REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

Rr. "Muhamet Gjollesha",Tiranë Tel/fax: +355 4 2257294 www.upt.al

TEZË DOKTORATURE

PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE "DOKTOR"

SISTEMET DINAMIKE, ZBATIME TË TYRE NË POPULLIME

Përgatiti:

MSc. Alfred DACI

Udhëheqës shkencor:

Prof. Asoc. Luigj GJOKA

Tiranë, 2016

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

Rr. "Muhamet Gjollesha",Tiranë Tel/fax: +355 4 2257294 www.upt.al

DISERTACION
i
Paraqitur nga
MSc. Alfred DACI
Për marrjen e gradës shkencore
DOKTOR

Specialiteti : Ekuacione Diferenciale
Tema : **SISTEMET DINAMIKE, ZBATIME TË TYRE NË POPULLIME**

Udhëheqës Shkencor: Prof. Asoc. Luigj GJOKA

Mbrohet me dt. 06.12.2016 para jurisë

1. Prof. Asoc.	**Ligor**	**NIKOLLA**	**Kryetar**
2. Prof. Dr.	**Agron**	**TATO**	**Anëtar**
3. Prof. Dr.	**Xhezair**	**TELITI**	**Anëtar**
4. Prof. Asoc.	**Ilir**	**VARDHAMI**	**Anëtar (Oponent)**
5. Prof. Dr.	**Lulëzim**	**HANELLI**	**Anëtar (Oponent)**

TIRANË, 2016

PËRMBAJTJA

LISTA E FIGURAVE

FALENDERIME

Do të doja të falenderoja dhe shprehja mirënjohjen time për udhëheqësin tim, Prof. Asoc. Luigj GJOKA, për udhëzimet, durimin dhe entuziazmin e tij. Që nga fillimi, kur kam ndjekur studimet pasuniversitare, në “Ekuacione Diferenciale” pranë Fakultetit të Shkencave të Natyrës, ai ishte shumë përkrahës dhe në dispozicion për të diskutuar mbi matematikën me mua.

Do të doja të falenderoja anëtarët e Departamentit të Inxhinierisë Matematike për mbështetjen dhe këshillimin e tyre.

Falenderoj në veçanti bashkëshorten dhe familjen time, për mbështetjen dhe inkurajimin e tyre gjatë këtyre viteve, deri në përfundimin e disertacionit.

PËRMBLEDHJE

Zgjedhja e kësaj teme u motivua nga rëndësia që kanë aplikimet e sistemeve dinamike në studimin e popullimeve tek të cilat mendojmë se duhet të ketë një qasje dhe nga institucionet publike si INSTAT apo Ministria e Bujqësisë.

Shumica e dinamikave, të cilat mund të gjenden në praktikë ose teori, janë jolineare. Kjo e bën aplikimin e metodave analitike ose studimin e tyre jashtëzakonisht të vështirë, e cila është pothuajse e pamundur në teori. Aplikimet e ekuacioneve diferenciale tashmë përdoren në modelimin e lëvizjes dhe ndyshimit në të gjitha fushat e shkencës. Teoria e ekuacioneve diferenciale është bërë një mjet thelbësor në analizat demografike dhe ekonomike. Në këtë studim prezantojmë një nga teknikat më bazike të dinamikës: *interpretimin e një ekuacioni diferencial si fushë vektoriale*. Pikat fikse kontrollojnë sistemet dinamike. Studimi i këtyre pikave ka një rol shumë të rëndësishëm për t'i drejtuar drejt ekuilibrit, nëse janë të dobishme, përndryshe drejt shkatërrimit.

Objektivat e këtij kërkimi janë të kontrollojmë modelin, duke përfshirë parametrat, vlerat fillestare dhe nivelin e korrjes në mënyrë që popullsitë të mos zhduken ndonësë ato janë të korrura, si dhe të përcaktojmë llojin e stabilitetit të pikës ekuilibre pozitive.

Për më tepër, sugjerohet një interpretim gjeometrik i zgjidhjeve të ekuacioneve apo sistemeve diferenciale, pa kaluar përmes proçesit analitik të gjetjes së zgjidhjeve, i cili në shumë raste është praktikisht i pamundur për sistemet jolineare. Modeli që përfshin një popullsi të vetme është zgjidhur analitikisht dhe gjithashtu përshkruhet grafiku i të dhënave. Ndërsa për modelet e tjera, qëndrueshmëria e pikës së tyre ekuilibre shqyrtohet me metodën linearizuese duke paraqitur grafikisht trajektoret rreth pikës ekuilibre për sistemet jolineare.

Disa nga sistemet dinamike që hasim në praktikë përmbajnë parametra që mund të ndryshojnë. Pikërisht ndryshimi i këtyre parametrave kushtëzon dhe sjelljen e sistemit. Kështu që mund të ndodhë që një ndryshim i vogël i vlerës së një parametri të ketë ndikim të rëndësishëm mbi sjelljen e sistemit. Në veçanti, disa pika fikse mund të

zhduken e disa të tjera mund të shfaqen, ose ndoshta qëndrueshmëria e disa pikave fikse mund të ndryshojë.

Këto ndryshime cilësore në dinamikë të quajtura bigëzime si dhe vlera e parametrit ku ndodh kjo quhen *pika bigëzimi*. Përdorimi i modeleve matematikore në gjuetinë e peshkut ndihmon sektorin e hidrokulturës për të vlerësuar kur dhe sa peshk mund të peshkohet për të maksimizuar vlerën e sasisë së peshkut të përvetësuar, pa e zhdukur komplet popullimin. Këtu do të përdoret modeli logjistik i rritjes për të treguar rritjen e popullimit të peshkut si dhe do të merren në konsideratë tre strategji gjuetie: *konstante*, *proporcionale* si dhe ajo *periodike*. Për secilën strategji është llogaritur sasia optimale e gjuetisë së peshkut për të mbrojtur popullimin nga zhdukja. Gjithashtu kemi trajtuar marrëdhënien midis dy specieve ku janë shqyrtuar katër modele. Janë ilustruar një shumëllojshmëri trajektoresh zgjidhjeje për sistemet duke përfshirë ndërveprimin mes dy specieve në varësi të llojit: *konkurues*, *i dyanshëm* apo të llojit *gjahtar – pre*.

Fjalë kyçe: *Sistem Dinamik, pika fikse, fushë vektoriale, modeli logjistik, qëndrueshmëri, linearizim, konkurencë*

ABSTRACT

The choice of this topic was motivated by the importance of dynamical systems that arise in population dynamics. We believe that there should be an approach by public institutions such as the Ministry of Agriculture, INSTAT etc. The theory of differential equations has become an essential tool for demographic and economic analysis. Most of the processes that occur in practice are nonlinear. *Application of analytical techniques* for the study of these processes is extremely difficult. The application of differential equations are now used in modelling of motion and change in all scientific fields.In this work we present one of the most basic techniques for the study of dynamical systems: the interpretation of a differential equation as a vector field. Fixed points control the dynamical systems.The study of these points is crucial in order to take the system towards the equilibrium, otherwise towards destruction.

The main objectives of this work are to examine the mathematical model, including parameters, initial values and the level of harvest so that populations will not disappear although they are harvested and determine the type of stability of the pozitive equilibrium point.

Furthermore, we propose a geometric interpretation of solutions of differential equations, without going through the complicated process of finding analytical solutions, which in many cases it is practically impossible for nonlinear systems. A single population model is presented, the data of this model is described graphically, in this case an analytic solution is given. As for the other models, the stability of their equilibrium points are examined using linearization methods in which the trajectories of their equilibrium points of non-linear systems are presented graphically. Most of dynamical systems we encounter in practice contain parameters that can vary. It is the change of these parameters which determines the behavior of the system. It may happen that a small change in the value of a parameter has a significant impact on the system behavior. In particular, some fixed points can disappear and others may occur or the stability of some fixed points may change. These qualitative changes in dynamics are called bifurcation, while the corresponding values of the parameters in which this happens are called bifurcation points. The use of mathematical models in fishing helps the sector of aquaculture in order to evaluate when and how many fish can be harvested, to maximize the value of the size of fish obtained without eradicating the whole population. Here, to show the rising populations of fish a logistic growth model will be used, to analyse this model we will take into consideration three hunting strategy: constant, proportional and it periodically. Some calculation to determine the optimal amount of fishing for each strategy to prevent the population from extinction are performed. Also we handle the interaction between the two species, in which we explore four models. A variety of trajectory solutions for systems including interaction between the two species according to the type, competitive, mutual or type hunter - hunting has been presented.

Keywords: *dynamical systems, fixed points, vector field,logistic model,stability, linearization, competition*

Kapitulli 1

1.1. Hyrje

Shumë probleme në botë zakonisht përfshijnë sasi që ndryshojnë në mënyrë të vazhdueshme si p.sh distanca, shpejtësia, nxitimi, apo forca. Nga ana tjetër, shumë probleme në shkencat humane kanë të bëjnë me grumbullin e individëve, gjë që është diskrete dhe jo e vazhdueshme. Përderisa këtu përfshihen derivatet, e për rrjedhojë ekuacionet diferenciale, kanë kuptim vetëm për sasitë që ndryshojnë në mënyrë të vazhdueshme. Nëse popullsia në një problem biologjik është mjaftueshëm e madhe, ajo zakonisht mund të përafrohet, modelohet, nga një sistem i vazhdueshëm në të cilin shkalla e ndryshimit mund të shprehet si derivat dhe sjellja e sistemit mund të përshkruhet nga një sistem i ekuacioneve diferenciale.

Dinamika e popullsisë është studimi i ndryshimeve në popullsitë e sistemeve dhe si popullsia e një sistemi mund të ndikojë në popullsinë e një tjetri.

Ndryshimi i popullsisë mund të ketë pasoja të rëndësishme ekonomike dhe sociale. Për shembull, fermeri do të dijë sa e madhe është popullsia e insekteve shkatërruese kur prodhimi/ të korrat e tij janë në pikën më delikate dhe çfarë efektesh do të ketë spërkatja e pesticideve. Peshkatari do të dijë çfarë efektesh do të ketë kuota e peshkimit në rezervat e peshkimit dhe si pasojë në kapjen e peshkut. [48]

Ekzistojnë tre mënyra kryesore në të cilat kafshët e popullsive të ndryshme mund të ndërveprojnë. Ata mund të ndihmojnë rritjen e njëri – tjetrit, ose mund të pengojnë një rritje të tillë, ose njëri mund të ndihmojë dhe tjetri të pengojë. Këto njihen respektivisht si *specie konkurrente* dhe *gjahtar – pre*. Në sistemin e tretë njëra specie, gjahtari, ushqehet me specien tjetër, prenë. Për shembull, dhelprat mund të zënë dhe të vrasin lepujt, peshkaqenët konsumojnë peshqit e vegjël në det. Prandaj, prezenca e

peshkaqenëve rrit shkallën e vdekjes së peshqëve të vegjël dhe prezenca e peshqve të vegjël rrit furnizimin dhe si pasojë shkallën e lindjes së peshkaqenëve. Në sistemin e specieve konkuruese, të dyja popullsitë konkurojnë për të njëjtat burime, zakonisht për ushqim. Në sistemin gjahtar – pre nuk është e qartë se si popullsitë e specieve variojnë dhe një model matematikor mund të na ndihmojë të parashikojmë sjelljen e popullsive.
Ky kërkim prezanton një model të sjelljes së një popullsie duke përdorur modelin përcaktues, i cili paraqitet si një sistem i ekuacioneve diferenciale. Modelet janë modeli Malthusian dhe modeli logjistik, ndërsa modeli që përfshin dy ose më shumë popullsi bazohet në modelin Lotka – Volterra. [48]

Struktura e Studimit

Në kapitullin e dytë paraqiten Sistemet dinamike në drejtëz, sistemet dinamike në plan, si dhe Sistemi dinamik parametrik. Qëllimi i këtij kapitulli është të mësojmë se si mund të interpretohen nga ana gjeometrike zgjidhjet e ekuacioneve apo sistemeve diferenciale, pa kaluar përmes procesit analitik të gjetjes së zgjidhjeve, i cili në shumë raste është praktikisht i pamundur. Kjo arrihet duke ndërthurur ***metodën analitike*** me ***intuitën gjeometrike***. Gjithashtu jepet një përshkrim në lidhje me popullsinë e Shqipërisë dhe projeksionet për të ardhmen.

Në kapitullin e tretë paraqiten modelet logjistike. Këtu kemi përdorur modelet matematikore për menaxhimin e vjeljes së peshkut kocë në një rezervuar në Sarandë. Përdorimi i modeleve matematikore në gjuetinë e peshkut ndihmon sektorin e hidrokulturës për të vlerësuar kur dhe sa peshk mund të peshkohet për të maksimizuar vlerën e sasisë së peshkut të përvetësuar pa e zhdukur komplet popullimin. Këtu do përdoret modeli logjistik i rritjes për të treguar rritjen e popullimit të peshkut, si dhe do merren në konsideratë tri strategji gjuetie: konstante, proporcionale si dhe ajo periodike. Për secilën strategji është llogaritur sasia optimale e gjuetisë së peshkut për të mbrojtur popullimin nga zhdukja.

Në kapitullin e katërt paraqiten modelet e popullimit me dy specie. Kemi shprehur ekuacionet për sa i përket dy specieve që konkurojnë për të njëjtin furnizim. Këtu janë përdorur katër modele: modeli me konkurencë dhe me jo mbipopullim, modeli gjahtar – pre pa mbipopullim: modeli Lotka – Volterra, modeli me konkurencë dhe me mbipopullim, si dhe modeli gjahtar – gjah me mbipopullim. Kemi analizuar modelet gjeometrikisht si dhe kemi përdorur metodën e linearizimit për përcaktimin e qëndrueshmërisë së pikave fikse. Të gjitha modelet e marra në konsideratë do të analizohen për qëndrueshmërinë e pikës së tyre ekuilibre, nëse ka, dhe do të përcaktojmë kushtet e duhura dhe të mjaftueshme për ekzistencën e pikës ekuilibre, nëse është e mundur. Për këtë qëllim, merren në konsideratë disa supozime.

Metodat e përdorura për të studiuar qëndrueshmërinë e pikës ekuilibre janë metodat intuitive (gjeometrike), metoda e linearizimit, metoda e vlerës vetjake, si dhe me programin MAPLE. Programi MAPLE përdoret për studimin e ekuacioneve diferenciale, duke eliminuar veshtirësitë në llogaritje dhe duke bërë disa paraqitje grafike të tyre bashkë me drejtimin e fushës. Një paraqitje e tillë grafike është më shumë iluminuese dhe e dobishme për të kuptuar dhe interpretuar zgjidhjen e modelit.

Objektivat e këtij kërkimi janë të kontrollojmë modelin, duke përfshirë parametrat, vlerat fillestare dhe nivelin e korrjes në mënyrë që popullsitë të mos zhduken, ndonëse ato janë të korrura edhe të përcaktojmë llojin e stabilitetit të pikës ekuilibre pozitive. Modeli që përfshin një popullsi të vetme është zgjidhur analitikisht dhe gjithashtu përshkruhet grafiku i të dhënave. Ndërsa për modelet e tjera, qëndrueshmëria e pikës së tyre ekuilibre shqyrtohet me metodën linearizuese, duke paraqitur grafikisht trajektoret rreth pikës ekuilibre për sistemet jolineare.

Për realizimin e këtij studimi janë përdorur një sërë burimesh shkencore si: libra, artikuj, revista dhe konferenca shkencore, publikime shkencore, komunikim me kolegët, etj.

1.2 Koncepte të përgjithshme

Hapësira e dukurive ku ndeshen dinamikët është sa e gjërë aq edhe e larmishme. Dinamikët takohen më shpesh në fushat e shkencave natyrore, si Fizika, Biologjia, Kimia, Astrofizika etj. Rol të dorës së parë ka studimi i sjelljes së dinamikëve në fusha të ndryshme të teknikës si për shembull, në Mekanikë, Ballistikë, Aeronautikë, Elektronikë, Radiologji, Kriptologji etj.

Objektivi kryesor i këtij studimi është thellimi në aplikimet e dinamikëve.

Matematika e aplikuar në ditët e sotme ka një tërheqje të jashtëzakonshme. Studimi i ekuilibrave dhe i disekuilibrave të sistemeve dinamikë është mënyra më e mirë për të kuptuar se edhe në kaos "mbretërojnë" rregulla, të cilat bëjnë që dukuritë të kenë identitet, si dhe të perceptohen e studiohen nga kërkuesit shkencorë.

Ne jemi njohur me ide të dinamikës në fusha të ndryshme – në kurse të ekuacioneve diferenciale, mekanikës klasike, kimisë kinetike, biologjisë së popullsimeve dhe të tjera. Studimi i dinamikës fillon në kreun 2, por përpara se të thellohemi në të po paraqesim përkufizimin e sistemit dinamik abstrakt me disa veti të tij.

***Përkufizim 1*:** Sistem dinamik quhet katërshja $\{H, \rho, R, f\}$ ku H është një bashkësi, ρ një funksion largesë në të, R bashkësia e numrave realë dhe f një pasqyrim i hapësirës $H \times R$ në hapësirën H që plotëson kushtet:

1. $f(x,0) = x$ për çdo pike x të hapësirës H.
2. $f(f(x,t_1),t_2) = f(x,t_1+t_2)$ për çdo pikë x të hapësirës H dhe çdo dy numra realë t_1 e t_2.
3. f është pasqyrim i vazhdueshëm në çdo pikë (x,t) të hapësirës $H \times R$.[1]

Këto kushte quhen përkatësisht kushti fillestar, kushti i grupit dhe kushti i vazhdueshmërisë.

Nëpërmjet sistemit dinamik $\{H, \rho, R, f\}$ për çdo numër real t ndërtohet transformimi f_t i hapësirës H, i cili çdo pike x të saj i vë në korrespondencë pikën $f(x,t)$ të po asaj hapësire. Pra sistemi dinamik $\{H, \rho, R, f\}$ përcakton një familje njëparametrike $G = \{f_t\}_{t \in R}$ transformimesh të hapësirës H.

Parametri t quhet kohë, hapësira H quhet hapësirë fazore. Bëjmë këto shënime:

$R^{+}=[0,+\infty[,\quad R^{-}=]-\infty,0]$

$f(A,K)=\{f(x,t)/x\in A,t\in K\}$

për çdo bashkësi A nga H dhe çdo bashkësi K nga R ,

$\sum_{A}=f(A,R),\ \sum_{A}^{+}=f(A,R^{+})$ dhe $\sum_{A}^{-}=f(A,R^{-})$

Le të jetë x një pikë e hapësirës H .

Pasqyrimi $f(x,t):R\to H$ quhet lëvizje, ndërsa bashkësia $f(x,R)$ quhet trajektore e kësaj lëvizjeje.

Bashkësitë $f(x,R^{+})$ dhe $f(x,R^{-})$ quhen përkatësisht gjysmëtrajektorja pozitive dhe gjysmëtrajektorja negative që nisen nga pika x .

Bashkësia $f(x,[T_1,T_2])$ quhet segment trajektoreje dhe numri T_2-T_1 gjatësi kohe e tij. [1]

Pohim 1. Nëpër çdo pikë të hapësirës H kalon një dhe vetëm një trajektore.

Pohim 2. Lëvizja e pikës x përcakton në mënyrë të vetme lëvizjen e çdo pike të trajektores $f(x,R)$.

Përkufizim 2. Lëvizja $f(x,t)$ quhet qetësi në qoftë se $f(x,t)=x,\ \forall x\in R$ .Trajektorja që i përgjigjet një lëvizjeje të tillë quhet pikë qetësie.

Përkufizim 3. Lëvizja $f(x,t)$ quhet lëvizje periodike në qoftë se ajo nuk është qetësi dhe ekziston të paktën një numër real $\alpha\neq 0$ i tillë që $f(x,\alpha)=x$. Numri α më i vogël pozitiv që plotëson atë kusht quhet periodë e lëvizjes. Pika x quhet pikë periodike dhe ai numër periodë e saj.

Trajektorja që i përgjigjet një lëvizjeje të tillë quhet trajektore periodike.

Përkufizim 4. Lëvizja $f\left(x,t\right)$ quhet lëvizje e zakonshme në qoftë se $f\left(x,t\right)\neq x$, $\forall x\neq 0$. Pika x quhet pikë e zakonshme.

Trajektorja që i përgjigjet një lëvizjeje të tillë quhet trajektore e zakonshme.

Qetësia dhe lëvizja periodike quhen zakonisht lëvizje të posaçme; trajektoret përkatëse quhen trajektore të posaçme.

Kapitulli 2

SISTEMET DINAMIKE

2.1 Rishikimi i literaturës – Konceptet themelore

Shumë dukuri nga fusha të ndryshme të shkencës dhe teknikës modelohen matematikisht me anë të ekuacioneve diferenciale lineare ose jolineare. Mirëpo jo gjithmonë mund të gjenden zgjidhjet e tyre. Për shembull, dihet se ndër ekuacionet diferenciale lineare të rendit dytë, mund të zgjidhen analitikisht kryesisht ato me koeficientë konstantë.

Qëllimi i këtij kreu është të mësojmë se si mund të interpretohen nga ana cilësore zgjidhjet e ekuacioneve apo sistemeve diferenciale, pa kaluar përmes procesit analitik të gjetjes së zgjidhjeve. Kjo arrihet duke ndërthurur metodën analitike me intuitën gjeometrike.

Objekt studimi i këtij kreu janë *sistemet dinamike*.

Sistemi dinamik është çdo model matematik që përshkruan gjendjen e një sistemi në kohë.

Për shembull, modelet matematike që përshkruajnë lëkundjet e lavjerrësit matematik, rrjedhën e ujit në një tub, numrin e banorëve të një metropoli, rrezatimin lazer, etj. janë *sisteme dinamike*.

Le të marrim një shembull:

Banorët e dy ishujve të vegjël rregullisht lëvizin midis këtyre dy ishujve. Supozojmë që çdo vit, afërsisht 3% e banorëve të ishullit 1 lëvizin drejt ishullit 2, dhe 5% e banorëve të ishullit 2 lëvizin drejt ishullit 1. Nëse

$x(t) = popullsia\, e\, ishullit\ 1\ në\, kohën\ \ t$

$y(t) = popullsia\, e\, ishullit\ 2\ në\, kohën\ \ t$

ku t është koha e matur në vite, të modelohet situata e mësipërme si sistem dinamik me kohë të vazhdueshme.

Zgjidhje: Për të modeluar këtë problem si sistem dinamik me kohë të vazhdueshme do të shprehim $\frac{dx}{dt}$ dhe $\frac{dy}{dt}$ në varësi të x dhe y.

Shkalla e ndryshimit të banorëve të ishullit 1 në njerëz është afërsisht $-0.03x + 0.05y$ (ishulli 1 humb afërsisht 3% njerëz në vit dhe fiton 5% nga ishulli 2). Në mënyrë të ngjashme shkalla e ndryshimit të banorëve të ishullit 2 është $\frac{dy}{dt} = 0.03x - 0.05y$. Kështu që modelimi si sistem dinamik me kohë të vazhdueshme do të jetë si më poshtë:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.03x + 0.05y \\ \frac{dy}{dt} = 0.03x - 0.05y \end{cases}$$

Në këtë kapitull do të shohim sistemin dinamik në drejtëz, sistemin dinamik në plan dhe sistemin dinamik parametrik.

2.2 Ndërlikimet e sistemeve jolineare

Shumë probleme të praktikës modelohen matematikisht me anë të sistemit diferencial

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, ..., x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, ..., x_n, t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, ..., x_n, t) \end{cases} \tag{2.1}$$

i cili, siç e dimë, është një sistem normal i rendit të parë. [30], [31], [3]

Në qoftë se në sistemin (2.1) mungon në mënyrë të drejtpërdrejtë ndryshori t, atëherë ai merr trajtën

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{2.2}$$

dhe quhet *sistem normal autonom*.

Këtu ndryshoret $x_1, x_2, \ldots, x_n$ janë karakteristika sasiore të ndonjë dukurie fizike, kimike, biologjike etj. dhe quhen ***ndryshore dinamike*** të dukurisë (sistemit) që modelohet matematikisht me anë të (2.1).

Për shembull, ato mund të jenë vlerat e përqendrimeve të disa lëndëve kimike në ndonjë reaktor, popullsitë e specieve të ndryshme në një habitat të caktuar etj.

Shënim. Me anën e zëvendësimit të thjeshtë $t = x_{n+1}$ *sistemi joautonom* (2.1) mund të kthehet në sistem autonom. Vërtet, meqenëse $\dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1$, nga zëvendësimi i $t = x_{n+1}$, sistemi (2.1) merr trajtën

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}) \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \end{cases} \tag{2.3}$$

Ndodh gjithashtu që sistemi dinamik të jetë ekuacion diferencial i rendit më të lartë se një. Në këtë rast, ekuacioni mund të shndërrohet në një sistem autonom.

Shembull 1. Dihet që lëkundjet që shuhen, modelohen matematikisht nga ekuacioni diferencial linear i rendit të dytë [49]

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \nu\frac{dx}{dt} + kx = 0 \tag{2.4}$$

Lëkundje që shuhen janë për shembull lëkundjet e lira të një suste elastike në praninë e forcave të rezistencës.

Këtë ekuacion mund ta shndërrojmë në sistem diferencial autonom me anë të zëvendësimeve

$$x_1 = x, \qquad x_2 = \frac{dx}{dt} \tag{2.5}$$

Vërtet, meqenëse

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = x_2 \quad \text{dhe} \qquad \frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\nu}{m}\frac{dx}{dt} - \frac{k}{m}x\,,$$

zëvendësimet (2.5) e shndërrojnë ekuacionin (2.4) në sistemin

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = -\dfrac{\nu}{m}x_2 - \dfrac{k}{m}x_1 \end{cases} \tag{6}$$

Problemi i integrimit të sistemeve diferenciale është teorikisht dhe praktikisht i përfunduar vetëm për sistemet diferenciale lineare me koeficiente konstante. Mirëpo në praktikë, jo rrallë, hasen probleme që modelohen matematikisht me sisteme diferenciale jo lineare.

Shembull 2.Lëkundjet e lavjerrësit matematik modelohen matematikisht me anë të ekuacionit [49]

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin x=0 \tag{2.7}$$

Ku x është këndi i shmangies së lavjerrësit nga boshti vertikal i ekuilibrit të tij, g nxitimi i rënies së lirë dhe l gjatësia e tij. Me anën e zëvendësimeve

$$x_1 = x, \qquad x_2=\frac{dx}{dt}$$

ekuacioni shndërrohet në sistemin jo linear:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=x_2\\ \dfrac{dx_2}{dt}=-\dfrac{g}{l}\sin x_1\end{cases} \tag{2.8}$$

Fakti që sistemi (2.8) është jo linear e bën atë shumë të ndërlikuar për ta zgjidhur në mënyrë analitike.

Për studimin e zgjidhjeve të sistemeve jolineare, përdoren metoda gjeometrike, me disa nga të cilat do të njihemi në vazhdim.

Supozojmë që dimë një zgjidhje për sistemin (2.8) për një kusht fillestar të dhënë. Kjo zgjidhje do të ishte një çift funksionesh $\left(x_1(t),x_2(t)\right)$, ku x_1 dhe x_2 përfaqësojnë përkatësisht zhvendosjen e lavjerrësit nga vendndodhja e ekuilibrit dhe shpejtësinë e lavjerrësit. Nëse shqyrtojmë një sistem koordinativ Ox_1x_2, atëherë zgjidhja $\left(x_1(t),x_2(t)\right)$ paraqitet në këtë sistem me një vijë të cilën e përshkruan pika $\left(x_1,x_2\right)$ me ndryshimin e $t-s\ddot{e}$, duke u nisur nga pika $\left(x_1(0),x_2(0)\right)$ (Fig. 2.1). [30], [49]

Kjo vijë quhet ***trajektore***, dhe plani koordinativ Ox_1x_2 quhet ***hapësirë fazore*** për sistemin (2.8).

Ndërkohë, sistemi (2.8) i plotëson kushtet e ekzistencës dhe unicitetit të zgjidhjes së problemit Koshi në të gjitha pikat e planit koordinativ x_1Ox_2. Kështu, ky plan (hapësira fazore) është i mbushur me trajektore, përderisa çdo pikë mund të shërbejë si kusht fillestar.

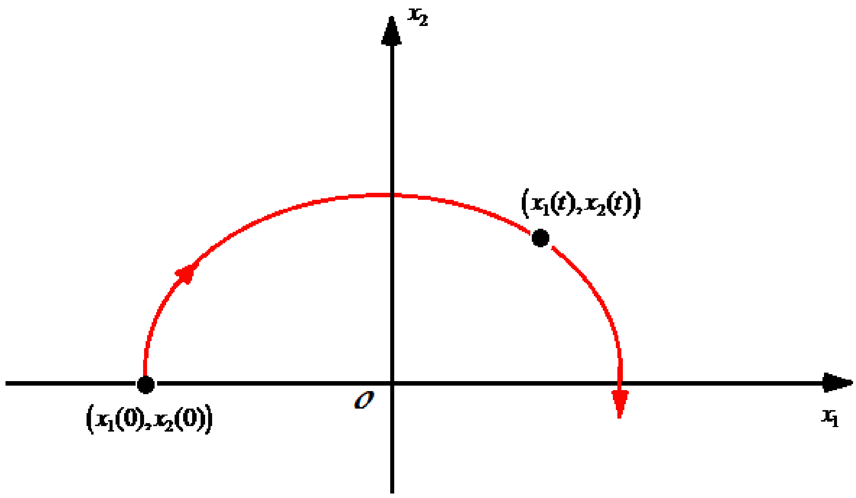


Figura 2.1

Qëllimi i metodës gjeometrike është skicimi i trajektoreve të sistemit pa e zgjidhur atë, sikurse dhe nxjerrja e informacionit për lavjerrësin duke analizuar trajektoret e skicuara.

Hapësira fazore për sistemin e përgjithshëm (2.2) është hapësira me n përmasa $\Re^n$, ku pikat kanë koordinata $x_1, x_2, ..., x_n$.

Për $n > 3$, nuk mund të skicohen trajektoret e sistemit dinamik.

Në vijim do të analizojmë sistemet dinamike me një dhe dy përmasa, pra sistemet dinamike në drejtëz dhe në plan.

2.3 Sistemet dinamike në drejtëz

2.3.1 Një mënyrë gjeometrike të menduari

Në paragrafin e mëparshëm mësuam se disa sisteme dinamike në hapësirën me n përmasa janë sisteme diferenciale normale dhe autonome.

Është e kuptueshme që një sistem dinamik në hapësirën me një përmasë (drejtëz) është një ekuacion diferencial i trajtës

$$x' = f(x) \qquad \left(\text{ose} \ \ \frac{dx}{dt} = f(x)\right) \tag{2.9}$$

Këtu, x është ***ndryshori dinamik*** dhe t është koha.

Të njohësh gjendjen në kohë të sistemit dinamik (2.9), do të thotë të njohësh $x(t)$ në çdo çast t, duke ditur $x(0)$. Pra, duke njohur gjendjen e sistemit në çastin $t = 0$, duhet të gjejmë gjendjen e tij në të ardhmen, apo në të kaluarën. [49], [30], [41], [3]

Shembull. Shqyrtojmë sistemin dinamik një përmasor [49], [17]

$$x' = \sin x \qquad \left(\frac{dx}{dt} = \sin x\right) \tag{2.10}$$

Sistemi dinamik (2.10) është jolinear, megjithatë ky është nga rastet e rralla kur ai mund të studiohet në mënyrë analitike, sepse ekuacioni (2.10) mund të zgjidhet si vijon:

$$x' = \sin x \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = \sin x \overset{(x \neq k\pi)}{\Leftrightarrow} \frac{dx}{\sin x} = dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln|C| = t \Leftrightarrow t = \ln\left|C \cdot tg\frac{x}{2}\right| \tag{2.11}$$

Në qoftë se interesohemi për zgjidhjen e veçantë të (2.10) që plotëson kushtin fillestar

$$x\big|_{t=0} = x_0 \tag{2.12}$$

do të gjenim:

$$0 = \ln\left|C \cdot tg\frac{x_0}{2}\right| \Leftrightarrow C \cdot tg\frac{x_0}{2} = e^0 = 1 \Leftrightarrow C = cotg\frac{x_0}{2}$$

Kështu, zgjidhja e problemit Koshi (2.10) - (2.13) është

$$t = \ln\left|\text{cotg}\frac{x_0}{2} \cdot \text{tg}\frac{x}{2}\right| \tag{2.13}$$

Ky rezultat është i saktë, por jo komod për t'u interpretuar. Për shembull, a mund t'u përgjigjemi menjëherë pyetjeve të mëposhtme?

Pyetja 1. Supozojmë që $x_0 = \frac{\pi}{4}$. A mund të skicojmë grafikisht zgjidhjen e veçantë

$$t = \ln\left|\operatorname{cotg}\frac{\pi}{8}\cdot \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| \tag{2.14}$$

$t > 0$ dhe a mund të themi se çfarë ndodh me zgjidhjen (2.14) kur $t \to \infty$?

Pyetja 2. Për një kusht fillestar të çfarëdoshëm x_0, a mund të themi se çfarë ndodh me zgjidhjen (2.13) kur $t \to \infty$?

Për këto pyetje shohim që formula (2.11) nuk jep përgjigje të menjëhershme.

Do tregojmë një rrugë të tërthortë për t'u dhënë përgjigje këtyre pyetjeve.

E zëmë se një lëng rrjedh sipas boshtit Ox duke iu bindur formulës (ligjit) $x' = \sin x$, që do të thotë se pikla e lëngut që ndodhet në pikën x, në një çast të çfarëdoshëm t, e ka shpejtësinë $\sin x$.

Formula $x' = \sin x$ përcakton një **fushë drejtimesh** në boshtin Ox, ajo tregon vektorin e shpejtësisë x' të piklës së lëngut që në çastin t ndodhet në pikën x të drejtëzës. Për të skicuar këtë fushë vektoriale, është me vend të paraqesim grafikisht në sistemin koordinativ xOx' barazimin $x' = \sin x$, dhe pastaj të skicojmë me anë të shigjetave në boshtin Ox **vektorin e shpejtësisë** x' në disa pika si në Fig. 2.2. [49], [30]

Shigjetat janë të drejtuara nga e djathta kur shpejtësia $x' > 0$ dhe nga e majta kur shpejtësia $x' < 0$.

Në intervalet e boshtit Ox, ku $x' > 0$, rryma e lëngut është e drejtuar djathtas, ndërsa në intervalet ku $x' < 0$, kjo rrymë është e drejtuar majtas.

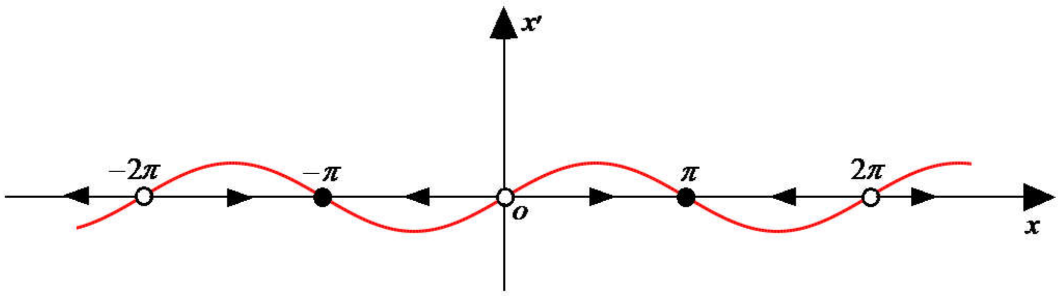


Figura 2.2

Në pikat x, ku $x' = 0$, d.m.th në pikat $x_k = k\pi$, ku $k = 0; \pm 1; \pm 2, \ldots$ nuk ka rrymë, sepse në këto pika shpejtësia është zero.

Pikat x, ku $x' = 0$, quhen ***pika fikse, pika ekuilibri ose pika qetësie.***

Pikla e lëngut që ndodhet në një pikë fikse, qëndron gjatë gjithë kohës në atë pikë.

Siç mund të shihet nga Fig. 2.2, ka dy lloje pikash fikse: pikat e paraqitura me ***rrathë të nxirë*** përfaqësojnë pikat fikse drejt të cilave rryma rrjedh dhe pikat e ***paraqitura*** me ***rrathë bosh*** përfaqësojnë pikat fikse nga të cilat rryma largohet.
Të pajisur me këtë figurë, mund t'i shpjegojmë më lehtë zgjidhjet (vijat integrale) e ekuacionit (2.10).
Analizojmë piklën e lëngut që në çastin fillestar ndodhet në pikën x_0, dhe analizojmë lëvizjen e saj përgjatë drejtëzës reale. Perceptimi hidrodinamik, që po i bëjmë ekuacionit (2.10), na lejon t'i përgjigjemi me lehtësi pyetjeve 1 dhe 2.

Përgjigjet e pyetjeve 1 dhe 2

Duke u bazuar në fushën e drejtimeve të figurës 2.2, është skicuar vija integrale (zgjidhja) e ekuacionit (2.10) që plotëson kushtin fillestar $x(0) = \pi/4$.
Figura 2.2 tregon që pikla e lëngut që fillon lëvizjen nga $x_0 = \pi/4$, lëviz gjithmonë e më shpejt derisa arrin në pikën $x = \pi/2$, ku $\sin x$ (pra dhe x') arrin vlerën më të madhe. Në intervalin e kohës $0 < t < t_1$, gjatë të cilit pikla lëviz nga pika $\pi/4$ në pikën $\pi/2$,

derivati $x'(t)$ është rritës, që do të thotë se $x''(t) > 0$, pra vija integrale përkatëse $x = x(t)$ është e lugët.

Pas çastit t_1, grimca lëviz përsëri në të djathtë, por gjithmonë e më ngadalë, duke iu afruar nga e majta pikës $x = \pi$. Meqenëse për $t > t_1$, derivati x' është zbritës, rrjedh se $x''(t) < 0$ dhe që vija integrale $x = x(t)$ është e mysët, dhe i afrohet asimptotikisht drejtëzës $x = \pi$.[30]

Kështu, vija integrale e ekuacionit (2.9), që plotëson kushtin fillestar, ka trajtën e treguar në figurën 2.3.

Po ashtu, nëse fillimisht $x' < 0$, pikla x i afrohet ***pikës fikse*** më të afërt në të majtë të saj.

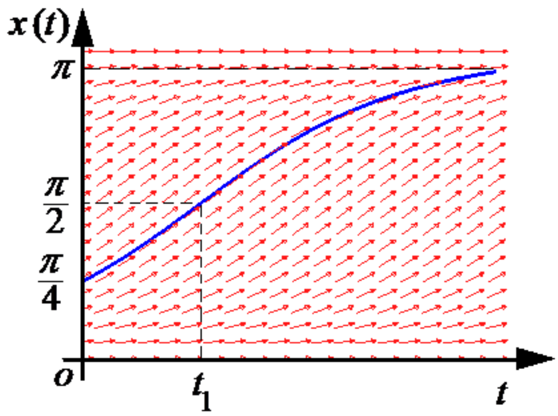


Figura 2.3

Nëse $x' = 0$, gjë që ndodh në pikat $x_k = k\pi$, $(k = 0; \pm 1; \pm 2, ...)$, atëherë pikla e lëngut, e cila në çastin fillestar ndodhet në ndonjërën nga këto pika, nuk lëviz, ndërsa vija integrale që plotëson kushtin fillestar $x(0) = x_k$, është drejtëza horizontale me ekuacion $x = x_k$.

I njëjti arsyetim mund të përsëritet për çdo kusht fillestar x_0.

Në figurën 2.4 janë skicuar vijat integrale (zgjidhjet) e ekuacionit (2.10) për një kusht fillestar të çfarëdoshëm $x(0) = x_0$.

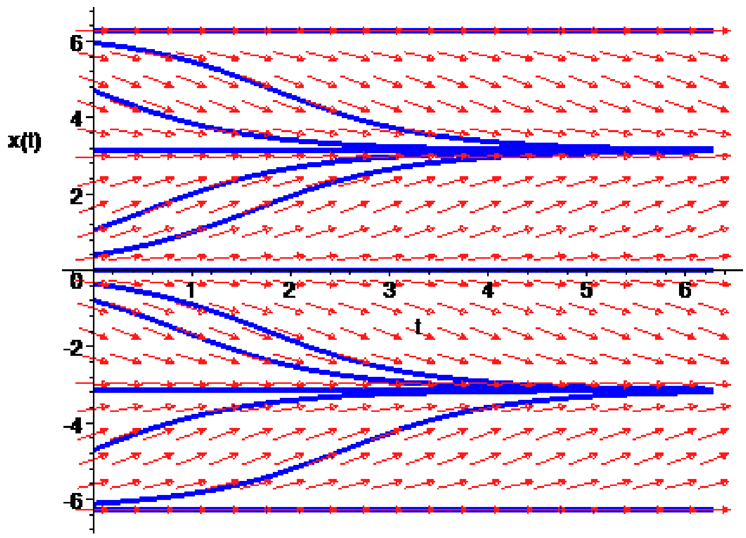


Figura 2.4

2.3.2 Pikat fikse dhe qëndrueshmëria

Idetë e zhvilluara në paragrafin e mëparshëm mund të përdoren me sukses për çdo sistem dinamik në drejtëz

$$x' = f(x) \tag{2.15}$$

Për këtë, na duhet grafiku i funksionit $f(x)$ në sistemin koordinativ xOx', i cili na ndihmon për të skicuar fushën vektoriale në drejtëzën reale (fig. 2.5).

Përkufizim 1. Pika x^* për të cilën kemi $f(x^*) = 0$ quhet *pikë fikse* (pikë *qetësie* ose *ekuilibri*) e sistemit (2.15).

Sistemi dinamik i skicuar në Fig. 2.5 ka dy pika fikse: x_1^* e x_2^*.

Përkufizim 2. Një funksion $f : \Re^n \to \Re^n$ thuhet që plotëson konditën e *Lipschitz* në një bashkësi $D \subset \Re^n$ n.q.s ekziston një konstante L e tillë që

$$\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|,$$

ku $x_1, x_2 \in D$.

Në qoftë se funksioni f plotëson konditën e *Lipschitz*, atëhere thuhet që ai është i vazhdueshëm sipas *Lipschitz*.

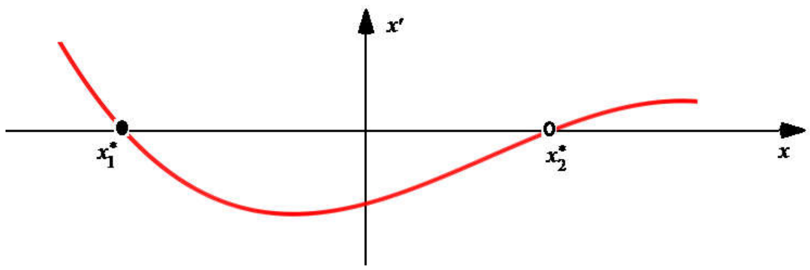


Figura 2.5

Teorema e ekzistencës dhe unicitetit. Supozojmë që f është i vazhdueshëm sipas *Lipschitz* për një pikë fillestare $x_0 \in D$, atëhere ekuacioni diferencial autonom

$$\frac{dx}{dt} = x' = f(x)$$

ka një zgjidhje të vetme $\phi_t(x_0)$ i cili është i përcaktuar në çdo interval të dhënë.

Përkufizim 3. Një pikë fikse x^* e ekuacionit (2.15) thuhet se është lokalisht e qëndrueshme në qoftë se $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta(\varepsilon) > 0$ e tillë që për ndonjë kusht fillestar $x(t_0) = x_0$, $\|x_0 - x^*\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x^*\| < \varepsilon$ për të gjitha $t \geq t_0$.

Në qoftë se x^* është jo e qëndrueshme quhet e paqëndrushme.

Përkufizim 4. Pika x^* quhet lokalisht e qëndrueshme në mënyrë asimptotike në qoftë se ekziston $\gamma > 0$ e tillë që $|x_0 - x^*| < \gamma \Rightarrow \lim_{t\to\infty} |x(t) - x^*| = 0$ për një kusht fillestar të dhënë.

Përkufizim 5. Pika x^* quhet e paqëndrueshme në qoftë se ekziston $\varepsilon > 0$ e tillë që për çdo $\delta > 0$ ekziston një kohë t^* dhe një kusht fillestar x_0 i tillë që $\left\| x_0 - x^* \right\| \leq \delta$ plotëson kushtin $\left\| x(t^*) - x^* \right\| > \varepsilon$.

Nocioni i qëndrueshmërisë asimptotike është më i fortë se qëndrueshmëria.

Interpretimi hidrodinamik

Mendojmë një rrymë lëngu që rrjedh përgjatë boshtit Ox me një shpejtësi lokale $x' = f(x)$. Boshti Ox ku rrjedh rryma quhet ***hapësirë fazore***. Rryma rrjedh djathtas në ato pika ku $f'(x) > 0$, dhe majtas në ato pika ku $f'(x) < 0$. Për të gjetur zgjidhjen (vijën integrale) $x = x(t)$ të ekuacionit $x' = f(x)$, që plotëson kushtin fillestar $x|_{t=0} = x_0$, vendosim, për shembull, një pikël lëngu në pikën x_0, dhe shikojmë sesi kjo zhvendoset nga rryma.

Ndërsa koha kalon, grimca lëviz përgjatë boshtit Ox sipas ligjit $x = x(t)$.

Pjesa e boshtit Ox ku lëviz kjo pikël, quhet ***trajektore*** e sistemit dinamik (2.15) që del nga pika x_0.

Tabloja e figurës 2.5, në të cilën janë skicuar trajektoret e sistemit dinamik (2.15), quhet ***portret fazor*** i këtij sistemi. Natyra e portretit fazor përcaktohet nga pikat fikse.
Në këto pika rryma ndërpritet.

Në Fig. 2.5, pikat e paraqitura me ***rrathë të nxirë*** përfaqësojnë ***pikat fikse të qëndrueshme*** (shpesh të quajtura pika **tërheqëse** ose pika **zhytëse**, sepse rryma lokale rrjedh drejt tyre), ndërsa pikat e paraqitura me ***rrathë bosh*** përfaqësojnë ***pikat fikse të paqëndrueshme*** (gjithashtu të quajtura pika ***shtytëse*** ose ***larguese, sepse*** rryma lokale largohet prej tyre).

Në qoftë se x^* është një pikë fikse, atëherë pikla e lëngut që në çastin fillestar ndodhet në këtë pikë, qëndron përgjithmonë aty; do të thotë që trajektorja e saj reduktohet në një pikë. Ndërkohë drejtëza me ekuacion $x = x^*$ është zgjidhje (vijë integrale) e ekuacionit (2.15), dhe quhet zgjidhje ekuilibri (të qëndrueshëm ose të paqëndrueshëm).

Shtrohet pyetja: Cili është dallimi thelbësor ndërmjet pikave fikse të qëndrueshme dhe atyre të paqëndrueshme?

Përgjigjen e marrim pikërisht në portretin fazor. [30]

Në qoftë se piklën e lëngut, e cila ndodhet në pikën x_1^*, e nxjerrim nga ekuilibri (qetësia), duke e zhvendosur atë sadopak, në të majtë ose të djathtë të x_1^*, atëherë ajo lëviz përsëri drejt pikës x_1^*, duke synuar rivendosjen e ekuilibrit (qetësisë). Prandaj themi në këtë rast se pika fikse x_1^* është ***pikë fikse (ekuilibri) e qëndrueshme.***

Në qoftë se piklën e lëngut, e cila ndodhet në pikën x_2^* e nxjerrim nga ekuilibri, duke e zhvendosur atë pak, në të majtë ose të djathtë të x_2^*, atëherë ajo i largohet për gjithmonë pikës x_2^*, duke mos synuar rivendosjen e ekuilibrit. Prandaj themi në këtë rast se pika fikse x_2^* është ***pikë fikse (ekuilibri) e paqëndrueshme***.

Koment

Qëndrueshmëria ose paqëndrueshmëria e një pike fikse mund të ilustrohet me gjendjen e ekuilibrit të një guri, si në figurën 2.6. Mendojmë një gur që ndodhet në një majë mali. Ai është në një ekuilibër të paqëndrueshëm, sepse pas çdo zhvendosjeje të vogël që mund t'i bëhet atij, guri synon të largohet nga pozicioni fillestar. [30]

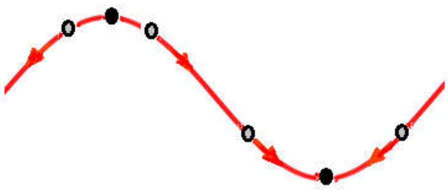


Figura 2.6

Përfundim. Nga analiza e mësipërme del përfundimi i rëndësishëm: Pikat fikse, kontrollojnë sistemet dinamike nga pikëpamja e ekuilibrit.

2.4 Modelet e popullimit (Ekuacioni logjistik)

Aplikimet matematikore dhe modelet kanë një gamë të gjerë të përdorimit në jetën e përditshme. Një rëndësi të veçantë kanë ekuacionet diferenciale. Qëllimi i këtij seksioni, është modelimi në fushën e popullimeve. Do të diskutohen konceptet themelore dhe modelet matematikore të dinamikës së popullatës, duke përfshirë rritjen eksponenciale dhe logjistike.

Një *popullim* është "një grup njerëzish, i bimëve, kafshëve, apo të organizmave të tjerë, të gjithë të të njëjtit lloj, që jetojnë së bashku dhe riprodhohen."

Si mund të ndryshojë madhësia e popullsisë?

Ka katër faktorë që mund të ndikojnë në popullatë.

Lindjet në një popullsi e rrisin madhësinë e popullsisë, ndërsa vdekjet e ulin madhësinë e popullsisë. Gjithashtu, kemi hyrje të reja në popullsinë (imigrimet) ose largime të popullsisë (të emigruar). [7], [15]

Deklaratat më lart i paraqesim në një ekuacion shumë të thjeshtë:

$$\Delta P = L - V + I - E \tag{2.16}$$

Ku:

ΔP = ndryshimi në madhësinë e popullsisë në çastin t.

L = numri i lindjeve

V = numri i vdekjeve

I = numri i imigrimeve

E = numri i emigrimeve

Nëse popullata supozohet të jetë e "mbyllur" (habitat), atëhere nuk kemi lëvizje të popullsisë, kështu që:

$$\Delta P = L - V \tag{2.17}$$

Modeli më i thjeshtë është kur rritja e popullsisë konsiderohet të jetë densiteti i pavarur. Densiteti i pavarur do të thotë se normat e lindjeve dhe vdekjeve nuk janë të prekura nga madhësia e popullsisë.

Prandaj, shkalla e lindjeve dhe vdekjeve është në përpjesëtim të drejtë me popullsinë:

$$P' = rP \tag{2.18}$$

(Këtë model e propozoi matematicieni anglez Thomas R. Malthus në 1798 për rritjen e popullimeve). Në këtë model, *shpejtësia e ndryshimit për* frymë (*per capita*) $r = P'/P$ është konstante, pozitive kur P rritet dhe negative kur P zvogëlohet.

Ky është një ekuacion diferencial me variabla të ndashëm, ndajmë variablat dhe më pas integrojmë:

$$\frac{dP}{dt} = rP \Leftrightarrow \frac{dP}{P} = rdt$$

$$\int \frac{dP}{P} = \int rdt \Rightarrow \ln|P| = rt + c \Rightarrow P = e^{rt+c} \Rightarrow P = e^{rt}C$$

në çastin $t = 0$ kemi $C = P_0$, nga këtu kemi:

$$P(t) = P_0 e^{r\,t} \tag{2.19}$$

ku P_0 është popullsia në çastin $t = 0$.

Në qoftë se $r > 0$, rritja eksponenciale e popullsisë nuk mund të vazhdojë përgjithmonë. Nga një grafik eksponencial, ne mund të shohim se si kur $t \to \infty$, $P(t) \to \infty$.

Në situata të jetës reale, nuk është e mundur që një popullsi të rritet në përmasa të kësaj shkalle sepse përndryshe popullata do të tejkalonte peshën e tokës.

Çfarë saktësisht e kufizon rritjen e popullsisë?

Furnizimi me ushqim, territori, kanibalizmi, konkurenca, grabitja, parazitët dhe sëmundjet gjithashtu mund të ndikojnë në rritjen e popullsisë.

Për të modeluar efektet e mbipopullimit dhe burimet e kufizuara të jetesës, biologët e studimit të popullimeve dhe demografët shpesh pranojnë këtë hipotezë:

Shkalla (ritmi) e rritjes për kokë (per capita) d.m.th raporti P'/P zvogëlohet gjithnjë e më shpejt kur P bëhet gjithnjë e më e madhe, sikurse tregohet në figurën 2.7.

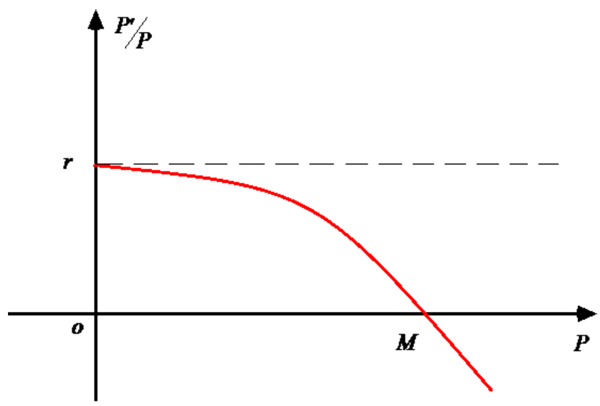


Figura 2.7

Për P të vegjël, P'/P i afrohet vlerës së mëparshme r. Megjithatë për një popullsi më të madhe se një ***kapacitet mbajtës specifik*** M, shkalla e rritjes në fakt bëhet negative, që do të thotë se shkalla e vdekjeve është më e lartë sesa ajo e lindjeve. [41], [49], [56] *Një mënyrë bindëse matematikore për të përfshirë këto ide është të pranojmë që ritmi i rritjes P'/P zvogëlohet linearisht me rritjen e P, që do të thotë se grafiku i P'/P është drejtëz* (fig 2.8)

Duke shkruar ekuacionin e drejtëzës që kalon nëpër pikat $(0;r)$ dhe $(\mathrm{M};0)$

$$\frac{\frac{P'}{P}-r}{0-r}=\frac{P-0}{M-0}$$

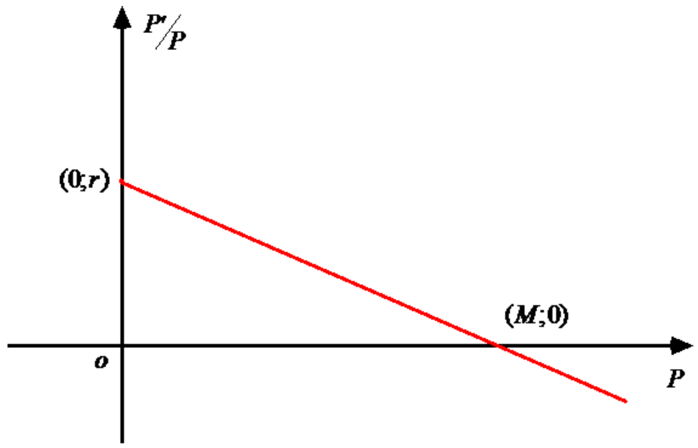


Figura 2.8

përftojmë barazimin

$$P'=rP\left(1-\frac{P}{M}\right) \tag{2.20}$$

i cili quhet ***ekuacioni logjistik.***

Ky ekuacion u sugjerua në 1838 nga demografi Verhulst për të përshkruar rritjen e popullsisë njerëzore, i cili është një modifikim i modelit Malthus . [21], [38]

Ekuacioni (2.20) është i formës $P'=f(P)$, ku

$$f(P)=rP-\frac{r}{M}P^2 \ .$$

Grafiku i funksionit f është një parabolë (Fig. 2.9).

Sistemi dinamik (2.20) ka dy pika fikse, të cilat janë:

$$P_1^* = 0, \quad P_2^* = M .$$

Le t'a zgjidhim këtë ekuacion, ndajmë variablat dhe integrojmë;

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \Leftrightarrow \frac{M\,dP}{P(M-P)} = rdt$$

$$\int \frac{M\,dP}{P(M-P)} = r\int dt \Leftrightarrow \int \frac{dP}{P} + \int \frac{dP}{M-P} = r\int dt \Rightarrow$$

$$\ln|P| - \ln|M-P| = rt + c \Leftrightarrow \ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = rt + c \Rightarrow$$

$$\frac{P}{M-P} = e^{rt+c} \Leftrightarrow \frac{P}{M-P} = e^{rt}C \Leftrightarrow \frac{M-P}{P} = e^{-rt}C \Rightarrow$$

$$P = \frac{M}{1+e^{-rt}C}$$

në çastin $t = 0$ kemi $C = \dfrac{M-P_0}{P_0}$, nga këtu kemi:

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M-P_0)e^{-rt}} \tag{2.21}$$

ku P_0 është popullsia në çastin $t = 0$.

Nëse kalojmë në limit tek barazimi (2.21) kur $t \to \infty$ marrim $\lim_{t\to\infty} P(t) = M$, pra i afrohet kapacitetit mbajtës. [7], [16], [20] Në figurën 2.9, është paraqitur portreti fazor i sistemit dinamik për $P \geq 0$, sepse nuk ka kuptim të flitet për popullsi negative. Nga ky portret del se pika fikse $P_1^* = 0$ është pikë fikse e paqëndrueshme, ndërsa $P_2^* = M$ është pikë fikse e qëndrueshme.

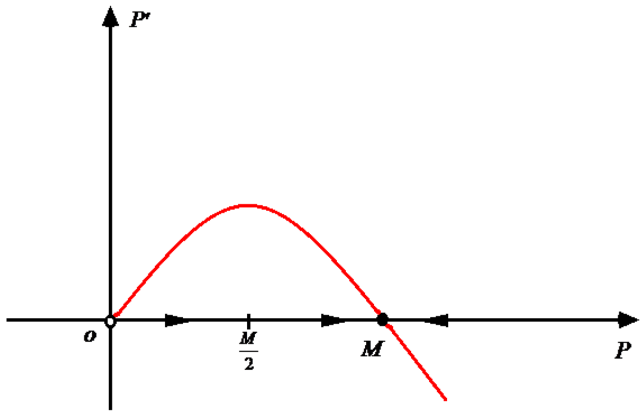


Figura 2.9

Në terma biologjikë, fakti që $P_1^* = 0$ paraqet një pikë fikse të paqëndrueshme, do të thotë që një shmangie e vogël e $P-së$ nga $P = 0$, pra prezenca e një popullsie sado të vogël, sjell që kjo popullsi të rritet shpejt, duke iu larguar numrit $P = 0$ dhe duke iu afruar numrit M .

Në anën tjetër, nëse P shmanget sado pak nga M , atëherë përsëri $P(t) \to M$.

Figura 2.9, në fakt, tregon që cilado qoftë popullsia fillestare $P_0 > 0$, popullsia $P(t)$ shkon te numri M , pra shkon drejt kapacitetit mbajtës të zonës.

Kështu, *popullsia P gjithmonë i afrohet kapacitetit mbajtës M* .

Portreti fazor në figurën 2.9 na lejon gjithashtu të bëjmë një analizë më cilësore. Për shembull, nëse $P_0 < M/2$, atëherë popullsia P rritet në mënyrë të përshpejtuar, sepse derivati P' është funksion rritës $(P''(t) > 0)$, dhe nëse $M/2 < P_0 < M$, popullsia P përsëri rritet, por në mënyrë të ngadalësuar, sepse P' është funksion zbritës $(P''(t) < 0)$.

Në figurën 2.10 janë skicuar grafikët e zgjidhjeve (vijat integrale) të ekuacionit (2.20) për kushte fillestare të çfarëdoshme bashkë me drejtimin e fushës duke përdorur programin MAPLE. [10], [14], [47]

```
>with(DEtools):
>DEplot(diff(P(t),t)=0.03*P(t)*(1-0.001*P(t)),P(t), t=0..300,{[0,2000], [0, 600],[0, 1000],[0, 200], [0,0]},P=0..2000,arrows=slim,linecolour=blue);
```

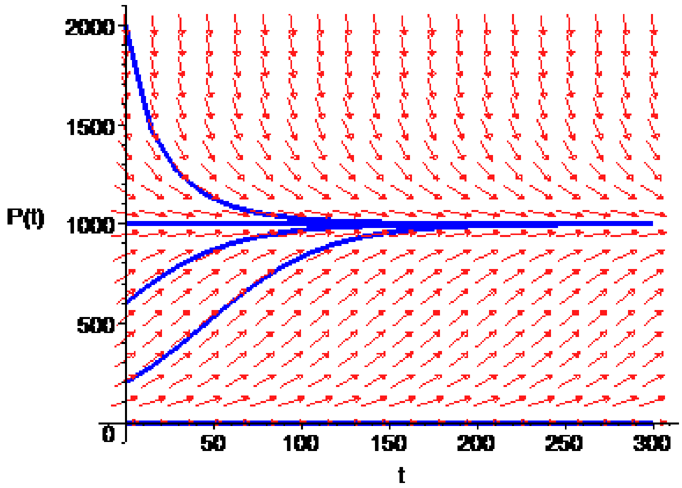


Figura 2.10

2.5 Modelet matematikore për projeksionin e popullsisë së Shqipërisë

Në këtë pjesë do të bëjmë një test të modelit eksponencial të rritjes së popullsisë për Shqipërinë. Duke përdorur të dhëna nga dy pika (vite) të çfarëdoshme p.sh po të marrim si çast fillestar $t = 0$ vitin 1990 ku popullsia ishte $P_0 = 3{,}188{,}380$, ne mund të gjejmë r duke përdorur faktin që popullsia për $t = 10$ ishte $P = 3{,}080{,}124$ e cila korrespondon me vitin 2000. [16], [57]

Duke përdorur barazimin (2.19) kemi:

$$3,080,124 = 3,188,380\, e^{10r} \Rightarrow r = \frac{\ln\left(\dfrac{3,080,124}{3,188,380}\right)}{10} = -0.00345$$

Kështu që modeli eksponencial mund të shkruhet

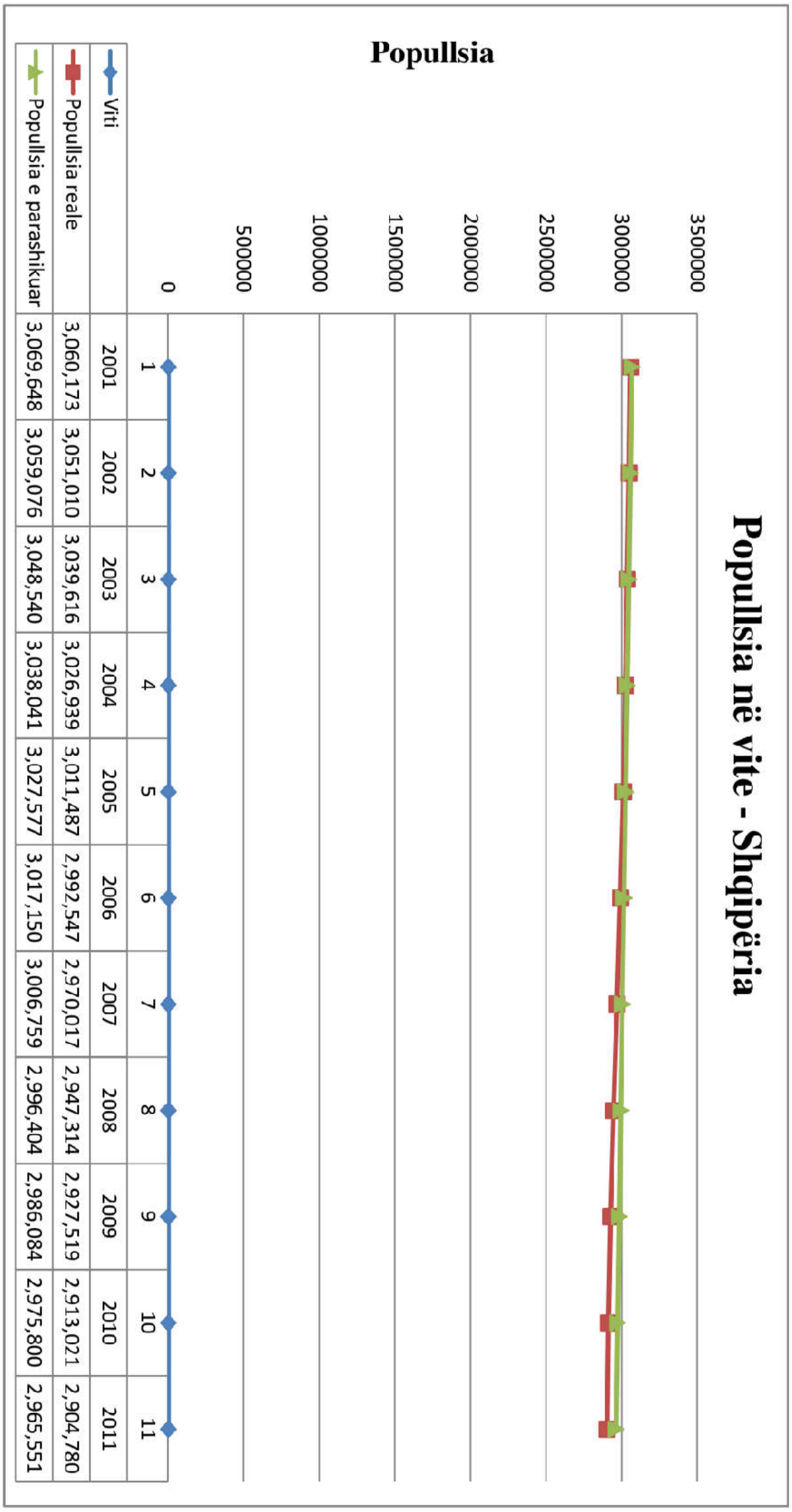
$$P(t) = 3,188,380\, e^{-0.00345t}$$

Ne do të llogarisim tani popullsinë për vitet e mëvonshme duke i krahasuar me të dhënat reale. Tabela e mëposhtme paraqet të dhënat reale dhe parashikimin sipas modelit eksponencial. [57], [58]

Viti	Popullsia reale	Popullsia e parashikuar
2001	**3,060,173**	**3,069,648**
2002	**3,051,010**	**3,059,076**
2003	**3,039,616**	**3,048,540**
2004	**3,026,939**	**3,038,041**
2005	**3,011,487**	**3,027,577**
2006	**2,992,547**	**3,017,150**
2007	**2,970,017**	**3,006,759**
2008	**2,947,314**	**2,996,404**
2009	**2,927,519**	**2,986,084**
2010	**2,913,021**	**2,975,800**
2011	**2,904,780**	**2,965,551**

Ky model mund të përdoret tani për të parashikuar të ardhmen për popullsinë siç tregohet ne Fig. 2.11. Shohim një përputhje të shkëlqyer mes të dhënave reale dhe atyre të parashikuara të viteve 2001 – 2011. Kjo gjë na jep neve konfidencë në parashikimin e të ardhmes. Kështu që, duke përdorur modelin tonë, ne mund të marrim $t = 2030$ për të llogaritur popullsinë në atë vit në milionë,

$$P(2030) = 3,188,380\, \mathrm{e}^{-0.00345\times 40} = 2,777,393$$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Viti	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Popullsia reale	3,060,173	3,051,010	3,039,616	3,026,939	3,011,487	2,992,547	2,970,017	2,947,314	2,927,519	2,913,021	2,904,780
Popullsia e parashikuar	3,069,648	3,059,076	3,048,540	3,038,041	3,027,577	3,017,150	3,006,759	2,996,404	2,986,084	2,975,800	2,965,551

Figura 2.11

Gjithashtu modeli mund të përdoret për të përcaktuar vitin në të cilin do të arrihet një target popullsie specifike. Për më tepër, ne mund të përdorim modelin e rritjes eksponenciale për të llogaritur ritmin e rritjes si më poshtë:

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

na jep

$$P'(t) = rP_0 e^{rt} = rP(t) = -0.00345\, P(t)$$

i cili pa dyshim është ekuacion diferencial që i jep rritje modelit eksponencial. Prandaj, ritmi i rritjes së popullsisë në çdo kohë, në mijë për vit është thjeshtë popullsia e asaj kohe e shumëzuar me ritmin e rritjes r, të cilin ne tashmë e kemi të përcaktuar. Për shembull, në 2001, $P(t) = 3,060,173$ duke na dhënë $P'(t) = -10,557 \;\; mijë / vit$.

Kjo na çon në një popullsi të parashikuar prej $3,060,173 - 10,557 = 3,049,616$ e cila është shumë afër me shifrën aktuale të 2002.

Si përfundim mund të themi se modeli Malthus na jep mundësinë për të parashikuar madhësinë e popullsisë. Është e qartë se të dhënat e parashikuara janë pothuajse të njëjta me realet. Parashikimi për popullsinë e Shqipërisë është një shembull se sa mirë punon ky model. Ka një përputhje të shkëlqyer mes të dhënave reale dhe ato të parashikuara për popullsinë e Shqipërisë ne vitet 2001 – 2011. Kjo na mundëson një mjet të domosdoshëm për të parashikuar rritjen e popullsisë në të ardhmen. Modeli Malthus supozon se ritmi i rritjes relative është konstante. Në fakt, edhe nëse ne nuk marrim parasysh fatkeqësitë natyrore, luftërat, edhe ndryshimet në sjelljen shoqërore, ritmi i rritjes do të ndryshojë kur popullsia rritet për shkak të mbipopullimit, sëmundjeve, dhe mungesës së burimeve natyrore. Modeli parashikon që popullsia do rritet pa kufij. Ekuacioni i rritjes llogjistike është një model i dobishëm për të demonstruar efektet e mekanizmave të varësisë së densitetit. Sipas këtij modeli është e mundur që popullsia të tejkalojë kapacitetin e saj mbajtës.

2.6 Metoda e linearizimit për studimin e qëndrueshmërisë

Deri këtu kemi studiuar qëndrueshmërinë e pikave fikse të sistemeve dinamike me metodën grafike. Këtu do të njihemi me një metodë tjetër, *metodën e linearizimit*. [20], [30], [49]

Le të jetë x^* një pikë fikse e sistemit dinamik në drejtëz

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.22}$$

dhe

$$h = x - x^* \tag{2.23}$$

një shmangie (perturbacion) e vogël e x nga pika fikse x^*, pra $h \neq 0$.

Duam të dimë se si lëviz pikla e lëngut që ndodhet në pikën x kundrejt pikës fikse x^*. Nga barazimi (2.23) përftohet barazimi

$$x = x^* + h \tag{2.24}$$

Pas zëvendësimit të x me $x^* + h$ në ekuacionin (2.22), ai shndërrohet si vijon:

$$\frac{d}{dt}(x^* + h) = f(x^* + h)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = f(x^* + h) \tag{2.25}$$

Zbërthejmë $f(x^* + h)$ sipas serisë së Teilorit:

$$f(x^* + h) = f(x^*) + f'(x^*)h + O(h^2) \tag{2.26}$$

ku $O(h^2)$ është madhësi e krahasueshme me h^2. Meqenëse x^* është pikë fikse, kemi $f(x^*)=0$, kështu që barazimi (2.26) merr trajtën

$$f(x^*+h) = f'(x^*)h + O(h^2) \tag{2.27}$$

Kështu, barazimi (2.25) shkruhet

$$\frac{dh}{dt} = f'(x^*)h + O(h^2) \tag{2.28}$$

Në këtë mënyrë sistemin dinamik (2.22) me ndryshor dinamik x e shndërruam në një sistem dinamik me ndryshor dinamik h.

E zëmë se $f'(x^*) \neq 0$.

Atëherë, duke mos marrë parasysh madhësinë $O(h^2)$, e cila është e një rendi më të lartë vogëlsie se h, barazimi (2.28) merr trajtën

$$\frac{dh}{dt} = f'(x^*)h \tag{2.29}$$

i cili është një ekuacion diferencial me ndryshore të ndashme. Zgjidhja e këtij ekuacioni që plotëson kushtin $h(0)=h_0 \neq 0$ është

$$h(t) = h_0 \cdot e^{f'(x^*)\cdot t} \tag{2.30}$$

Nga formula (2.30) dalin këto dy përfundime:

(P₁) Në qoftë se $f'(x^*)<0$, atëherë shmangia $h(t)$ i afrohet zeros, që do të thotë se x i afrohet pikës fikse x^*.

Në këtë rast, x^* është pikë fikse e qëndrueshme për sistemin (2.22).

(P₂) Në qoftë se $f'(x^*)>0$, atëherë shmangia $h(t)$ nuk i afrohet zeros, madje i afrohet $+\infty$ ose $-\infty$, që do të thotë se x i largohet pikës fikse x^*.

Në këtë rast x^* *është pikë fikse e paqëndrueshme për sistemin* (2.22).

Në qoftë se $f'(x^*) = 0$, metoda e linearizimit nuk jep përgjigje.

Në këtë rast mund t'i referohemi metodës grafike që kemi përdorur më parë

Shënim. Metoda e përdorur quhet ***metodë e linarizimit***, sepse në sistemin dinamik (2.22), ana e djathë $f(x)$ është funksion i çfarëdoshëm i ndryshorit x, ndërsa në ekuacionin (2.29), ana e djathtë $f'(x^*)h$ është funksion linear i ndryshorit h.

2.7 Sistemi dinamik parametrik (Bifurkimi)

Pjesa interesante e sistemit një – dimensional shfaqet tek sistemet dinamike parametrike.

Sistemi dinamik parametrik *është sistemi dinamik që përveç ndryshorit dinamik* x, *ai përmban edhe një parametër* r. [19], [27], [30], [40], [52]

Portreti fazor (fusha e drejtimeve) mund të ndryshojë kur parametrat marrin vlera të ndryshme. Në veçanti, pikat fikse mund të krijohen, të shkatërrohen ose qëndrueshmëria e tyre mund të ndryshojë. Këto ndryshime cilësore në dinamikë quhen **bifurkime (bigëzime)**, dhe vlera e parametrit në të cilat shfaqen ato quhet **vlerë bifurkimi**.

Pra bifurkimi është një ndryshim në numrin e pikave fikse, apo një ndryshim në vetitë e qëndrueshmërisë së tij nëse varijon parametri.
Kështu pra teoria e bifurkimit është mekanizmi çelës për analizën e sistemeve dinamike.
Kjo teori është bërë fokusi i kërkimeve sidomos mbi dinamikat e popullimit në dekadat e fundit.
Bifurkimet janë shkencërisht të rëndësishme, ata mundësojnë modele kalimtare dhe paqëndrueshmërie, përderisa mund të ndryshojmë *parametrin e kontrollit*.
Për konkretizim, po marrim në konsideratë përkuljen e një trau. Nëse një peshë e vogël vendoset në majë të traut, ai e përballon peshën dhe qëndron vertikalisht.

Por, nëse ngarkesën e rrisim gradualisht, do të gjejmë një peshë kritike, kapërcimi i së cilës do ta përkulte traun (fig. 2.12). [49]

Në këtë rast, pesha luan rolin e parametrit të kontrollit, ndërsa zhvendosja mesatare e traut nga pozicioni pingul luan rolin e ndryshorit dinamik x.

Një nga qëllimet e kësaj pjese është që të na ndihmojë të zhvillojmë gjykim të fortë dhe praktik të bigëzimeve.

Mund të flitet për *bigëzim lokal* i cili mund të analizohet permes ndryshimeve në karakteristikat e qëndrueshmerisë lokale të ekuilibrit, orbitave periodike ose të strukturave të tjera invariante ku parametri kapërcen pragun kritik, ose për *bigëzim global* i cili haset shpesh atëherë kur struktura të gjera invariante të sistemit ndeshen me njëra – tjetrën ose me ekuilibrin e sistemit. Ato nuk mund të zbulohen qartë nga analiza klasike e qëndrueshmërisë së ekuilibrit (pikave kritike).

Pikërisht vlerësimi cilësor i sistemit dinamik një – dimensional përcaktohet nga ekuilibri (pika fikse) dhe qëndrueshmëria e tij, prandaj bigëzimet janë klasifikuar sipas mënyrës sesi ndryshon qëndrueshmëria e pikave ekuilibër në një zonë fare pranë tyre, lokalisht. [27], [30], [49]

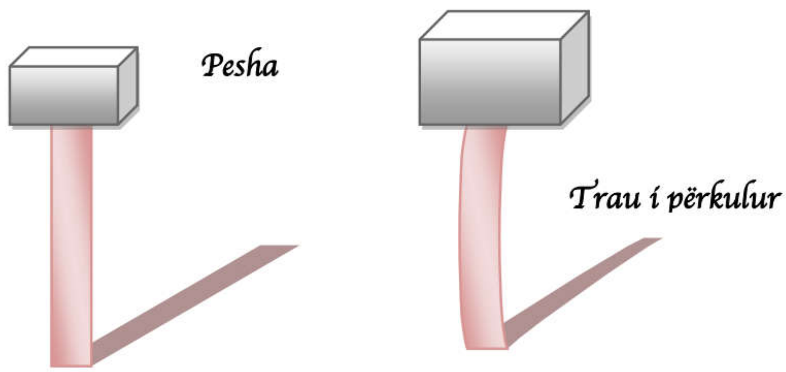


Figura 2.12

Kemi tre llojet më të rëndësishme të bigëzimeve një – dimensionale të përcaktuara si më poshtë: [2], [25], [49]

a) Rasti kur pikat fikse zhduken duke eliminuar njëra – tjetrën, me ndryshimin e parametrit r, të përfaqësuara me ekuacionin diferencial $x' = r + x^2$ (***nyje-samar***)

b) Rasti kur me lëvizjen e parametrit r, pikat fikse përplasen duke ndryshuar sjelljen e tyre nga të qëndrueshme në të paqëndrueshme dhe anasjelltas, duke realizuar një shkembim cilësor mes tyre, përfaqësuar me ekuacionin diferencial $x' = rx - x^2$ (***transkritik***)

c) Rasti kur me ndryshimin e parametrit r, shfaqen pika të reja ekuilibri $x' = rx - x^3$ (***sfurk***)

Ekuilibri e humbet qëndrueshmërinë nëse disa vlera të veta kapërcejnë nga gjysmëplani i majtë në atë të djathtë me ndryshimin e parametrit.

2.7.1 Bifurkimi i tipit samar

Bifurkimi i tipit samar është mekanizmi bazë me anë të cilit *krijohen dhe shkatërrohen* pikat fikse. Kur parametri ndryshon, dy pika fikse lëvizin në drejtim të njëra – tjetrës, përplasen dhe zhduken reciprokisht. Shembulli më tipik i një *bifurkimi të tipit samar* jepet nga sistemi i rendit të parë

$$x' = r + x^2 \tag{2.31}$$

Ku r është një parametër, i cili mund të jetë pozitiv, negativ ose zero. [2], [20], [27], [49]

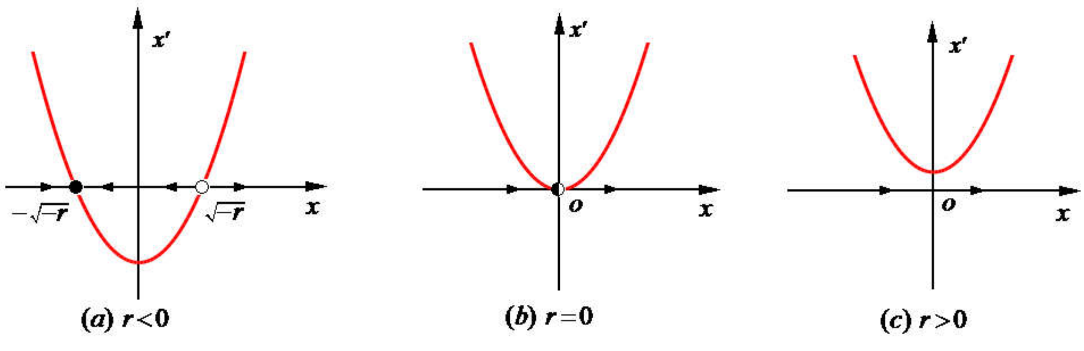


Figura 2.13

Rasti 1. $r < 0$

Në këtë rast sistemi dinamik (2.31) ka dy pika fikse ${}_1x_2^* = \pm\sqrt{-r}$, njëra e qëndrueshme dhe tjetra e paqëndrueshme (Fig. 2.13/a). Nëse përdorim metodën e linearizimit kemi; $f'(x) = 2x,\ f'(x_1^*) = 2(-\sqrt{-r}) < 0$ d.m.th që është e qëndrueshme, $f'(x_2^*) = 2(\sqrt{-r}) > 0$ d.m.th që është e paqëndrueshme.

Rasti 2. $r = 0$

Kur r iafrohet pikës 0 nga e majta, parabola ngjitet sipër, nga poshtë boshtit të abshisave sipër tij, dhe dy pikat fikse lëvizin në drejtim të njëra – tjetrës. Kur $r = 0$, dy pikat fikse ${}_1x_2^* = \pm\sqrt{-r}$ shkrihen në pikën fikse gjysmë të qëndrueshme $x^* = 0$ (Fig. 2.13/b). Kjo lloj pike fikse është jashtëzakonisht delikate – zhduket sapo $r > 0$ bëhet pozitiv, dhe tashmë nuk ka pika fikse (Fig. 2.13/c). Për këtë rast, metoda e linearizimit nuk jep përgjigje sepse del $f'(x) = 0$.

Ky fenomen thekson rëndësinë e zbulimit të bifurkimit në familjet e ekuacioneve diferenciale, një procedurë që ne do t'a hasim shumë herë në kapitujt vijues. Ne gjithashtu duhet të përmendim se, pavarësisht thjeshtësisë së këtij modeli të popullsisë, parashikimi se ndryshimet e vogla në normat e vjeljes mund të çojnë në ndryshime katastrofike të popullatës, është vërejtur shumë herë në situata reale në tokë.

Në këtë rast thuhet që për $r = 0$ ndodhi një ***bifurkim*** *(bigëzim ose dyzim),* përderisa fushat vektoriale për $r < 0$, $r > 0$ janë cilësisht të ndryshme.

Vlera r_b e parametrit r për të cilën ndodh bifurkimi quhet ***vlerë bifurkimi*** *e sistemit* (2.31).

Pra, për sistemin dinamik parametrik (2.31), bifurkimi ndodh për $r_b = 0$.

Diagrama bigëzuese për bigëzimin nyje – samar jepet si më poshtë: [17]

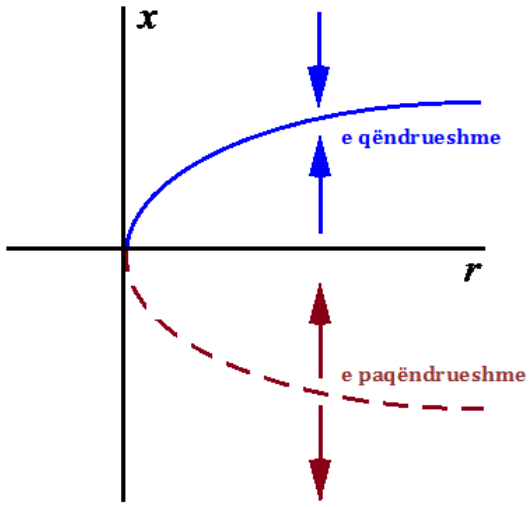


Figura 2.14

Shënim. Në mënyrë të ngjashme analizohet sistemi dinamik

$$x' = r - x^2 \tag{2.32}$$

2.7.2 Bigëzimi Transkritik

Ky lloj bigëzimi ka të bëjë me këmbimin e qëndrueshmërisë së pikave fikse. Forma normale e këtij tipi jepet nga ekuacioni si më poshtë

$$x' = rx - x^2 \tag{2.33}$$

Rasti 1. $r < 0$

Në këtë rast sistemi dinamik (2.33) ka dy pika fikse $x_1^* = r$, e cila është e paqëndrueshme dhe $x_2^* = 0$ e cila është e qëndrueshme (Fig. 2.15/a). Nëse përdorim metodën e linearizimit kemi: $f'(x) = r - 2x,\ f'(x_1^*) = r - 2r = -r > 0$ m.q.s $r < 0$, pra pika $x_1^* = r$ është e paqëndrueshme, $f'(x_2^*) = r < 0$ d.m.th pika fikse $x_2^* = 0$ që është e qëndrueshme.

Rasti 2. $r = 0$

Kur r i afrohet pikës $0,$ parabola zhvendoset djathtas, dhe nga dy pikat fikse tashmë kemi një pikë fikse $x^* = 0$, e cila është gjysmë e qëndrueshme (e qëndrueshme nga e djathta dhe e paqëndrueshme nga e majta) (Fig. 2.15/b). Për këtë rast, metoda e linearizimit nuk jep përgjigje sepse del $f'(x) = 0$.

Rasti 3. $r > 0$

Në këtë rast sistemi dinamik (2.33) ka dy pika fikse $x_1^* = 0$, e cila është e paqëndrueshme dhe $x_2^* = r$ e cila është e qëndrueshme (Fig. 2.15/c). Me metodën e linearizimit kemi: $f'(x) = r - 2x$, $f'(x_1^*) = r > 0$, pra pika $x_1^* = 0$ është e paqëndrueshme, $f'(x_2^*) = -r < 0$ d.m.th që pika $x_2^* = r$ është e paqëndrueshme.

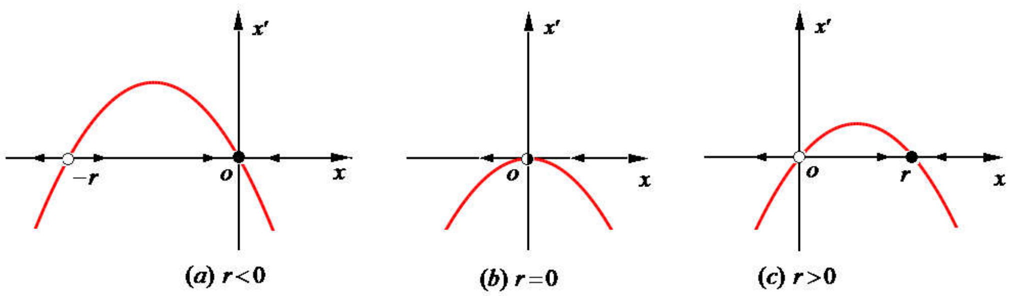


Figura 2.15

Vërejmë në këtë rast se $x^* = 0$ është pike fikse sido që të jetë r.

Diagrama e bigëzimit më poshtë jep pikat ekuilibër të qëndrueshme me vijë të vazhdueshme dhe vijë të ndërprerë ato të paqëndrueshme. [17], [49]

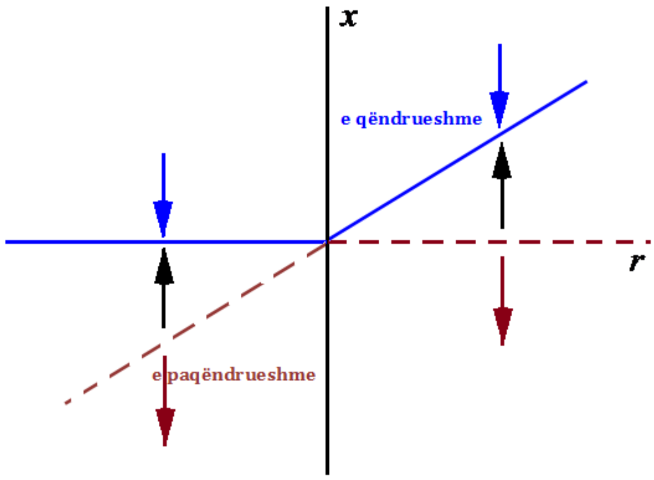


Figura 2.16

2.7.3 Bigëzimi sfurk

Tani i kthehemi llojit të tretë të bigëzimit, i ashtuquajturi bigëzimi sfurk. Ky bigëzim është i njohur në problemet fizike që kanë një *simetri*. Në raste të tilla, pikat fikse tentojnë të shfaqen dhe zhduken në çifte simetrike. Në shembullin e përkuljes të Fig. 2.12, trau është i qëndrueshëm në pozicionin vertikal nëse pesha është e vogël. Në këtë rast ekziston një pikë fikse e qëndrueshme që i korrespondon përthyerjes zero. Por nëse ngarkesa e kalon pragun e përkuljes, ngarkesa mund të përkulet nga e majta ose nga e djathta. Pozicioni vertikal është bërë i paqëndrueshëm dhe dy pika fikse të reja simetrike, që i korrespondojnë konfigurimeve pëkulëse në të majtë ose në të djathtë kanë lindur. Siç e thamë më lart ekuacioni është i trajtës

$$x' = rx - x^3 \qquad (2.34)$$

Në Fig. 2.17 tregohet fusha vektoriale për vlerat e ndryshme të r. [2]

Kur $r < 0$, origjina është e vetmja pikë fikse dhe është e qëndrueshme. Kur $r = 0$, origjina është akoma e qëndrueshme, por më e dobët përderisa linearizimi zhduket. Tashmë zgjidhjet nuk prishen në mënyrë eksponenciale shpejt, por prishja është një funksion kohor algjebrik më i ngadaltë. Kjo prishje e plogët është quajtur **ngadalësim kritik** në literaturën e fizikës.

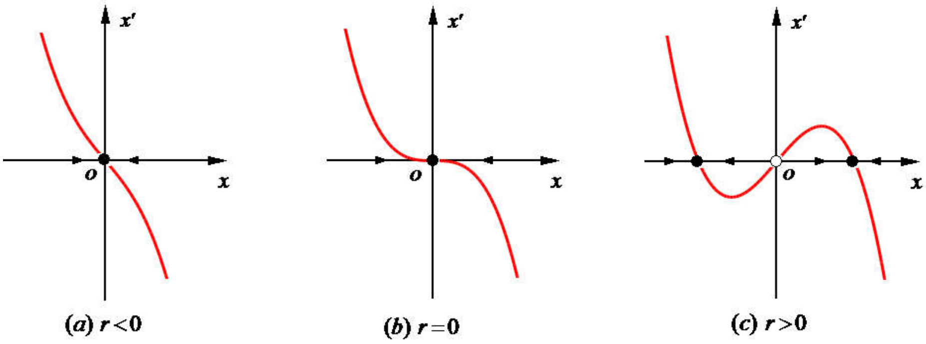


Figura 2.17

Dhe e fundit, kur $r > 0$ origjina është bërë e paqëndrueshme. Dy pika fikse të reja të qëndrueshme shfaqen në secilën anë të origjinës, të lokalizuara në mënyrë simetrike, ${}_1x_2^* = \pm\sqrt{r}$. Gjithashtu me metodën e linearizimit kemi: $f'(x) = r - 3x^2$, $f'({}_1x_2^*) = r - 3r = -2r < 0$, pra pikat ${}_1x_2^* = \pm\sqrt{r}$ janë të qëndrueshme ndërsa për pikën fikse $x^* = 0$ kemi, $f'(x^* = 0) = r > 0$, pra është e paqëndrueshme.

Arsyeja për termin "sfurk" bëhet e qartë kur paraqesim në mënyrë grafike diagramën e bigëzimit (Fig. 2.18). Në fakt, trigëzim sfurk mund të jetë një fjalë më e përshtatshme!

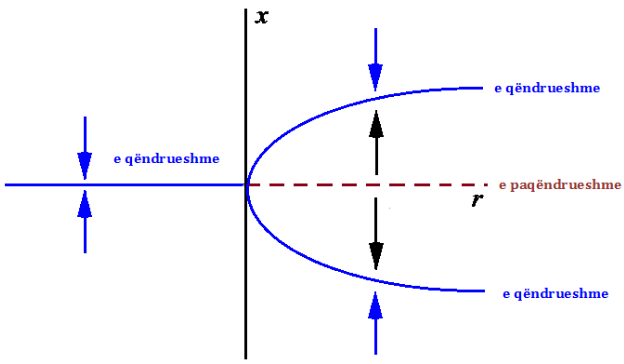


Figura 2.18

2.8 Sistemet dinamike në plan

Në këtë paragraf do të shtjellojmë sistemet dy përmasore lineare dhe jolineare. Për sistemet lineare problemi është i zgjidhur analitikisht, ndërsa për sistemet jolineare mund të zgjidhen me metoda analitike vetëm në raste të rralla. Për këto sisteme do të shohim metodën e linearizimit si dhe metodën gjeometrike duke përdorur softwerin MAPLE.

Gjërat kanë ndryshuar në mënyrë dramatike në tre dekadat e fundit. Kompjuterat janë kudo, për më tepër kemi shumë paketa programesh në dispozicion që mund të përdoren për të përafruar zgjidhjet e ekuacioneve diferenciale dhe të shohim rezultatet grafikisht. Si pasojë, analiza e sistemeve të ekuacioneve diferenciale jolineare është shumë më i kuptueshëm se ajo që ishte dikur.

Le të shohim dy shembuj sistemesh jolineare dhe të bëjmë zgjidhjen e tyre me softwerin MAPLE. [10], [47]

Shembull 1. *Kurba e Lorenzit* [10], [39], [47]

$$\begin{cases} x' = 10(y-x) \\ y' = 28x - y - xz \\ z' = xy - (8/3)z \end{cases} \quad x(0)=5, y(0)=0, z(0)=0$$

```
>with(DEtools):
DEplot3d([diff(x(t),t)=10*(y(t)-x(t)),diff(y(t),t)=28*x(t)-y(t)-x(t)*z(t),
diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-(8/3)*z(t)],
[x(t),y(t),z(t)], t=0..30, [[x(0)=5,y(0)=0,z(0)=0]],
stepsize=.01, linecolour=red, thickness=2);
```

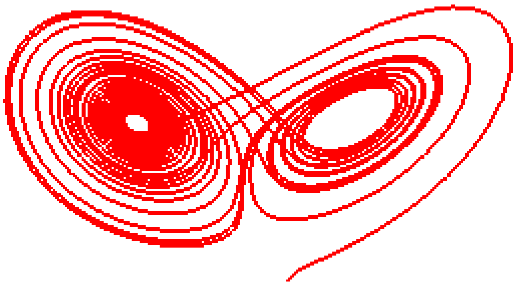


Figura 2.19

Shembull 2. *Ekuacioni i Van Der POL* [10], [39], [47]

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = (1-x^2)y - x \end{cases} \quad x(0) = 0.5,\ y(0) = 0.7$$

>**phaseportrait([D(x)(t)=y(t), D(y)(t)=(1-x(t)^2)*y(t)-x(t)],[x(t),y(t)], t=0..10, [[x(0)=0.5,y(0)=0.7]],**
stepsize=.05, linecolour=blue,arrows=none, thickness=4);

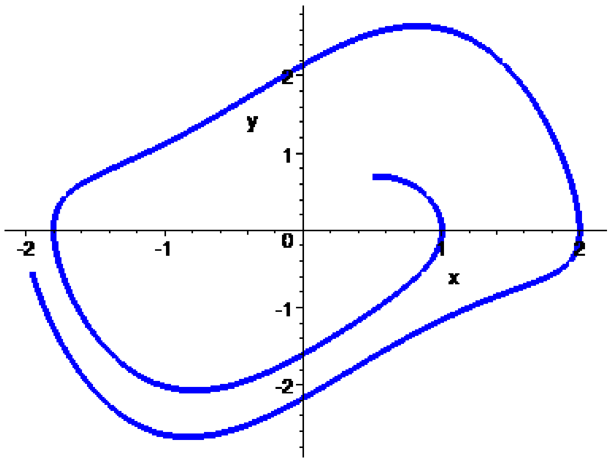


Figura 2.20

Pra një tjetër qasje, e paraqitur në këtë paragraf, është ajo gjeometrike e cila të çon në të kuptuarit cilësor të sjelljes së zgjidhjeve në vend të informacionit të hollësishëm sasior. Një kombinim i metodave është shpesh e nevojshme për të arritur rezultate optimale.

Qasjet numerike dhe gjeometrike plotësojnë njëra – tjetrën mjaft mirë: metodat numerike japin informacion të detajuar rreth një zgjidhje të vetme, ndërsa metodat gjeometrike japin informacion cilësor për të gjitha zgjidhjet në të njëjtën kohë. Siç e thamë më lart, tani analiza e sistemeve të ekuacioneve diferenciale jolineare është shumë më e qartë se ajo që ishte dikur.

2.8.1 Njohuri të përgjithshme

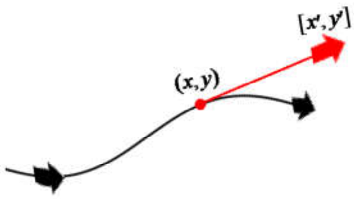
Shqyrtojmë sistemin dinamik në plan,

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \dfrac{dy}{dt} = g(x,y \end{cases} \right) \tag{2.35}$$

Dimë që zgjidhje e sistemit (2.35), në një interval T të kohës, është çdo çift funksionesh $\left(x(t), y(t)\right)$, për të cilat ekuacionet e sistemit (2.35) shndërrohen në identitete në T.

Grafiku i çdo zgjidhjeje $\left(x(t), y(t)\right)$ *në sistemin* Oxy *quhet trajektore e sistemit* (2.35).

Në çdo pikë (x, y) të një zone $\omega \subset \Re^2$, ku funksionet f dhe g janë të përcaktuar, sistemi (2.35), përcakton një drejtim, të përcaktuar nga vektori $\left[x', y'\right] = \left[f(x,y), g(x,y)\right]$. [30]



Kështu, në zonën $\omega \subset \Re^2$, sistemi (2.35) përcakton një ***fushë drejtimesh*** (vektorësh).

Atëherë, trajektore e sistemit (2.35) është çdo vijë në ω, *që ka cilësinë: në çdo pikë të saj, drejtimi i tangjentes përputhet me drejtimin e fushës.*

Plani $\Re^2$ është ***hapësira fazore*** e sistemit (2.35).

Mendojmë që në një zonë $\omega \subset \Re^2$ ka një lëng që rrjedh duke iu bindur sistemit (2.35), që do të thotë se në qoftë se një pikël lëngu ndodhet në pikën $(x, y) \in \omega$ në çastin e çfarëdoshëm t, atëherë shpejtësia e saj në këtë çast është

$$\vec{v} = [x', y'] = [f(x, y), g(x, y)]$$

Teorema ekzistencës dhe e unicitetit

Në qoftë se funksionet f, g, si dhe derivatet e pjesshme të tyre

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}$$

janë funksione të vazhdueshme në një zonë të hapur e të lidhur $D \subset \Re^2$, atëherë ekziston vetëm një zgjidhje $\left(x(t), y(t)\right)$ e sistemit

$$\begin{cases} x' = f(x, y) \\ y' = g(x, y) \end{cases}$$

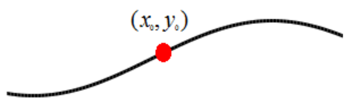
e përcaktuar në intervalin $T = (-\tau, \tau)$, që në çastin fillestar $t = 0$ plotëson kushtet

$$x\big|_{t=0} = x_0, \qquad y\big|_{t=0} = y_0.$$

Çasti fillestar $t = 0$ është mesi i intervalit $(-\tau, \tau)$.

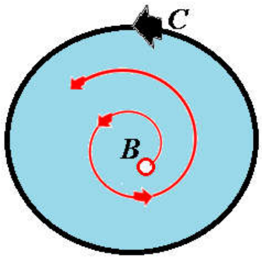
Nga kjo teoremë, dalin këto përfundime të rëndësishme:

(P_1) Nga çdo pikë $(x_0, y_0) \in D$ del vetëm një trajektore e sistemit (2.35)



(P$_2$) *Trajektoret e sistemit (2.35) që ndodhen në zonën $D \subset \Re^2$ nuk mund të ndërpriten.*

(P$_3$) *Në qoftë se $C \subset D$ është një trajektore e mbyllur e sistemit* (2.35), *atëherë asnjë trajektore që kalon nga ndonjë pikë brenda vijës C, nuk del jashtë kësaj vije.*



Pikat fikse dhe orbitat e mbyllura

Dy lloje trajektoresh të sistemit dinamik, që luajnë rol kryesor në studimin e ekuilibrit të tij; ato janë: ***Pikat fikse*** dhe ***orbitat e mbyllura***.

Përkufizim 1. *Pika (x^*, y^*) quhet **pikë fikse** (pikë ekuilibri) e sistemit (2.35) në qoftë se*

$$\begin{cases} f(x^*, y^*) = 0 \\ g(x^*, y^*) = 0 \end{cases}$$

Çdo pikë fikse (x^*, y^*) është një "trajektore". Në qoftë se pika fazore (x, y) gjendet në një çast në pikën fikse (x^*, y^*), atëherë ajo mbetet gjatë gjithë kohës në këtë pikë. [49]

Përkufizim 2. *Orbitë e mbyllur* quhet grafiku i çdo zgjidhje periodike $\left(x(t), y(t)\right)$, d.m.th çdo zgjidhje që plotëson kushtin $\forall t$, $\left(x(t+T), y(t+T)\right) = \left(x(t), y(t)\right)$, ku T është perioda.

Teorema Puankaré – Bendikson

E zëmë se:

1) *D është një nënbashkësi e mbyllur, e kufizuar dhe e lidhur e planit $\Re^2$,*

2) *f dhe g janë funksione me derivate të pjesshme të vazhdueshme në D,*

3) *D nuk ka pikë fikse të sistemit* (2.35),

4) *ekziston një trajektore C e sistemit* (2.35), *që është e kufizuar në D, që do të thotë se del nga një pikë e zonës D dhe mbetet në D gjatë gjithë kohës.*

Atëherë trajektorja C ***është vijë e mbyllur ose spirale që i afrohet një vije të mbyllur*** (Fig. 5).

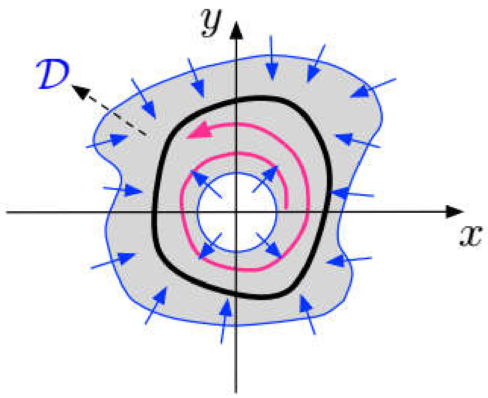


Figura 2.21 [20]

Shënim. Sikurse u pa në kreun paraardhës, dinamika e fushave vektoriale në drejtëz është shumë e varfër.

Në hapësira fazore me dy ose më shumë përmasa, trajektoret kanë më tepër hapësirë për të manovruar, kështu që dinamika e fushave vektoriale është shumë e larmishme dhe shumë më komplekse.

Disa nga tiparet e përgjithshme të portretit fazor të një sistemi dinamik në plan janë si ato të paraqitur në figurën e mëposhtme.

Le të jenë $M_1, M_2,$ dhe M_3 tri pika fikse dhe (C) një orbitë e mbyllur.

Vendosja e trajektoreve pranë pikave fikse dhe orbitave të mbyllura mund të ketë, për shembull, pamjen e paraqitur në Fig. 2.22. [49]

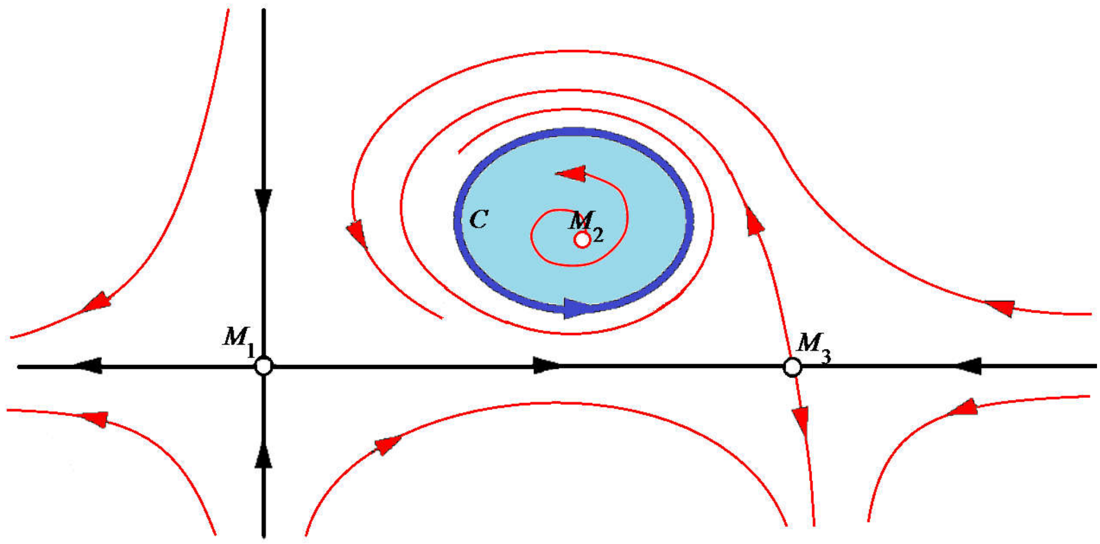


Figura 2.22

Koment. Po mendojmë se kemi të bëjmë me një rrjedhë lëngu. Modeli i rrjedhës është i ngjashëm pranë pikave M_1, M_2, e M_3 dhe i ndryshëm nga ai pranë pikës M_2.

Këtu, pikat fikse M_1, M_2, dhe M_3 janë të paqëndrueshme, sepse trajektoret e piklave të lëngut largohen prej tyre, ndërsa ***orbita e mbyllur*** (C) është e ***qëndrueshme***, sepse të gjitha trajektoret që dalin nga pika brenda apo jashtë kësaj orbite ***i afrohen pambarimisht (asimptotikisht) orbitës*** (C)**.**

Siç e kemi përmendur, për sistemet *jolineare*, zakonisht nuk ka shpresë për të gjetur trajektoret analitikisht. Sjellja e trajektoreve duhet studiuar drejtpërdrejt, duke u mbështetur në vetitë e funksioneve f dhe g.

Po fillojmë me klasën më të thjeshtë të sistemeve dinamike të rendeve të dytë, *sistemet dinamike lineare* . Këto sisteme janë interesante, e sikurse do të shohim më vonë, ata luajnë një rol të rëndësishëm në klasifikimin e pikave fikse të sistemeve dinamike *jolineare.*

2.8.2 Sisteme lineare (Përkufizime dhe emërtime)

Sistemi dinamik linear në plan modelohet me anë të sistemit diferencial linear:

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad \left(\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \right) \tag{2.36}$$

Ku a, b, c dhe d janë parametra realë. [5], [28], [32], [40], [49]

Shembull. Jepet sistemi :

$$\begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = -y \end{cases} \tag{2.37}$$

Të paraqitet grafikisht portreti fazor kur α lëviz nga $-\infty$ në $+\infty$.

Zgjidhje

Për $\alpha \neq 0$, sistemi (2.36) ka vetëm një pikë fikse, që është origjina e koordinatave $O(0,0)$, ndërsa për $\alpha = 0$, çdo pikë e boshtit Ox është pikë fikse.

Ekuacionet diferenciale të sistemit janë të pavarura nga njëri tjetri, kështu që secili nga ekuacionet mund të zgjidhet në veçanti. Nga zgjidhja e tyre marrim:

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t}, \qquad y(t) = c_2 e^{-t}$$

Çifti $\left(x(t), y(t)\right) = \left(x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{-t}\right)$ është trajektorja e sistemit (2.37) që kalon nga pika e çfarëdoshme $\left(x_0, y_0\right)$ në çastin fillestar $t = 0$.

Portretet fazore për vlera të ndryshme të parametrit α tregohen në Fig. 2.23.

Funksioni $y(t)$ zvogëlohet në mënyrë eksponenciale drejt zeros kur $t \to +\infty$, dhe tenton në $\pm\infty$ kur $t \to -\infty$.

Ndërkohë për funksionin $x(t)$ dallojmë disa raste.

(I) Kur $\alpha < 0$, funksioni $x(t)$ zvogëlohet në mënyrë eksponenciale, kështu të gjitha trajektoret $\left(x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{-t}\right)$ i afrohen origjinës së koordinatave kur $t \to +\infty$, dhe largohen pambarimisht kur $t \to -\infty$.

(II) Kur $\alpha > 0$, funksioni $x(t)$ ndryshon në mënyrë eksponenciale duke tentuar në $\pm\infty$ (në varësi të shenjës së y_0) kur $t \to +\infty$, dhe duke tentuar në zero kur $t \to -\infty$. [5], [18][30], [37]

Kështu, të gjitha trajektoret $\left(x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{-t}\right)$ i afrohen origjinës së koordinatave kur $t \to +\infty$ dhe largohen pambarimisht kur $t \to -\infty$. Mbetet të tregojmë nëse këto trajektore janë të lugëta apo të mysëta. Për këtë mjafton të studiojmë shenjën e derivatit të dytë:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{\left[x'(t)\right]^3} = \frac{\left(y_0 e^{-t}\right)\left(\alpha x_0 e^{\alpha t}\right) - \left(-y_0 e^{-t}\right)\left(\alpha^2 x_0 e^{\alpha t}\right)}{\left[\alpha x_0 e^{\alpha t}\right]^3} = \frac{y_0(1+\alpha)e^{-t}}{\alpha^2 x_0^2 e^{2\alpha t}}$$

Vihet re se

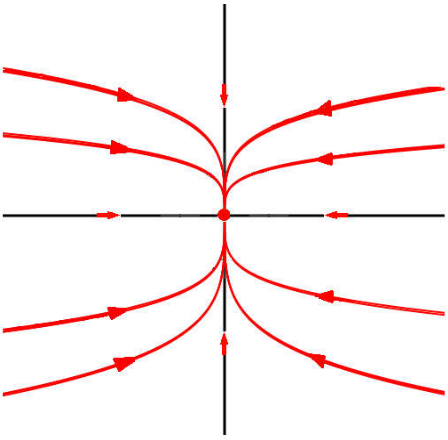
$$\operatorname{sgn}\frac{d^2 y}{dx^2} = \operatorname{sgn}(\alpha+1)y_0$$

që do të thotë se:

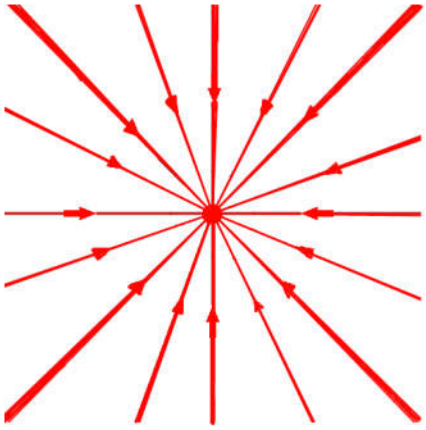
$$(1)\ \text{për}\ \ y_0 > 0\ \text{kemi:}\ \ \frac{d^2 y}{dx^2}:\ \begin{cases} <0 & \textit{për} \quad \alpha < -1 \\ >0 & \textit{për} \quad -1 < \alpha < 0 \\ >0 & \textit{për} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

$$(2)\ \text{për}\ \ y_0 < 0\ \text{kemi:}\ \ \frac{d^2 y}{dx^2}:\ \begin{cases} >0 & \textit{për} \quad \alpha < -1 \\ <0 & \textit{për} \quad -1 < \alpha < 0 \\ <0 & \textit{për} \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

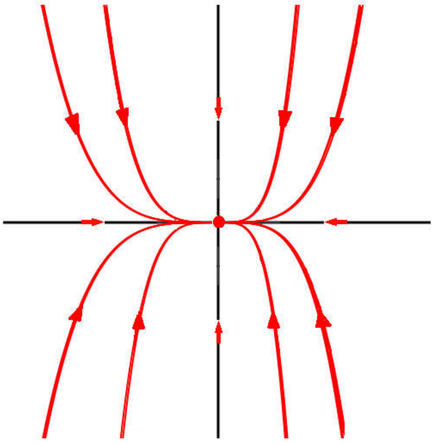
Në këtë mënyrë shpjegohet portreti fazor në Fig. 2.23, në rastet (a), (c) dhe (e). [8], [9]



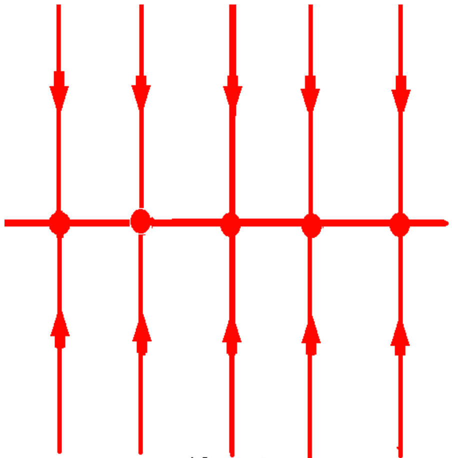
(a) $\alpha < -1$



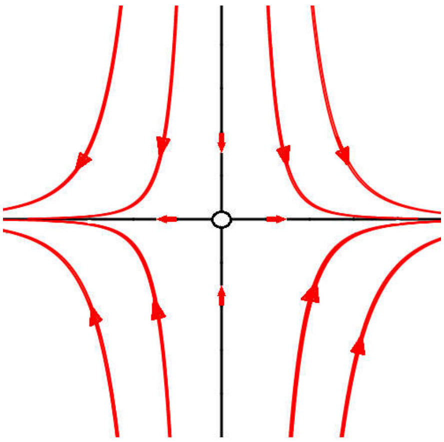
(b) $\alpha = -1$



(c) $-1 < \alpha < 0$



(d) $\alpha = 0$



(e) $\alpha > 0$

Figura 2.23

(III) Në rastin $\alpha = 0$, trajektoret $\left(x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{-t}\right)$ kanë trajtën $\left(x_0, y_0 e^{-t}\right)$ që do të thotë se janë gjysmë – drejtëzat pingule $x = x_0$. (Fig. 2.23/d), ku $-\infty < x_0 < +\infty$.

(IV) Në rastin $\alpha = -1$, trajektoret $\left(x_0 e^{\alpha t}, y_0 e^{-t}\right)$ kanë trajtën $\left(x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t}\right)$. Për $x_0 = 0$, trajektorja është $\left(0, y_0 e^{-t}\right)$ që për $y_0 > 0$ paraqet gjysmë – boshtin Oy^+, dhe për $y_0 < 0$ parqet Oy^-.

Për $x_0 \neq 0$, trajektoret $\left(x_0 e^{-t}, y_0 e^{-t}\right)$ paraqesin drejtëza të trajtës $y = kx$, ku $k = y_0 / x_0$ (Fig. 2.23/b). [18], [28], [49]

Komente dhe emërtime

Në rastin **(a),** kur $t \to +\infty$, trajektoret i afrohen origjinës $O(0;0)$, tangencialisht me boshtin Ox. Nga ana tjetër, po të kthehemi prapa, që do të thotë $t \to -\infty$, trajektoret, duke u larguar pambarimisht nga $O(0;0)$, tentojnë të bëhen paralele me boshtin Ox.

Në rastin **(c)**, sjellja e trajektoreve është e njëjtë me atë të rastit (a), me ndryshimin që vendin e boshtit Ox në këtë sjellje e zëvendëson boshti Oy.

Në rastet **(a)** *dhe* **(c)** *pika fikse* $O(0;0)$ *quhet "**nyje e qëndrueshme**".*

Në rastin **(b)** *pika fikse* $O(0;0)$ *quhet "**nyje simetrike**" ose "**yll**".*

Në rastet (a), (b) dhe (c) pika fikse $O(0;0)$ quhet *"**pikë tërheqjeje**" ose "**pikë thithëse".***

Të gjitha trajektoret që dalin nga pika rrotull origjinës $O(0;0)$, *i afrohen asaj kur* $t \to +\infty$. *Në fakt, pika* $O(0;0)$ *tërheq të gjitha trajektoret e planit fazor, ndaj kjo pikë quhet "**globalisht tërheqëse**".*

Në rastin **(d)**, d.m.th. në rastin kur $\alpha = 0$, boshti Ox është i mbushur i tëri me "***pika fikse të paizoluara"***. Çdo trajektore i afrohet pikës fikse përkatëse sipas pingules.

Në rastin **(e)**, pjesa dërrmuese e trajektoreve largohen pambarimisht nga $O(0;0)$; përjashtim bëjnë vetëm trajektoret që dalin nga pikat e boshtit Oy, kështu pika fikse $O(0;0)$ është e paqëndrueshme.

Në rastin **(e)**, pika fikse $O(0;0)$ quhet "***pikë samar***" dhe boshti Ox quhet "***kolektor*** (mbledhës) ***i paqëndrueshëm***". [30]

Shënim

Ka edhe kuptime të tjera për qëndrueshmërinë, njëri nga të cilat njihet nën emërtimin ***"qëndrueshmëria sipas Ljapunovit"*** .

Thuhet që pika fikse (x^*, y^*) është e qëndrueshme sipas Ljapunovit, në qoftë se të gjitha trajektoret që dalin nga pika e çfarëdoshme (x_0, y_0), sado afër pikës (x^*, y^*), mbeten afër saj gjatë gjithë kohës, pra jo siç ndodh te pika fikse tërheqëse, ku ato janë afër pikës fikse kur $t \to +\infty$.

2.8.3 Klasifikimi trajektoreve të sistemeve lineare

Shqyrtojmë sistemin dinamik linear.

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \tag{2.38}$$

Origjina $O(0;0)$ është pikë fikse e (2.38), sido qofshin koeficientet a, b, c, d.

Por, kur

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0,$$

përveç pikës O, sistemi (2.38) ka një bashkësi të pafundme pikash fikse të tjera.

Do të shohim si zgjidhet sistemi (2.38) duke përdorur njehsimin matricor. Shkruajmë (2.38) në trajtën e ekuacionit matricor diferencial

$$X' = AX \tag{2.38'}$$

ku

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad X' = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \text{dhe} \qquad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Zgjidhja $(x(t), y(t))$ tashmë mund të shkruhet në trajtën e një vektori apo matrice shtyllë $X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$. I kërkojmë zgjidhjet e ekuacionit (2.38') në trajtën

$$X(t) = e^{\lambda t} V , \tag{2.39}$$

ku λ është një konstante reale ose komplekse, ndërsa $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ një vektor (matricë shtyllë) jo zero, i cili nuk varet nga koha t. Mbetet për të gjetur λ dhe V. Për këtë zëvendësojmë $X(t) = e^{\lambda t} V$ në (2.38') :

$$\left[e^{\lambda t} V\right]' = Ae^{\lambda t} V \Leftrightarrow \lambda e^{\lambda t} V = Ae^{\lambda t} V \Leftrightarrow \lambda V = AV \Leftrightarrow (A - \lambda I)V = 0 \tag{2.40}$$

ku matrica I është matrica njësi.

Nga kursi i algjebrës dimë që vlerat e $\lambda - \ddot{e}s$ për të cilat, ekuacioni (2.40) ka zgjidhje $V \neq O$ quhen "***vlera të veta***", ndërsa zgjidhjet përgjegjëse V_λ quhen "***vektorë të vetë***".

Në trajtë të shtjelluar, ekuacioni (2.40) paraqet sistemin homogjen me dy të panjohura :

$$\begin{cases} (a-\lambda)v_1 + bv_1 = 0 \\ cv_1 + (d-\lambda)v_2 = 0 \end{cases}$$

Gjithashtu nga kursi i algjebrës, dimë se sistemi (2.40) ka zgjidhje të ndryshme nga zgjidhja zero vetëm nëse përcaktori i tij është i barabartë me zero:

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Barazimi i fundit mund të shkruhet në trajtën

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0 \qquad (2.41)$$

dhe quhet "***ekuacion karakteristik***" i matricës A.

Ekuacionin (2.41) e shkruajmë për shkurt në trajtën

$$\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0 \qquad (2.41')$$

ku

$\tau = a + d$ (gjurma e matricës A),

$\Delta = ad - bc$ (përcaktori i matricës A).

Vlerat e veta janë rrënjët e ekuacionit (2.41'):

$$\lambda_1 = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2} \qquad \lambda_2 = \frac{\tau - \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Në këtë mënyrë, pasi të njehsohen vlerat e veta dhe vektorët e vetë, gjenden trajektoret e sistemit (2.38), si dhe bëhet studimi i sjelljes së tyre rrotull pikave fikse.

Është e qartë se sjellja e trajektoreve përcaktohet nga numrat τ dhe Δ; për rrjedhojë edhe nga numrat λ_1 dhe λ_2. [37], [48], [49]

Rregulla e leximit të sjelljes së trajektoreve rrotull origjinës

Në qoftë se vlerat τ dhe Δ janë të tilla që pika (τ, Δ) ndodhet në :

(1) zonën e hapur dhe të kufizuar nga parabola $\Delta = \tau^2/4$ dhe boshti $O\tau^+$ (kuadrati i parë), atëherë $O(0;0)$ është ***nyje e paqëndrueshme;***

(2) zonën e hapur dhe të kufizuar nga parabola $\Delta = \tau^2/4$ dhe boshti $O\tau^-$ (kuadrati i dytë), atëherë $O(0;0)$ është ***nyje e qëndrueshme***;

(3) zonën e hapur, të kufizuar nga parabola $\Delta = \tau^2/4$ dhe boshti $O\Delta^+$ (kuadrati i parë), atëherë $O(0;0)$ është ***spirale e paqëndrueshme***;

(4) zonën e hapur dhe të kufizuar nga parabola $\Delta = \tau^2/4$ dhe boshti $O\Delta^-$ (kuadrati i dytë), atëherë $O(0;0)$ është ***spirale e qendër***;

(5) zonën e hapur poshtë boshtit $O\tau$ (kuadratet e dytë dhe të katërt), atëherë $O(0;0)$ është ***samar*** i njërës nga dy format e tij;

(6) parabolën $\Delta = \tau^2/4$ (dega në kuadratin e parë), atëherë $O(0;0)$ është ***yll i paqëndueshm,*** *kur* $\lambda_1 = \lambda_2 = a = d > 0$ *dhe* $b = c = 0$, ose ***nyje e paqëndrueshme*** *kur* $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ *dhe* $b^2 + c^2 > 0$;

(7) parabolën $\Delta = \tau^2/4$ (dega në kuadratin e dytë), atëherë $O(0;0)$ është ***yll i qëndrueshëm*** *kur* $\lambda_1 = \lambda_2 = a = d < 0$ *dhe* $b = c = 0$ **,** ose ***nyje e qëndrueshme*** *kur* $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ dhe $b^2 + c^2 > 0$;

(8) boshtin $O\Delta^+$, atëherë sistemi $O(0;0)$ është qendër.

(9) boshtin $O\tau$ d.m.th. $\Delta = 0$, atëherë sistemi (2.38) ka një bashkësi të pafundme pikash fikse, të paizoluara nga njëra tjetra, të cilat mbushin një drejtëz të pjerrët, ose njërin nga boshtet e koordinatave, ku trajektoret sillen ndaj tyre si 2.8.2. (Fig. 2.23/d).

Le të ilustrojmë tani secilin rast me nga një shembull duke përdorur dy mënyra; vlerat vetjake dhe programin MAPLE.

Shembull 1. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \tau = 1 + 4 = 5, \tau^2 - 4\Delta = 9 > 0\ ,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 4$$

kështu që origjina $O(0;0)$ është "***nyje e paqëndrueshme***".

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë: [10], [14], [44], [47], [51]

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=x(t),D(y)(t)=4*y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) =
5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=4,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=-15]], x=-20..20, y= -
20..20,stepsize=.05, linecolour=blue, arrows=SLIM, thickness=2);
```

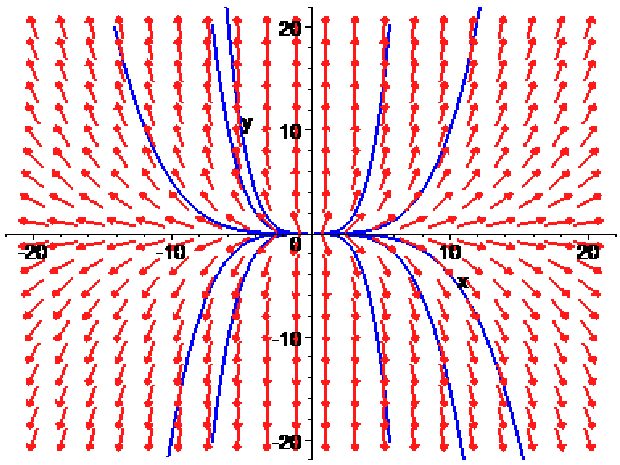


Figura 2.24

Shembull 2. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -4y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 4 > 0\,, \tau = -1-4 = -5\,, \tau^2 - 4\Delta = 9 > 0\ ,\ \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -4$$

kështu që origjina $O(0;0)$ është "***nyje e qëndrueshme***".

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=-x(t),D(y)(t)=-4*y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0) = -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) = 5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=4,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=-15]], x=-20..20, y= -20..20,stepsize=.05, linecolour=blue, arrows=SLIM, thickness=2);
```

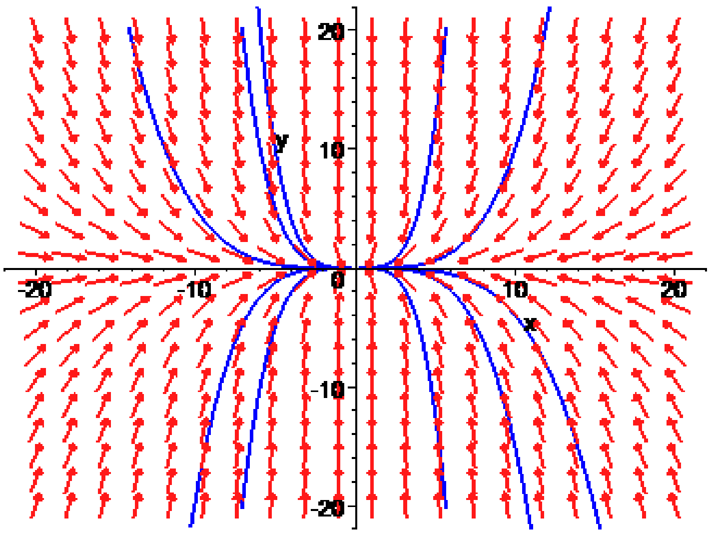


Figura 2.25

Shembull 3. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5 > 0,\ \tau = 1 + 1 = 2,\ \tau^2 - 4\Delta = -16 < 0\ ,\ {}_2\lambda_1 = 1 \pm 2i$$

Kemi të bëjmë me spirale dhe m.q.s $\alpha = 1 > 0$ atëhere origjina $O(0;0)$ është "***spirale e paqëndrueshme***".

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=x(t)+2*y(t),D(y)(t)=-2*x(t)+y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) = 5]], x=-20..20, y= -
20..20,stepsize=.05, linecolour=blue, arrows=SLIM, thickness=2);
```

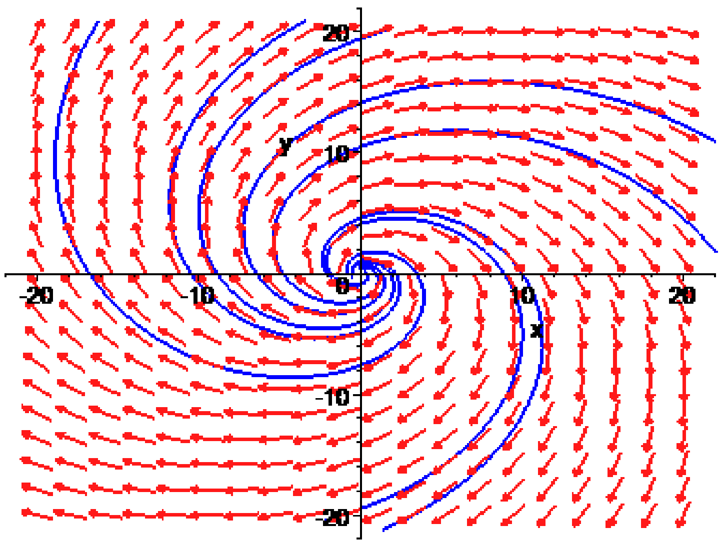


Figura 2.26

Shembull 4. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 5 > 0\,,\, \tau = -1 - 1 = -2\,,\, \tau^2 - 4\Delta = -16 < 0\ ,\ {}_2\lambda_1 = -1 \pm 2i$$

Kemi të bëjmë me spirale dhe m.q.s $\alpha = -1 < 0$ atëhere origjina $O(0;0)$ është "***spirale e qëndrueshme***".

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools); phaseportrait([(D(x))(t) = -x(t)+2*y(t), (D(y))(t) = -2*x(t)-y(t)],
[x(t), y(t)], t = -3 .. 3, [[x(0) = 4, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 10], [x(0) = -5, y(0) = 5],
[x(0) = 10, y(0) = -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0) = -8, y(0) = -8], [x(0) = -10, y(0) =
5]], x = -20 .. 20, y = -20 .. 20, stepsize = 0.5e-1, linecolour = blue, arrows = SLIM,
thickness = 2);
```

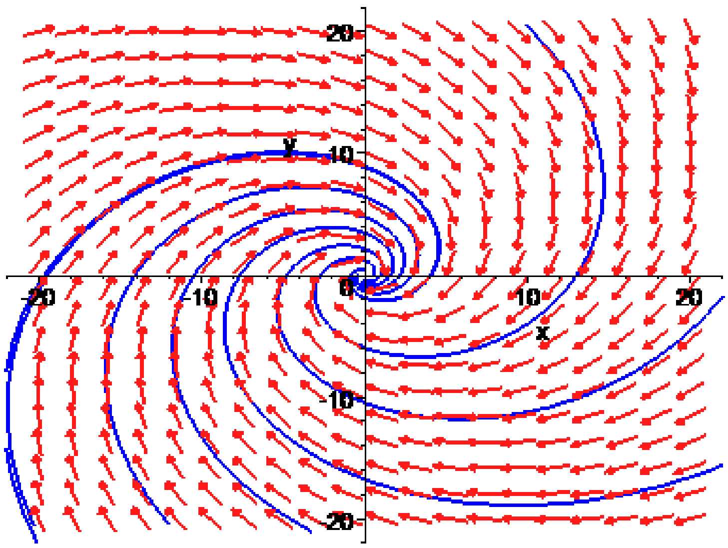


Figura 2.27

Shembull 5. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 2x - y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 < 0 \,,\, \tau = 2 - 1 = 1 \,,\, \tau^2 - 4\Delta = 17 > 0$$

vlerat vetjake janë me shenjë të kundërt, kemi të bëjmë me "***pikë samar"*** në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=2*x(t)+y(t),D(y)(t)=2*x(t)-y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) = 5]], x=-20..20, y= -
20..20,stepsize=.05, linecolour=blue, arrows=SLIM, thickness=2);
```

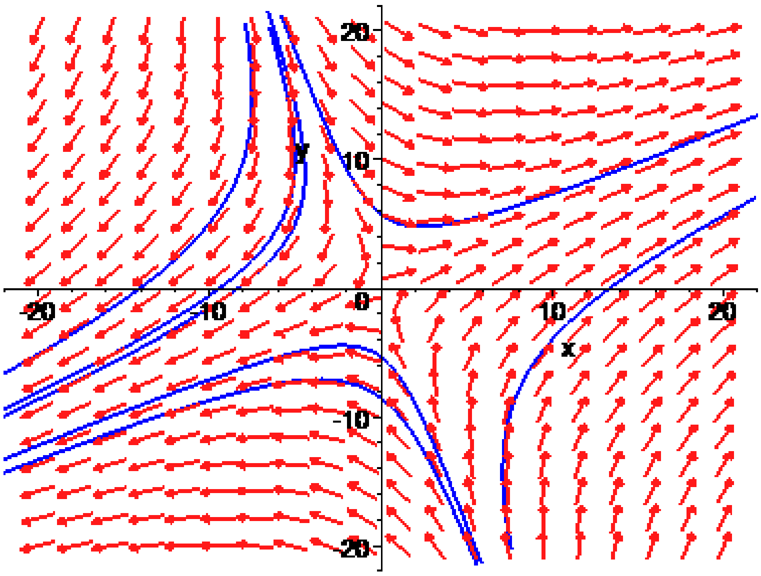


Figura 2.28

Shembull 6. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = 4y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 < 0 \,, \tau = -1 + 4 = 3 \,, \tau^2 - 4\Delta = 25 > 0 \;\;,\;\; \lambda_1 = -1, \;\; \lambda_2 = 4$$

vlerat vetjake janë me shenjë të kundërt, kemi të bëjmë me "***pikë samar***" dhe në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=-x(t),D(y)(t)=4*y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) =
5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=4,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=-15]], x=-20..20, y= -
20..20,stepsize=.05, linecolour=blue, arrows=SLIM, thickness=2);
```

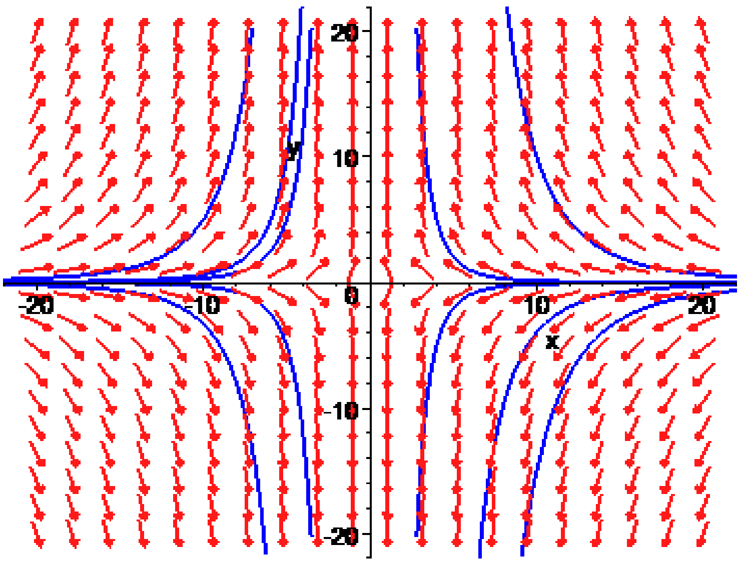


Figura 2.29

Shembull 7. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0\,,\ \tau = 1 + 1 = 2\,,\ \tau^2 - 4\Delta = 0\ ,\ \lambda_1 = \lambda_2 = 1 = a = d > 0,$$

$b = c = 0$, kemi të bëjmë me "***yll të paqëndrueshëm***" në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=x(t),D(y)(t)=y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) =
5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=4,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=-15],[x(0)=-10,y(0)=-15],[x(0)=-
10,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=5,y(0)=5],[x(0)=5,y(0)=5],[x(0)=1,y(0)=-
10],[x(0)=5,y(0)=3]], x=-20..20, y= - 20..20,stepsize=.05, linecolour=blue,
arrows=SLIM, thickness=2);
```

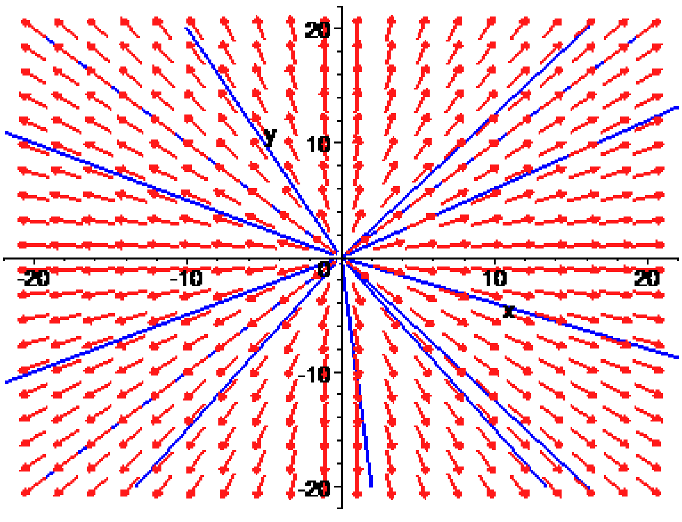


Figura 2.30

Shembull 8. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0,\ \tau = -1-1 = -2,\ \tau^2 - 4\Delta = 0,\ \lambda_1 = \lambda_2 = -1 = a = d < 0,$$

$$b = c = 0$$

kemi të bëjmë me "***yll të qëndrueshëm***" në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools):
phaseportrait([D(x)(t)=-x(t),D(y)(t)=-y(t)],
[x(t),y(t)], t=-3..3,[[x(0)=4,y(0)=5],[x(0)=-5,y(0)=10], [x(0)=-5, y(0)=5], [x(0)=10, y(0)
= -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0)= -8, y(0) = -8], [x(0)=-10, y(0) =
5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=4,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=-15],[x(0)=-10,y(0)=-15],[x(0)=-
10,y(0)=-5],[x(0)=10,y(0)=10],[x(0)=5,y(0)=5],[x(0)=5,y(0)=5],[x(0)=1,y(0)=-
10],[x(0)=5,y(0)=3]], x=-20..20, y= - 20..20,stepsize=.05, linecolour=blue,
arrows=SLIM, thickness=2);
```

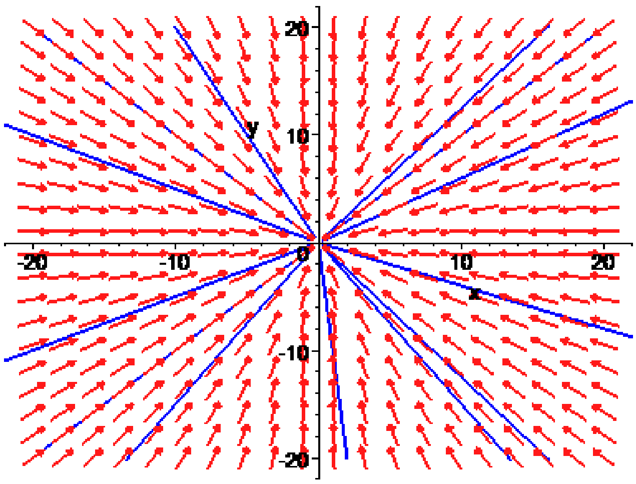


Figura 2.31

Shembull 9. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = 2x \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \tau = 2 + 2 = 4, \tau^2 - 4\Delta = 0 \ \lambda_1 = \lambda_2 = 2 > 0, \ \ b^2 + c^2 = 4 > 0$$

kemi të bëjmë me "***nyje të paqëndrueshme***" në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools); phaseportrait([(D(x))(t) = 2*x(t), (D(y))(t) = 2*x(t)+2*y(t)], [x(t), y(t)], t = -3 .. 3, [[x(0) = 4, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 10], [x(0) = 15, y(0) = 15], [x(0) = 10, y(0) = -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0) = -8, y(0) = -8], [x(0) = -10, y(0) = 5], [x(0) = 5, y(0) = -10]], x = -20 .. 20, y = -20 .. 20, stepsize = 0.05, linecolour = blue, arrows = SLIM, thickness = 2);
```

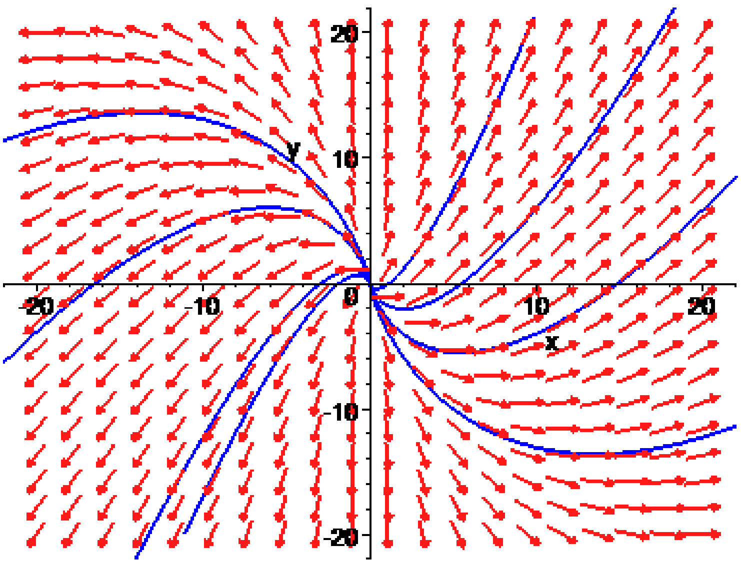


Figura 2.32

Shembull 10. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = -2x \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0,\ \tau = -2 - 2 = -4,\ \tau^2 - 4\Delta = 0\ \ \lambda_1 = \lambda_2 = -2 < 0,\ \ b^2 + c^2 = 4 > 0$$

kemi të bëjmë me "***nyje të qëndrueshme"*** në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools); phaseportrait([(D(x))(t) = -2*x(t), (D(y))(t) = 2*x(t)-2*y(t)], [x(t), y(t)], t = -3 .. 3, [[x(0) = 4, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 10], [x(0) = 15, y(0) = 15], [x(0) = 10, y(0) = -4], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0) = -8, y(0) = -8], [x(0) = -10, y(0) = 5], [x(0) = 5, y(0) = -10]], x = -20 .. 20, y = -20 .. 20, stepsize = 0.05, linecolour = blue, arrows = SLIM, thickness = 2);
```

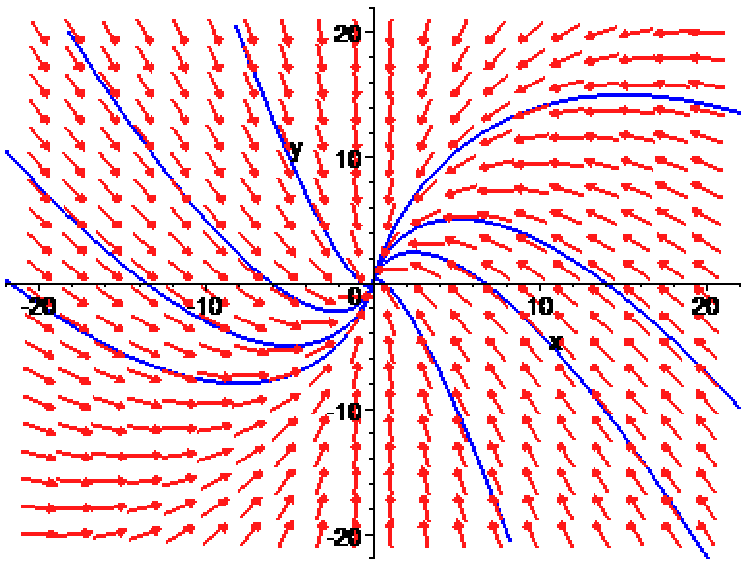


Figura 2.33

Shembull 11. Të klasifikohet pika fikse $O(0;0)$ për sistemin dinamik

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$$

Zgjidhje. Meqenëse

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0 \,, \tau = 0 \,, \tau^2 - 4\Delta < 0 \;{}_2\lambda_1 = \pm i$$

kemi të bëjmë me “***qendër”*** në këtë rast.

Kodi me programin Maple bashkë me zgjidhjen grafike është si më poshtë:

```
>with(DEtools); phaseportrait([(D(x))(t) = y(t), (D(y))(t) = -x(t)], [x(t), y(t)], t = -3 .. 3, [[x(0) = 5, y(0) = 5], [x(0) = -5, y(0) = 5], [x(0) = 10, y(0) = 10], [x(0) = 10, y(0) = -10], [x(0) = -5, y(0) = -5], [x(0) = -8, y(0) = -8], [x(0) = -1, y(0) = 5], [x(0) = 5, y(0) = -10]], x = -20 .. 20, y = -20 .. 20, stepsize = 0.05, linecolour = blue, arrows = SLIM, thickness = 2);
```

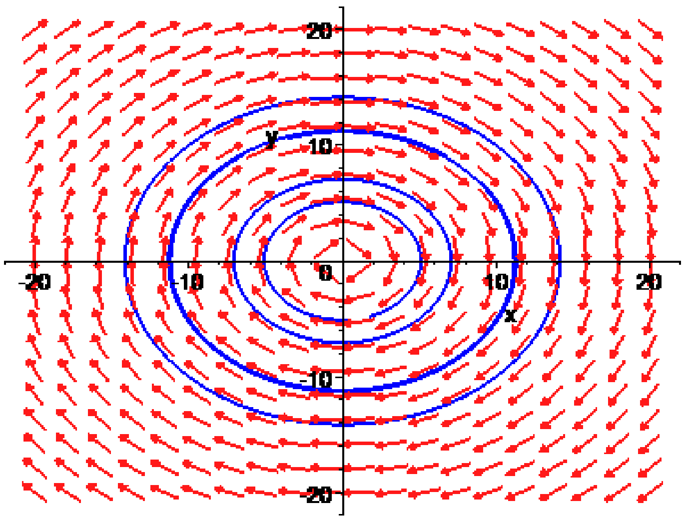


Figura 2.34

Të gjitha sjelljet e trajektoreve të sistemit dinamik (2.38) rrotull pikës fikse $O(0;0)$ si dhe klasifikimi i tyre, përmblidhen në dy diagramet e Fig.2.35 dhe 2.36. [8], [9] Paraqitja e gjithë këtij informacioni në planin $\tau\Delta$ na jep një përmbledhje vizuale të të gjitha llojeve të ndryshme të sistemeve lineare.

Janë disa gjëra për t'u marrë në konsideratë. Së pari, plani $\tau\Delta$ është një përfaqësim dy – dimensional i asaj që është me të vërtetë një hapësirë katër – dimensionale, përderisa matricat 2×2 janë të përcaktuara nga katër parametra, koefiçientët e matricës. Kështu që ka pafundësisht matrica të ndryshme që i korrespondojnë çdo pikë në planin $\tau\Delta$. Ndërsa të gjitha këto matrica ndajnë të njëjtin konfigurim të vlerës vetjake, mund të ketë dallime delikate në portretet fazore, të tilla siç janë qendra dhe spiralet, ose mundësinë e një ose dy vektorëve vetjakë të pavarur në rastin e vlerës vetjake të përsëritur .

Ne gjithashtu mendojmë planin $\tau\Delta$ si analog të diagramit të bifurkimit për sistemet lineare planare. Prabola $\tau^2-4\Delta=0$ e portretit fazor i nënshtrohet një bifurkimi: *Një ndryshim i madh ndodh në gjeometrinë e portretit fazor*.

Së fundi, vëmë re se ne mund të përftojmë mjaft informacion në lidhje me sistemin nga Δ dhe τ pa llogaritur vlerat vetjake. Për shembull, në qoftë se $\Delta<0$, ne e dimë se kemi një pikë samar.

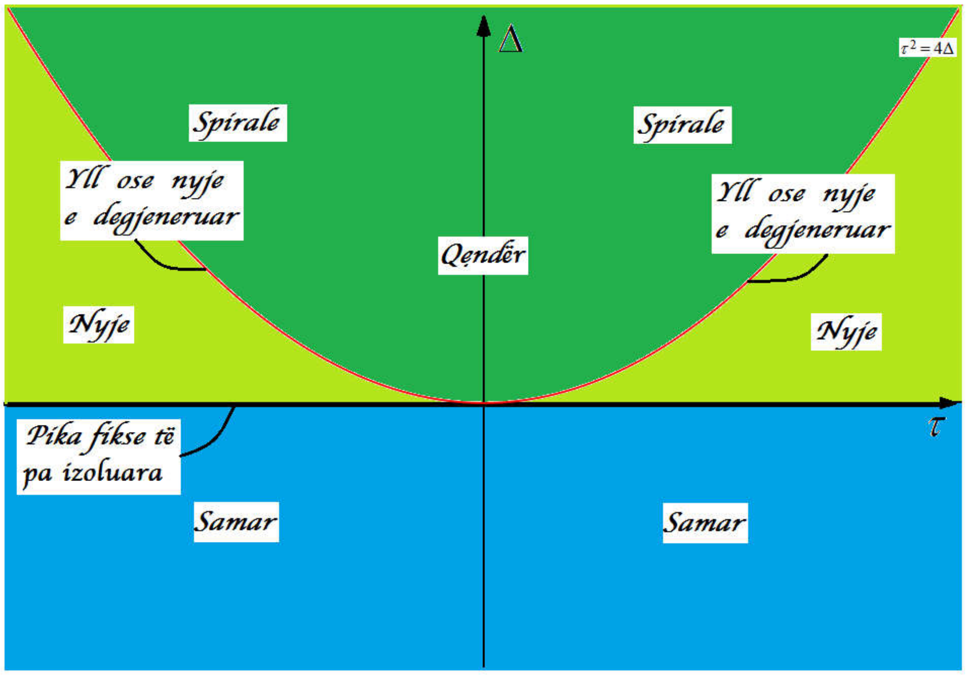
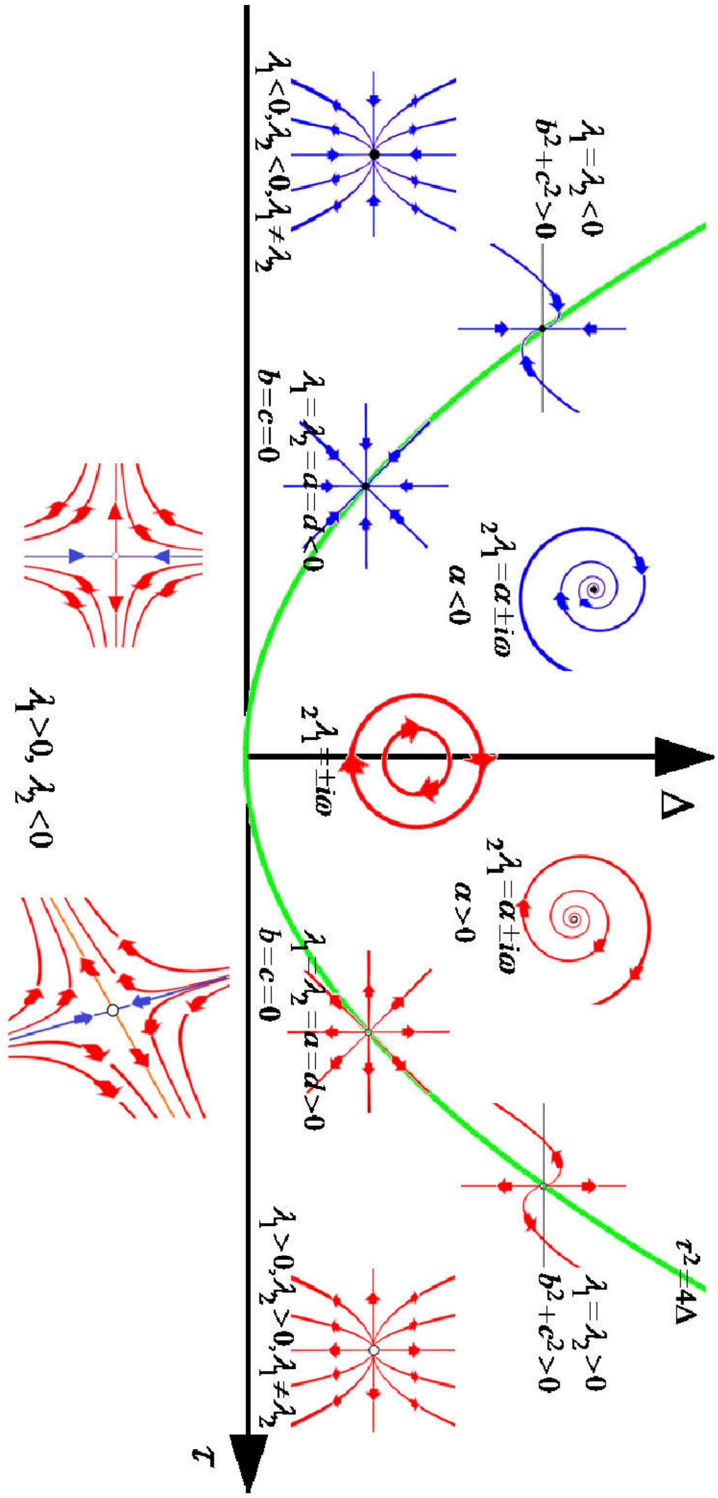


Figura 2.35



$\lambda_1<0, \lambda_2<0, \lambda_1\neq\lambda_2$
$\lambda_1=\lambda_2<0$
$b^2+c^2>0$
$\lambda_1=\lambda_2=a=d<0$
$b=c=0$
$\lambda_1=\alpha\pm i\omega$
$\alpha<0$
$\lambda_1=\pm i\omega$
Δ
$\lambda_1>0,\ \lambda_2<0$
$\lambda_1=\alpha\pm i\omega$
$\alpha>0$
$\lambda_1=\lambda_2=a=d>0$
$b=c=0$
$\lambda_1=\lambda_2>0$
$b^2+c^2>0$
$\tau^2=4\Delta$
$\lambda_1>0, \lambda_2>0, \lambda_1\neq\lambda_2$
τ

Figura 2.36

2.8.4 Sistemet dinamike jolineare dhe metoda e linearizimit

Shqyrtojmë sistemin dinamik jolinear

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{2.42}$$

Le të jetë (x^*, y^*) një pikë fikse e tij, d.m.th janë të vërteta barazimet

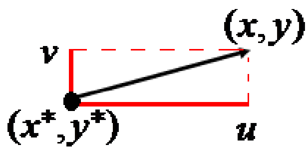
$$f(x^*, y^*) = 0 \quad \text{dhe} \quad g(x^*, y^*) = 0 \tag{2.43}$$

Le të jenë

$$u = x - x^*, \qquad v = y - y^*$$

komponentët e një shmangieje të vogël

nga pika fikse (x^*, y^*) te pika (x, y). [30], [49]



Po të kryejmë në sistemin (2.42) zëvendësimet

$$x = x^* + u, \qquad y = y^* + v$$

merr trajtën

$$\begin{cases} (x^* + u)' = f(x^* + u,\ y^* + v) \\ (y^* + v)' = g(x^* + u,\ y^* + v) \end{cases} \tag{2.44}$$

Meqë x^* dhe y^* janë konstante, derivatet e tyre janë zero, kështu që sistemi (2.44) ka trajtën

$$\begin{cases} u' = f(x^* + u,\ y^* + v) \\ v' = g(x^* + u,\ y^* + v) \end{cases} \tag{2.45}$$

Po të zbërthejmë funksionet $f(x^* + u,\ y^* + v)$ dhe $g(x^* + u,\ y^* + v)$ në seri të Teilorit me qendër në pikën (x^*, y^*), sistemi (2.45) merr trajtën:

$$\begin{cases} u' = f(x^*, y^*) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\cdot u + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\cdot v + O(u^2) + \mathrm{O}(v^2) + O(uv) \\ v' = g(x^*, y^*) + \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\cdot u + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\cdot v + O(u^2) + \mathrm{O}(v^2) + O(uv) \end{cases}$$

ku $O(u^2)$, $\mathrm{O}(v^2)$, $O(uv)$ janë shumat e kufizave të serisë së Teilorit të rendit të njëjtë të madhësisë me përkatësisht u^2, v^2, uv.

Meqenëse $f(x^*, y^*) = 0$ dhe $g(x^*, y^*) = 0$ (nga barazimet (2.43)), sistemi i mësipërm merr trajtën

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)\cdot u + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)\cdot v + O(u^2) + \mathrm{O}(v^2) + O(uv) \\ v' = \dfrac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)\cdot u + \dfrac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)\cdot v + O(u^2) + \mathrm{O}(v^2) + O(uv) \end{cases} \tag{2.46}$$

Për të kuptuar se çfarë ndodh me një trajektore që del nga një pikë (x, y) rrotull pikës fikse (x^*, y^*), marrim x pambarimisht afër x^* dhe y pambarimisht afër y^*, që do të thotë marrim u dhe v pambarimisht të vogla.

Përderisa u dhe v janë *pambarimisht të vogla*, kufizat $O(u^2)$, $\mathrm{O}(v^2)$ dhe $O(uv)$ mund të mos merren parasysh (neglizhohen), kështu që sistemi (2.46) mund të përafrohet me sistemin dinamik linear [28], [40], [49]

$$\begin{cases} u' = \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x}u + \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y}v \\ v' = \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x}u + \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y}v \end{cases} \tag{2.47}$$

i cili si ndryshore dinamike ka ndryshoret u dhe v.

Matrica

$$J(x^*, y^*) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial f(x^*, y^*)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(x^*, y^*)}{\partial y} \end{bmatrix}$$

quhet ***matrica e Jakobit*** në pikën fikse (x^*, y^*).

Thelbi i metodës së linearizimit

Për të studiuar sjelljen e trajektoreve të ***sistemit jolinear*** *(2.42) rrotull pikës fikse* (x^*, y^*)*, mjafton të studiojmë sjelljen e trajektoreve të sistemit linear (2.47) rrotull pikës fikse të tij* $(0;0)$.

Klasifikimi i pikës fikse $(0;0)$ *të sistemit (2.47) bëhet me anë të matricës së Jakobit* $J(x^*, y^*)$.

Atë lloj sjelljeje që kanë trajektoret e sistemit (2.47) kundrejt pikës $(0;0)$ *kanë edhe trajektoret e sistemit dinamik (2.42) kundrejt pikës* (x^*, y^*).

Kapitulli 3

MODELET LOGJISTIKE

3.1 Hyrje

Modelet matematikore janë përdorur gjerësisht për të vlerësuar sistemet dinamike të popullimit tek kafshët për vite me rradhë, po ashtu edhe për sistemet dinamike të popullimit njerëzor.

Në këtë kapitull do të studiojmë strategjitë për kultivimin e peshkut kocë.

Kemi përdorur tre modele rritjeje logjistike, konkretisht, *strategjia konstante, strategjia proporcionale dhe strategjia periodike*.

Objektivi i këtij kapitulli është që të përcaktojmë një rritje dhe riprodhim sa më optimal për peshqit.

Së fundmi përdorimi i modeleve matematikore është shtrirë në sektorin agrokulturor veçanërisht në blegtori, për të siguruar ofertë të vazhdueshme dhe optimale. Modeli logjistik i rritjes lidhur me gjuetinë është përdorur për të studiuar dukurinë e peshkimit.

Gjëja më e rëndësishme në menaxhimin me sukses të gjuetisë është që strategjitë e gjuetisë janë mbështetëse, nuk të drejtojnë drejt paqëndrueshmërive apo shfarosjeve dhe prodhojnë rezultate të mira për vite me rradhë, me luhatje të vogla mes viteve. Si pasojë, ato mund përmbushin kërkesën e tregut përgjatë gjithë vitit. [46]

Malthus ishte i pari që formuloi një trajtim teorik të dinamikës së popullsisë në 1798 dhe Verhulst shndërroi teorinë e Malthus në një model matematikor të quajtur ekuacion logjistik.

Qëllimi këtu është paraqitja e disa prej tipeve të bigëzimit në sistemet dinamike një – dimensionale dhe aplikimi i tyre në modelet dinamike të popullimit veçanërisht në kulturat ujore.

Ndryshimi i popullsisë mund të ketë pasoja të rëndësishme ekonomike dhe sociale. Për shembull, fermeri do të dijë sa e madhe është popullsia e insekteve shkatërrues kur prodhimi/të korrat e tij janë në pikën më delikate dhe çfarë efektesh do të ketë spërkatja e pesticideve. Peshkatari do të dijë çfarë efektesh do të ketë kuota e peshkimit në rezervat e peshkimit dhe si pasojë në zënien/kapjen e peshkut.

Peshku është një nga burimet kryesore të dietës njerëzore dhe burimi kryesor i proteinave dhe yndyrnave. Kohët e fundit, konsumatorët janë bërë më të vetëdijshëm për peshkun si një mish alternativ më të shëndetshëm. Kjo është veçanërisht për shkak të problemeve me sëmundjet kardiovaskulare dhe mbipeshës, të cilat janë kthyer në një nga problemet më të mëdha për shëndetin e njeriut. Ndërgjegjësimi për peshkun si dietë ushqyese ka shkaktuar rritjen e kërkesës për konsum të tij. Konsumimi më i madh i peshkut nga njeriu vjen nga peshkimi në ujërat e oqeaneve dhe të deteve, por ajo që ofron natyra nuk është e mjaftueshme për të kënaqur nevojën në rritje për konsumimin e ketij burimi. Gjithashtu kostot e kapjes së peshkut janë duke u rritur.

Duke rritur prodhimin e kulturave ujore, jo vetëm që kënaqim kërkesën për produktin e peshkut, por gjithashtu mund të mbrojmë disa specie me vlerë të lartë nga zhdukja e tyre. Këtu do të përdoret modeli logjistik i rritjes për të treguar rritjen e popullimit të peshkut, si dhe do të merren në konsideratë tre strategji gjuetie siç i përmendëm më lart. Për secilën strategji është llogaritur shuma optimale e kapjes së peshkut për të mbrojtur popullimin nga zhdukja. Rezultatet tregojnë që peshkimi në vlerën e shumës ose me një vlerë më të lartë sesa pika e bigëzimit sjell zhdukjen e ketij popullimi. Kështu që këto arritje mund t'u vijnë në ndihmë peshkatarëve për të garantuar popullimin e peshkut dhe për të reduktuar kostot e ripopullimit.

Siç thamë konsumimi më i madh i peshkut nga njeriu vjen nga peshkimi në ujërat e deteve e oqeaneve dhe ajo çfarë ofron natyra nuk është e mjaftueshme për të kënaqur nevojën në rritje për konsumimin e këtij burimi, kështu hidrokultura do ketë kapacitet të madh kudo në botë në një të ardhme të afërt. Në shumë vende hidrokultura kufizohet nga hapësira tokësore dhe disponueshmëria ujore, pavarësisht se kërkesa për peshkimin e peshqëve po rritet.

Përdorimi i modeleve matematikore në gjuetinë e peshkut ndihmon sektorin e hidrokulturës për të vlerësuar kur dhe sa peshk mund të peshkohet për të maksimizuar vlerën e sasisë së peshkut të përvetësuar, pa e zhdukur komplet popullimin. Kjo u jep mundësi atyre që të jenë gati me zgjidhje efektive për të siguruar që oferta për peshk mund të përmbushë kërkësën për konsum.

Në vitet e fundit është zhvilluar mjaft kultivimi i peshkut në Shqipëri. Në vitin 2014, zënia e peshkut ka qenë 5.813 ton nga 5.369 ton që ishte në vitin 2013, duke u rritur në terma vjetorë me 7,6 %. Një rritje të dukshme ka pësuar dhe zënia e midhjeve me rreth 50 % në vitin 2014 krahasuar me 2013 me një prodhim total 1.500 ton në vitin 2014 nga 750 ton që ishte në vitin 2013. Akuakultura ka pësuar një rënie gjatë vitit 2014 me 785 ton krahasuar me një vit më parë siç e shohim grafikun e mëposhtëm. [60]

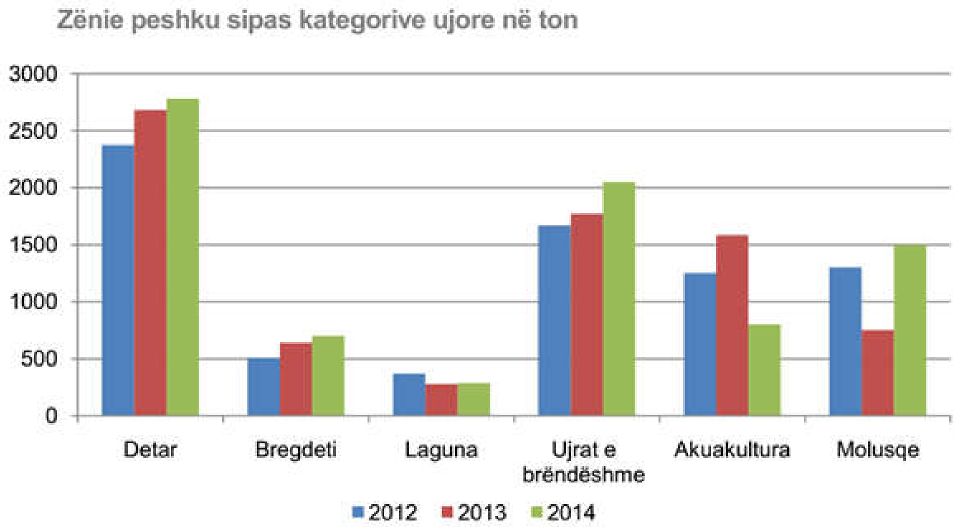


Figura 3.1 [60]

Sot flota e peshkimit është e përqëndruar në katër portet e peshkimit, atë të Sarandës, Vlorës, Durrësit dhe Shëngjinit. Flota më e madhe është flota e Durrësit me 94 anije dhe mbas kësaj vjen Vlora me 78 anije, Shëngjini me 41 dhe Saranda me 34 anije, Fig. 3.2. Mosha e madhe e flotës së peshkimit, sjell që edhe gatishmëria teknike e tyre dhe si rrjedhojë edhe sforcoja e peshkimit të jetë e ulët. Pjesa më e madhe e anijeve të peshkimit shqiptar kanë një moshë nga 25 vjeçare deri 40 vjeçare, por nuk mungojnë

edhe anijet mbi 60 vjeçare. Gjithashtu një numër relativisht i madh i anijeve të peshkimit nuk janë në gjendje pune, për arsye të nevojës së riparimeve dhe pjesëve të këmbimit. Mosha e madhe, gatishmëria e ulët teknike, si dhe mangësitë e infrastrukturës ndihmëse të riparimit të anijeve, janë faktorë të rëndësishëm kufizues të zhvillimit të aktivitetit të peshkimit. Këto probleme kanë çuar në zhvillimin e akuakulturës. Në 5 vitet e fundit janë rritur kërkesat për të investuar në kultivimin e peshqeve detarë me kosha në zonën bregdetare Karaburun – Sarandë. Në sajë të përmirësimit në vitet e fundit të përpunimit, industrializimit dhe konfeksionimit të midhjes ka tendenca për rritje të prodhimit dhe përmirësimit të cilësisë. [59]
Sot në hidrokulturën detare po vërehen disa fenomene që janë zhvillimi i shpejtë të kultivimit të kocës dhe levrekut, sidomos në tre vitet e fundit. [53], [54]

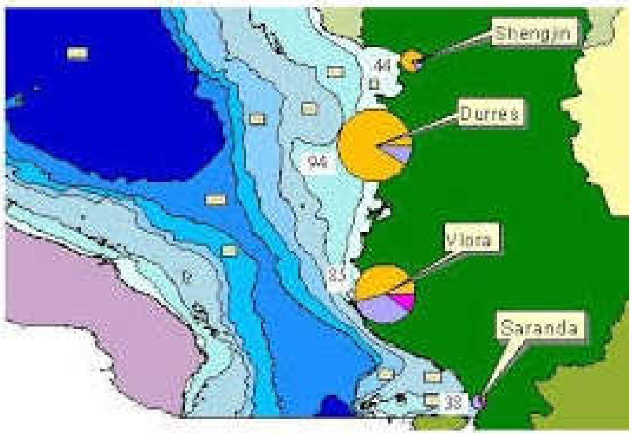


Figura 3.2 [59]

3.2 Modelet matematikore të menaxhimit të peshkimit

Në këtë pjesë analizohen disa modele të thjeshta të menaxhimit të peshkimit për të ilustruar analizën e bifurkimeve në situata reale. Marrim në shqyrtim ekuacionin logjistik të rritjes për të modeluar popullimin e peshkut në mungesë të gjuetisë së peshkut. [6], [33], [48], [50], [55] *Ekuacioni për modelimin e popullimit të peshkut në mungesë të gjuetisë është:*

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{M}\right), \qquad P(0) = P_0 \tag{3.1}$$

Ku: P - masa e popullimit, r - koefiçienti i shtimit gjatë riprodhimit (ritmi i rritjes), M - kapaciteti mbajtës. [44], [46], [36], [35]

Këtu gjykohet mbi modelimin e popullimit dhe gjuetinë e një pjesë të tij duke përdorur disa strategji të përgjithshme gjuetie: gjueti konstante, proporcionale dhe periodike. Gjueti konstante konsiderohet ajo kur një sasi fikse peshku nxirret çdo vit, në gjuetinë proporcionale sasia e peshkuar është në proporcion me popullimin, ndërsa gjuetia periodike është zakonisht rezultat i ndikimit të faktorëve sezonalë klimaterik. Mund të përdoret analiza sasiore (gjeometrike) për të vlerësuar se sa peshk mund të peshkohet dhe njëkohësisht të mos cënohet popullimi i kësaj specie. [24], [33], [36]

Programi Maple është përdorur për të paraqitur zgjidhjet ose trajektoret e modelit grafikisht. Një paraqitje e tillë grafike është më shumë iluminuese dhe e dobishme për të kuptuar dhe interpretuar zgjidhjen e modelit.

3.2.1 Strategjia Konstante e Gjuetisë

Një nga metodat më të thjeshta është që si fillim zona ku do merret peshku të konsiderohet e kufizuar (p.sh liqen). Supozojmë se dinamika me të cilën popullohet peshku kënaq modelin logjistik të rritjes (3.1) dhe gjuetia konstante h është përfshirë në model për të treguar sasinë konstante të peshkut të marrë brenda një intervali kohor.

Atëherë modeli do kishte formën e mëposhtme: [2], [6], [45]

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - h, \qquad P(0) = P_0 \tag{3.2}$$

Pikat fikse P^* janë zgjidhjet e ekuacionit $rP^*\left(1 - P^*/M\right) = h$.

nga zgjidhja kemi:

- dy pika fikse $P_{1,2}^{*}=\frac{1}{2}\left(M\pm\sqrt{M^{2}-\frac{4hM}{r}}\right)$ nëse $0<h<rM/4$
- një pikë fikse $P^{*}=M/2$ nëse $h=rM/4$
- asnjë pikë fikse kur $h>rM/4$

Ne do t'a aplikojmë këtë model për kultivimin e peshkut kocë. Të dhënat janë marrë nga "Qendra Sh.p.k", në Sarandë. Sipërfaqja e rezervuarit është 100 m^2. 1 m^2 mban 80 peshq kocë. Kapaciteti mbajtës i rezervuarit është 8000 peshq kocë. Periudha e maturimit të peshkut është 15 muaj dhe përllogaritet që 80% e tyre do të mbijetojnë deri në maturim. [6], [42]

Figura 3.3

Pikat fikse kur $h=0$, janë $P^{*}=0$ dhe $P^{*}=M=8000$.

Me rritjen e parametrit të gjuetisë së peshkut h do të kemi lëvizjen e dy pikave fikse pranë njëra – tjetrës, ku pika fikse e poshtme është e paqëndrueshme dhe pika fikse e sipërme është e qëndrueshme si në Fig. 3.4 [6], [49]

Kur parametri h lëviz drejt vlerës 1600 (që është maksimumi i normës së shtimit të peshkut në ekuacionin logjistik) dy pikat fikse bashkohen tek vlera $P^{*}=4000$ e cila është gjysmë e qëndrueshme siç shihet në Fig. 3.5. Kjo pikë është shumë delikate pasi kur $h > 1600$ nuk do kemi pika fikse dhe modeli tregon që popullimi shkon drejt zhdukjes (Fig. 3.6). Ky model është rasti tipik i bigëzimit te tipit ***nyje-samar.***

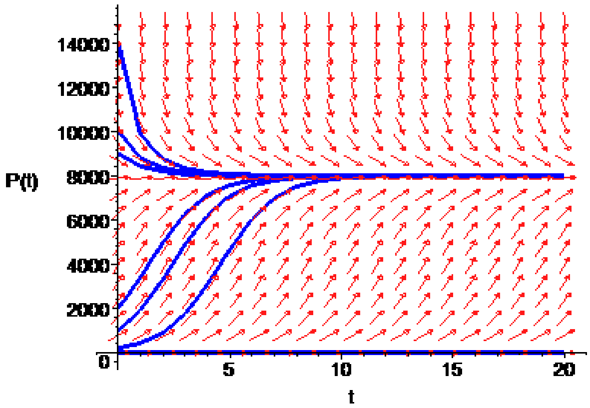


Figura 3.4

Vlera e bigëzimit ne këtë rast të shqyrtuar është h = rM/4 = 1600

Drejtimi i fushës së ekuacionit diferencial për disa vlera të h tregon së pari për ekzistencen e dy pikave fikse, njëra e qëndrueshme tjetra e paqëndrueshme dhe më pas për vlerat e h kur nuk ka pika fikse.

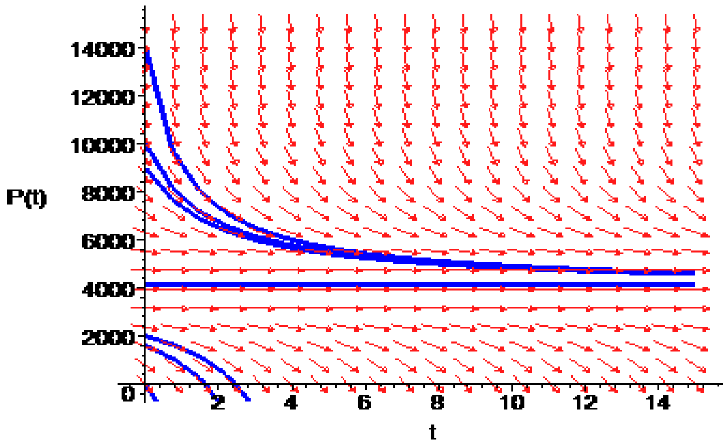


Figura 3.5 (h=1600)

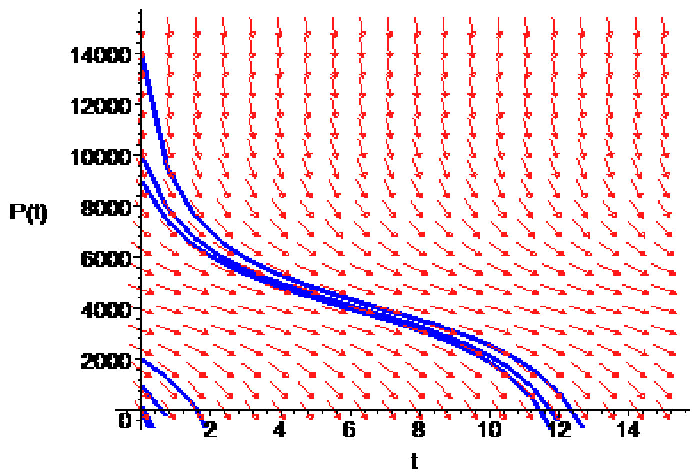


Figura 3.6 (h=2000)

Kështu rezultatet tregojnë që mbipeshkimi (sipas modelit për $h > rM/4$) përgjatë një viti mund të rezultojë potencialisht në një shkatërrim të papritur të gjuetisë së peshkut në vitin pasardhës, kështu që është e nevojshme që organet përgjegjëse qeveritare të tregohen të matura kur vendosin dhe parashikojnë kuotat e lejimit të peshkimit. Me gjueti të pakontrolluar, një popullim mund të zhduket mjaft lehtë, prandaj do ishte normal kufizimi i sasisë së peshkut të përvetësuar ose lejimi i peshkimit në periudha të caktuara të vitit.

3.2.2 Strategjia Proporcionale e Gjuetisë

Një tjetër formë e njohur e gjuetisë është kur bëhet një përpjekje konstante për gjueti. Në këtë rast sasia e vjelur do ishte proporcionale me popullimin dhe modeli matematikor do ishte si më poshtë: [2], [50]

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - hP, \quad P(0) = P_0 \tag{3.3}$$

Ku: P - masa e popullimit, r - koefiçienti i shtimit gjatë riprodhimit (ritmi i rritjes), M - kapaciteti mbajtës dhe h - *norma proporcionale e gjuetisë.*

Përsëri zgjidhja algjebrike do ishte komplekse dhe e vështirë për t'u interpretuar, kështu që do bëhet analizë gjeometrike e modelit. Pikat fikse të modelit (3.3) janë zgjidhjet e ekuacionit $rP^*(1-P^*/M)=hP^*$, nga ku dalin zgjidhjet: $P^*=0$ dhe $P^*=\frac{(r-h)M}{r}$.

Pika fikse $P^*=0$ është e paqëndrueshme për $h<r$. Me rritjen e h-së ekuilibri më i madh (kapaciteti mbajtës) tkurret por mbetet i qëndrueshëm për $h<r$.

Për të njëjtat të dhëna si në rastin më parë në paragrafin 3.2.1 për h të ndryshme kemi lëvizjen e grafikut si ne Fig. 3.7 ku h në këtë rast është proporcionale. Me rritjen e h-së pika fikse jo triviale lëviz pranë pikës fikse të shuar.

Me lëvizjen e h-së drejt vlerës 0.8 pika fikse jozero shuhet në zero nga e cila rrjedh se kemi zhdukje të species meqë norma e gjuetisë i afrohet normës së shtimit të tij. Kur $h>0.8$ kemi që norma e gjuetisë e kalon atë të riprodhimit, kështu që zhdukja e popullimit është e pashmangshme. Ky është rasti tipik i ***bigëzimit transkritik***. *Pika e bigëzimit është* $h=0.8$. [6]

Drejtimi i fushës i ekuacionit diferencial për disa vlera të h tregon për ekzistencën e dy pikave fikse, njëra e qëndrueshme dhe një zero e paqëndrueshme, e më pas me lëvizjen e h kemi një pike fikse tek zeroja si në Fig.3.8.

Rezultatet tregojnë që mbipeshkimi (pra sipas modelit për $h>r$) përgjatë një viti mund të sjellë zhdukjen e peshkut në këtë mjedis, Fig.3.9.

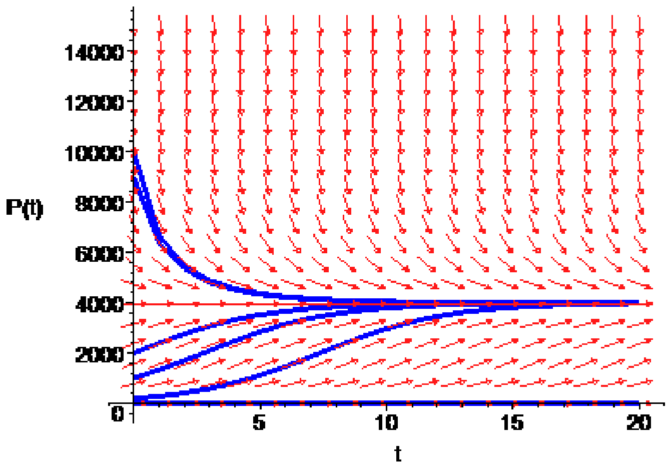


Figura 3.7 (h=0.4)

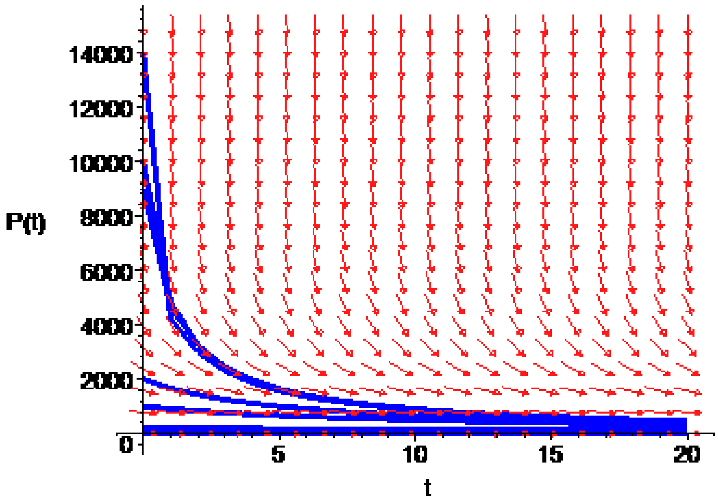


Figura 3.8 (h=0.8)

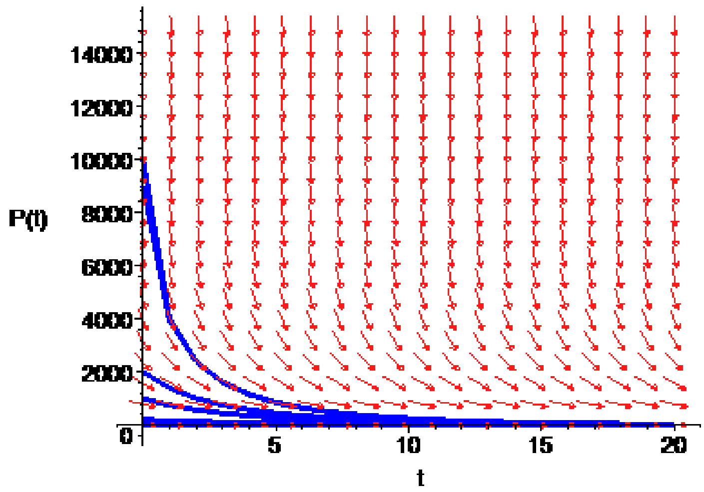


Figura 3.9 (h=1)

3.2.3 Strategjia Periodike e Gjuetisë

Një formë tjetër e përdorshme e gjuetisë është kur kjo bëhet përgjatë një periudhe të caktuar të vitit, kështu që nuk do kemi zhdukje të popullimit gjatë kohës së gjuetisë dhe në disa periudha mund të ndalohet gjuetia duke bërë që popullimi i peshkut të rritet përsëri. Modeli matematikor do ishte si më poshtë: [2], [36]

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - h\left(1 + \sin 2\pi t\right) \tag{3.4}$$

Modeli (3.4) është një ekuacion diferencial jo – autonom, kështu që zgjidhjet e tij janë periodike dhe kanë të njëjtin trend të përgjithshëm me modelet e mëparshme.

Rezervuari është në kapacitetin e tij mbajës $M = 8000$ peshq kocë si popullsi fillestare me normë rritjeje $r = 0.8$. [42] Le të supozojmë që 6 muajt e parë ne kemi vjelur 1600 peshq kocë dhe të ndalohet gjuetia për 6 muajt e tjerë pasardhës deri sa popullsia të arrijë kapacitetin mbajtës $M = 8000$. Supozohet se me këtë ritëm gjuetie të vazhdohet për disa vite. [6]

Këtu kemi dy zgjidhje që lëkunden rreth pikave fikse si në (Fig.3.10). Zgjidhjet konvergjojnë te një zgjidhje periodike që lëkundet rreth pikës fikse të qëndrueshme. Për h=1600 ka një pike fikse si në (Fig.3.11). Popullimi arrin pikën fikse dhe aty qëndron. Me rritjen më tej të h -së popullimi do të zhduket si në (Fig.3.12). Si pasojë ky ekuacion periodik ka të njëjtën pikë bigëzimi si modeli (3.2.1).

Strategjia e gjuetisë sezonale periodike është forma më optimale e gjuetisë që mban ndërkohë popullimin e peshkut të qëndrueshëm. Duke përdorur këtë lloj strategjie gjuetie, përmirësohet produktiviteti, koha e kthimit të investimeve afatshkurtër si dhe reduktohet risku nga ndryshimi i çmimit të shitjes, kostot e prodhimit veçanërisht kur përdoren norma periodike afatshkurtra. Mund të ishte normale të kishim p.sh 3 muaj ku lejohet peshkimi i pakufizuar dhe muajt e tjerë të lejohet peshkim më i rezervuar. Popullimi rikthehet përsëri te pika fikse por i duhet më shumë kohë të gjejë pikën fikse të qëndrueshme sepse kemi të bëjmë me një sasi të vogël peshku që përvetësohet gjatë pjesës tjetër të vitit. [6], [42]

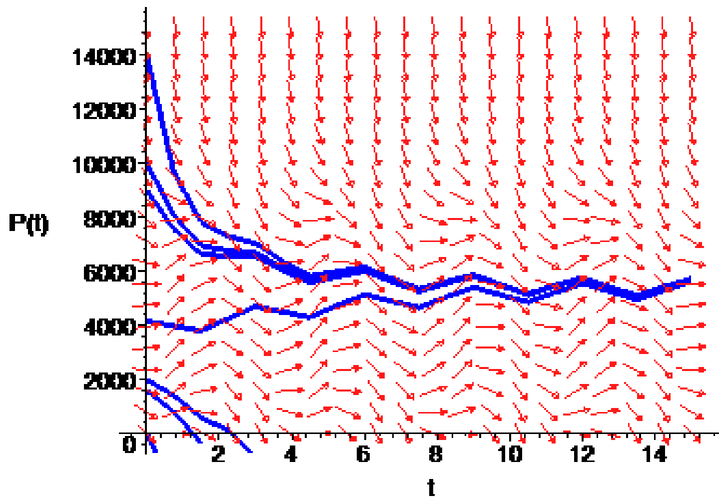


Figura 3.10 (h=1400)

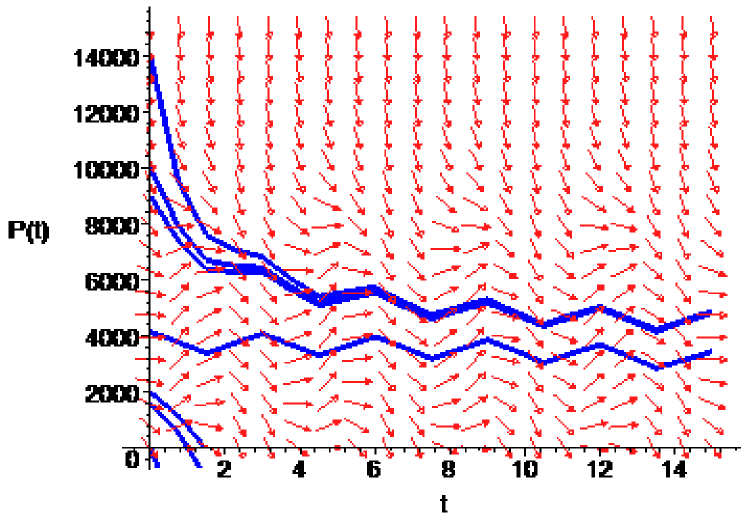


Figura 3.11 (h=1600)

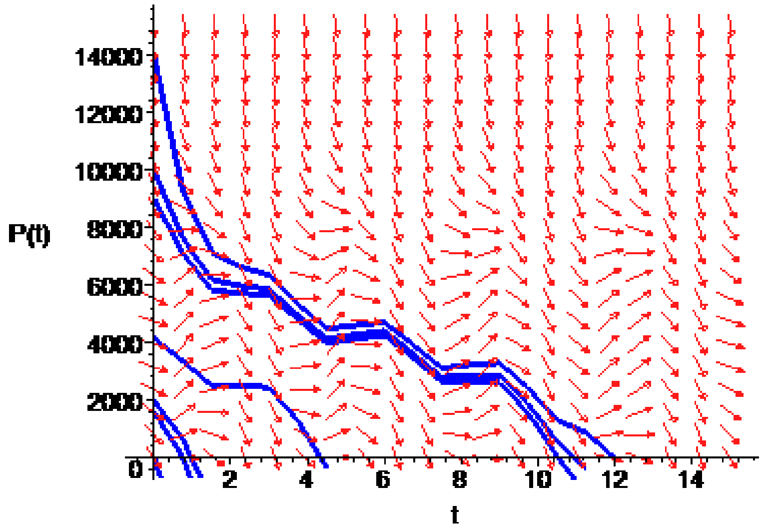


Figura 3.12 (h=2000)

Nga krahasimi i tre modeleve të strategjive të gjuetisë rezulton se :

- ✓ Nga përdorimi i strategjisë konstante, popullimi i peshkut nuk do të ketë kohë të mjaftueshme të rimarrë veten nëse niveli i gjuetisë konstante është më i madh se pika e bigëzimit.

- ✓ Nga përdorimi i strategjisë proporcionale, popullimi i peshkut do të zhduket nëse norma proporcionale e gjuetisë është më e madhe se norma e shtimit të popullimit ose pika e bigëzimit.

- ✓ Përdorimi i strategjisë sezonale periodike të gjuetisë optimizon nivelin e gjuetisë, ndërsa mban të qëndrueshëm popullimin e peshkut, nëse gjuetia është më e vogël ose e barabartë me pikën e bigëzimit.

- ✓ Strategjia e gjuetisë sezonale periodike është forma më optimale e gjuetisë që mban ndërkohë popullimin e peshkut të qëndrueshëm. Duke përdorur këtë lloj strategjie gjuetie, përmirësohet produktiviteti, koha e kthimit të investimeve afatshkurtër si dhe reduktohet risku nga ndryshimi i çmimit të shitjes, kostot e prodhimit veçanërisht kur përdoren norma periodike afatshkurtra.

Kapitulli 4

MODELET E POPULLIMIT ME DY SPECIE

4.1 HYRJE

Për të modeluar dinamikat e popullsisë do marrim në konsideratë një sistem të mbyllur, habitat, në të cilin kemi vetëm dy specie të cilat ndërveprojnë me njëra – tjetrën. [13], [23], [29], [43], [44] Ne do të përdorim metodat e planit fazor për të hetuar disa probleme që përfshijnë konkurrencën për burimet e pakta. Do të shprehim ekuacionet përsa i përket të dy llojeve që konkurojnë për të njëjtën furnizim me ushqime. Megjithatë modele të ngjashme janë përdorur edhe për të studiuar situata të tjera konkuruese, për shembull, bizneset që konkurrojnë në të njëjtat tregje ekonomike. Marrëdhëniet midis specieve në botën natyrore shpesh janë komplekse dhe delikate. Ne nuk duhet të presim shumë nga një sistem i thjeshtë i dy ekuacioneve diferenciale në përshkrimin e marrëdhënieve të tilla. Edhe në qoftë se ne jemi të bindur se forma e përgjithshme e ekuacioneve është e shëndoshë, përcaktimi i vlerave numerike për koeficientët mund të paraqesin vështirësi serioze.

Përpara se të marrim në konsideratë çdo ndërveprim të mundshëm, ne kemi nevojë fillimisht të modelojmë problemin.

Le të shënojmë popullsinë e dy specieve $x(t)$ dhe $y(t)$, respektivisht. [4], [28], [29], [44] Atëhere ne mund të pranojmë si të vërtetë që rritja e dy specieve, pa migrim të asnjërës prej tyre, është

$$\begin{aligned} x' &= P\,x(t) \\ y' &= S\,y(t) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

ku P tregon rrjetin e kontributit të çdo individi në popullsinë x dhe S tregon rrjetin e kontributit të çdo individi në popullsinë y. Masa në të cilën një anëtar tipik i popullsisë x kontribuon te kopeja varet jo vetëm nga lindjet dhe vdekjet, por gjithashtu në ndërveprimin e tij/saj me popullsinë y. E njëjta gjë ndodh edhe me popullsinë y. Konsiderojmë një specifikim ndërveprimi shumë të përgjithshëm,

$$\begin{aligned} P &= \alpha + \beta x(t) + \gamma y(t) \\ S &= \delta + \varepsilon y(t) + \zeta x(t) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Për çdo popullsi, α dhe δ tregojnë koefiçentin e rritjes natyrale të specieve. Termi i dytë tregon koefiçentin e mbipopullimit të specieve. Nëse β dhe ε janë negative, atëherë mbipopullimi do të ndodhë dhe speciet hyjnë në *konkurencë* me njëri-tjetrin *brenda llojit*. Nga ana tjetër nëse β dhe ε janë pozitive, atëhere rritja zgjerohet ndërsa përmasa e popullsisë rritet, gjë që ne i referohemi si *mutualizëm*. Nëse γ dhe ζ janë të dyja zero atëherë të dyja speciet janë *të pavarura* nga njëra – tjetra. Nëse γ dhe ζ janë të dyja negative, atëherë secila është në konkurencë për shkak të burimeve të pamjaftueshme të habitatit. Rritja e një specie është në kurriz të tjetrës. Nga ana tjetër, nëse γ dhe ζ janë të dyja pozitive, atëherë ne kemi një sistem te mbyllur mbështetës të dyanshëm: rritja e secilës specie është e dobishme për të dyja palët. Më në fund ne kemi një marrëdhënie *gjahtar – pre*. Nëse γ është pozitive dhe ζ është negative atëhere x është gjahtari dhe y preja; nëse γ është negative dhe ζ është pozitive, atëhere x është preja dhe y është gjahtari.

Duke na dhënë këto specifika të përgjithshme është e mundur të konsiderojmë modelet që kombinojnë mbi popullimin dhe kanë disa tipare të modelit gjahtar – pre ose vetëm karakteristika të këtij modeli. [8]

4.2 Modeli me konkurencë dhe pa mbipopullim

Konsiderojmë modelin e mëposhtëm ku çdo specie është në konkurencë për shkak të burimeve të kufizuara të habitatit:

$$\begin{aligned} x' &= (a-by)x \qquad x(0)=x_0,\ a>0,\ b>0 \\ y' &= (c-dx)y \qquad y(0)=y_0,\ c>0,\ d>0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Pikat fikse të sistemit mund të përftohen duke vendosur x' dhe y' të barabartë me zero. Janë dy pika fikse $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ dhe $(x_2^*, y_2^*) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ sikurse tregohet nga pikat E_0 dhe E_1, respektivisht në Fig. 4.1. Figura 4.1 gjithashtu ilustron natyrën cilësore të trajektoreve. Konsiderojmë fillimisht trajektoret në kuadrantin I: përderisa $y < a/b$, atëhere $x' > 0$ dhe prandaj x rritet në mënyrë të njëjtë, $x < c/d$ dhe kështu $y' > 0$, y rritet.

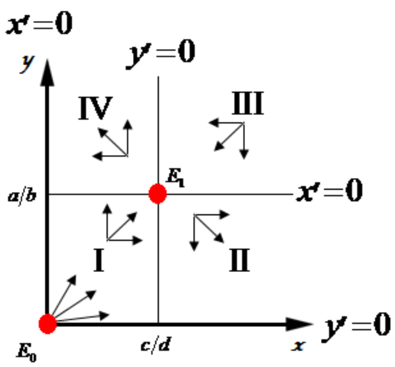


Figura 4.1

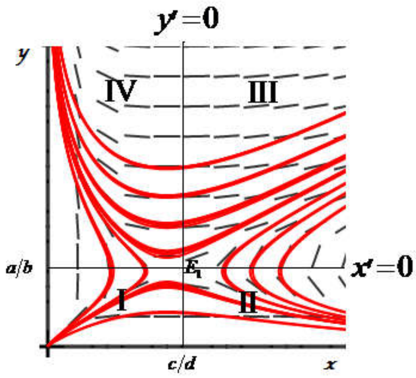


Figura 4.2

Duke përdorur të njëjtin arsyetim, ne mund të specifikojmë veçoritë e kuadranteve të tjera. Trajektoret duken komplekse. Për disa trajektore në kuadrantin I sistemi duket se tenton drejt pikës fikse E_1, megjithatë, nëse trajektoret kalojnë në kuadrantin II atëherë largohet nga E_1. Kjo ndodh për shkak se x dominon habitatin dhe ferteliteti i y është tashmë aq i vogël sa fillon të bjerë. Një problem i njëjtë ndodh nëse trajektorja lëviz nga kuadranti I në atë të IV. Në këtë rast, megjithatë, speciet y dominojnë habitatin dhe x shkojnë deri në zhdukje. Një logjikë e njëjtë është nëse sistemi fillon në kuadrantin III. Një situatë fillestare qoftë në kuadrantin II apo IV thjeshtë zhvendos sistemin larg nga pika fikse E_1.

Për të theksuar vetitë e qëndrueshmërisë dhe paqëndrueshmërisë së ekuilibrit jo – zero E_1, ne mund të konsiderojmë portretin fazor, i cili tregohet në Fig. 4.2. Kjo figurë tregon që: ekuilibri E_1 është një pikë samar, lëvizja e sistemit është nga kuadranti I në kuadrantet II dhe IV; dhe nga kuadranti III në kuadrantet II, IV dhe nuk është i dukshëm nëse çdo trajektore të çon drejt pikës fikse E_1.

4.3 Modeli gjahtar – pre pa mbipopullim: modeli Lotka–Volterra

Konsiderojmë modelin e mëposhtëm ku x është preja dhe y është gjahtari.

$$\begin{aligned} x' &= (a-by)x = ax - bxy \qquad & x(0) = x_0,\ a>0,\ b>0 \\ y' &= (-c+dx)y = -cy + dxy \qquad & y(0) = y_0,\ c>0,\ d>0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Sistemi ka dy pika fikse: $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ dhe $(x_2^*, y_2^*) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ përfaqësuar nga dy pika E_0 dhe E_1, respektivisht në figurën 4.3.

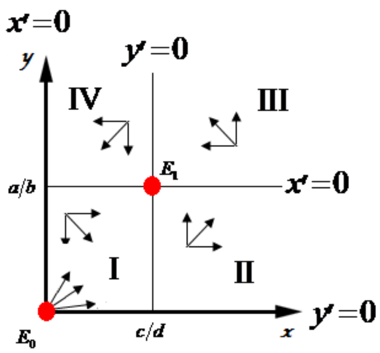


Figura 4.3

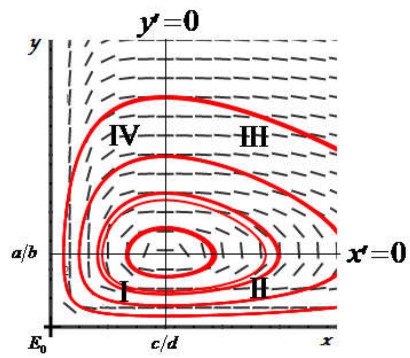


Figura 4.4

Fig. 4.3 ilustron gjithashtu natyrën cilësore të trajektoreve. Ne mund të studiojmë vetitë e të katër kuadranteve në të njëjtën mënyrë si më lart. Për të përftuar depërtim fillestar në atë se çfarë po ndodh me speciet e ekuilibrit jo – zero, ne përdorim portretin fazor për këtë sistem, i cili tregohet në Fig 4.4. Figura 4.4 tregon që sistemi ka një strukturë ciklike rreth pikës fikse E_1, dhe lëvizja e sistemit është kundërorar. Nga Fig. 4.3 dhe 4.4 është e qartë se trajektoret formojnë kurba *të mbyllura*. Kjo do të thotë se as gjahtari dhe as preja nuk kanë rrezik zhdukjeje. Çdo specie qarkullon mes nivelit minimal dhe maksimal të saj.

4.4 Modeli me konkurencë dhe me mbipopullim

Në këtë model ne supozojmë që dy specie janë në konkurencë për burimet e pamjaftueshme dhe gjithashtu në konkurencë brenda specieve; me fjalë të tjera, ka mundësi për mbipopullim. Ne mund të paraqesim situatën në këtë mënyrë:

$$\begin{aligned} x' &= (a - by - ux)x \\ y' &= (c - dx - vy)y \end{aligned} \tag{4.5}$$

Ky sistem është jolinear dhe më shumë kompleks se sa modelet tona të mëparshme. Megjithatë ne mundemi akoma të përftojmë pikat fikse të sistemit duke barazuar x' dhe y' me zero. Kjo plotësohet për $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$, $(x_2^*, y_2^*) = (0, \frac{c}{v})$, $(x_3^*, y_3^*) = (\frac{a}{u}, 0)$ dhe pika tjetër merret nga sistemi:

$$\begin{aligned} a - by - ux &= 0 \\ c - dx - vy &= 0 \end{aligned}$$

Këto përfaqësojnë dy vija të drejta në planin fazor, nga të cilat janë katër konfigurime që varen nga vlerat e gjashtë parametave a, b, c, d, u dhe v, sikurse ilustrohet në Fig. 4.5. Në diagramat në figurën 4.5 a), b) zhdukja do të ndodhë në njërën nga speciet. Për sa kohë që sistemi nuk fillon në origjinë, ai ose do të lëvizë drejt pikës fikse E_1 , në të cilën speciet y vdesin, ose për në pikën ekuilibër E_2, në të cilën speciet x vdesin. [22], [34]

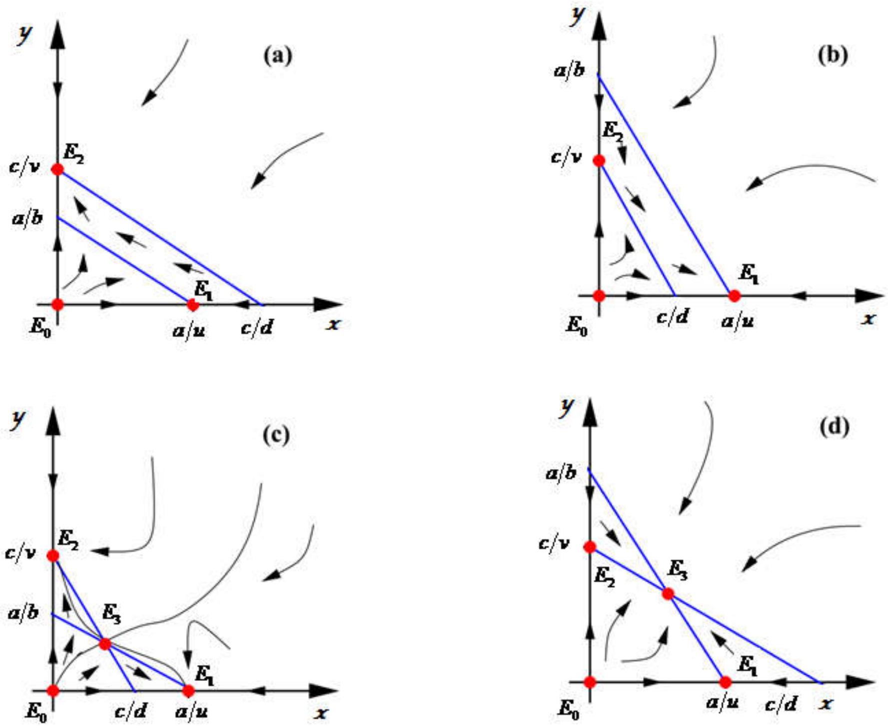


Figura 4.5

Në figurat e mësipërme (Fig.4.5 (c), (d)) është gjithashtu e mundur për të dyja speciet që të bashkëjetojnë. Një situatë e tillë ndodh kur dy izoklinet ndërpriten, edhe kjo jepet nga zgjidhja $(x_4^*, y_4^*) = (\frac{av-cb}{uv-bd}, \frac{cu-ad}{uv-bd})$

Por një pyetje e rëndësishme është nëse një ekuilibër bashkë ekzistues i tillë është një zgjidhje e qëndrueshme e modelit. Figura 4.5 (c) tregon që E_3 nuk është një ekuilibër i qëndrueshëm, ndërsa në Fig. 4.5 (d), E_3 shfaqet si ekuilibër i qëndrueshëm.

4.5 Modeli gjahtar- pre me mbipopullim

Modeli i mësipërm në 4.4 përfshin konkurencë jo brenda specieve. Megjithatë supozojmë që ka shumë gjahtarë dhe në këtë mënyrë ata janë në konkurencë mes vetes për prenë. Supozojmë gjithashtu që preja (speciet x), përveçse janë nën sulmin e gjahut (speciet y) gjithashtu janë në konkurencë me anëtarët e llojit të vet për burimet në habitat.

Atëherë konsiderojmë situatën më të përgjithshme e gjahtar – pre me mbi popullimin e të dyja specieve në modelin

$$\begin{aligned} x' &= (a - by - ux)x \\ y' &= (-c + dx - vy)y \end{aligned} \tag{4.6}$$

Origjina $(x^*, y^*) = (0,0)$ shënon një zgjidhje ekuilibri, por një zgjidhje jo interesante. Zgjidhja tjetër gjendet duke vënë shprehjet në kllapa në zero, e cila jep ekuilibrin jotrivial: $(x^*, y^*) = (\frac{av+cb}{uv+bd}, \frac{ad-cu}{uv+bd})$

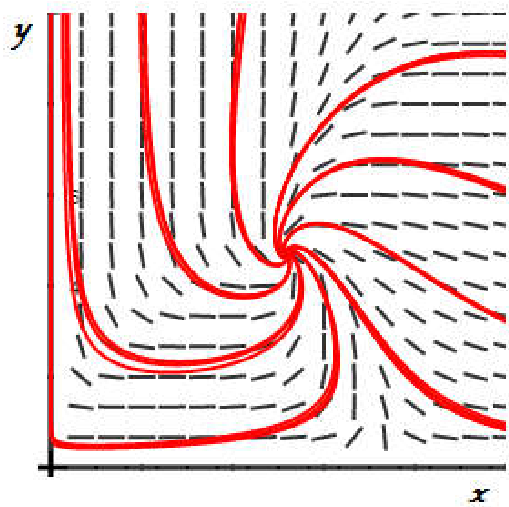


Figura 4.6

Ky është një sistem shumë më i vështirë se sa modeli gjahtar – pre i drejtë. Përderisa ka konkurencë brenda secilës specie, sistemi lëviz drejt pikës ekuilibre jotriviale në kufi. Fig. 4.6 portretizon fushën e drejtimit bashkë me një numër tipik trajektoresh në planin fazor. Është pothuajse e qartë që, duke u dhënë vlerat e parametrave, ky sistem gjithmonë do të konvergjojë në limit drejt ekuilibrit. Prandaj, pika ekuilibre jotriviale (x^*, y^*) është e qëndrueshme asimptotikisht. Për vlera të ndryshme parametrash pika fikse mund të jetë e paqëndrueshme asimptotikisht, por nuk konvergjon në një orbitë të mbyllur rreth ekuilibrit.

Pasi analizuam të katër modelet gjeometrikisht, po e përmbyllim këtë paragraf me një analizë matematikore për një nga këto modele, të cilat përfshijnë linearizimin, përcaktimin e qëndrueshmërisë së pikave fikse jo negative dhe diagramën e planit fazor të njërit nga modelet e popullsisë.

Konsiderojmë modelin konkurues midis dy specieve pa mbipopullim (Lotka – Volterra): [40]

Figura 4.7 [61]

Le të shënojmë popullsinë e dy specieve $x(t)$ dhe $y(t)$, respektivisht. Kujtojmë që $x(t)$ tregon popullsinë e presë së pranishme në kohën t dhe se $y(t)$ tregon popullsinë e grabitqarëve në kohën t. Supozojmë se të dyja $x(t)$ dhe $y(t)$ janë jonegative.

Një sistem i ekuacioneve diferenciale që mund të modelojnë ndryshimet në popullsinë e këtyre dy specieve është

$$\frac{dx}{dt} = x' = 2x - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y' = -y + xy$$

Termi $2x$ në ekuacion për $\frac{dx}{dt}$ paraqet rritjen eksponenciale të presë në mungesë të grabitqarëve, ndërsa termi $-xy$ korrespondon me efektin negativ mbi prenë (gjahun) e ndërveprimit predator – pre (gjahtar – gjah). Termi $-y$ në $\frac{dy}{dt}$ korrespondon me supozimin se grabitqarët vdesin nëse nuk ka pre për të ngrënë, ndërsa termi xy korrespondon me efektin pozitiv mbi grabitqarët e ndërveprimit gjahtar – pre.

Koeficientët 2, -1, -1, dhe 1 varen nga speciet e përfshira.

E zgjidhim këtë sistem duke marrë $\begin{cases} x' = 2x - xy = 0 \\ y' = -y + xy = 0 \end{cases}$ dhe gjejmë pikat fikse $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ dhe $(x_2^*, y_2^*) = (1,2)$. Pika fikse $(x_1^*, y_1^*) = (0,0)$ ka kuptim të përsosur; nëse të dy popullsitë grabitqar dhe pre zhduken, ne sigurisht nuk presim që popullsia të rritet në çdo kohë të mëvonshme.

Zgjidhja tjetër $(x_2^*, y_2^*) = (1,2)$, do të thotë se, në qoftë se popullsia e presë është 1 dhe popullsia e grabitqarëve është 2, sistemi është në ekuilibër të përsosur. Ekziton pre e mjaftueshme për të mbështetur një popullsi konstante grabitqare prej 2, si dhe në mënyrë të ngjashme nuk ka as shumë grabitqarë (e cila do të shkaktonte zhdukjen e popullsisë së presë) dhe as shumë pak (në ç'rast numri i presë do të rritej). Shkalla e lindjes së secilës specie është ekzaktësisht e barabartë me normën e saj të vdekjes, këto popullata janë mbajtur në një kohë të pacaktuar. Sistemi është në *ekuilibër*. Nëse $x = 0$, ekuacioni i parë në këtë sistem zhduket. Prandaj funksioni $x(t) = 0$ përmbush këtë ekuacion diferencial pa marrë parasysh se çfarë kushti fillestar kemi zgjedhur për y . Në këtë rast ekuacioni i dytë diferencial reduktohet në

$$\frac{dy}{dt} = -y$$

të cilën ne e njohim si model eksponencial i zhdukjes për popullatën e grabitqarëve. Nga ky ekuacion ne e dimë se popullsia e grabitqarëve tenton drejt zeros në mënyrë eksponenciale. Gjithë ky skenar për $x = 0$ është i arsyeshëm, sepse në qoftë se nuk ka pre në një kohë, atëherë kurrë nuk do të ketë asnjë pre pa marrë parasysh se sa grabitqarët ka. Për më tepër, pa një furnizim me ushqim, grabitqarët do të vdisnin.

Në mënyrë të ngjashme, vëmë re se ekuacioni për $\frac{dy}{dt}$ zhduket nëse $y = 0$, dhe ekuacioni për $\frac{dx}{dt}$ reduktohet në

$$\frac{dx}{dt} = 2x$$

i cili është një model i rritjes eksponenciale. Kjo do të thotë se çdo popullsi preje jozero rritet pa detyrim nën këto supozime. Përsëri, këto përfundime kanë kuptim sepse nuk ka grabitqarë për të kontrolluar rritjen e popullsisë së presë.

Në mënyrë që të kuptojmë të gjitha zgjidhjet e këtij sistemi predator – pre

$$\frac{dx}{dt} = x' = 2x - xy$$
$$\frac{dy}{dt} = y' = -y + xy$$

është e rëndësishme të theksohet se shkalla e ndryshimit të secilës popullsi varet si nga $x(t)$ ashtu dhe nga $y(t)$.

Portreti Fazor për këtë sistem për një zgjidhje të veçantë është [8], [9], [40], [47], [64]

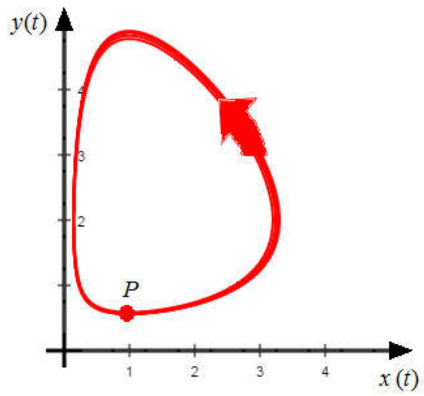


Figura 4.8

Shpesh është e dobishme për të parë një kurbë zgjidhjeje për një sistem të ekuacioneve diferenciale jo thjesht si një grup i pikave në plan, por më tepër në një mënyrë më dinamike, si një pikë që ndjek një kurbë që është përcaktuar nga zgjidhja e ekuacionit diferencial. Në Fig. 4.8 kemi treguar një zgjidhje të veçantë që fillon nga pika P . Me rritjen e t - së, $x(t)$ është në rritje fillimisht, ndërsa $y(t)$ fillimisht qëndron relativisht konstante. Pranë $x = 3.3$, kurba e zgjidhjeve kthehet në mënyrë të konsiderueshme lart. Kështu popullsia e grabitqarëve $y(t)$ fillon të rritet në mënyrë të konsiderueshme. Kur $y(t)$ i afrohet $y = 2$, kurba fillon të shkojë në të majtë. Kështu $x(t)$ ka arritur një maksimum dhe ka filluar të ulet. Me rritjen e t - së, vlerat e $x(t)$ dhe $y(t)$ ndryshojnë siç tregohet nga forma e kurbës së zgjidhjes. Përfundimisht kurba kthehet në pikën e saj fillestare P dhe fillon ciklin e saj përsëri.

Ne mund të paraqesim grafikisht njëkohësisht shumë kurba zgjidhjeje në planin fazor duke përdorur programin Maple. Në Fig. 4.9 shohim portretin e plotë fazor për sistemin tonë predator – pre. Sigurisht, ne e kemi kufizuar vëmendjen tonë në kuadrantin e parë pasi nuk ka kuptim të flasim për popullata negative. [10], [13], [14], [47]

```
>with(DEtools); phaseportrait([(D(x))(t) = x(t)*(2-y(t)), (D(y))(t) = (x(t)-1)*y(t)],
[x(t), y(t)], t = -10 .. 10, [[x(0) = 1, y(0) = 2], [x(0) = 2, y(0) = 1], [x(0) = 4, y(0) = 1],
[x(0) = 1.1, y(0) = 3.1],[x(0) = 2.1, y(0) = 4.1],[x(0) = 2.19, y(0) = 4.19],[x(0) = 2.199,
y(0) = 9.199]], x = 0 .. 5, y = 0 .. 5, stepsize = 0.5e-1, linecolour = blue, arrows =
SLIM, thickness = 2);
```

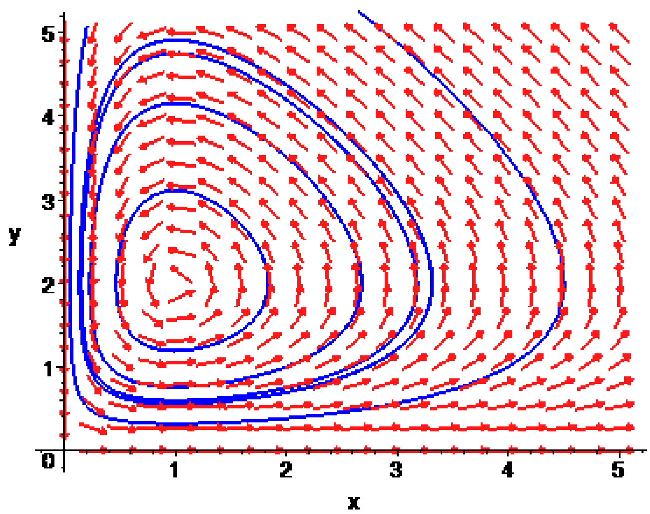


Figura 4.9

Në këtë sistem predator – pre, të gjitha zgjidhjet e tjera për të cilat $x_0 > 0$ dhe $y_0 > 0$ japin kurba që lëvizin rreth pikës së ekuilibrit $(x_2^*, y_2^*) = (1, 2)$, në mënyrë anti – orar.

Në fund, ata kthehen në pikat e tyre fillestare, kështu ky model parashikon që përveç zgjidhjes së ekuilibrit, si $x(t)$ ashtu dhe $y(t)$ rriten dhe zvogëlohen në mënyrë periodike.

PËRFUNDIME

Në mbyllje, dëshirojmë të vëmë në dukje disa nga përfundimet më të rëndësishme që arritëm gjatë këtij studimi:

1. Shumica e dinamikëve që hasen në praktikë dhe në teori janë jolineare, çka e bën teorikisht gati të pamundur përpunimin e metodave analitike për studimin e tyre.

2. Paraqitja gjeometrike të çon në të kuptuarit cilësor të sjelljes së zgjidhjeve në vend të informacionit të hollësishëm sasior. Qasjet numerike dhe gjeometrike plotësojnë njëri – tjetrin mjaft mirë: metodat numerike japin informacion të detajuar rreth një zgjidhje të vetme, ndërsa metodat gjeometrike japin informacion cilësor për të gjitha zgjidhjet në të njëjtën kohë.

3. Shkalla e sotme e zhvillimit të "grafikës kompjuterike" mundëson paraqitjen numeriko – grafike të portretit fazor të sistemit dinamik dy – përmasor jolinear.

4. Një metodë efikase për studimin e sistemeve dinamike jolinearë është "Metoda e linearizimit". Gjithsesi mbetet për t'u thelluar në kushtet teorike në të cilat kjo metodë mund të përdoret.

5. Pikat fikse kontrollojnë sistemet dinamike, kështu që studimi i tyre merr rol të dorës së parë për t'i orientuar ato drejt ekuilibrit nëse janë të dobishëm, ose në të kundërt, për t'i çuar drejt shkatërrimit.

6. Në rastin e sistemit dinamik parametrik, është parametri ai që kontrollon pikat fikse të sistemit pra, edhe vetë sistemin. Me anë të zgjedhjes së vlerave të përshtatshme të parametrit mund t'u lihet hapësirë dukurive për të cilat jemi të interesuar. Kështu pra teoria e bifurkimit është mekanizmi çelës për analizën e sistemeve dinamike.

7. Modeli Malthus na jep mundësinë për të parashikuar madhësinë e popullsisë. Parashikimi për popullsinë e Shqipërisë është një shembull se sa mirë punon ky model. Kjo na mundëson një mjet të domosdoshëm për të parashikuar rritjen e popullsisë në të ardhmen.

8. Përdorimi i modeleve matematikore në gjuetinë e peshkut ndihmon sektorin e hidrokulturës për të vlerësuar kur dhe sa peshk mund të peshkohet për të maksimizuar vlerën e sasisë së peshkut të përvetësuar pa e zhdukur komplet popullimin.

9. Rezultatet tregojnë që peshkimi në vlerën e shumës ose me një vlerë më të lartë sesa pika e bigëzimit sjell zhdukjen e ketij popullimi. Kështu që këto arritje mund t'u vijnë në ndihmë peshkatarëve për të garantuar popullimin e peshkut dhe për të reduktuar kostot e ripopullimit.

10. Studimi i konkurencës së gjallesave me anë të sistemeve dinamikë është mënyra më e mirë që ekziston deri më sot, gjë që dikton ndryshimin e mënyrës së sjelljes tonë kundrejt tyre në drejtim të ruajtjes së ekuilibrave dhe ekosistemeve biologjike të krijuara nga procesi i gjatë i evolucionit natyror, i realizuar nga konkurenca brenda specieve dhe midis specieve.

LITERATURA

[1] A. ÇIFLIKU, S. XHEMALÇE, DH. NIÇKA, *Ekuacionet Diferenciale*, Tiranë 1988.

[2] A. DACI, A. SPAHO, *Bifurcation In a Dynamical System*, International Conference "Research and Education – Challenges Towards the future" ICRAE 2013 ISSN 2308-0825.

[3] A. DACI, A. SPAHO, *Dynamical Systems applications to Demography*, "Information Systems and Technology Innovation: Their Application in Economy" Qershor 2012, ISBN: 978-9995-6377-8-1.

[4] A. DACI, A. SPAHO, *Nonlinear Dynamical Systems: Population Model*, "Economic and Social Challenges 2012" Dhjetor 2012, ISBN: 978-9928-4237-1-9.

[5] A. DACI, *Dynamical Systems, Phase Plan Analysis Linearization Method*, Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) ISSN: 2458-9403 Vol. 3 Issue 8, August – 2016.

[6] A. DACI, *Fish Harvesting Models And Their Applications in a reservoir in Saranda, Albania, Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology* (JMEST) ISSN: 2458-9403 Vol. 3 Issue 7, July – 2016.

[7] A. DACI, *Mathematical Models For Population Projection In Albania. Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology* (JMEST) ISSN: 2458-9403 Vol. 3 Issue 8, August – 2016.

[8] A. M. DE ROOS, *Modeling Population Dynamics*, 2014.

[9] A. PANFILOV, S. MAREE, *Non-Linear Dynamical Systems Tutorials*, 2008.

[10] C. EBERHART, *Problem Solving with Maple*, 2003.

[11] C. GARY, *White, Modeling Population Dynamics*, 2010.

[12] C. SPARROW, *The Qualitative Theory of Ordinary Differential Equations*, 2010.

[13] C.H. EDWARDS, E.D. PENNEY, *Elementary Differential equations*, sixth edition, 2008.

[14] C.O. AGUILAR, *Differential Equations and Computer Methods*, 2001.

[15] D. Deshotel, *Modeling World Population*, 2013

[16] D. Hathout, *Modeling Population Growth: Exponantial Hyperbolic Modeling*, *Applied Mathematics, 2013, 4, 299-304.*

[17] D. J. B. LLOYD, *Nonlinear Dynamics & Chaos*, 2010.

[18] D.K. ARROWSMITH, C.M. PLACE, London 1992, *Dynamical Systems.*

[19] F. DERCOLE1, S. RINALDI, *Dynamical Systems and Their Bifurcations*, To appear in Advanced Methods of Biomedical Signal Processing, eds. Cerutti, S. & Marchesi, C., IEEE-Wiley Press, New York, NY, 2011

[20] G.B. Stan, *Modelling in Biology*, 2015.

[21] H. LUO, *Population Modeling by Differential Equations*, 2007.

[22] H. WEISS, G. TECH, *An Mathematical Introduction to Population Dynamics.*

[23] H.R. THIEME, *Mathematics in Population Biology,* 2003.

[24] I.D.S.C. MICHEL, (2007). Harvesting induced fluctuations: insights from a threshold management policy. *Mathematical Biosciences* 205: 77-82.

[25] J. D. FLORES, *Mathematical Modeling*, 2013.

[26] J. M¨ULLER Lecture, held in the Winter – Semester 2003/2004, *Mathematical Models in Biology.*

[27] J. R. CHASNOV, *Introduction to Differential Equations*, 2012.

[28] J.R. BRANNAN, W.E. BOYCE, *Differential Equations, An Introduction to Modern Methods and Applications,* 2nd Edition 2007, 2011.

[29] L. ALLEN,*Introduction to mathematical biology,* 2006.

[30] L. GJOKA, A. DACI, *Analiza C, Ekuacione Diferenciale, Sisteme Dinamike.* Tiranë, Mirgeeralb, 2014.

[31] L. GJOKA, J. MALITA, *"Analiza Matematike 2",* Tiranë, SHBLU 2001.

[32] L. PERKO, USA 2000, *Differential Equations and Dynamical Systems,* Third Edition.

[33] L.V. IDELS, & M. WANG, 2008. Harvesting fisheries management strategies with modified effort function. *International Journal Modelling, Identification and Control* 3: 83-87.

[34] M. DI FRANCESCO (based on the book by J. D. Murray)*Mathematical models in life sciences,* 2010.

[35] M. HASANBULLI, S. P. ROGOVCHENKO, Y.V. ROGOVCHENKO, *Dynamics of a Single Species in a Fluctuating Environment under Periodic Yield Harvesting*, Hindawi Publishing Corporation, Journal of Applied Mathematics Volume 2013, Article ID 167671, 12 pages http://dx.doi.org/10.1155/2013/167671

[36] M.F. LAHAM, I.S. KRISHNARAJAH & J.M. SHARIFF, (2012), *Fish Harvesting Management Strategies Using Logistic Growth Model, Sains Malaysiana* 41(2)(2012): 171–177.

[37] M.W. HIRSCH, S. SMALE, R. L. DEVANEY, *Differential Equations, Dynamical Systems, And An Introduction To Chaos*, 2004.

[38] N. BACAER, *A short history of mathematical population dynamics*, 2011, 35-39, DOI: 10. 1007 /978-0-85729-115-8_6

[39] O. KNILL, *Dynamical systems*, Harvard University, 2005.

[40] P. BLANCHARD, R.L.DEVANEY, G.R. HALL, Boston University 2011, *Differential Equations*, Fourth Edition.

[41] P.J. OLIVER, University of Minesota, Chehrzad Shakiban, University of St. Thomas, *"Applied Mathematics"*, 2001.

[42] QENDRA" SHPK, Sarandë, Shqipëri, 2016.

[43] R. REDHEFFER, *Lotka-Volterra systems with constant interaction coefficients, Nonlinear Analysis*, 2001.

[44] R. SHONE, *Economic Dynamics: Phase Diagrams and Their Economic Application*, 2^{nd} ed, 2002.

[45] R.M.H. DOUST, M. SARAJ, *The Logistic Modeling Population; Having Harvesting Factor*, Yugoslav Journal Of Operations Research 25 (2015), Number 1, 107-115 DOI:10.2298/YJOR130515038R.

[46] S. AANES, S. ENGEN, B-E. SAETHE, T. WILLERBRAND, & V. MARCSTRAM, *Sustainable harvesting strategies of willow ptarmigan in a fluctuating environment. Ecological Applications* 12: 281-290, 2002.

[47] S. LYNCH, *Dynamical Systems with Applications using Maple^{TM},* Second Edition, 2010.

[48] S. TOAHA, *Analysis Of Stability Of Some Population Models With Harvesting*, 2000.

[49] S.H. STROGATZ, 1994 *Nonlinear Systems and Chaos.* Perseus Publishing, Cambridge, MA.

[50] TH. WOOD, *Fish population modeling,* 2009.

[51] W. GARRETT MITCHENER, *Plotting and Dynamical Systems How to,2005.*

[52] Y.A. KUZNETSOV, *Elements of applied bifurcation theory*, Springer, 1998.

[53] INSTAT: http://www.instat.gov.al/en/themes/agriculture,-forestry-and-fishery.aspx?tab=tabs-5

[54] Ministry of Agriculture, Food and Consumer Protection, Albanian Agriculture 2011. http://www.mbumk.gov.al/Botime/Albanian%20Figures%20%202011_Final.pdf

[55] http://msemac.redwoods.edu/~darnold/math55/DEproj/sp09/TomWood/Thomas_Wood_Paper.pdf

[56] http://arxiv.org/find/all/1/all:+AND+growth+AND+Population+AND+d

[57] http://open.data.al/sq/lajme/lajm/lang/sq/id/669/Popullsia-ne-Shtetin-Shqiptar-1870-2011

[58] http://www.instat.gov.al/en/publications/books.aspx

[59]https://www.google.al/?gws_rd=cr,ssl&ei=8BswWICI4P6aNi2jbAO#safe=off&q=ministria+e+mjedisit+pyjeve+dhe+administrimit+te+ujrave%2C+draft+strategjia+e+zhvillimit+te+peshkimit+dhe+akuakultures+2007-2015

[60]http://www.instat.gov.al/media/303384/njoftim_p_r_media__statistikat_e_bujq_sis__dhe_blegtoris___2014.pdf

[61]https://www.google.al/url?sa=i&rct=j&q=&esrc=s&source=images&cd=&cad=rja&uact=8&ved=0ahUKEwjcyISVvLfQAhVEcBoKHW3PCPYQjB0IBg&url=http%3A%2F%2Fmikes.atspace.biz%2FPrey.htm&psig=AFQjCNFs7R-kS22F_g458HR2Ld6PVw17nQ&ust=1479735918106898