrtojmë tani rastin tjetër, kur pika Q është pikë e gjurmës PP' të pikës P sipas σ . Sipas $A3$, në planin afin ka një pikë S jo incidente me gjurmën PP' (Fig.6.). Sipas (11), ndërtohet shëmbëllimi i saj $S' = \ell_{PP'}^S \cap \ell_{PS}^{P'}$.

Por edhe Q nuk është incidente me gjurmën SS' , prandaj sipas (11), ndërtohet më tej edhe $Q' = \ell_{SS'}^Q \cap \ell_{SQ}^{S'}$. Përmbledhtas ndërtimin e shëmbëllimit $Q' = \sigma(Q)$, në këto kushte e paraqesim në trajtën

$$Q \in PP' \Rightarrow \exists S \notin PP', S' = \ell_{PP'}^S \cap \ell_{PS}^{P'} \text{ dhe } \sigma(Q) = PP' \cap \ell_{SQ}^{S'}$$

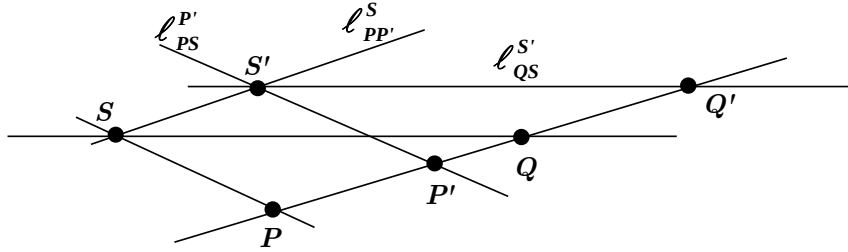


Fig.6.

RRJEDHIM. Dy zhvendosje $\sigma_1 \neq id_{\mathcal{P}}, \sigma_2 \neq id_{\mathcal{P}}$ të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, janë të barabarta vetëm atëherë, kur për një pikë $P \in \mathcal{P}$ vlen barazimi

$$\sigma_1(P) = \sigma_2(P) \quad (12)$$

Vërtetim. Nga përkufizimi i zhvendosjes kemi që: meqënëse zhvendosjet σ_1 dhe σ_2 janë të ndryshme nga zhvendosja identike, atëherë këto zhvendosje nuk kanë pika fikse. Në qoftë se kemi që $\sigma_1 = \sigma_2$ është e qartë që $\forall P \in \mathcal{P}, \sigma_1(P) = \sigma_2(P)$.

Anasjelltas, Le të kemi një pikë $P \in \mathcal{P}$ për të cilën ka vënd barrazimi $\sigma_1(P) = \sigma_2(P)$. Marrim tani një pikë tjetër çfardo $Q \in \mathcal{P}$, nga TEOREMA 3.3.1 kemi që $\sigma_1(Q)$ dhe $\sigma_2(Q)$ përcaktohen nga barrazimet (11) dhe (11').

Në rastin kur $Q \notin P\sigma_1(P) \equiv P\sigma_2(P)$, nga barrazimi (11') kemi që:

$$\sigma_1(Q) = \ell_{P\sigma_1(P)}^Q \cap \ell_{PQ}^{\sigma_1(P)} \equiv \ell_{P\sigma_2(P)}^Q \cap \ell_{PQ}^{\sigma_2(P)} = \sigma_2(Q) \Rightarrow \sigma_1(Q) = \sigma_2(Q)$$

Në rastin kur $Q \in P\sigma_1(P) \equiv P\sigma_2(P)$, nga barrazimi (11') kemi që:

$$Q \in P\sigma_1(P) \equiv P\sigma_2(P) \Rightarrow \exists S \notin P\sigma_1(P) \equiv P\sigma_2(P),$$

$$S' = \mathcal{L}_{P\sigma_1(P)}^S \cap \mathcal{L}_{PS}^{\sigma_1(P)} \equiv \mathcal{L}_{P\sigma_2(P)}^S \cap \mathcal{L}_{PS}^{\sigma_2(P)}$$

Dhe

$$\begin{aligned} \sigma_1(Q) &= P\sigma_1(P) \cap \mathcal{L}_{SQ}^{S'} \equiv P\sigma_2(P) \cap \mathcal{L}_{SQ}^{S'} = \sigma_2(Q) \\ &\Rightarrow \sigma_1(Q) = \sigma_2(Q) \end{aligned}$$

Pra kemi që: $\forall Q \in \mathcal{P}, \sigma_1(Q) = \sigma_2(Q) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$

Ndryshe, ***një zhvendosje $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$ e një plani afin është plotësisht e përcaktuar nga dhënia e shëmbëllimit sipas saj të një pike të planit.***

POHIM 3.3.1. Zgjerimi i anasjelltë σ^{-1} i një zhvendosjeje σ të një plani afin është gjithashtu një zhvendosje e atij plani afin.

Vërtetim. Në qoftë se $\sigma = id_{\mathcal{P}}$, atëherë, nga $id_{\mathcal{P}}^{-1} = id_{\mathcal{P}}$ si bijeksione, del që σ është zhvendosje. Në qoftë se $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$, atëherë sipas saj në plan nuk ka pika të veçanta. Supozojmë që σ^{-1} nuk është zhvendosje. Si zgjerim, nga Pohimi 3.2.3, në plan ka një pikë të veçantë P sipas σ^{-1} , për të cilën kemi $\sigma^{-1}(P) = P$.

Por

$$\sigma(\sigma^{-1}(P)) = \sigma(P) \Leftrightarrow P = \sigma(P),$$

që tregon se P është pikë e veçantë edhe për σ , në kundërshtim me kushtin.

Meqenëse $\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = id_{\mathcal{P}}$, σ^{-1} është zhvendosja e anasjelltë e zhvendosjes σ .

RRJEDHIM. Për çdo zhvendosje σ të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, σ dhe σ^{-1} kanë të njëjtin drejtim.

Vërtetim. Është e qartë që $\sigma \neq id_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \sigma^{-1} \neq id_{\mathcal{P}}$. Pra, zhvendosjet σ dhe σ^{-1} kanë drejtime të përcaktuara, kur $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$. Gjurma e një pike P sipas σ është drejtëza $P\sigma(P)$, e cila përfaqëson drejtimin π_{σ} , kurse gjurma e pikës $\sigma(P) = P'$ sipas σ^{-1} është drejtëza $P'\sigma^{-1}(P')$, e cila përfaqëson drejtimin $\pi_{\sigma^{-1}}$. Por $\sigma(P) = P' \Leftrightarrow P = \sigma^{-1}(P')$, prandaj $P'\sigma^{-1}(P') = P\sigma(P)$, që sjell $\pi_{\sigma} = \pi_{\sigma^{-1}}$. Sipas (10), ky barazim është i vërtetë edhe kur $\sigma = id_{\mathcal{P}}$.

POHIM 3.3.2. Përbërja e dy zhvendosjeve në planin afin është përsëri në zhvendosje e tij.

Vërtetim. Le të jenë σ_1, σ_2 dy zhvendosje të një plani afin. Duke qenë bijeksione, në qoftë se njera nga zhvendosjet σ_1, σ_2 është e barabartë me id_p , atëherë $\sigma_2 \circ \sigma_1 = id_p$. Në këtë rast, nga Përkufizimi 3.3.1, ai prodhim është zhvendosje. Edhe në qoftë se $\sigma_1 \neq id_p$ dhe $\sigma_2 \neq id_p$, përsëri $\sigma_2 \circ \sigma_1$ është zhvendosje. Supozojmë të kundërtën, që $\sigma_2 \circ \sigma_1$ nuk është zhvendosje. Atëherë, si zgjerim, nga Pohimi 3.2.3, në plan ka një pikë të veçantë P sipas $\sigma_2 \circ \sigma_1$, për të cilën kemi

$$(\sigma_2 \circ \sigma_1)(P) = P \Leftrightarrow \sigma_2(\sigma_1(P)) = P \Leftrightarrow \sigma_1(P) = \sigma_2^{-1}(P).$$

Sipas Rrjedhimit të Teoremës 3.3.1, rezulton që $\sigma_1 = \sigma_2^{-1}$, që sjell

$$\sigma_2 \circ \sigma_1 = id_p,$$

në kundërshtim me supozimin.

POHIM 3.3.3. Në qoftë se zhvendosjet σ_1 dhe σ_2 kanë të njëjtin drejtim me zhvendosjen σ të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, atëherë dhe përbërja $\sigma_2 \circ \sigma_1$ ka po atë drejtim, ndryshe

$$\forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \pi_{\sigma_1} = \pi_{\sigma_2} = \pi_{\sigma} \Rightarrow \pi_{\sigma_2 \circ \sigma_1} = \pi_{\sigma}. \quad (13)$$

Vërtetim. Sipas (10) dhe Rrjedhimit të Pohimit 3.3.1, tregohet lehtë vërtetësia e pohimit në rastet kur të paktën njera nga zhvendosjet $\sigma_1, \sigma_2, \sigma$ është id_p ose kur $\sigma_1 = \sigma_2^{-1}$. Në rastin kur $\sigma_2 \circ \sigma_1 \neq id_p, \sigma \neq id_p$, nga kushti, për një pikë $P \in \mathcal{P}$, gjurmët $P\sigma(P)$, $P\sigma_1(P)$ dhe $P\sigma_2(P)$ janë paralele dhe kanë të përbashkët pikën P , prandaj ato përputhen. Kjo do të thotë se në gjurmën $P\sigma(P)$, ndodhen dhe shembëllimet sipas σ_1 dhe sipas σ_2 .

Shënojmë $\sigma_1(P) = P_1$, atëherë në gjurmën $P\sigma(P)$, ndodhet edhe shembëllimi

$$\sigma_2(P_1) = \sigma_2(\sigma_1(P)) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(P).$$

Kjo tregon se

$$P\sigma(P) = (\sigma_2 \circ \sigma_1)(P),$$

d. m. th.

$$\pi_{\sigma_2 \circ \sigma_1} = \pi_{\sigma}.$$

TEOREMË 3.3.2. *Bashkësia $Zhv_{\mathcal{A}}$ e zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ formon grup në lidhje me përbërjen $\circ$, i cili është nëngrup i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të planit afin $\mathcal{A}$.*

Vërtetim. Sipas Përkufizimit 3.3.1, bashkësia $Zhv_{\mathcal{A}}$ e zhvendosjeve të planit afin $\mathcal{A}$ është nënbashkësi e $Zgj_{\mathcal{A}}$. Pohimi 3.3.2 tregon se $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ është nënstrukturë e grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të planit afin $\mathcal{A}$. Pohimi 3.3.1 tregon se kjo nënstrukturë është nëngrup i nëngrupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të grupit $(Kol_{\mathcal{A}}, \circ)$, [2], [31], [32], [33], [36], [67].

TEOREMË 3.3.3. *Grupi $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ i zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ është nëngrup normal i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të atij plani.*

Vërtetim. Për këtë, sipas një teoreme tek [1] mjafton të vërtetojmë që:

$$\forall \delta \in Zgj_{\mathcal{A}}, \forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}} \text{ kemi } \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \in Zhv_{\mathcal{A}}.$$

Në qoftë se $\sigma = id_p$, atëherë

$$\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta = \delta^{-1} \circ (id_p \circ \delta) = \delta^{-1} \circ id_p = id_p \in Zhv_{\mathcal{A}}.$$

Në qoftë se $\sigma \neq id_p$, shënojmë $\sigma_1 = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta$, që është një zgjerim, përderisa δ^{-1} , σ , δ janë zgjerime. Në qoftë se $\sigma_1 = id_p$, atëherë përsëri $\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \in Zhv_{\mathcal{A}}$. Por edhe në qoftë se $\sigma_1 \neq id_p$, $\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \in Zhv_{\mathcal{A}}$.

Supozojmë të kundërtën, që në këtë rast

$$\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \notin Zhv_{\mathcal{A}}.$$

Atëherë, si zgjerim, nga Pohimi 3.2.3, në plan ka një pikë të veçantë P sipas σ_1 , për të cilën kemi

$$\sigma_1(P) = P \Leftrightarrow \delta^{-1}(\sigma(\delta(P))) = P \Leftrightarrow \sigma(\delta(P)) = \delta(P).$$

Barazimi i fundit tregon se pika $\delta(P)$ është pikë e veçantë e planit lidhur me σ , në kundërshtim me faktin që $\sigma \neq id_p$.

RRJEDHIM 1. *Për çdo zgjerim $\delta \in Zgj_{\mathcal{A}}$ dhe çdo zhvendosje $\sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}$ të planit afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, zhvendosjet σ dhe $\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta$ të tij kanë të njëjtin drejtim.*

Vërtetim. Nga më sipër del që për $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$, $\sigma \neq id_{\mathcal{P}} \Leftrightarrow \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \neq id_{\mathcal{P}}$. Pra, zhvendosjet σ dhe $\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta$ kanë drejtime të përcaktuara, kur $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$ dhe $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$. Për të gjykuar për drejtimet π_{σ} dhe $\pi_{\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta}$ të tyre, shqyrtojmë gjurmët sipas σ për pikën $\delta(P) = P'$ të planit dhe sipas $\sigma_1 = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta$ për pikën P të tij. Në qoftë se këto dy gjurmë janë drejtëza paralele të planit, atëherë ato bëjnë pjesë në të njëjtën klasë ekujvalence, d. m. th. $\pi_{\sigma} = \pi_{\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta}$. Gjurma e pikës P' sipas σ është drejtëza $P' \sigma(P')$, kurse gjurma e pikës P sipas σ_1 është $P \sigma_1(P)$.

Për zgjerimin δ kemi

$$P = \delta^{-1}(\delta(P)) = \delta^{-1}(P'),$$

ndërkaq

$$\sigma_1(P) = \delta^{-1}(\sigma(\delta(P))) = \delta^{-1}(\sigma(P')).$$

Por δ^{-1} është zgjerim prandaj për pikat e ndryshme P' , $\sigma(P')$ të planit me shembëllime

$$\delta^{-1}(P') = P, \quad \delta^{-1}(\sigma(P')) = \sigma_1(P),$$

Kemi

$$P' \sigma(P') \parallel P \sigma_1(P).$$

Lehtë tregohet, sipas (10), se ky barazim është i vërtetë edhe kur të paktën njëra nga zhvendosjet δ, σ është e barabartë me $id_{\mathcal{P}}$.

Sipas kuptimit të nëngrupit normal [1], [31], [32], [33], [36], [37], [64], [67], nga kjo Teoremë del gjithashtu se ka vend implikimi

$$\forall (\delta, \sigma) \in Zgj_{\mathcal{A}} \times Zhv_{\mathcal{A}}, \quad \delta \circ \sigma = \sigma \circ \delta.$$

Meqënëse $\delta \in Zhv_{\mathcal{A}} \Rightarrow \delta \in Zgj_{\mathcal{A}}$, prej atij del i vërtetë implikimi

$$\forall (\delta, \sigma) \in Zhv_{\mathcal{A}} \times Zhv_{\mathcal{A}}, \quad \delta \circ \sigma = \sigma \circ \delta. \quad (14)$$

Kjo tregon se ka vënd ky

RRJEDHIM 2. *Grupi $(Zh\nu_{\mathcal{A}}, \circ)$ i zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ është abelian.*

Sipas përkufizimit të një grupi abelian [2], [31], [32], [33], [36], [37], [64], [66], [67], [68], kjo do të thotë që krahas pohimit (14), vlejñ edhe këto pohime:

$$\forall \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in Zh\nu_{\mathcal{A}}, \quad (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \sigma_3 = \sigma_1 \circ (\sigma_2 \circ \sigma_3) \quad (14')$$

$$\forall \sigma \in Zh\nu_{\mathcal{A}}, \quad \sigma \circ id_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}} \circ \sigma = \sigma \quad (14'')$$

$$\forall \sigma \in Zh\nu_{\mathcal{A}}, \exists \sigma^{-1} \in Zh\nu_{\mathcal{A}} \quad \sigma \circ \sigma^{-1} = id_{\mathcal{P}} \quad (14''')$$

3. 4. ALGJEBRA E ENDOMORFIZMAVE TË GRUPIT $Zh\nu_{\mathcal{A}}$

MBI VETEN

Shqyrtojmë bashkësinë $(Zh\nu_{\mathcal{A}})^{Zh\nu_{\mathcal{A}}}$ të pasqyrimeve $\alpha: Zh\nu_{\mathcal{A}} \rightarrow Zh\nu_{\mathcal{A}}$ të grupit $(Zh\nu_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ mbi veten. Le të jenë α, β dy pasqyrime të çfarëdoshme të tilla. Atëherë për çdo $\sigma \in Zh\nu_{\mathcal{A}}$, $\alpha(\sigma)$, $\beta(\sigma)$ dhe $(\alpha \circ \beta)(\sigma) = \alpha(\beta(\sigma)) \in Zh\nu_{\mathcal{A}}$. Nga kjo e fundit del se veprimi i përbërjes $\circ$ në bashkësinë $(Zh\nu_{\mathcal{A}})^{Zh\nu_{\mathcal{A}}}$ është veprim i induktuar [2], [64], [66], [68], nga veprimi i përbërjes $\circ$ në bashkësinë $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ të pasqyrimeve $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ të planit afin $\mathcal{A}$. Në qoftë se i shoqërojmë zhvendosjes σ zhvendosjen e vetme $\alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma)$, përftohet një pasqyrim i ri $Zh\nu_{\mathcal{A}} \rightarrow Zh\nu_{\mathcal{A}}$, të cilin e quajmë shumë të α me β dhe e shënojmë $\alpha + \beta$.

Përkufizim 3.4.1. *Për çdo dy pasqyrime $\alpha, \beta \in (Zh\nu_{\mathcal{A}})^{Zh\nu_{\mathcal{A}}}$ shumë e tyre, që shënohet $\alpha + \beta$, quhet pasqyrimi $\alpha + \beta: Zh\nu_{\mathcal{A}} \rightarrow Zh\nu_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga*

$$(\alpha + \beta)(\sigma) = \alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma), \quad \forall \sigma \in Zh\nu_{\mathcal{A}}. \quad (15)$$

Duke i shoqëruar çdo dy pasqyrimeve α, β shumën e tyre $\alpha + \beta$, përftojmë një veprim binar të ri në $(Zh\nu_{\mathcal{A}})^{Zh\nu_{\mathcal{A}}}$, që e quajmë **mbledhje e pasqyrimeve të zhvendosjeve në planin $\mathcal{A}$** .

Përftohet kështu algjebra me dy veprime binare $((\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}, +, \circ)$, ku shuma e dy elementeve α, β të çfarëdoshëm të saj jepet sipas (15), kurse përbërja e tyre jepet nga

$$(\alpha \circ \beta)(\sigma) = \alpha(\beta(\sigma)), \quad \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}. \quad (16)$$

Përkufizim 3.4.2. Algjebra $((\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}, +, \circ)$ quhet algjebra e pasqyrimeve të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Një pasqyrim $\alpha : \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mund të jetë një endomorfizëm i grupit $(\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \circ)$ mbi veten [1], [15], [44], [67], d. m. th. i tillë që

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \alpha(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \alpha(\sigma_1) \circ \alpha(\sigma_2). \quad (17)$$

TEOREMË 3.4.1. Shuma e çdo dy endomorfizmave të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten është një endomorfizëm i $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Vërtetim. Le të jenë α, β dy endomorfizma të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten. Sipas (17), $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ kemi :

$$\alpha(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \alpha(\sigma_1) \circ \alpha(\sigma_2) \text{ dhe } \beta(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \beta(\sigma_1) \circ \beta(\sigma_2).$$

Atëherë, kemi:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\sigma_1 \circ \sigma_2) &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \beta(\sigma_1 \circ \sigma_2) \\ &\stackrel{(17)}{=} (\alpha(\sigma_1) \circ \alpha(\sigma_2)) \circ (\beta(\sigma_1) \circ \beta(\sigma_2)) \\ &\stackrel{(14)}{=} (\alpha(\sigma_1) \circ \beta(\sigma_1)) \circ (\alpha(\sigma_2) \circ \beta(\sigma_2)) \\ &\stackrel{(15)}{=} (\alpha + \beta)(\sigma_1) \circ (\alpha + \beta)(\sigma_2). \end{aligned}$$

Si përfundim, $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$,

$$(\alpha + \beta)(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\alpha + \beta)(\sigma_1) \circ (\alpha + \beta)(\sigma_2).$$

TEOREMË 3.4.2. Përbërja e çdo dy endomorfizmave të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten është një endomorfizëm i $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Vërtetim. Në kushtet kur α, β janë endomorfizma, nga (16) kemi gjithashtu

$$\begin{aligned}
 (\alpha \circ \beta)(\sigma_1 \circ \sigma_2) &\stackrel{(16)}{=} \alpha(\beta(\sigma_1 \circ \sigma_2)) \\
 &\stackrel{(17)}{=} \alpha(\beta(\sigma_1) \circ \beta(\sigma_2)) \\
 &\stackrel{(17)}{=} \alpha(\beta(\sigma_1)) \circ \alpha(\beta(\sigma_2)) \\
 &\stackrel{(16)}{=} (\alpha \circ \beta)(\sigma_1) \circ (\alpha \circ \beta)(\sigma_2).
 \end{aligned}$$

Si përfundim, $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$,

$$(\alpha \circ \beta)(\sigma_1 \circ \sigma_2) = (\alpha \circ \beta)(\sigma_1) \circ (\alpha \circ \beta)(\sigma_2).$$

Nga Teorema 3.4.1 dhe Teorema 3.4.2, bazuar në kuptimin e një nënstrukture të një strukture algebrike [1], [31], [32], [33], [35], [40], [63], [66], [68], marrim edhe këtë

TEOREMË 3.4.3. *Bashkësia e endomorfizmave të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten lidhur me mbledhjen + dhe përbërjen $\circ$ në të është nënstrukturë e algjebres $((\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}})^{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}, +, \circ)$ të pasqyrimeve të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.*

E quajmë atë algjebra e endomorfizmave të grupit $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Përkufizim 3.4.3. *Endomorfizëm gjurmëruajtës i grupit $(\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \circ)$ mbi veten quhet një endomorfizëm α i tij i tillë që*

$$\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \pi_{\alpha(\sigma)} = \pi_{\sigma}, \quad (18)$$

ndryshe, çdo gjurmë sipas $\alpha(\sigma)$ është gjurmë sipas σ .

Shembull 3.4.1. Pasqyrimi $0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}} : \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga

$$0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma) = id_{\mathcal{P}}, \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \quad (19)$$

është një endomorfizëm i grupit të zhvendosjeve $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten, sepse

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \quad 0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = id_{\mathcal{P}} = id_{\mathcal{P}} \circ id_{\mathcal{P}} = 0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma_1) \circ 0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma_2).$$

Endomorfizmin $0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}$ e quajmë endomorfizëm zero të $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Nga (10) del gjithashtu se $\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \pi_{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}} = \pi_{\sigma}$. Vlen kështu ky

POHIM 3.4.1. **Endomorfizmi zero i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten $0_{Zhv_{\mathcal{A}}}$ është një endomorfizëm gjurmëruajtës i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.**

Shembull 3.4.2. Pasqyrimi identik $1_{Zhv_{\mathcal{A}}} : Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga

$$1_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma) = \sigma, \forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \quad (20)$$

është gjithashtu një endomorfizëm i grupit të zhvendosjeve $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten, sepse

$$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in Zhv_{\mathcal{A}}, 1_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \sigma_1 \circ \sigma_2 = 1_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma_1) \circ 1_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma_2).$$

Endomorfizmin $1_{Zhv_{\mathcal{A}}}$ e quajmë **endomorfizëm njësh** të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Nga (20) kemi menjëherë që $\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \pi_{1_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma)} = \pi_{\sigma}$, që tregon se vlen edhe ky

POHIM 3.4.2. **Endomorfizmi njësh i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten $1_{Zhv_{\mathcal{A}}}$ është një endomorfizëm gjurmëruajtës i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.**

TEOREMË 3.4.4. **Në qoftë se α, β janë e dy endomorfizma gjurmëruajtës të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten, atëherë edhe shuma e tyre $\alpha + \beta$ është një endomorfizëm i tillë.**

Vërtetim. Në kushtet e Teoremës, sipas Teoremës 3.4.1, shuma $\alpha + \beta$ është endomorfizëm i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten. Shënojmë $\sigma_1 = \alpha(\sigma), \sigma_2 = \beta(\sigma)$. Meqenëse α, β janë gjurmëruajtës, sipas (18), $\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}$ kemi

$$\pi_{\alpha(\sigma)} = \pi_{\sigma_1} = \pi_{\sigma} \text{ dhe } \pi_{\beta(\sigma)} = \pi_{\sigma_2} = \pi_{\sigma}. \quad (18')$$

Prej këndeje, sipas (13) marrim

$$\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \pi_{\alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma)} = \pi_{\sigma_2 \circ \sigma_1} = \pi_{\sigma}. \quad (13')$$

Atëherë

$$\pi_{(\alpha+\beta)(\sigma)} \stackrel{(15)}{=} \pi_{\alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma)} \stackrel{(13')}{=} \pi_{\sigma}.$$

Si përfundim,

$$\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \pi_{(\alpha+\beta)(\sigma)} = \pi_{\sigma}.$$

TEOREMË 3.4.5. *Në qoftë se α, β janë e dy endomorfizma gjurmëruajtës të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten, atëherë edhe përbërja e tyre $\alpha \circ \beta$ është një endomorfizëm i tillë.*

Vërtetim. Në kushtet e Teoremës, sipas Teoremës 3.4.2, përbërja $\alpha \circ \beta$ është endomorfizëm i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten. Shënojmë $\sigma_1 = \beta(\sigma)$. Meqenëse α, β janë gjurmëruajtës, sipas (18), $\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}$, pra edhe për $\sigma_1 = \beta(\sigma)$ kemi

$$\pi_{\alpha(\sigma_1)} = \pi_{\sigma_1} \text{ dhe } \pi_{\beta(\sigma)} = \pi_{\sigma}. \quad (18'')$$

Prej këndej,

$$\pi_{(\alpha \circ \beta)(\sigma)} \stackrel{(16)}{=} \pi_{\alpha(\beta(\sigma))} \stackrel{(18'')}{=} \pi_{\alpha(\sigma_1)} \stackrel{(18'')}{=} \pi_{\sigma_1} \stackrel{(18'')}{=} \pi_{\beta(\sigma)} \stackrel{(18'')}{=} \pi_{\sigma}.$$

Si përfundim, $\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}$, $\pi_{(\alpha \circ \beta)(\sigma)} = \pi_{\sigma}$.

Shembull 3.4.3. Pasqyrimi $\varphi: Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga

$$\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}, \quad \forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \quad (21)$$

është një endomorfizëm i grupit kommutativ të zhvendosjeve $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten, sepse

$$\begin{aligned} \forall \sigma_1, \sigma_2 \in Zhv_{\mathcal{A}}, \quad \varphi(\sigma_1 \circ \sigma_2) &\stackrel{(21)}{=} (\sigma_1 \circ \sigma_2)^{-1} \\ &= \sigma_2^{-1} \circ \sigma_1^{-1} \\ &\stackrel{(14)}{=} \sigma_1^{-1} \circ \sigma_2^{-1} \\ &= \varphi(\sigma_1) \circ \varphi(\sigma_2). \end{aligned}$$

Nga Rrjedhimi i Pohimit 3.3.1 kemi

$$\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, \pi_{\sigma} = \pi_{\sigma^{-1}} \Rightarrow \pi_{\varphi(\sigma)} = \pi_{\sigma^{-1}} = \pi_{\sigma},$$

që tregon se vlen ky

POHIM 3.4.3. *Endomorfizmi $\varphi: Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga $\varphi(\sigma) = \sigma^{-1}$, $\forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}$ është një endomorfizëm gjurmëruajtës i $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.*

POHIM 3.4.4. *Për një endomorfizëm gjurmëruajtës $\alpha: Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, pasqyrimi $-\alpha: Zhv_{\mathcal{A}} \rightarrow Zhv_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga*

$$(-\alpha)(\sigma) = (\alpha(\sigma))^{-1}, \quad \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \quad (21')$$

është një endomorfizëm gjurmëruajtës i $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Vërtetim. Vëmë re se $\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} (-\alpha)(\sigma) &= (\alpha(\sigma))^{-1} \\ &\stackrel{(21)}{=} \varphi(\alpha(\sigma)) \\ &\stackrel{(16)}{=} (\varphi \circ \alpha)(\sigma), \end{aligned}$$

që tregon se $-\alpha = \varphi \circ \alpha$ dhe, sipas Teoremës 3.4.5, ai është endomorfizëm gjurmëruajtës.

Endomorfizmin $-\alpha$ e quajmë *endomorfizëm i kundërt* i endomorfizmit α .

Shembull 3.4.4. Le të jetë δ një zgjerim. Sipas Teoremës 3.3.3, kemi $\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$, $\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$.

Për një zgjerim δ , pasqyrimi $\alpha_{\delta}: \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga

$$\alpha_{\delta}(\sigma) = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta, \quad \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \quad (22)$$

është një endomorfizëm i grupit të zhvendosjeve $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten, sepse,

$\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$,

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta}(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= \delta^{-1} \circ (\sigma_1 \circ \sigma_2) \circ \delta \\ &= \delta^{-1} \circ \sigma_1 \circ (\delta \circ \delta^{-1}) \circ \sigma_2 \circ \delta \\ &= (\delta^{-1} \circ \sigma_1 \circ \delta) \circ (\delta^{-1} \circ \sigma_2 \circ \delta) \\ &= \alpha_{\delta}(\sigma_1) \circ \alpha_{\delta}(\sigma_2). \end{aligned}$$

Nga Rrjedhimi 1 i Teoremës 3.3.3 kemi

$$\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \quad \pi_{\sigma} = \pi_{\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta} \Rightarrow \pi_{\alpha_{\delta}(\sigma)} = \pi_{\sigma},$$

që tregon se vlen ky

POHIM 3.4.5. *Për një zgjerim δ , endomorfizmi $\alpha_{\delta}: \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$, përcaktuar nga $\alpha_{\delta}(\sigma) = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta$, $\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$, është një endomorfizëm gjurmëruajtës i $\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}$ mbi veten.*

3.5. TRUPI I ENDOMORFIZMAVE GJURMËRUAJTËS TË GRUPIT $Zhv_{\mathcal{A}}$ MBI VETEN

Shqyrtojmë tani bashkësinë

$$\mathbb{K}_{\mathcal{A}} = \{ \alpha \in (Zhv_{\mathcal{A}})^{Zhv_{\mathcal{A}}} \mid \alpha \text{ është endomorfizëm gjurmëruajtës} \} \quad (23)$$

të endomorfizmave gjurmëruajtës të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

Sipas Teoremës 3.4.1 dhe Teoremës 3.4.2, treshja $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$ është nënstrukturë e algjebërës së endomorfizmave lidhur me veprimet e mbledhjes dhe të përbërjes, për rrjedhojë ajo është vetë një algjebër.

TEOREMË 3.5.1. **Grupoidi $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +)$ është grup abeljan.**

Vërtetim. 1. Për çdo $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}$, kemi

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, ((\alpha + \beta) + \gamma)(\sigma) &\stackrel{(15)}{=} (\alpha + \beta)(\sigma) \circ \gamma(\sigma) \\ &\stackrel{(15)}{=} (\alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma)) \circ \gamma(\sigma) \\ &\stackrel{(14')}{=} \alpha(\sigma) \circ (\beta(\sigma) \circ \gamma(\sigma)) \\ &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\sigma) \circ (\beta + \gamma)(\sigma) \\ &\stackrel{(15)}{=} (\alpha + (\beta + \gamma))(\sigma). \end{aligned}$$

Sipas (7'), rezulton që, $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}, (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

2. Për çdo $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}$, kemi

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in Zhv_{\mathcal{A}}, (\alpha + 0_{Zhv_{\mathcal{A}}})(\sigma) &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\sigma) \circ 0_{Zhv_{\mathcal{A}}}(\sigma) \\ &\stackrel{(19)}{=} \alpha(\sigma) \circ id_{\mathcal{P}} \\ &\stackrel{(14'')}{=} \alpha(\sigma). \end{aligned}$$

Sipas (7') dhe (14), rezulton që, $\forall \alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}, \alpha + 0_{Zhv_{\mathcal{A}}} = 0_{Zhv_{\mathcal{A}}} + \alpha = \alpha$

Pra ekziston elementi zero në $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$, që është endomorfizmi zero $0_{Zhv_{\mathcal{A}}}$.

3. Për çdo $\alpha \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}$, kemi

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in \mathbf{Z}h\nu_{\mathcal{A}}, (\alpha + (-\alpha))(\sigma) &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\sigma) \circ (-\alpha)(\sigma) \\
 &\stackrel{(21')}{=} \alpha(\sigma) \circ (\alpha(\sigma))^{-1} \\
 &\stackrel{(14'')}{=} id_{\mathcal{P}} \\
 &\stackrel{(19)}{=} 0_{\mathbf{Z}h\nu_{\mathcal{A}}}(\sigma)
 \end{aligned}$$

Sipas (7') dhe (14), rezulton që, $\forall \alpha \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}, \alpha + (-\alpha) = 0_{\mathbf{Z}h\nu_{\mathcal{A}}}$.

4. Për çdo $\alpha, \beta \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}$, kemi

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in \mathbf{Z}h\nu_{\mathcal{A}}, (\alpha + \beta)(\sigma) &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\sigma) \circ \beta(\sigma) \\
 &\stackrel{(14)}{=} \beta(\sigma) \circ \alpha(\sigma) \\
 &\stackrel{(15)}{=} (\beta + \alpha)(\sigma)
 \end{aligned}$$

Sipas (7'), rezulton që, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}, \alpha + \beta = \beta + \alpha$.

TEOREMË 3.5.2. *Algjebra* $(\mathbb{k}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$ **është unazë e njësishme.**

Vërtetim. Sipas Përkufizimit të një unaze të njësishme [2], [31], [32], [33], [35], [37], [68], kërkohet të vërtetojmë sa më poshtë.

I. Grupoidi $(\mathbb{k}_{\mathcal{A}}, +)$ është grup abeljn, që e tregon Teorema 3.5.1.

II. Veprimi $\circ$ i përbërjes në $\mathbb{k}_{\mathcal{A}}$ është shoqërues, mbasi $\mathbb{k}_{\mathcal{A}} \subset_q^{\circ} \mathcal{P}^{\mathcal{P}}$, d. m. th. është veprim i induktuar nga veprimi i përbërjes $\circ$ në bashkësinë $\mathcal{P}^{\mathcal{P}}$ të pasqyrimeve $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ të planit afín $\mathcal{A}$, ku ai është shoqërues (shiko [1]):

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}, (\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma).$$

III. Shumëzimi është shpërndarës në lidhje me mbledhjen:

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}, \alpha \circ (\beta + \gamma) = (\alpha \circ \beta) + (\alpha \circ \gamma)$$

$$\text{dhe } (\beta + \gamma) \circ \alpha = (\beta \circ \alpha) + (\gamma \circ \alpha).$$

Me të vërtetë,

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, (\alpha \circ (\beta + \gamma))(\sigma) &\stackrel{(16)}{=} \alpha((\beta + \gamma)(\sigma)) \\
 &\stackrel{(15)}{=} \alpha(\beta(\sigma) \circ \gamma(\sigma)) \\
 &\stackrel{(17)}{=} \alpha(\beta(\sigma)) \circ \alpha(\gamma(\sigma)) \\
 &\stackrel{(16)}{=} (\alpha \circ \beta)(\sigma) \circ (\alpha \circ \gamma)(\sigma) \\
 &\stackrel{(15)}{=} (\alpha \circ \beta + \alpha \circ \gamma)(\sigma).
 \end{aligned}$$

Po ashtu,

$$\begin{aligned}
 ((\beta + \gamma) \circ \alpha)(\sigma) &\stackrel{(16)}{=} (\beta + \gamma)(\alpha(\sigma)) \\
 &\stackrel{(15)}{=} \beta(\alpha(\sigma)) \circ \gamma(\alpha(\sigma)) \\
 &\stackrel{(16)}{=} (\beta \circ \alpha)(\sigma) \circ (\gamma \circ \alpha)(\sigma) \\
 &\stackrel{(15)}{=} (\beta \circ \alpha + \gamma \circ \alpha)(\sigma).
 \end{aligned}$$

IV. Ekziston elementi i njësisishëm në $\mathbb{k}_{\mathcal{A}}$.

Për çdo $\alpha \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}$, kemi

$$\begin{aligned}
 \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, (\alpha \circ 1_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}})(\sigma) &\stackrel{(16)}{=} \alpha(1_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma)) \\
 &\stackrel{(20)}{=} \alpha(\sigma)
 \end{aligned}$$

Pra, $\forall \alpha \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}}, \alpha \circ 1_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}} = \alpha$, d. m. th. elementi i njësisishëm në $\mathbb{k}_{\mathcal{A}}$ është endomorfizmi i njësisishëm $1_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}$.

LEMË. *Për çdo $\alpha \in \mathbb{k}_{\mathcal{A}} - \{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}\}$ ekziston vetëm një zgjerim δ i planit afin $\mathcal{A}$, që ka madje një pikë të veçantë në lidhje me δ , i tillë që*

$$\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \alpha(\sigma) = \delta \circ \sigma \circ \delta^{-1}. \quad (24)$$

Vërtetim. Për dy pika të çfarëdoshme R, Q të planit $\mathcal{A}$, gjithmonë ekziston një zhvendosje që e çon pikën R në pikën Q . Në qoftë se $Q \neq R$, sipas A1, ka një drejtëz të vetme RQ në plan. Në qoftë se $Q = R$, e tillë është zhvendosja identike $id_{\mathcal{P}}$; edhe në këtë rast, një drejtëz që kalon në pikën Q do ta shënojmë QQ . Nga Rrjedhimi i Teoremës 3.3.1, ekziston dhe është e vetme një zhvendosje e planit afin, të cilën e shënojmë σ_{RQ} , e tillë që

$$\sigma_{RQ}(R) = Q. \quad (25)$$

Tregojmë në fillim që në qoftë se ekziston zgjerimi δ , që kënaq (24), duke qenë P pikë e veçantë lidhur me të, atëherë ai është i vetëm. Le të jetë Q një pikë e planit $\mathcal{A}$ dhe σ_{PQ} zhvendosja që $\sigma_{PQ}(P) = Q$. Atëherë

$$\alpha(\sigma_{PQ}) = \delta \circ \sigma_{PQ} \circ \delta^{-1}.$$

Ndërkaq, $\delta(P) = P \Leftrightarrow \delta^{-1}(P) = P$, pra pika P është pikë e veçantë edhe sipas δ^{-1} . Në këto kushte shembëllimi i pikës P sipas zhvendosjes $\alpha(\sigma_{PQ})$ është:

$$\begin{aligned} (\alpha(\sigma_{PQ}))(P) &= (\delta \circ \sigma_{PQ} \circ \delta^{-1})(P) \\ &= (\delta \circ \sigma_{PQ})(\delta^{-1}(P)) \\ &= (\delta \circ \sigma_{PQ})(P) \\ &= \delta(\sigma_{PQ}(P)) \\ &\stackrel{(25)}{=} \delta(Q). \end{aligned}$$

Shkurt,

$$\delta(Q) = (\alpha(\sigma_{PQ}))(P) \quad (26)$$

Pra, në qoftë se ekziston zgjerimi δ , që kënaq (24), duke qenë P pikë e veçantë lidhur me të, atëherë shembëllimi sipas tij i një pike Q të planit gjendet sipas formulës (26) në këtë

mënyrë: ndërtohet zhvendosja σ_{PQ} , prej saj ndërtohet zhvendosja $\alpha(\sigma_{PQ})$ dhe kjo e fundit zbatohet në pikën P . Me këtë treguam që zgjerimi δ përcaktohet në mënyrë të vetme.

Le të jetë tani $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{\text{zhv}_A}\}$ dhe përcaktojmë një pasqyrim δ të planit afin sipas formulës (26). Le të jenë Q, R dy pika të ndryshme të planit afin. Për zhvendosjet σ_{QR} , σ_{PQ} kemi

$$(\sigma_{QR} \circ \sigma_{PQ})(P) \stackrel{(25)}{=} \sigma_{QR}(Q) \stackrel{(25)}{=} R.$$

Kjo tregon se zhvendosja $(\sigma_{QR} \circ \sigma_{PQ})$ çon pikën P tek Q , ashtu si dhe σ_{PR} . Prej këndeje, sipas (12), merret barazimi $(\sigma_{QR} \circ \sigma_{PQ}) = \sigma_{PR}$. Atëherë

$$\begin{aligned} (\alpha(\sigma_{PR}))(P) &= (\alpha(\sigma_{QR} \circ \sigma_{PQ}))(P) \\ &\stackrel{(17)}{=} (\alpha(\sigma_{QR}) \circ \alpha(\sigma_{PQ}))(P) \\ &= (\alpha(\sigma_{QR}))((\alpha(\sigma_{PQ}))(P)). \end{aligned}$$

Pra,

$$(\alpha(\sigma_{QR}))((\alpha(\sigma_{PQ}))(P)) = (\alpha(\sigma_{PR}))(P),$$

që sjell

$$(\alpha(\sigma_{QR}))(\delta(Q)) = \delta(R), \tag{27}$$

sepse, sipas (26), krahas $(\alpha(\sigma_{PQ}))(P) = \delta(Q)$, kemi dhe $(\alpha(\sigma_{PR}))(P) = \delta(R)$.

Shqyrtojmë drejtëzën $\ell_{QR}^{\delta(Q)}$, që kalon nga pika $\delta(Q)$ dhe është paralele me $QR = Q\sigma_{QR}(R)$. Pra, ajo është gjurmë e pikës $\delta(Q)$ sipas zhvendosjes σ_{QR} . Por $\alpha \neq 0_{\text{zhv}_A} \Rightarrow \alpha(\sigma_{QR}) \neq id_{\mathcal{P}}$, për rrjedhojë ka drejtim të caktuar, që e përcakton një gjurmë, në veçanti gjurma e pikës $\delta(Q)$ sipas tij. Ndërkaq, ai është endomorfizëm gjurmëruajtës, prandaj kjo gjurmë është $\ell_{QR}^{\delta(Q)}$. Kështu që, sipas Rrjedhimit 2 të Teoremës 3.2.3, në të ndodhet edhe pika $\delta(R)$. Në këtë mënyrë kemi treguar se për çdo dy pika Q, R të ndryshme të planit afin kemi

$$QR||\delta(Q)\delta(R). \quad (28)$$

Veç kësaj, për paqyrimin δ kemi gjithashtu :

$$\begin{aligned} \delta(P) &\stackrel{(26)}{=} (\alpha(\sigma_{PP}))(P) \\ &= (\alpha(id_{\mathcal{P}}))(P) \\ &\stackrel{(10')}{=} (id_{\mathcal{P}})(P) \\ &= P, \end{aligned}$$

që sjell

$$\delta(P) = P. \quad (29)$$

Nga një teoremë në [28], një pasqyrim i planit afín, që për çdo dy pika të ndryshme P , Q kënaq (28), është ose i degjeneruar, në kuptimin që çdo pikë e planit ka të njëjtin shembëllim me një pikë të dhënë, ose është një bijeksion. Në qoftë se pasqyrimi δ nuk është bijeksion, atëherë ai është i tillë që çdo pikë Q e planit ka të njëjtin shembëllim me një pikë të dhënë, do me thënë të gjitha pikat e planit kanë të njëjtin shembëllim. Prandaj

$$\delta(Q) = \delta(P) = P \stackrel{(26)}{\Rightarrow} P = (\alpha(\sigma_{PQ}))(P) \Rightarrow \alpha(\sigma_{PQ}) = id_{\mathcal{P}}, \forall Q \in \mathcal{P}.$$

Është e qartë se çdo zhvendosje σ mund të paraqitet në trajtën σ_{PQ} . Kështu që pohimi i fundit shkruhet në trajtën

$$\alpha(\sigma) = id_{\mathcal{P}}, \forall \sigma \in \text{Zhv}_{\mathcal{A}}.$$

Kjo tregon, sipas (19), që $\alpha = 0_{\text{Zhv}_{\mathcal{A}}}$. Ngelet që pasqyrimi δ është bijeksion, prandaj

$$Q \neq R \Rightarrow \delta(Q) \neq \delta(R).$$

Atëherë (28) tregon se δ është zgjerim, kurse (29), që pika P është pikë e veçantë sipas δ .

Së fundi tregojmë që ky zgjerim plotëson (24). Për këtë, sipas (26) dhe (28), kemi

$$\delta(Q) \stackrel{(28)}{=} (\alpha(\sigma_{PQ}))(\delta(P)) = (\alpha(\sigma_{PQ}) \circ \delta)(P).$$

Prej këndeje e paraqesim pikën Q në trajtën

$$Q = \delta^{-1} \left((\alpha(\sigma_{PQ}) \circ \delta)(P) \right),$$

prej nga,

$$Q = (\delta^{-1} \circ \alpha(\sigma_{PQ}) \circ \delta)(P),$$

që tregon se zhvendosja $\delta^{-1} \circ \alpha(\sigma_{PQ}) \circ \delta$ çon pikën P tek pika Q . Për rrjedhojë, ajo është zhvendosja σ_{PQ} . Prandaj

$$\delta^{-1} \circ \alpha(\sigma_{PQ}) \circ \delta = \sigma_{PQ} \Leftrightarrow \alpha(\sigma_{PQ}) = \delta \circ \sigma_{PQ} \circ \delta^{-1}.$$

Theksuam më sipër që çdo zhvendosje σ paraqitet si σ_{PQ} . Marrim kështu pohimin

$$\forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, \alpha(\sigma) = \delta \circ \sigma \circ \delta^{-1}.$$

TEOREMË 3.5.3. **Për çdo** $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}\}$ **ekziston i anasjelli i tij** $\alpha^{-1} \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}\}$.

Vërtetim. Për një $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}\}$, sipas lemmës, gjejmë zgjerimin δ të tillë që vlen (24).

Ndërtojmë tani për këtë δ pasqyrimin α_{δ} , të përcaktuar nga

$$\alpha_{\delta}(\sigma) = \delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta, \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}. \quad (*)$$

Sipas Pohimit 3.4.5, pasqyrimi α_{δ} është një endomorfizëm gjurmëruajtës, madje i ndryshëm nga $0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}$, prandaj edhe $\alpha_{\delta} \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}\}$. Atëherë kemi

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, (\alpha \circ \alpha_{\delta})(\sigma) &\stackrel{(16)}{=} \alpha(\alpha_{\delta}(\sigma)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\delta \circ (\delta^{-1} \circ \sigma \circ \delta) \circ \delta^{-1} \right) \\ &= \sigma \\ &\stackrel{(20)}{=} 1_{\mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}}(\sigma). \end{aligned}$$

Po ashtu, kemi

$$\begin{aligned} \forall \sigma \in \mathbf{Zhv}_{\mathcal{A}}, (\alpha_{\delta} \circ \alpha)(\sigma) &\stackrel{(16)}{=} \alpha_{\delta}(\alpha(\sigma)) \\ &\stackrel{(*)}{=} \left(\delta^{-1} \circ (\delta \circ \sigma \circ \delta^{-1}) \circ \delta \right) \\ &= \sigma \end{aligned}$$

$$\stackrel{(20)}{=} 1_{Z_{hv_A}}(\sigma).$$

Sipas (7'), rezulton që,

$$\forall \alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{Z_{hv_A}}\}, \alpha \circ \alpha_\delta = \alpha_\delta \circ \alpha = 1_{Z_{hv_A}}.$$

Pra ekziston elementi i anasjellë α^{-1} i pasqyrimit $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{Z_{hv_A}}\}$, që është endomorfizmi α_δ , përcaktuar nga (*).

TEOREMË 3.5.4. *Algjebra* $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$ *është trup*.

Vërtetim. Meqenëse $1_{Z_{hv_A}} \neq 0_{Z_{hv_A}}$, pra në $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$ ka të paktën një element jo zero, sipas Përkufizimit të një trupi [2], [33], [36], kërkohet të vërtetojmë sa më poshtë:

I. $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}^* = \mathbb{K}_{\mathcal{A}} - \{0_{Z_{hv_A}}\}$ është nënbashkësi e qendrueshme e $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$ në lidhje me shumëzimin .
Me të vërtetë, në qoftë se $\alpha_1 \neq 0_{Z_{hv_A}}$ dhe $\alpha_2 \neq 0_{Z_{hv_A}}$, atëherë edhe $\alpha_1 \circ \alpha_2 \neq 0_{Z_{hv_A}}$. E zëmë se $\alpha_1 \circ \alpha_2 = 0_{Z_{hv_A}}$. Meqenëse $\alpha_1 \neq 0_{Z_{hv_A}}$ nga Teorema 3.5.3, ekziston α_1^{-1} , prandaj

$$\alpha_2 = 1_{Z_{hv_A}} \circ \alpha_2 = (\alpha_1^{-1} \circ \alpha_1) \circ \alpha_2 = \alpha_1^{-1} \circ (\alpha_1 \circ \alpha_2) = \alpha_1^{-1} \circ 0_{Z_{hv_A}} = 0_{Z_{hv_A}}.$$

Kjo bie në kundërshtim me kushtin $\alpha_2 \neq 0_{Z_{hv_A}}$.

II. Grupoidi $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}^*, \circ)$ është grup.

Përbërja $\circ$, duke qenë shoqëruese në $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$, është shoqërues edhe në $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}^*$. Veç kësaj, duke qenë se $1_{Z_{hv_A}} \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}$, atëherë ai është njësh në $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}^*, \circ)$. Sipas Teoremën 3.5.3, ekziston anasjelli α^{-1} i çdo $\alpha \in \mathbb{K}_{\mathcal{A}}^*$, prandaj $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}^*, \circ)$ është grup.

KREU 4

NDËRTIMI I NJË PLANI AFIN MBI NJË TRUP

Në këtë Kre, duke u bazuar në disa kuptime dhe pohime të trajtuara në literaturë, synojmë ndërtimin e një plani afín në lidhje me një trup të çfarëdoshëm $(K, \oplus, \otimes)$. G. Erik Moorhouse në librin e tij [49] thotë se: Një plan afín mund të ndërtohet mbi një fushë F . Edhe në libra të tjerë si [3], [4], [23] haset kjo konsideratë. Po mbi një trup a mund të ndërtojet një plan afín? Pikat e planit afín do t'i konceptojmë si çifte të radhitura (α, β) , ku α dhe β janë elementë të trupit $(K, \oplus, \otimes)$, kurse drejtëzat në të i konceptojmë nëpërmjet ekuacionesh të tipit $x \otimes a \oplus y \otimes b = c$, ku $a \neq 0_K$ ose $b \neq 0_K$, ku ndryshoret dhe koeficientët janë elementë nga ai trup. Për të arritur këtë ndërtim vërtetojmë disa teorema që tregojnë se një strukturë incidence $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K kënaq aksiomat **A1**, **A2**, **A3** të përkufizimit të planit afín. Në të gjitha vërtetimet mbështetemi në kuptimin e trupit si unazë dhe në vetitë e tij që rrjedhin nga ai përkufizim. Në pjesën e dytë të këtij Kreu paraqesim një trajtim tonin për trupin e Kuaternioneve dhe ilustrojmë planin afín të ndërtuar mbi këtë trup.

4.1. SHNDRIMI I NJË STRUKTURE INCIDENCE NË LIDHJE ME NJË TRUP NË NJË PLAN AFIN

Përkufizim 4.1.1. *Le të jetë $(K, \oplus, \otimes)$ një trup. Një çift i radhitur (α, β) me koordinata $\alpha, \beta \in K$ quhet pikë lidhur me trupin K .*

Bashkësinë $K^2 = K \times K$ të pikave lidhur me trupin K e shënojmë $\mathcal{P}$.

Përkufizim 4.1.2.[79] *Le të jenë $a, b, c \in K$. Bashkësia*

$$\ell = \left\{ (x, y) \in K^2 \mid x \otimes a \oplus y \otimes b = c, a \neq 0_K \text{ ose } b \neq 0_K \right\} \quad (1)$$

quhet drejtëz lidhur me trupin K .

Ekuacioni $x \otimes a \oplus y \otimes b = c$, quhet ekuacion i drejtëzës ℓ . Bashkësinë e drejtëzave lidhur me trupin K e shënojmë $\mathcal{L}$. Është e qartë se

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{L} = \emptyset.$$

Përkufizim 4.1.3. [79] *Do të themi se pika $P = (\alpha, \beta) \in \mathcal{P}$ është incidente me drejtëzën (1), në qoftë se koordinatat e saj vërtetojnë ekuacionin e ℓ ,*

domethënë në se është i vërtetë barazimi $\alpha \otimes a \oplus \beta \otimes b = c$.

Këtë fakt e shënojmë

$$P \in \ell.$$

Është përcaktuar në këtë mënyrë një relacion incidence

$$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L},$$

i tillë që $\forall (P, \ell) \in \mathcal{P} \times \mathcal{L}, P \mathcal{I} \ell \Leftrightarrow P \in \ell$. Prandaj edhe këtu, kur pika P është incidente me drejtëzën ℓ , do të themi ndryshe pika P ndodhet në drejtëzën ℓ , apo drejtëza ℓ kalon nga pika P .

Është përfutur kështu lidhur me trupin K një strukturë incidence $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$.

Përkufizim 4.1.4. *Strukturën e incidences $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ të ndërtuar më sipër e quajmë strukturë e incidencës lidhur me trupin K .*

Qëllimi ynë është studimi i saj.

Sipas (1) , një drejtëz e saj ℓ ka ekuacion

$$x \otimes a \oplus y \otimes b = c, \text{ ku } a \neq 0_K \text{ ose } b \neq 0_K. \quad (2)$$

Kushti (2) plotësohet në tre raste: 1) $a \neq 0_K$ dhe $b = 0_K$;

2) $a = 0_K$ dhe $b \neq 0_K$;

3) $a \neq 0_K$ dhe $b \neq 0_K$,

që lejojnë copëtimin e bashkësisë $\mathcal{L}$ të drejtëzave të saj në tre nënbashkësi $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ si më poshtë:

$$\mathcal{L}_0 = \{ \ell \in \mathcal{L} \mid x \otimes a \oplus y \otimes b = c, a \neq 0_K \text{ dhe } b = 0_K \} \quad (3)$$

$$\mathcal{L}_1 = \{ \ell \in \mathcal{L} \mid x \otimes a \oplus y \otimes b = c, a = 0_K \text{ dhe } b \neq 0_K \}; \quad (4)$$

$$\mathcal{L}_2 = \{ \ell \in \mathcal{L} \mid x \otimes a \oplus y \otimes b = c, a \neq 0_K \text{ dhe } b \neq 0_K \}; \quad (5)$$

Ndryshe, nënbashkësia $\mathcal{L}_0$ është bashkësia e drejtëzave $\ell \in \mathcal{L}$ me ekuacion

$$x \otimes a = c, \text{ ku } a \neq 0_K \Leftrightarrow x = d, \text{ ku } d = c \otimes a^{-1}; \quad (3')$$

nënbashkësia $\mathcal{L}_1$ është bashkësia e drejtëzave $\ell \in \mathcal{L}$ me ekuacion

$$y \otimes b = c, \text{ ku } b \neq 0_K \Leftrightarrow y = f, \text{ ku } f = c \otimes b^{-1}; \quad (4')$$

kurse nënbashkësia $\mathcal{L}_2$ është bashkësia e drejtëzave $\ell \in \mathcal{L}$ me ekuacion

$$\begin{aligned} x \otimes a \oplus y \otimes b = c, \text{ ku } a \neq 0_K \text{ dhe } b \neq 0_K &\Leftrightarrow y = x \otimes k \oplus g; \\ \text{ku } k = (-1_K) \otimes a \otimes b^{-1} \neq 0_K, \quad g &= c \otimes b^{-1}; \end{aligned} \quad (5')$$

Prej këndeje del se

- një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_0$ është plotësisht e përcaktuar nga elementi $d \in K$ i tillë që ekuacioni i saj të jetë $x = d$,
- një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_1$ është plotësisht e përcaktuar nga elementi $f \in K$ i tillë që ekuacioni i saj të jetë $y = f$, dhe
- një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_2$ është plotësisht e përcaktuar nga elementët $k \neq 0_K, g \in K$ të tillë që ekuacioni i saj të jetë $y = x \otimes k \oplus g$.

Nga më sipër është e qartë që $\Pi = \{\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ është një copëtim i bashkësisë së drejtëzave $\mathcal{L}$.

TEOREMË 4.1.1. *Në strukturën e incidences $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K , për çdo dy pika të ndryshme $P, Q \in \mathcal{P}$, ekziston vetëm një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$ që kalon në ato dy pika.*

Vërtetim. Le të jenë $P = (p_1, p_2)$ dhe $Q = (q_1, q_2)$. Fakti që $P \neq Q$ do të thotë që

$$(p_1, p_2) \neq (q_1, q_2). \quad (6)$$

Bazuar në (6) dallojmë tre raste:

$$1) \ p_1 = q_1 \text{ dhe } p_2 \neq q_2;$$

$$2) \ p_1 \neq q_1 \text{ dhe } p_2 = q_2;$$

$$3) \ p_1 \neq q_1 \text{ dhe } p_2 \neq q_2;$$

Le të jetë drejtëza $\ell \in \mathcal{L}$, ende e pa njohur, që sipas (2), ka ekuacion

$$x \otimes a \oplus y \otimes b = c, \text{ ku } a \neq 0_K \text{ ose } b \neq 0_K.$$

Shqyrtojmë rastin 1) $p_1 = q_1$ dhe $p_2 \neq q_2$. Nga fakti që $P, Q \in \ell$ kemi:

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b \end{cases}$$

Por $p_1 = q_1$ dhe $p_2 \neq q_2$, prandaj, nga fakti që $(K, \oplus)$ është grup abelian, sipas përkufizimit të grupit abelian [1], [15], [33], [36], marrim

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_2 \otimes b = q_2 \otimes b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ (p_2 - q_2) \otimes b = 0_K \end{cases}.$$

Nga më sipër, duke qenë se, trupi K është unazë e plotë, do me thënë pa pjesëtues të 0_K , [1], [15], [33], [35], [36], [37], rezulton

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ b = 0_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \otimes a = c \\ b = 0_K \end{cases}.$$

Prej këndej

a) në qoftë se $p_1 = 0_K$, marrim

$$\begin{cases} 0_K \otimes a = c \\ b = 0_K (a \neq 0_K) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0_K \\ b = 0_K (a \neq 0_K) \end{cases}.$$

Sipas këtij rezultati, ekuacioni (2) merr trajtën $x \otimes a = 0_K$, ku $a \neq 0_K$, ndryshe

$$x = 0_K, \quad (7)$$

(sepse, duke qenë $a \neq 0_K$, ai është element i grupit $(K^*, \otimes)$, për rrjedhojë $x \otimes a = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K \otimes a^{-1} \Leftrightarrow x = 0_K$).

b) në qoftë se $p_1 \neq 0_K$, dhe p_1 është element i grupit $(K^*, \otimes)$, prandaj ekziston p_1^{-1} , që sjell rezultatin:

$$\begin{cases} a = p_1^{-1} \otimes c \\ b = 0_K (a \neq 0_K) \end{cases}$$

sipas të cilit, ekuacioni (2) në këtë rast merr pamjen

$$x \otimes p_1^{-1} \otimes c = c, \text{ ku } a \neq 0_K \Leftrightarrow x \otimes p_1^{-1} = 1_K \Leftrightarrow x = p_1 \quad (7')$$

Është përdorur këtu rregulla e thjeshtimit nga e djathta në grupin $(K^*, \otimes)$, me $c \neq 0_K$, nga që $a = p_1^{-1} \otimes c$ dhe $a \neq 0_K$.

Nga të dy rastet (7) dhe (7') vemë re se, kur $p_1 = q_1$ dhe $p_2 \neq q_2$, ekziston një drejtëz e vetme ℓ me ekuacion $x = d$ të trajtës (3'), pra një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_0$.

Rasti 2) $p_1 \neq q_1$ dhe $p_2 = q_2$, shqyrtohet në mënyrë analoge dhe arrihet në përfundimin, që edhe në këtë rast ekziston një drejtëz e vetme ℓ me ekuacion $y = f$ të trajtës (4'), pra një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_1$.

Shqyrtojmë tani rastin 3) $p_1 \neq q_1$ dhe $p_2 \neq q_2$. Edhe tani, nga fakti që $P, Q \in \ell$ kemi:

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b = c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b \end{cases} \quad (8)$$

Nga kjo barazimi i dytë shkruhet edhe në trajtën

$$(p_1 - q_1) \otimes a = (q_2 - p_2) \otimes b, \text{ që sjell } a \neq 0_K \text{ dhe } b \neq 0_K \quad (9)$$

Lidhur më koordinatat e pikës P dallojmë këto katër raste:

a) $p_1 = 0_K = p_2$. Kjo sjell $q_1 \neq 0_K$ dhe $q_2 \neq 0_K$. Në këto kushte sistemi (8) merr pamjen

$$\begin{cases} c = 0_K \\ a = -q_1^{-1} \otimes q_2 \otimes b \end{cases}.$$

Sipas këtij rezultati, ekuacioni (2) merr trajtën:

$$x \otimes (-q_1^{-1} \otimes q_2 \otimes b) \oplus y \otimes b = 0_K,$$

ku , sipas (9), $b \neq 0_K$. Prandaj, nga vetitë e trupit, ndryshe kemi

$$\begin{aligned} & [x \otimes (-q_1^{-1} \otimes q_2) \oplus y] \otimes b = 0_K \\ & \Leftrightarrow -x \otimes (q_1^{-1} \otimes q_2) \oplus y = 0_K \otimes b^{-1} \\ & \Leftrightarrow y = x \otimes (q_1^{-1} \otimes q_2), \text{ ku } q_1^{-1} \otimes q_2 \neq 0_K. \end{aligned} \quad (10)$$

b) $p_1 = 0_K \neq p_2$. Kjo sjell $q_1 \neq 0_K$. Në këto kushte sistemi (8) merr pamjen

$$\begin{cases} p_2 \otimes b = c \\ a = q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \otimes b \end{cases}.$$

Ky rezultat, i jep ekuacioni (2) trajtën:

$$x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \otimes b] \oplus y \otimes b = c,$$

ku krahas $c \neq 0_K$, sipas (9), edhe $b \neq 0_K$. Prandaj , nga vetitë e trupit, ndryshe kemi

$$\begin{aligned} & x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \otimes b] \oplus y \otimes b = c \Leftrightarrow \\ & \{x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2)] \oplus y\} \otimes b = c \Leftrightarrow \\ & \{x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2)] \oplus y\} \otimes p_2^{-1} \otimes c = c \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \{x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2)] \oplus y\} \otimes p_2^{-1} = 1_K \\ & \Leftrightarrow x \otimes [q_1^{-1} \otimes (p_2 - q_2)] \oplus y = p_2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow y = x \otimes [q_1^{-1} \otimes (q_2 - p_2)] \oplus p_2, \text{ ku } q_1^{-1} \otimes (q_2 - p_2) \neq 0_K \quad (11)$$

c) $p_1 \neq 0_K = p_2$. Kjo sjell $q_2 \neq 0_K$, prej nga sistemi (8) merr pamjen

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ (p_1 - q_1) \otimes a = (q_2 - p)_2 \otimes b \end{cases}.$$

Njëlloj si tek rasti b) tregohet se ekuacioni (2) merr trajtën

$$y = x \otimes [(q_1 - p_1)^{-1} \otimes q_2] \oplus p_1 (q_1 - p_1)^{-1} \otimes q_2, \quad (12)$$

$$\text{ku } (q_1 - p_1)^{-1} \otimes q_2 \neq 0_K.$$

d) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$. Dallojmë katër nënraste:

d_1) $q_1 = 0_K = q_2$. Nga sistemi (8) kemi

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b = 0_K \end{cases} \Leftrightarrow c = 0_K \text{ dhe } a = -p_1^{-1} \otimes p_2 \otimes b.$$

Pas disa shndërrimesh ekuacioni (2) merr trajtën

$$y = x \otimes (p_1^{-1} \otimes p_2), \text{ ku } p_1^{-1} \otimes p_2 \neq 0_K. \quad (13)$$

d_2) $q_1 = 0_K \neq q_2$. Nga sistemi (8) kemi

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_2 \otimes b \end{cases} \Rightarrow q_2 \otimes b = c \Rightarrow c \neq 0_K.$$

$$\text{dhe } a = p_1^{-1} \otimes (q_2 - p_2) \otimes b, \text{ ku } b = q_2^{-1} \otimes c.$$

Pas disa shndërrimesh ekuacioni (2) merr trajtën

$$y = x \otimes [p_1^{-1} \otimes (q_2 - p_2) \otimes b] \oplus q_2, \quad (14)$$

$$\text{ku } p_1^{-1} \otimes (q_2 - p_2) \otimes b \neq 0_K.$$

d_3) $q_1 \neq 0_K = q_2$. Në këto kushte sistemi (8) sjell

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_1 \otimes a \end{cases} \Rightarrow q_1 \otimes a = c \Rightarrow c \neq 0_K.$$

dhe $b = p_2^{-1} \otimes (q_1 - p_1) \otimes a$, ku $a = q_1^{-1} \otimes c$.

Pas disa shndërrimesh ekuacioni (2) merr trajtën

$$y = x \otimes \left[q_1^{-1} \otimes (p_1 - q_1) \otimes p_2 \right] \oplus \left[q_2 \otimes (p_1 - q_1)^{-1} \otimes p_2 \right], \quad (15)$$

$$ku \quad q_1^{-1} \otimes (p_1 - q_1) \otimes p_2 \neq 0_K.$$

d_4) $q_1 \neq 0_K$ dhe $q_2 \neq 0_K$. Në qoftë se $c = 0_K$ sistemi (8) ka pamjen

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = 0_K \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b \end{cases}$$

Mbas disa shndërrimesh rezulton që ekuacioni (2) ka trajtën

$$y = x \otimes \left[q_1^{-1} \otimes (p_1 - q_1)^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \right] \quad (16)$$

$$ku \quad q_1^{-1} \otimes (p_1 - q_1)^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \neq 0_K.$$

Në qoftë se $c \neq 0_K$, sistemin (8), duke shumëzuar të dy anët e ekuacioneve të tij me c^{-1} , e shndërrojmë si më poshtë:

$$\begin{cases} p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = c \\ p_1 \otimes a \oplus p_2 \otimes b = q_1 \otimes a \oplus q_2 \otimes b \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 \otimes a_1 \oplus p_2 \otimes b_1 = 1_K \\ p_1 \otimes a_1 \oplus p_2 \otimes b_1 = q_1 \otimes a_1 \oplus q_2 \otimes b_1 \end{cases}$$

Prej këndeje ekuacioni (2) merr trajtën

$$y = x \otimes \left[(p_1 - q_1)^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \right] \oplus b_1^{-1},$$

$$ku \quad (p_1 - q_1)^{-1} \otimes (p_2 - q_2) \neq 0_K. \quad (17)$$

Si përfundim, nga të katër rastet (14), (15), (16) dhe (17), vemë re se, kur $p_1 \neq q_1$ dhe $p_2 \neq q_2$, ekziston një drejtëz e vetme ℓ me ekuacion $y = x \otimes k \oplus g$ të trajtës (5'), pra një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}_2$.

TEOREMË 4.1.2. *Në strukturën e incidences $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur më trupin K , për një pikë $P \in \mathcal{P}$ dhe një drejtëz $\ell \in \mathcal{L}$ të tilla që $P \notin \ell$, ekziston vetëm një drejtëz $r \in \mathcal{L}$ që kalon nga pika P dhe e tillë që $\ell \cap r = \emptyset$.*

Vërtetim. Le të jetë $P = (p_1, p_2)$. Dallojmë rastet

- a) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$;
- b) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$;
- c) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$;
- d) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$;

Drejtëza, ende e panjohur $r \in \mathcal{L}$, le të ketë ekuacionin

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = \gamma, \quad ku \quad \alpha \neq 0_K \quad ose \quad \beta \neq 0_K \quad (18)$$

Për drejtëzën ℓ dallojmë këto raste:

- 1) $\ell \in \mathcal{L}_0$;
- 2) $\ell \in \mathcal{L}_1$;
- 3) $\ell \in \mathcal{L}_2$;

Rasti 1) $\ell \in \mathcal{L}_0$. Në këtë rast ajo ka ekuacion $x = d$.

Fakti që $P = (p_1, p_2) \notin \ell$, sjell që $p_1 \neq d$. Kurse fakti që $\ell \cap r = \emptyset$, do të thotë që nuk ka asnjë pikë $Q \in \mathcal{P}$, që $Q \in \ell$ dhe $Q \in r$, ndryshe është i vërtetë pohimi

$$\forall Q \in \mathcal{P}, Q \notin \ell \cap r, ku \quad \ell \in \mathcal{L}_0. \quad (19)$$

Me fjalë të tjera nuk ka zgjidhje sistemi

$$\begin{cases} x = d \neq p_1 \\ x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = \gamma \end{cases} \quad (19')$$

Ndërkaq $P \in r$, që sjell

$$p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta = \gamma, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K \quad (20)$$

Në rastin a) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = 0_K$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = 0_K, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, 0_K)$, për të cilën sistemi (19') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ x = 0_K \end{cases}.$$

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = 0_K \end{cases}.$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (d, 0_K) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = -x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1})$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d \neq 0_K \\ y = x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{array} \right.,$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (d, -d \otimes \alpha \otimes \beta^{-1}) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_0$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$x = 0_K \in \mathcal{L}_0,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin b) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (19') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d \neq 0_K \\ x = p_1 \end{array} \right.$$

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\left\{ \begin{array}{l} x = d \neq 0_K \\ y = 0_K \end{array} \right.,$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (d, 0_K) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha - x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1})$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (d, (d - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1})) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_0$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$x = p_1 \in \mathcal{L}_0,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin c) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_2 \otimes \beta$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, 0_K)$, për të cilën sistemi (19') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ x = 0_K \end{cases}.$$

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow y = p_2,$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = p_2 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (d, p_2) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta - x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = (x - p_2) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1})$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = (x - p_2) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (d, (d - p_2) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1})) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_0$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$x = 0_K \in \mathcal{L}_0,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin d) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$; nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha. \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, p_2)$, për të cilën sistemi (19') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ x = p_1 \neq 0_K \end{cases}$$

dhe dimë gjithashtu që $p_1 \neq d$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow y = p_2$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = p_2 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (d, p_2) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta - x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \oplus p_2,$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (19') ka pamjen

$$\begin{cases} x = d \neq 0_K \\ y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \oplus p_2 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (d, (d - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \oplus p_2) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_0$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$x = p_1 \in \mathcal{L}_0,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Rasti 2) $\ell \in \mathcal{L}_1$. Në këtë rast ajo ka ekuacion $y = f$.

Fakti që $P = (p_1, p_2) \notin \ell$, sjell që $p_2 \neq f$. Kurse fakti që $\ell \cap r = \emptyset$, do të thotë që nuk ka asnjë pikë $Q \in \mathcal{P}$, që $Q \in \ell$ dhe $Q \in r$, ndryshe është i vërtetë pohimi

$$\forall Q \in \mathcal{P}, Q \notin \ell \cap r, \text{ ku } \ell \in \mathcal{L}_1. \quad (21)$$

Me fjalë të tjera nuk ka zgjidhje sistemi

$$\begin{cases} y = f \neq p_2 \\ x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = \gamma \end{cases}. \quad (21')$$

Ndërkaq $P \in r$, që sjell

$$p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta = \gamma, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K \quad (20)$$

Në rastin a) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = 0_K$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = 0_K, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, 0_K)$, për të cilën sistemi (21') ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (0_K, f) \in \ell \cap r$. Kjo tregon që drejtëza r nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $y = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, 0_K)$, për të cilën sistemi (21') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ y = 0_K \end{cases}.$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërohet në

$$x \otimes \alpha = -y \otimes \beta \Leftrightarrow x = y \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1})$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (21') ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = y \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (-f \otimes \beta \otimes \alpha^{-1}, f) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_1$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = 0_K \in \mathcal{L}_1,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin b) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (21') ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (p_1, f) \in \ell \cap r$. Kjo tregon që drejtëza r nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $y = 0_K$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (21') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ y = 0_K \end{cases}.$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha - y \otimes \beta \Leftrightarrow x = y \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (21') ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = y \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = (f \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1, f) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_1$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = 0_K \in \mathcal{L}_1,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin c) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_2 \otimes \beta$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, p_2)$, për të cilën sistemi (21') ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (0_K, f) \in \ell \cap r$. Kjo tregon që drejtëza r nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow y = p_2.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $y = p_2$, që kalon nga pika $P = (0_K, p_2)$, për të cilën sistemi (21') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ y = p_2 \end{cases},$$

dhe dimë gjithashtu që $f \neq p_2$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_2 \otimes \beta - y \otimes \beta \Leftrightarrow x = (y - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_2$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (21') ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = (y - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = ((f - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}), f) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_1$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = p_2 \in \mathcal{L}_1,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin d) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha, \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, p_2)$, për të cilën sistemi (21') ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (p_1, f) \in \ell \cap r$. Kjo tregon që drejtëza r nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow y = p_2$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $y = p_2$, që kalon nga pika $P = (p_1, p_2)$, për të cilën sistemi (21') nuk ka zgjidhje, mbasi ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ y = p_2 \end{cases},$$

dhe dimë gjithashtu që $p_2 \neq f$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta - y \otimes \beta \Leftrightarrow y = (y - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (21') ka pamjen

$$\begin{cases} y = f \neq 0_K \\ x = (y - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $R = ((f - p_2) \otimes (-\beta \otimes \alpha^{-1}) \oplus p_1, f) \in \ell \cap r_2$. Edhe drejtëza r_2 nuk e plotëson kërkesën $\ell \cap r_2 = \emptyset$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_1$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = p_2 \in \mathcal{L}_1,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Rasti 3) $\ell \in \mathcal{L}_2$. Në këtë rast ajo ka ekuacion $y = x \otimes k \oplus g$, $k \neq 0_K$, $g \in K$.

Fakti që $P = (p_1, p_2) \notin \ell$, sjell që $p_2 \neq p_1 \otimes k \oplus g$. Kurse fakti që $\ell \cap r = \emptyset$, do të thotë që nuk ka asnjë pikë $Q \in \mathcal{P}$, që $Q \in \ell$ dhe $Q \in r$, ndryshe është i vërtetë pohimi

$$\forall Q \in \mathcal{P}, Q \notin \ell \cap r, \text{ ku } \ell \in \mathcal{L}_2. \quad (22)$$

Me fjalë të tjera nuk ka zgjidhje sistemi

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = \gamma \end{cases}. \quad (22')$$

Ndërkaq $P \in r$, që sjell

$$p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta = \gamma, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K \quad (20)$$

Në rastin a) $p_1 = 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = 0_K$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = 0_K, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = 0_K \Leftrightarrow x = 0_K.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = 0_K$, që kalon nga pika $P = (0_K, 0_K)$, për të cilën sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ x = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (0_K, g) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K,$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = ((-g \otimes k^{-1}), 0_K) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = -x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}),$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{cases},$$

i cili nuk ka zgjidhje, në qoftë se $a=\alpha$ dhe $b=\beta$.

Në këtë mënyrë kemi treguar se, në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_2$, ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = x \otimes k \in \mathcal{L}_2,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin b) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 = 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y=x \otimes k \oplus g \\ x = p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (p_1, p_1 \otimes k \oplus g) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K,$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y=x \otimes k \oplus g \\ y = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = ((-g \otimes k^{-1}), 0_K) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha - x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}),$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y=x \otimes k \oplus g \\ y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{cases},$$

i cili nuk ka zgjidhje në qoftë se $a=\alpha$ dhe $b=\beta$. Pasi në të kundërt do të kishim që:

$$\begin{aligned} (x - p_1) \otimes k &= x \otimes k \oplus g \Rightarrow x \otimes k - p_1 \otimes k = x \otimes k \oplus g \\ \Rightarrow -p_1 \otimes k &= g \Rightarrow -p_1 \otimes (-a \otimes b^{-1}) = c \otimes b^{-1} \Rightarrow p_1 = c \otimes a^{-1} \end{aligned}$$

dhe nga fakti që pika $P=(p_1, 0_K) \notin \ell$, kemi që

$$\begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ p_1 \otimes k \oplus g \neq 0_K \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ (c \otimes a^{-1}) \otimes (-a \otimes b^{-1}) \oplus (c \otimes b^{-1}) \neq 0_K \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ (-c \otimes b^{-1}) \oplus (c \otimes b^{-1}) \neq 0_K !!? \end{cases}$$

Ky kontradiksion tregon që sistemi i mësipërm s'ka zgjidhje.

Në këtë mënyrë kemi treguar se në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_2$ ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = (x - p_1) \otimes k \in \mathcal{L}_2,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin $c) p_1 = 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha$.

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ x = p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (p_1, p_1 \otimes k \oplus g) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = 0_K \Leftrightarrow y = 0_K,$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = 0_K \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = ((-g \otimes k^{-1}), 0_K) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha - x \otimes \alpha \Leftrightarrow y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}),$$

që përcakton një drejtëz r_2 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = (x - p_1) \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \end{cases},$$

i cili nuk ka zgjidhje në qoftë se $a=\alpha$ dhe $b=\beta$. Pasi në të kundërt do të kishim që:

$$\begin{aligned} (x - p_1) \otimes k &= x \otimes k \oplus g \Rightarrow x \otimes k - p_1 \otimes k = x \otimes k \oplus g \\ \Rightarrow -p_1 \otimes k &= g \Rightarrow -p_1 \otimes (-a \otimes b^{-1}) = c \otimes b^{-1} \Rightarrow p_1 = c \otimes a^{-1} \end{aligned}$$

dhe nga fakti që pika $P=(p_1, 0_K) \notin \ell$, kemi që

$$\begin{aligned} \begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ p_1 \otimes k \oplus g \neq 0_K \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ (c \otimes a^{-1}) \otimes (-a \otimes b^{-1}) \oplus (c \otimes b^{-1}) \neq 0_K \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = c \otimes a^{-1} \\ (-c \otimes b^{-1}) \oplus (c \otimes b^{-1}) \neq 0_K \end{cases} !!? \end{aligned}$$

Ky kontradiksion tregon që sistemi i mësipërm s'ka zgjidhje.

Në këtë mënyrë kemi treguar se, në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_2$, ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = (x - p_1) \otimes k \in \mathcal{L}_2,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

Në rastin d) $p_1 \neq 0_K$ dhe $p_2 \neq 0_K$, nga (20) del $\gamma = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta$

Atëherë ekuacioni (18) ka pamjen

$$x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta = p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta, \text{ ku } \alpha \neq 0_K \text{ ose } \beta \neq 0_K$$

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta = 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$x \otimes \alpha = p_1 \otimes \alpha \Leftrightarrow x = p_1.$$

Përcaktohet kështu një drejtëz r me ekuacion $x = p_1$, që kalon nga pika $P = (p_1, 0_K)$, për të cilën sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ x = p_1 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = (p_1, p_1 \otimes k \oplus g) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha = 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$y \otimes \beta = p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow y = p_2,$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = p_2 \end{cases},$$

i cili ka zgjidhje pikën $Q = ((p_2 - g) \otimes k^{-1}, p_2) \in \ell \cap r_1$. Kjo tregon që drejtëza r_1 nuk e plotëson kërkesën që $\ell \cap r_1 = \emptyset$.

- Në qoftë se $\alpha \neq 0_K$ dhe $\beta \neq 0_K$, ekuacioni (18) shndërrohet në

$$\begin{aligned} x \otimes \alpha \oplus y \otimes \beta &= p_1 \otimes \alpha \oplus p_2 \otimes \beta \Leftrightarrow \\ y &= x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \oplus (p_1 \otimes [\alpha \otimes \beta^{-1}] \oplus p_2), \end{aligned}$$

që përcakton një drejtëz r_1 . Në këtë rast sistemi (22') ka pamjen

$$\begin{cases} y = x \otimes k \oplus g \\ y = x \otimes (-\alpha \otimes \beta^{-1}) \oplus (p_1 \otimes [\alpha \otimes \beta^{-1}] \oplus p_2) \end{cases},$$

i cili nuk ka zgjidhje, në qoftë se $a=\alpha$ dhe $b=\beta$. Pasi në të kundërt do të kishim që:

$$\begin{aligned}
 x \otimes (-a \otimes b^{-1}) \oplus (p_1 \otimes (a \otimes b^{-1}) \oplus p_2) &= x \otimes (-a \otimes b^{-1}) \oplus (c \otimes b^{-1}) \\
 \Rightarrow p_1 \otimes (a \otimes b^{-1}) \oplus p_2 &= c \otimes b^{-1} \\
 \Rightarrow (p_1 \otimes a) \oplus (p_2 \otimes b) &= c
 \end{aligned}$$

dhe nga fakti që pika $P=(p_1, p_2) \notin \ell$, kemi që

$$(p_1 \otimes a) \oplus (p_2 \otimes b) \neq c.$$

Ky kontradiksion tregon që sistemi i mësipërm s'ka zgjidhje.

Në këtë mënyrë kemi treguar se, në rastin kur $\ell \in \mathcal{L}_2$, ekziston vetëm një drejtëz r , ekuacioni i të cilës është

$$y = x \otimes k \oplus (p_1 \otimes [-k] \oplus p_2)$$

ose njëlloj

$$y = (x - p_1) \otimes k \oplus p_2 \in \mathcal{L}_2,$$

që kënaq kushtet e teoremës.

TEOREMË 4.1.3. *Në strukturën e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K , ekzistojnë tri pika që nuk ndodhen në një drejtëz.*

Vërtetim. Nga një pohim në teoria e unazave [1], [15], [35], [36], meqënëse trupi K është unazë e njësishe, ai përmban elementët 0_K dhe $1_K \in K$, të tillë që $0_K \neq 1_K$. Është e qartë se pikat $P = (0_K, 0_K)$, $Q = (1_K, 0_K)$ dhe $R = (0_K, 1_K)$ janë pika të ndryshme dy e nga dy në $\mathcal{P}$. Meqënëse $P \neq Q$, dhe $0_K \neq 1_K$, sipas rastit 2) të vërtetimit të Teoremës 4.1.1, del që drejtëza $PQ \in \mathcal{L}_1$, pra ka ekuacion të trajtës $y = f$. Meqënëse $P \in PQ$ del që $f = 0_K$. Prandaj ekuacioni i PQ është $y = 0_K$. Vihet re lehtë se pika $R \notin PQ$.

Tre Teoremat 4.1.1, 4.1.2, 4.1.3, tregojnë se një strukturë incidence $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me një trup K , kënaq tri aksiomat **A1**, **A2**, **A3** të Përkufizimit 1.2.1 të një plani afin. Për rrjedhojë marrim këtë

TEOREMË 4.1.4. *Struktura e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K është një plan afin lidhur me atë trup.*

4.2. PLANI AFIN I KUATERNIONEVE

Kuaternionet janë futur në matematikë nga matematikani irlandez Wiliam Rowan Hamilton në vitin 1843 [59]. Duke kërkuar një zgjerim tripërmasor të numrave kompleksë, që rezultoi i pamundur, ai arriti në zgjerimin e tyre 4-përmasor, në kuaternionet. Sipas konceptimit algjebrik bashkëkohor, sot dimë që bashkësia e tyre $\mathbb{R}^4$ formon trup dhe hapësirë lineare reale 4-përmasore. Në analogji me studimin e funksioneve të ndryshorit kompleks dhe analizës komplekse, paraqet një interes në rritje dhe studimi i funksioneve të ndryshorit kuaternian dhe i analizës hiperkomplekse [50], [51], [52], [58].

Kuaternionet gjejnë përdorim të gjerë në teorinë e relativitetit, në mekanikën kuantike dhe në sektorë aplikativë si në grafikën kompiuterike 3D dhe në robotikë [50], [53], [54], [55], [56].

4.2.1. TRUPI I KUATERNIONEVE

Përkufizim 4.2.1.1. *Kuaternion quhet çdo 4-she e rradhitur numrash realë.*

Nga ky përkufizim, një kuaternion $q = (a, b, c, d)$ është element i bashkësisë $\mathbb{R}^4$, të cilën e shënojmë me shkronjën $\mathbb{H}$.

Dy kuaternione $q = (a, b, c, d)$ dhe $q' = (a', b', c', d')$, si 4-she të rradhitura, janë të barabartë atëherë dhe vetëm atëherë kur koordinatat përkatëse i kanë të barabarta. Pra,

$$q = q' \Leftrightarrow (a=a') \wedge (b=b') \wedge (c=c') \wedge (d=d'). \quad (21)$$

Kuaternioni $\theta = (0,0,0,0)$ quhet zero, kurse kuaternioni $(-a, -b, -c, -d)$ quhet i kundërti i kuaternionit $q = (a, b, c, d)$ dhe shënohet $-q$. Pra,

$$q = (a, b, c, d) \Rightarrow -q = (-a, -b, -c, -d). \quad (22)$$

Veprimet e brendshme algjebrike të mbledhjes dhe të shumëzimit në bashkësinë $\mathbb{H}$ përcaktohen nga këto përkufizime:

Le të jenë $q = (a, b, c, d)$ dhe $q' = (a', b', c', d')$ dy kuaternione të çfarëdoshëm.

Përkufizim 4.2.1.2. *Shumë e kuaternionit q me kuaternionin q' , që shënohet $q+q'$ quhet quaternioni $(a+a', b+b', c+c', d+d')$. Pra,*

$$(a, b, c, d) + (a', b', c', d') = (a+a', b+b', c+c', d+d'). \quad (23)$$

Duke i lidhur çdo dy kuaternioneve q dhe q' shumën e tyre $q+q'$, përftojmë një pasqyrim “+”: $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, që e quajmë *mbledhje* e kuaternioneve.

Përkufizim 4.2.1.3. Prodhim i kuaternionit q me kuaternionin q' , që shënohet $q \bullet q'$ quhet *kuaternioni*

$$(aa'-bb'-cc'-dd', ab'+ba'+cd'-dc', ac'+ca'+bd'-db', ad'+da'+bc'-cb').$$

Pra,

$$q \bullet q' = (aa'-bb'-cc'-dd', ab'+ba'+cd'-dc', ac'+ca'+bd'-db', ad'+da'+bc'-cb'). \quad (24)$$

Duke i lidhur çdo dy kuaternioneve q dhe q' prodhimin e tyre $q \bullet q'$, përftojmë një pasqyrim tjetër “•”: $\mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}$, të cilin e quajmë *shumëzim* të kuaternioneve.

Koordinatat e prodhimit $q \bullet q'$ gjenden lehtë nga tabela e ngjyrosur, e cila ndërtohet si tabelë shumëzimi, ku çdo prodhimi të një koordinate të q me një koordinatë të q' i vihet para shënja + apo - sipas tabelës së shënjave.

Në tabelën e ngjyrosur koordinata e parë është shuma e kufizave në kuadratet e diagonales kryesore së tabelës që kanë ngjyrë qielli, koordinata e dytë është shuma e kufizave në kuadratet e tabelës që kanë ngjyrë blu, koordinata e tretë është shuma e kufizave në kuadratet e tabelës që kanë ngjyrë të verdhë, koordinata e katërt është shuma e kufizave në kuadratet e diagonales dytësore të tabelës që kanë ngjyrë kafe.

Tabela e prodhimit $q \bullet q'$

•	a'	b'	c'	d'
A	aa'	ab'	ac'	ad'
B	ba'	$-bb'$	bc'	$-bd'$
C	ca'	$-cb'$	$-cc'$	cd'
D	da'	db'	$-dc'$	$-dd'$

Tabela e shenjave.

+	+	+	+
+	-	+	-
+	-	-	+
+	+	-	-

Nga përkufizimet e mësipërme, nxirret lehtë që mbledhja dhe shumëzimi në bashkësinë $\mathbb{H}$ kanë vetitë e mëposhtme:

1. $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^3, (q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3);$
2. $\forall q \in \mathbb{H}, q + \theta = \theta + q = q;$
3. $\forall q \in \mathbb{H}, \exists -q \in \mathbb{H}, q + (-q) = \theta;$
4. $\forall (q_1, q_2) \in \mathbb{H}^2, q_1 + q_2 = q_2 + q_1;$
5. $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^3, (q_1 \cdot q_2) \cdot q_3 = q_1 \cdot (q_2 \cdot q_3);$
6. $\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^3, q_1 \cdot (q_2 + q_3) = q_1 \cdot q_2 + q_1 \cdot q_3$ dhe $(q_2 + q_3) \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 + q_3 \cdot q_1$

Katër vetitë e para tregojnë se struktura $(\mathbb{H}, +)$ është **grup abelian**; duke i shtuar kësaj dy vetitë e tjera del se struktura $(\mathbb{H}; +, \cdot)$ është **unazë**, por ajo nuk është abeliane. Nga tabela e prodhimit gjendet se

$$(0, 1, 0, 0) \cdot (0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 1)$$

dhe

$$(0, 0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, -1) \neq (0, 0, 0, 1),$$

që tregon se shumëzimi i kuaternioneve nuk është kommutativ.

Ndërkaq, ajo është *unazë e njësishe*, sepse nga formula (4) del i vërtetë pohimi:

$$\forall q \in \mathbb{H}, q \cdot (1, 0, 0, 0) = (1, 0, 0, 0) \cdot q = q, \quad (25)$$

i cili tregon se kuaternioni $(1, 0, 0, 0)$ është element i njësishe në unazën $(\mathbb{H}; +, \cdot)$.

Si në çdo grup abeljan, edhe në $(\mathbb{H}; +)$ futet veprimi i zbritjes, si veprim që çdo $(q, q') \in \mathbb{H}^2$ i lidh kuaternionin $q + (-q')$, i cili quhet *ndryshesë* e kuaternionit q me kuaternionin q' dhe shënohet $q - q'$. Pra,

$$q - q' = (a, b, c, d) - (a', b', c', d') = (a - a', b - b', c - c', d - d'). \quad (26)$$

Nga një teoremë te unazat themi se në unazën $\mathbb{H}$ shumëzimi është shpërndarës edhe në lidhje me zbritjen, d.m.th.

$$\forall (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{H}^3, q_1 \cdot (q_2 - q_3) = q_1 \cdot q_2 - q_1 \cdot q_3. \quad (27)$$

Lidhur me shumëzimin e kuaternioneve kanë vend teoremat e mëposhtëme.

TEOREMË 4.2.1.1. *Për çdo dy kuaternione $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \neq \theta$ dhe $p = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ nga $\mathbb{H}$ ekziston vetëm një kuaternion x , i tillë që*

$$q \cdot x = p \quad (28)$$

dhe vetëm një kuaternion y , i tillë që

$$y \cdot q = p \quad (29)$$

Le të jetë $x = (x_0, x_1, x_2, x_3)$. Nga formulat (1) dhe (4) kemi:

$$q \cdot x = p \Leftrightarrow$$

$$(q_0x_0 - q_1x_1 - q_2x_2 - q_3x_3, q_0x_1 + q_1x_0 + q_2x_3 - q_3x_2, q_0x_2 + q_2x_0 - q_1x_3 + q_3x_1, q_0x_3 + q_1x_2 + q_3x_0 - q_2x_1)$$

$$= (p_0, p_1, p_2, p_3)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} q_0x_0 - q_1x_1 - q_2x_2 - q_3x_3 = p_0, \\ q_1x_0 + q_0x_1 - q_3x_2 + q_2x_3 = p_1, \\ q_2x_0 + q_3x_1 + q_0x_2 - q_1x_3 = p_2, \\ q_3x_0 - q_2x_1 + q_1x_2 + q_0x_3 = p_3 \end{cases}$$

Matrica e këtij sistemi

$$A = \begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix}$$

është e rregull, sepse përcaktori i saj është

$$\begin{vmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{vmatrix} = (q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^2 \neq 0,$$

mbasi $q = (q_0, q_1, q_2, q_3) \neq (0, 0, 0, 0)$, që sjell $q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 > 0$. Kjo tregon se ai sistem ka një zgjidhje të vetme. Zgjidhjen e tij e gjejmë, duke i shënuar kuaternionet x , p në trajtë shtylle dhe duke i konsideruar ato si matrica me shënimet përkatësisht X , P . Në këto kushte sistemi merr pamjen matricore

$$\begin{pmatrix} q_0 & -q_1 & q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = P \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot P.$$

Vihet re lehtë se, në qoftë se shënojmë

$$k = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2,$$

atëherë $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right)^t \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right) = I_4$, që tregon se matrica $\left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right)$ është ortogonale. Prej kënde

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right)^{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right)^t = \frac{1}{\sqrt{k}} A^t \quad (*)$$

Nga ana tjetër, nga formula e matricës së anasjellë merret barazimi $(cA)^{-1} = \frac{1}{c} A^{-1}$, që sjell

$$\left(\frac{1}{\sqrt{k}} A\right)^{-1} = \sqrt{k} A^{-1} \quad (**)$$

Nga barazimet (*), (**) kemi $A^{-1} = \frac{1}{k} A^t$, që i jep zgjidhjes së sistemit trajtën

$$X = \frac{1}{k} A^t \cdot P,$$

ose

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Njëlloj tregohet se edhe ekuacioni (29) ka një zgjidhje të vetme $y = (y_0, y_1, y_2, y_3)$, përgjithsisht jo të barabartë me zgjidhjen (30), për mungesë të kommutativitetit të shumëzimit në $\mathbb{H}$.

RRJEDHIM. *Për çdo kuaternion $q \neq 0$, ekziston i anasjelli i tij q^{-1} , madje, në qoftë se $q = (q_0, q_1, q_2, q_3)$, ai ka trajtën*

$$q^{-1} = \left(\frac{q_0}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \frac{-q_1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \frac{-q_2}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}, \frac{-q_3}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \right) \quad (31)$$

Me të vërtetë, në qoftë se $p = (1, 0, 0, 0)$, (28) dhe (29) marrim trajtën $q \cdot x = (1, 0, 0, 0)$ dhe $x \cdot q = (1, 0, 0, 0)$, që, sipas Teoremës 4.2.1.1, tregojnë se ekzistojnë simetriku i djathtë dhe simetriku i majtë i $q \neq 0$. Në këtë rast, nga një teoremë e grupoideve [2], [31], [33], [36], ata janë të barabartë dhe japin simetrikun e q , d.m.th. të anasjellin i tij $x = q^{-1}$. Formula (30) në këto rrethana ka pamjen

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ -q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ -q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2} \begin{pmatrix} q_0 \\ -q_1 \\ -q_2 \\ -q_3 \end{pmatrix}$$

Prej nga marrim formulën (31).

TEOREMË 4.2.1.2. *Bashkësia $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} - \{0\}$ është nënbashkësi e qëndrueshme e $\mathbb{H}$ në lidhje me shumëzimin.*

Vërtetim. Le të jenë $q \neq \theta$ dhe $q' \neq \theta$. Supozojmë se $q \cdot q' = \theta$. Meqenëse $q \neq \theta$, nga rrjedhimi i Teoremës 4.2.1.1, ekziston q^{-1} , i tillë që $q^{-1} \cdot q = (1, 0, 0, 0)$. Nga vetitë e unazës $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, të përmendura më sipër, kemi

$$q' = (1, 0, 0, 0) \cdot q' = (q^{-1} \cdot q) \cdot q' = q^{-1} \cdot (q \cdot q') = q^{-1} \cdot \theta = \theta.$$

Kjo bie në kundërshtim me kushtin $q' \neq \theta$. Pra, në qoftë se $q \neq \theta$ dhe $q' \neq \theta$, atëherë $q \cdot q' \neq \theta$.

Teorema 4.2.1.2 tregon se shumëzimi, duke qenë shoqërues në $\mathbb{H}$ është shoqërues edhe në $\mathbb{H}^*$; veç kësaj, duke qenë se $(1, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}^*$, atëherë ai është njësh edhe i grupoidit $(\mathbb{H}^*, \cdot)$. Duke i bashkuar këtyre edhe rrjedhimin e mësipërm, arrijmë në përfundimin se grupoidi $(\mathbb{H}^*, \cdot)$ është grup.

Në këtë mënyrë del se **unaza** $(\mathbb{H}; +; \cdot)$ është trup.

4.2.2. TRUPI $\mathbb{H}$ I KUATERNIONEVE SI ZGJERIM I FUSHËS $\mathbb{C}$

Shënojmë $\mathbb{H}_1 = \{(a, 0, 0, 0) \mid a \in \mathbb{R}\}$. I shoqërojmë çdo numri real a kuaternionin $(a, 0, 0, 0) \in \mathbb{H}_1$. Përftohet kështu një bijeksion $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1$ i përcaktuar nga $\varphi(a) = (a, 0, 0, 0)$, $\forall a \in \mathbb{R}$. Ndërkaq, nga (23), kemi

$$(a_1; 0; 0; 0) + (a_2; 0; 0; 0) = (a_1 + a_2; 0; 0; 0)$$

dhe, nga (24), kemi

$$(a_1; 0; 0; 0) \cdot (a_2; 0; 0; 0) = (a_1 \cdot a_2; 0; 0; 0),$$

për çdo dy numra realë.

Barazimi i parë tregon se $\mathbb{H}_1$ është nënbashkësi e qëndrueshme e $\mathbb{H}$ në lidhje me mbledhjen, kurse i dyti, që ajo është e tillë dhe në lidhje me shumëzimin, d.m.th. $(\mathbb{H}_1, +, \cdot)$ është nënstrukturë e trupit $(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Duke i shkruar nga e djathta në të majtë dhe duke i shprehur me anë të bijeksionit φ , ata marrin pamjen

$$\varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2),$$

$$\varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2),$$

që tregojnë se φ është izomorfizëm i fushës $\mathbb{R}$ me strukturën $(\mathbb{H}_1, +, \cdot)$, prandaj edhe $\mathbb{H}_1$ është fushë [1], [15], [33], [36], [37], [39], [40], për rrjedhojë trup. Ka vend kështu kjo

TEOREMË 4.2.2.1. $(\mathbb{H}_1, +, \cdot)$ është nëntrup i trupit $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ të kuaternioneve.

Shënojmë tani me $\mathbb{H}_2 = \{(a, b, 0, 0) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. I shoqërojmë çdo numri kompleks $(a, b) \in \mathbb{C}$ kuaternionin $(a, b, 0, 0) \in \mathbb{H}_2$. Përftohet kështu një bijeksion $\theta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_2$ i përcaktuar nga

$$\theta(a, b) = (a, b, 0, 0), \forall (a, b) \in \mathbb{C}. \quad (32)$$

Po ashtu nga (23) dhe nga (24), kemi

$$(a_1; b_1; 0; 0) + (a_2; b_2; 0; 0) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0; 0)$$

dhe

$$(a_1; b_1; 0; 0) \cdot (a_2; b_2; 0; 0) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2; 0; 0),$$

që tregojnë se $\mathbb{H}_2$ është nënbashkësi e qëndrueshme e $\mathbb{H}$ në lidhje me mbledhjen dhe me shumëzimin. Pra, edhe $(\mathbb{H}_2, +, \cdot)$ është nënstrukturë e trupit $(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Prej tyre, sipas (32), për çdo dy çdo numra kompleksë $(a_1; b_1)$, $(a_2; b_2)$, marrim barazimet

1. $\theta((a_1; b_1) + (a_2; b_2)) = \theta(a_1 + a_2; b_1 + b_2) = (a_1 + a_2; b_1 + b_2; 0; 0)$
 $= (a_1; b_1; 0; 0) + (a_2; b_2; 0; 0) = \theta(a_1; b_1) + \theta(a_2; b_2);$
2. $\theta((a_1; b_1) \cdot (a_2; b_2)) = \theta(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2)$
 $= (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2; a_1 \cdot b_2 + b_1 \cdot a_2; 0; 0)$
 $= (a_1; b_1; 0; 0) \cdot (a_2; b_2; 0; 0)$
 $= \theta(a_1; b_1) \cdot \theta(a_2; b_2).$

Të dy së bashku tregojnë se θ është izomorfizëm i fushës $\mathbb{C}$ me strukturën $(\mathbb{H}_2, +, \cdot)$, prandaj edhe $\mathbb{H}_2$ është fushë, për rrjedhojë trup. Ka vend kështu kjo

TEOREMË 4.2.2.2. $(\mathbb{H}_2, +, \cdot)$ është nëntrup i trupit $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ të kuaternioneve.

Duke u bazuar në izomorfizmin $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}_1$, me marrëveshje, numrat a dhe $(a; 0; 0; 0)$ merren të barabartë. Pra,

$$\forall a \in \mathbb{R}, (a; 0; 0; 0) = a. \quad (33)$$

Po ashtu, bazuar në izomorfizmin $\theta: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{H}_2$, me marrëveshje, numri $(a, b) \in \mathbb{C}$ dhe kuaternioni $(a, b, 0, 0) \in \mathbb{H}_2$ merren të barabartë. Pra,

$$\forall (a, b) \in \mathbb{C}, (a; b; 0; 0) = (a, b). \quad (34)$$

Në këtë kuptim del se trupi $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ i kuaternioneve është zgjerim i fushës së numrave realë $\mathbb{R}$ dhe i fushës së numrave kompleksë $\mathbb{C}$.

4.2.3. TRAJTA ALGJEBRIKE E NJË KUATERNIONI

Sipas formulës (33), kemi $(0,0,0,0)=0$ dhe $(1,0,0,0) = 1$, kurse, sipas formulës (34), kemi $(0;1;0;0)=(0,1)=i$. D. m. th. për njësinë imagjinare i si kuaternion kemi $i = (0,1,0,0)$. Shënojmë akoma me j kuaternionin $(0,0,1,0)$ dhe me k kuaternionin $(0,0,0,1)$, d. m. th.

$$i = (0, 1, 0, 0),$$

$$j = (0, 0, 1, 0),$$

$$k = (0, 0, 0, 1).$$

Vëmë re se, sipas (24), këta numra gëzojnë vetitë

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1, \quad (35)$$

$$i \cdot j = k, \quad j \cdot k = i, \quad k \cdot i = j, \quad (36)$$

$$j \cdot i = -k, \quad k \cdot j = -i, \quad i \cdot k = -j, \quad (37)$$

dhe

$$bi = ib = (0; b; 0; 0), \quad (38)$$

$$cj = jc = (0; 0; c; 0), \quad (39)$$

$$dk = kd = (0; 0; 0; d). \quad (40)$$

Në këtë mënyrë, çdo kuaternion $q = (a, b, c, d)$, në saje të formulave të mësipërme mund të shkruhet në trajtën

$$q=(a,b,c,d)= (a;0;0;0)+(0;b;0;0)+(0;0;c;0)+(0;0;0;d)=a+bi+cj+dk. \quad (41)$$

Trajta (41) quhet *trajtë algjebrike* e kuaternionit $q=(a, b, c, d)$.

Nga formulat e mësipërme nxirret përfundimi, se **veprimet e mbledhjes, zbritjes, shumëzimit me dy kuaternione të shkruar në trajtë algjebrike kryhen si me dy shuma algjebrike të zakonshme , duke u kujdesur që prodhimet e njësive i, j, k ,aty ku çfaqen, t'i nënshtrohen formulave (35), (36), (37).** Kështu për shembull

$$1. (3-2i+5j-2k)+(-4+i-3j-3k)=3-2i+5j-2k-4+i-3j-3k$$

$$=(3-4)+(-2+1)i+(5-3)j+(-2-3)k= -1-i+2j-5k;$$

$$2. (-5+i-3j-4k) - (3-2i+6j-k)= -5+i-3j-4k-3+2i-6j+k= -8+3i-9j-3k;$$

$$3.(3-2i+6j-k)\cdot(-4+i-3j-3k)=$$

$$=-12+3i-9j-9k+8i+2+6k-6j-24j-6k+18-18i+4k-j-3i-3$$

$$=5-10i-40j-5k.$$

Në trajtën algjebrike $a+bi+cj+dk$ të një kuaternioni, a quhet *pjesa skalare* e kuaternionit, kurse (b,c,d) quhet *pjesa vektoriale* e tij. Ka vend kjo

TEOREMË 4.2.3.1. Në prodhimin $(b_1i+c_1j+d_1k)\bullet(b_2i+c_2j+d_2k)$ pjesa skalare është prodhimi skalar me shënjë të kundërt i pjesëve vektoriale përkatëse, kurse pjesa vektoriale është prodhimi vektorial i atyre pjesëve.

Në qoftë se vektorin-shtyllë $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ të pjesës vektoriale të kuaternionit $a+bi+cj+dk$ e

konsiderojmë matricë më 3×1 përmasa dhe $\begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}$ si matricë me 1×3 përmasa, atëherë Teorema e mësipërme shkurt shprehet nga formula:

$$(b_1i+c_1j+d_1k) \cdot (b_2i+c_2j+d_2k) = -\begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ c_1 \\ d_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & j & k \end{pmatrix}_{1\times 3}.$$

Duke futur në $\mathbb{H}$, krahas veprimit të brendshëm të mbledhjes, edhe veprimin e jashtëm të shumëzimit me numra realë me anë të pozimit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (a, b, c, d) \in \mathbb{H}, \lambda \cdot (a, b, c, d) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c, \lambda d), \quad (42)$$

ajo formon gjithashtu hapësirë lineare 4-përmasore mbi $\mathbb{R}$ me bazë $\{1, i, j, k\}$. Në këtë hapësirë, $\mathbb{H}_1$ dhe $\mathbb{H}_3 = \{q \in \mathbb{H} \mid q = bi + cj + dk\}$ janë nënhapësira lineare të saj, të tilla që $\mathbb{H}$ është shuma e drejtpërdrejtë e tyre:

$$\mathbb{H} = \mathbb{H}_1 \oplus \mathbb{H}_3.$$

4.2.4. NJË PLAN AFIN MBI KUATERNIONE

Meqenëse bashkësia $\mathbb{H}$ e kuaternioneve formon trup, atëherë sipas Teoremës 1.4, struktura e incidencës $\mathcal{A}_{\mathbb{H}} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, lidhur me të, është një plan afín, të cilin e quajmë *plani afín i kuaternioneve*.

Nga veti të caktuara të një plani afín, nga plani afín i kuaternioneve mund të dalin rezultate mbi bashkësinë $\mathbb{H}$ të kuaternioneve [79].

Për këtë vemë re se në një plan të tillë një pikë është një çift kuaternionesh (q_1, q_2) , që është një *ottet*, mbasi kur $q_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ dhe $q_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, pika ka pamjen:

$$([a_1, b_1, c_1, d_1]; [a_2, b_2, c_2, d_2]).$$

Ndërkaq një drejtëz ℓ është bashkësia e pikave $(x, y) \in \mathbb{H}^2$, që vërtetojnë ekuacionin

$$xa + yb = c, \quad (43)$$

ku $a, b, c \in \mathbb{H}$ dhe

$$(a, b) \neq (0_{\mathbb{H}}, 0_{\mathbb{H}}). \quad (44)$$

Në qoftë se ndryshoret kuaternionjane x, y dhe koeficientët e ekuacionit (43) i shënojmë në trajtën

$$x = (x_0, x_1, x_2, x_3), y = (y_0, y_1, y_2, y_3), a = (a_0, a_1, a_2, a_3),$$

$$b = (b_0, b_1, b_2, b_3), c = (c_0, c_1, c_2, c_3),$$

atëherë ekuacioni (43) shndërrohet në sistemin e mëposhtëm me 8 ndryshore dhe kater ekuacione reale

$$\begin{cases} a_0x_0 - a_1x_1 - a_2x_2 - a_3x_3 + b_0y_0 - b_1y_1 - b_2y_2 - b_3y_3 = c_0 \\ a_1x_0 + a_0x_1 + a_3x_2 - a_2x_3 + b_1y_0 + b_0y_1 + b_3y_2 - b_2y_3 = c_1 \\ a_2x_0 - a_3x_1 + a_0x_2 + a_1x_3 + b_2y_0 - b_3y_1 + b_0y_2 + b_1y_3 = c_2 \\ a_3x_0 + a_2x_1 - a_1x_2 + a_0x_3 + b_3y_0 + b_2y_1 - b_1y_2 + b_0y_3 = c_3 \end{cases}, \quad (45)$$

kurse kushti (44) merr trajtën

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 > 0. \quad (46)$$

Shembull 1. Le të na jenë dhënë dy pikat $P=[(1,2,-1,3), (2,1,3,-3)]$ dhe $Q=[(-1,3,5,2), (3,-1,5,7)]$. Të gjejmë ekuacionin e drejtëzës që kalon nëpër pikat P dhe Q .

Në ekuacionin $xa+yb=c$, na duhet të gjejmë tri koeficientët a , b dhe c . Vërejmë që jemi në rastin 3 të Teoremës 4.1.1, pasi $(1,2,-1,3) \neq (-1,3,5,2)$ dhe $(2,1,3,-3) \neq (3,-1,5,7)$, madje kemi edhe që:

$$(1,2,-1,3) \neq (0,0,0,0) \wedge (-1,3,5,2) \neq (0,0,0,0) \wedge (2,1,3,-3) \neq (0,0,0,0) \wedge (3,-1,5,7) \neq (0,0,0,0).$$

Atëherë sipas kësaj teoreme drejtëza $PQ \in \mathcal{L}_2$ dhe ka ekuacion të trajtës:

$$y = x \cdot k + g$$

Pra duhet të gjejmë koeficientët k dhe g .

Meqënëse

$$P \in PQ \Rightarrow (2,1,3,-3) = (1,2,-1,3)(k_1, k_2, k_3, k_4) + (g_1, g_2, g_3, g_4) \quad (*)$$

Njëlloj, m eqënëse

$$Q \in PQ \Rightarrow (3,-1,5,7) = (-1,3,5,2)(k_1, k_2, k_3, k_4) + (g_1, g_2, g_3, g_4) \quad (**)$$

Nga (*), kemi që:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

Nga (**) kemi që:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 & -3 \\ 2 & -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ g_4 \end{pmatrix}$$

Pra kemi për të zgjidhur një sistem ekuacionesh matricorë, që po e shënojmë,

$$\begin{cases} P1 = A \cdot k + g \\ Q1 = B \cdot k + g \end{cases} \Rightarrow (P1 - Q1) = (A - B) \cdot k \Rightarrow k = (A - B)^{-1} \cdot (P1 - Q1)$$

Meqënëse veprimet me kuaternionet janë shumë voluminoze, ne po rekomandojmë matlabin për këto llogaritje, kjo edhe për një arsye mjaft të fortë pasi veprimet me kuaternionet vijnë në veprime me matrica ortogonale. Megjithatë në rastin e këtyre llogaritjeve Matlab lë gabime në përafrimin e vlerave.

```
>> P1=[2;1;3;-3;]
```

```
P1 =
```

```
2
1
3
-3
```

```
>> Q1=[3;-1;5;7]
```

```
Q1 =
```

```
3
-1
5
7
```

```
>> A=[1 -2 -1 -3; 2 1 -3 -1; -1 3 1 -2; 3 1 2 1]
```

```
A =
```

```
1 -2 -1 -3
2 1 -3 -1
-1 3 1 -2
3 1 2 1
```

```
>> B=[-1 -3 5 -2; 3 -1 -2 5; 5 2 -1 -3; 2 -5 3 -1]
```

```
B =
```

```
-1 -3 5 -2
3 -1 -2 5
5 2 -1 -3
2 -5 3 -1
```

```
>> P1-Q1
```

```

ans =
    -1
     2
    -2
   -10
>> A-B
ans =
     2     1    -6    -1
    -1     2    -1    -6
    -6     1     2     1
     1     6    -1     2
>> inv(A-B)
ans =
   -0.0667   -0.0048   -0.1810    0.0429
   -0.0333    0.0571    0.0048    0.1524
   -0.2000    0.0333   -0.0667    0.0333
    0.0333   -0.1524    0.0429    0.0381
>> k=inv(A-B)*(P1-Q1)
k =
   -0.0095
   -1.3857
    0.0667
   -0.8048

```

Kemi gjetur kështu koeficientin $k = (-0.0095, -1.3857, 0.0667, -0.8048) \in \mathbb{H}$.

Gjejmë edhe

```

>> g=P1-A*k
g =
   -3.1095
    1.8000
    5.4714
   -0.9143

```

Gjetëm kështu edhe $g = (-3.1095, 1.8000, 5.4714, -0.9143) \in \mathbb{H}$.

Drejtëza që kalon nëpër pikat P dhe Q ka ekuacionin:

$$\begin{aligned} (y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot (-0.0095, -1.3857, 0.0667, -0.8048) + \\ + (-3.1095, 1.8000, 5.4714, -0.9143) \end{aligned}$$

Vërejmë që pika $O[(0,0,0,0), (0,0,0,0)] \in \mathbb{H}^2$, nuk është pikë e drejtëzës PQ (pasi kemi $g \neq (0,0,0,0)$).

Ndërtojmë tani drejtëzën që kalon nga pika O dhe është paralele me drejtëzën PQ . Jemi në rastin 3) të vërtetimit të Teoremës 4.1.2, në nënrastin a) të saj. Nga kjo teoremë kemi që drejtëza jonë ℓ_{PQ}^O ka ekuacion $y = x \cdot k$. Atëherë ekuacioni i drejtëzës ℓ_{PQ}^O është:

$$(y_0, y_1, y_2, y_3) = (x_0, x_1, x_2, x_3) \cdot (-0.0095, -1.3857, 0.0667, -0.8048).$$

PËRFUNDIME

Ky disertacion është një studim i shtrirë midis dy disiplinave matematikore, Algjebrës Abstrakte dhe Gjeometrisë Afine. Ai përqendrohet në zbulimin e disa raporteve, nga njera anë, të strukturës algjebrike të trupit dhe të strukturave të tjera algjebrike të lidhura me të, dhe, nga ana tjetër, me plane afine të fundme ose jo, dhe anasjellas.

Mbështetur në vetitë e njohura të pikave dhe të drejtëzave të një plani afin, paraqitur përmbledhtas në Kreun e parë, disertacioni kërkon fillimisht në këto bashkësi hap pas hapi struktura algjebrike grupesh, unazash asociative dhe trupash. Ndër rezultatet e këtij kërkimi, që përmbliidhen në Kreun e dytë, përmendim:

- Bazuar në Teoremën e njohur të zgjerimit të një plani afin në një plan projektiv me anë të pikave dhe drejtëzave ideale dhe në Teoremën e Desargut, vërtetojmë pohimin, që e kemi emërtuar *Teorema afine plane e Desargut*, "Le të jenë ABC dhe $A'B'C'$ dy trekulmësha me kulme jo të njejta në një plan afin $\mathcal{A}$. Ata janë perspektivë nga një pikë, vetëm atëherë kur $AC \parallel A'C'$ dhe $BC \parallel B'C'$ sjell $AB \parallel A'B'$ ". Pohimi, në një formulim tjetër, njihet si aksioma D2 e Desargut [9].

- Në një drejtëz, përcaktuar nga pikat O, I të një plani afin të Desargut, për çdo dy pika $A, B \in OI$, algoritmi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{OI}^{B_1} \cap \ell_{OB_1}^A = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right] \quad (3)$$

përcakton një pikë të vetme $C \in OI$, e cila nuk varet nga zgjedhja e pikës ndihmëse B_1 .

- Duke e përkufizuar veprimin e mbledhjes në OI bazuar në algoritmin (3), vërtetohet Teorema Grupoidi $(OI, +)$ është grup komutativ .

- Për çdo dy pika $A, B \in OI$, algoritmi

$$\left. \begin{array}{l} 1. B_1 \notin OI, \\ 2. \ell_{IB_1}^A \cap OB_1 = P_1, \\ 3. \ell_{BB_1}^{P_1} \cap OI = C. \end{array} \right\} \quad (11)$$

përcakton një pikë të vetme $C \in OI$, e cila nuk varet nga zgjedhja e pikës ndihmëse B_1 .

- Duke e përkufizuar veprimin e shumëzimit në OI bazuar në algoritmin (11), vërtetohen Teoremat

- Në një plan afër të Desargut grupoidi $(OI, *)$ është grup.

- Në një plan afër të Desargut algjebra $(OI, +, *)$ është unazë e njësishe.

- Në një plan afër të Desargut algjebra $(OI, +, *)$ është trup.

Në nxjerrjen e përfundimeve të mësipërme baza teorike është kryesisht nga gjeometria afine plane. Më tej, në Kreun e tretë, nxirren përfundime me bazë teorike kryesisht nga Algjebra abstrakte. Elementet e strukturave algjebrike që studiohen në këtë fazë janë objektet algjebrike të bijeksioneve (bijeksionet e bashkësisë së pikave të një plani afër, që ruajnë drejtëzat, të quajtur kolineacione formojnë bashkësinë $Kol_{\mathcal{A}}$), të endomorfizmave dhe endomorfizmave të ashtuquajtura gjurmëlënëse të grupit të një lloji të veçantë bijeksionesh të një plani afër, të cilat quhen zhvendosje. Disa nga këto përfundime janë:

- Bashkësia $Zgj_{\mathcal{A}}$ e zgjerimeve të një plani afër $\mathcal{A}$ formon grup në lidhje me përbërjen $\circ$.

• Në një plan afin lidhur me një zgjerim $\delta \neq id_{\mathcal{P}}$ të gjitha gjurmët $P\delta(P)$ për çdo $P \in \mathcal{P}$, ose kalojnë nga një pikë e vetme, ose janë paralele ndërmjet tyre.

• Në qoftë se për një pikë të caktuar P të një plani afin $\mathcal{A} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, është përcaktuar shëmbëllimi i saj $P' = \sigma(P)$ sipas një zhvendosjeje $\sigma \neq id_{\mathcal{P}}$ të tij, atëherë shëmbëllimi $Q' = \sigma(Q)$ i një pike tjetër $Q \in \mathcal{P} - \{P\}$ përcaktohet si më poshtë:

$$Q \notin PP' \Rightarrow \sigma(Q) = \ell_{PP'}^Q \cap \ell_{PQ}^{P'},$$

$$Q \in PP' \Rightarrow \exists S \notin PP', S' = \ell_{PP'}^S \cap \ell_{PS}^{P'} \text{ dhe } \sigma(Q) = PP' \cap \ell_{SQ}^{S'}$$

• Bashkësia $Zhv_{\mathcal{A}}$ e zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ formon grup në lidhje me përbërjen $\circ$, i cili është nëngrup i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të planit afin $\mathcal{A}$.

• Grupi $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ i zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ është nëngrup normal i grupit $(Zgj_{\mathcal{A}}, \circ)$ të zgjerimeve të atij plani.

• Grupi $(Zhv_{\mathcal{A}}, \circ)$ i zhvendosjeve të një plani afin $\mathcal{A}$ është abelian.

• Bashkësia e endomorfizmave të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten lidhur me mbledhjen $+$ dhe përbërjen $\circ$ në të është nënstrukturë e algjebres $\left((Zhv_{\mathcal{A}})^{Zhv_{\mathcal{A}}}, +, \circ\right)$ të pasqyrimeve të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten.

• Grupoidi $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +)$, ku $\mathbb{K}_{\mathcal{A}}$ është bashkësia e endomorfizmave gjurmëruajtës të $Zhv_{\mathcal{A}}$ mbi veten, është grup abelian.

• Algjebra $(\mathbb{K}_{\mathcal{A}}, +, \circ)$ është trup.

Disertacioni merr në shqyrtim dhe problemin e anasjellë në trajtën e ndërtimit të një plani afin duke u nisur nga një trup i dhënë $(K, \oplus, \otimes)$. Kjo përbën objektin e studimit të Kreut të katërt. Duke quajtur pika çifte të radhitura (α, β) , ku α dhe β janë

elementë të trupit K , kurse drejtëza bashkësinë e pikave që kënaqin ekuacione të tipit $x \otimes a \oplus y \otimes b = c$, ku $a \neq 0_K$ ose $b \neq 0_K$, ndërtohet një strukturë incidence $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$, të cilën e quajmë struktura e incidencës lidhur me trupin K . Studimi i saj na çon në përfundimin:

- Teorema 4.1.4. *Struktura e incidencës $\mathcal{A}=(\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ lidhur me trupin K është një plan afën lidhur me atë trup.*

Në kuadrin e përfundimeve të disertacionit duhen futur edhe

- Studimi në Kreun e parë të disa planeve afine të fundme, nga rendi i dytë në rendin e pestë, duke u fokusuar në dizënjim figure, në përcaktim të matrices së incidenës dhe në përcaktim të klasave të ekuivalencës sipas paralelizmit të drejtëzave për çdo plan të tillë.
- Aplikimi i planit afën të fundëm, në dy probleme me planifikim eksperimentesh. Shembulli i paraqitur në një planifikim eksperimenti në planin afën të rendit të tretë.
- Aplikimi i Teoremës 4.1.4 në ndërtimin e një plani afën në trupin konkret të Kuaternoneve dhe përdorimi i MATLAB-it, me anë të një shembulli, për gjetjen e drejtëzës që kalon nëpër dy pika të dhëna të këtij plani afën kuaternionesh.

REKOMANDIME.

1. Të shikohet mundësia e ndërtimit, në mënyrë të ngjajshme me tonën, të një Trupi mbi një Plan Projektiv, dhe anasjelltas. Të studjohen cilësitë e planit projektiv të ndërtuar mbi një trup.
2. Të shikohet mundësia e ndërtimit të një hapësire 3 dimensionale afine mbi një trup, ndoshta e anasjellta më e vështirë, por kemi mendimin që paraqet interes.
3. Mund të verifikohet nëse plani afín i ndërtuar në kreun 4 të disertacionit tonë është plan afín i desargut (mund të ndiqet edhe [88]). Interes paraqesin cilësitë e këtij plani, veçanërisht të planit afín të ndërtuar mbi trupin e kuaternioneve, meqënëse këto të fundit gjejnë aplikime të shumta.
4. Të shikohet mundësia e lidhjeve të planeve afín dhe planeve projektivë, edhe me struktura të tjera algjebrike (një ide është lidhur me strukturat e regullta (të rradhitura) mund të ndiqet [89]).
5. Mund të shtohet koncepti i koordinatizimit në një plan afín dhe shumë ndërtime të paraqitura në këtë disertacion mund të rishikohen në gjuhën e koordinatave. Mund të futet metrika në planin afín të koordinatizuar dhe të shikohet mundësia e aplikimeve.
6. Të shikohet mundësia nëse mund të ndërtohet një plan afín mbi hapsirat multivektorale, dhe të shihen lidhjet me Algjebrën e Klifordit.
7. Mendojmë që paraqet interes teorik dhe aplikativ, studimi i lidhjeve të gjeometrisë me algjebrat Li (Liee algebra), në linjën e komutatorëve dhe fushave vektoriale.
8. Interes paraqet edhe studimi i lidhjeve të gjeometrisë afine dhe projektive me gjeometrinë fraktale.

LITERATURA

- [1] **KRISTAQ FILIPI.(2013)** Algjebra Abstrakte. Botimi I, Botuar nga shtepia botuese MIRGERALB. ISBN 978-9928-07-147-7.
- [2] **KRISTAQ FILIPI (2015).** Algjebra dhe Gjeometria. Ribotim. Shtepia Botuese Edlora Tiranë. ISBN 978-9928-4270-0-7.
- [3] **FRANCIS BORCEUX (2014).** An Axiomatic Approach to Geometry (Geometric Trilogy I). Springer International Publishing Switzerland. ISBN 978-3-319-01729-7.
- [4] **FRANCIS BORCEUX (2014).** An Algebraic Approach to Geometry(Geometric Trilogy II). Springer International Publishing Switzerland. ISBN 978-3-319-01732-7.
- [5] **MARCEL BERGER (1987).** Geometry I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-11658-5.
- [6] **MARCEL BERGER (2010).** Geometry Revealed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. ISBN 978-3-540-70996-1.
- [7] **H. S. M. COXETER (1969).** Introduction to GEOMETRY. John Wiley & Sons, Inc. New York • London • Sydney • Toronto.
- [8] **D. HILBERT AND S. COHN.VOSSEN (1990).** Geometry And The Imagination. Chelsea Publishing Company.
- [9] **FLAMURE SADIKI. (2015)** Modele Strukturash Algjebrike Ternare Në Gjeometrinë Projektive. Disertacion Për Marrjen E Gradës Shkencore “Doktor”.
- [10] **JEAN GALLIER (2011).** Geometric Methods and Applications. (Texts in Applied Mathematics, vol 38). For Computer Science and Engineering. Second Edition. Springer Science+Business Media, LLC. ISBN 978-1-4419-9960-3.
- [11] **K.W. GRUENBERG AND A. J. WEIR (1977).** Linear Geometry (2nd Edition). (Graduate texts in mathematics ; vol 49). Springer-Verlag, New York Inc. ISBN 0-387-90227-9.
- [12] **F. BUEKENHOUT, (EDITORS)(1995).** HANDBOOK OF INCIDENCE GEOMETRY. Elsevier Science B.V. ISBN: 0 444 88355 X .
- [13] **GEORGE A. JENNINGS (1994).** Modern Geometry with Applications. Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-94222-X Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg.
- [14] **TAKESHI SASAKI.** Affine Geometry, projective geometry, and non-euklidean geometry. Mathematics concepts, and foundations vol I.
- [15] **NATHAN JACOBSON (1989).** Basic Algebra II. ISBN 0-7167-1480-9 (v. 1) ISBN 0-7167-1933-9 (v. 2). H. Freeman and Company.

LITERATURA

- [16] **REY CASSE (2006)**. Projective Geometry: An Introduction. Published in the United States by Oxford University Press Inc., New York. ISBN 0-19-929885-8.
- [17] **REINHOLD BAER (1966)**. Linear Algebra and Projective Geometry. Pure And Applied Mathematics. Academic Press Inc., Publishers New York, N.Y.
- [18] **FRANK AYRES (1967)**. Projective Geometry (Theory and Problems, schaum outline). Schaum publishing company. Printed in the united states of america..
- [19] **H. BEHNKE, F. BACHMANN, K. FLADT, W. SUSS (EDITORS).(1986)** Fundamentals Of Mathematics Volume II. The Massachusetts Institute of Technology. ISBN 0-262-02048-3.
- [20] **N. BOURBAKI. (2008)**. *Elements of mathematics: Algebra*, Springer-Verlag.
- [21] **SIMEON BALL AND ZSUZSA WEINER (2011)**. Finite Geometry.
- [22] **ELISABETH KUIJKEN (2003)**. A Study of Incidence Structures and Codes related to Regular Two-Graphs. Proefschrift voorgelegda an de Faculteit Wetenschappen tot het behalen van de graad van Doctor in de Wetenschappen richting Wiskunde.
- [23] **IVAN KOLÁŘ (1966)**. Geometric structure with Hilbert's axioms of incidence and order. Institute of Mathematics AS CR.Časopis oro pěstování matematiky, roc, Praha
- [24] **SHIFFMAN, BERNARD (1995)**. Synthetic Projective Geometry And Poincaré's Theorem On Automorphisms Of The Ball. L'enseignement Mathématique 41, P.201-215.
- [25] **GABOR MESZAROS (2011)**. Configurations in Non-Desarguesian Planes. Eotvos Lorand University Faculty of Science.
- [26] **ANTONIO PASINI (1982)**. Diagrams and incidence Structures. JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 33, 186-194.
- [27] **R. RUBIO AND A. RIDER (2008)**. An Axiom System for Incidence Spatial Geometry. RACSAM Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. VOL. 102 (2), pp. 237-249.
- [28] **EMIL ARTIN (1957&1988)**. Geometric Algebra. Interscience Tracts In Pure And Applied Mathematics Interscience Publishers, Inc., New York.
- [29] **DANIEL R. HUGHES . FRED C. PIPER (1973)**. Projective Planes . Spnnger-Verlag New York Inc. ISBN 0-387-90043-8 Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [30] **DANIEL R. HUGHES . FRED C. PIPER (1985)** "*Design theory*". London, New York,
- [31] **JOHN D. DIXON, BRIAN MORTIMER**. Permutation Groups. Graduate Texts in Mathematics Vol 163. Springer.
- [32] **LARRY C. GROVE (1983)**. Algebra. BY ACADEMPICKE SS. INC. ISBN 0 -12-304620-3.

- [33] **PIERRE ANTOÏNE GRILLET (2007)**. Abstract Algebra(Second Edition). Graduate Texts in Mathematics v242. ISBN-13: 978-0-387-71567-4Springer Science + Business Media, LLC
- [34] **SERGE LANG (1987)**. Linear Algebra (Third Edition). Springer-verlag new york, inc. ISBN 0-387-96412-6.
- [35] **T. Y. LAM (1991)**. A First Course in Noncommutative Rings. (Graduate Text in Mathematics Vol 131). Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 3-540-97523-3.
- [36] **SERGE LANG (2002)**. Algebra (Third Edition) (Graduate Text in Mathematics vol 211). Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-95385-X
- [37] **THOMAS W. HUNGERFORD (1974)**. Algebra (Graduate Text in Mathematics vol 73). Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-90518-9.\
- [38] **BRUCE E. SAGAN (2001)**. The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions,(Second Edition).Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-95067-2
- [39] **NATHAN JACOBSON (1964)**. Lectures in Abstract Algebra. Volume III. Theory of Fields and Galois Theory. ISBN 0-387-90168-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [40] **JOSEPH J. ROTMAN (2010)**. Advanced Modern Algebra(Second edition). Graduate Studies in Mathematics Volume 114. American Mathematical Society.
- [41] **STONE, H. S. (1973)**. Discrete Mathematical Structures and Their Applications. Chicago: Scientific Research Association.
- [42] **MARIA SCAFATI TALLINI (2012)**.Geometric Equivalence Between The Veblen And Desargues Theorems And Between The Pappus Pascal And The "Three Stars Theorems". Italian journal of pure and applied mathematics n. 29-2012 (pp.365-370)
- [43] **WOLFGANG BERTRAM (2013)**. Commutative And Non-Commutative Parallelogram Geometry: An Experimental Approach. Arxiv:1305.6851v1 [Math.Ho] 27 May 2013
- [44] **NORMAN L. JOHNSON. VIKRAM JHA. MAURO BILIOTTI**. Handbook of Finite Translation Planes. 2007 by Taylor & Francis Group, LLC.
- [45] **NATHAN JACOBSON (1953)**. Lectures in Abstract Algebra. Volume II. Linear Algebra. ISBN 0-387-90123-X Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin.
- [46] **DAVID HILBERT (1900)**. Les principes fondamentaux de la géométrie. Paris, Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire.
- [47] **AGUSTÍ REVENTÓS TARRIDA (2011)**. Affine Maps,Euclidean Motions and Quadrics. Springer-Verlag London Dordrecht Heidelberg New York.ISBN 978-0-85729-709-9.

- [48] **MICHELE AUDIN (2002).** Geometry. Institut de Recherche Mathematique Avancee, Universite Louis Pasteur et CNRS, 7 rue Rene Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
- [49] **G.ERIC MOORHOUSE. (2007)** Incidences Geometry.
- [50] **A. P. YEFREMOV. QUATERNIONS: ALGEBRA, GEOMETRY AND PHYSICAL THEORIES.**
- [51] **HAMILTON W. R. (1853)** Lectures on Quaternions, Dublin, Hodges & Smith.
- [52] **HAMILTON W. R. (1969),** Elements of Quaternions, Chelsey Publ. Co. N. Y.
- [53] **ANDREW J. HANSON (2006).** VISUALIZING QUATERNIONS. THE MORGAN KAUFMANN SERIES IN INTERACTIVE 3D TECHNOLOGY. Elsevier Inc ISBN 13: 978-0-12-088400-1.
- [54] **LOGAH PERUMAL (2011).** Quaternion and Its Application in Rotation Using Sets of Regions. International Journal of Engineering and Technology Innovation, vol. 1, no. 1, pp. 35-52.
- [55] **P.R.GIRARD (1984).** The quaternion group and modern physics. Eur. J. Phys. pp 25-32. Printed in Northern Ireland.
- [56] **EUGENE SALAMIN (1995).** Application of Quaternions to Computation with Rotations.
- [57] **LARRY SUSANKA (2014.).** An Introduction To Quaternions With Application to Rotations.
- [58] **DAVID EBERLY (2015).** Quaternion Algebra and Calculus. Geometric Tools, LLC <http://www.geometrictools.com/>.
- [59] **DANIEL MESSENGER (2014).** Quaternion Algebras: History, Construction, and Application.
- [60] **ROBERT GOLDBLATT (1987).** Orthogonality and Spacetime Geometry. Springer-Verlag New York Inc. ISBN-13: 978-0-387-96519-2. AMS Classification: 53-01, 53-B30.
- [61] **JOHN STILLWELL (2005).** The Four Pillars of Geometry. Library of Congress Control Number: 2005929630. Springer Science+Business Media, Inc. ISBN-13: 978-0387-25530-9.
- [62] **H.S.M. COXETER (1987).** Projective Geometry, second edition. Springer-Verlag New York Inc. ISBN 0-387-96532-7
- [63] **I.N. HERSTEIN (1999).** Abstract Algebra 3rd ed. John Wiley & Sons, Inc ISBN 0-471-36879-2.
- [64] **B.L. VAN DER WARDEN (1991).** Algebra, Volume I. Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-40624-7.

- [65] **B.L. VAN DER WARDEN (1991)**. Algebra, Volume II. Springer-Verlag New York, Inc. ISBN 0-387-40625-5.
- [66] **JOHN R. DURBIN (2009)**. Modern Algebra (sixth edition). John Wiley & Sons, Inc. ISBN-13 978-0470-38443-5, Printed in the United States of America.
- [67] **JOSEPH J. ROTMAN (1995)**. An Introduction to the Theory of Groups 4th edition. Springer verlag. . Graduate text in mathematics v148. ISBN 0-387-94285-8.
- [68] **JOSEPH A. GALLIAN (2013)**. Contemporary Abstract Algebra (Eighth Edition). Brooks/Cole, Cengage Learning. ISBN 987-1-133-59970-8.
- [69] **SHABAN BAXHAKU (1991)**. Gjeometria e Larte II ,Gjeometria Projektive per degen e Matematikes dhe per kualifikimin pasuniversitar. Shtepia botuese e librit universitar Tirane. Shtypur ne kombinatin poligrafik, shtypshkronja e dispensave, Tirane.
- [70] **ORGEST ZAKA (2011)**. Some Applications Of Group Theory. Proceedings Book (Iscim 2011) ISBN 978-9928-4044-8-0 (Pp 601-615).
- [71] **ORGEST ZAKA (2011)**. Image Understanding And Applications Of Symmetry Groups. (Jurnal Of Algebra And Computational Applications, Volume 1, Issue 1. ISSN 2217-6764 (pp 20-30)
- [72] **ORGEST ZAKA, GJERGJI CAPOLLARI. (2011)** Hapsirat Afine Mbi një K-Hapsire Vektoriale. Buletini Shkencor, Universitetit "Fan.S. Noli" Korçës. . ISSN 2078-7111 (fq117-122)
- [73] **ORGEST ZAKA, GJERGJI CAPOLLARI. (2011)** Sistemet Koordinative Afine Në Hapsirat Afine mbi K-Hapsirat Vektoriale. Buletini Shkencor, Universitetit "Fan.S. Noli" Korçës. . ISSN 2078-7111 (fq123-128)
- [74] **CHARLES WEIBEL (2007)**, "*Survey of Non-Desarguesian Planes*", Notices of the AMS **54** (10): 1294–1303.
- [75] **S. BILANIUK**, "*A problem course on Projective Planes*", Trent University, Ontario, Canada, 2003.
- [76] **FRANZ ROTHE (2010)**. SEVERAL TOPICS FROM GEOMETRY. Topics from Geometry. Mathematics subject classification: 51-01; 51A05; 51A30; 51Exx; 51Gxx; 51Fxx; 51M09; <http://math2.uncc.edu/~frothe/>
- [77] **ROBIN HARTSHORNE (2000)**. Geometry: Euclid and Beyond. Springer-Verlag New York, Berlin Heidelberg. ISBN 0-387-98650-2.
- [78] **ROBIN HARTSHORNE (1967)**, Foundations of projective geometry, Lecture Notes, Harvard University, vol.1966/67, W. A. Benjamin, Inc., New York. MR 0222751 (36 #5801).

[79] **ORGEST ZAKA, KRISTAQ FILIPI (2016).** ONE CONSTRUCTION OF AN AFFINE PLANE OVER A CORPS. JOURNAL OF ADVANCES IN MATHEMATICS, Council for Innovative Research. VOLUME 12 NUMBER 5. ISSN 23 47-19 21.

[80] **R.LINGENBERG, A.BAUER(1986).** Affine and Projective plane. FOUNDATIONS OF MATHEMATICS. Part A. FOUNDATIONS OF GEOMETRY.The Massachusetts Institute of Technology. ISBN 0-262-02048-3. pp 64-111.

[81] **P. M. COHN (1995).** Skew fields. Theory of general division rings. Cambridge University Press The Edinburgh Building, Cambridge CB2 8RU, UK. ISBN 978-0-521-43217-7 .

[82] **A.H. SCHOFIELD (1985).** Representation of rings over skew fields. London Mathematical Society Lecture Note Series: 92. Cambridge University Press. Library of Congress Catalogue Card Number: 84-22996. ISBN 978-0-521-27853-9

[83] **KARL MATHIAK (1986).** Valuations of Skew Fields and Projective Hjelmslev Spaces. Lecture Notes in Mathematics. ISBN 3-540-16099-X Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo.

[84] **ERNST KLEINERT (2000).** Units in Skew Fields. Springer Basel AG. Originally published by Birkhäuser Verlag, Basel.ISBN 978-3-0348-9555-2

[85] **ERIC LORD (2013).** *Symmetry and Pattern in Projective Geometry*. Springer London Heidelberg New York Dordrecht. Library of Congress Control Number: 2012954673. Mathematics Subject Classification: 00A66, 14N10, 14N20, 51A45, 51A05, 51E15, 51E20, 51N15, 97K26. 1st edition, published by Springer-Verlag. ISBN 978-1-4471-4630-8.

[86] **ORGEST ZAKA, KRISTAQ FILIPI (2016).** THE TRANSFORM OF A LINE OF DESARGUES AFFINE PLANE IN AN ADDITIVE GROUP OF ITS POINTS. Interntional Journal of Current Research, ISSN:0975-833X. Vol.8, Issue, 07. July. pp.34983-34990

[87] **ORGEST ZAKA, (2015).** THE CONSTRUCTION OF AN CORPS IN A AFFINE PLANE. INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTER SCIENCE AND COMMUNICATION ENGINEERING. 4th International Conference On Business, Technology and Innovation, Durrës, 6-7 November 2015, University Education for Business and Technology. Conference Book of Abstract pp.39.

[88] **ORGEST ZAKA,** TEOREMA E DEZARGUT DHE TEOREMA E PAPUSIT NË ALGJEBRËN GJEOMETRIKE. Takimi i V (Pestë) Vjetor Ndëkombëtar i Institutit Alb-Shkenca, Organizuar Në Tiranë. Seksioni i Shkencave Të Natyrës. Përmbledhje dhe Punime Shkencore të institutit Alb-Shkenca faqja 381. ISBN 978-9928-4001-7-8.

[89] **ORGEST ZAKA,** GJEOMETRIA E RREGULLT NË TRUPAT ALGJEBRIKË. RREGULLI ARKIMEDIAN. Takimi i V (Pestë) Vjetor Ndëkombëtar i Institutit Alb-Shkenca, Organizuar në Tiranë. Seksioni i Shkencave të Natyrës. Përmbledhje dhe Punime Shkencore të institutit Alb-Shkenca faqja 382. ISBN 978-9928-4001-7-8.