



**UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE
INXHINIERISË FIZIKE**

PROGRAMI I STUDIMIT: ANALIZË DHE ALGJEBËR

DISERTACION

**KONDITA FUNDSHMËRIE PËR GJYSMËGRUPET ME
PËRFTIM TË FUNDËM**

Doktoranti:

Msc. Aida SHASIVARI

Udhëheqës Shkencor:

Prof. Asoc. Elton PASKU

Tiranë, 2017



**UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE
INXHINIERISË FIZIKE**

DISERTACION

i paraqitur nga
Msc. Aida Shasivari
Udhëhequr nga
Prof. Asoc. Elton Pasku

Për marrjen e gradës shkencore
DOKTOR

Tema

**KONDITA FUNDSHMËRIE PËR GJYSMËGRUPET ME
PËRFTIM TË FUNDËM**

Mbrohet me datë....../....../2017 para jurisë

1. Prof.Kryetar
2. Prof.Anëtar (Oponent)
3. Prof.Anëtar (Oponent)
4. Prof.Anëtar
5. Prof.Anëtar

Pasqyra e Lëndës

Deklaratë.....	iii
Falenderime.....	iv
Hyrje.....	v
1 Njohuri hyrëse	
1.1 Bashkësitë e renditura.....	1
1.2 Gjysmëgrupet e renditur.....	3
1.3 Kategoritë dhe funktorët.....	7
1.4 Kombinatorikë mbi fjalët.....	13
1.5 Disa rezultate utilitare.....	14
2 Teorema të tipit të Grinit në le-gjysmërupe	
2.1 $\mathcal{L}$ -klasat që janë nëngjysmëgrupe.....	21
2.2 $\mathcal{H}$ -klasat që janë nëngjysmëgrupe.....	24
2.3 $\mathcal{J}$ -klasat që janë nëngjysmëgrupe.....	26
2.4 Elementët $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{B}$ -idempotentë.....	32
3 Aspekte kategorike të teorisë së gjysmëgrupeve të renditur	
3.1 Objekte universale në kategorinë e po -gjysmëgrupeve.....	37
3.1.1 Ndërtimi i po -gjysmëgrupeve të lirë.....	38
3.1.2 Paraqitjet e v -gjysmëgrupeve.....	40
3.1.3 Ndërtimi i po -gjysmëgrupeve metrikë të lirë.....	47
3.2 ℓ -gjysmëgrupet të parë si algjebra.....	51
3.2.1 Teorema e zhytjes.....	52
3.2.2 Një situatë bashkëngjitjeje.....	56
3.2.3 ℓ -gjysmëgrupet me përfitim të fundëm dhe shpërndarëse të para si T - algjebra.....	61
4 Nga le-gjysmëgrupet në po-gjysmëgrupet	
4.1 Mekanizmi i kalimit dhe disa rezultate.....	64
5 Teorema zbërthimi për po-gjysmëgrupet	
5.1 Një teoremë zbërthimi për po -gjysmëgrupet.....	74
5.2 Një zbatim tek gjysmëgrupet e zakonshëm.....	76
5.3 Kalimi nga le -gjysmëgrupet tek po -gjysmëgrupet.....	77
5.4 Kongruencat në po -gjysmëgrupet me përfitim të fundëm.....	82
6 Disa relacione të tipit të Grinit në le-gjysmëgrupe	
6.1 Relacione të përcaktuara nga elementët minimalë.....	87
6.2 Relacione lokale të Grinit në le -gjysmëgrupet e diskretizueshëm.....	90
Literatura.....	95

Deklaratë

Kapitulli 1 përmban njohuri nga Teoria e Gjysmëgrupeve si dhe ajo e Latisave si edhe disa rezultate të punimeve të autorëve të ndryshëm të cilave ju referohem më tepër në këtë tezë. Gjithashtu në kapitullin e parë janë përfshirë disa njohuri hyrëse nga Teoria e Kategorive të cilat kanë kryesisht të bëjnë me funktorët e bashkëngjitur dhe T-algjebrat.

Rezultatet origjinale ndodhen tek kapitujt 2,3,4,5 dhe 6.

Falenderime

Dëshiroj të falenderoj udhëheqësin tim Prof. Asoc. Elton. Pasku për punën e palodhur dhe për ndihmën e pakursyer gjatë kohës së përgatitjes së kësaj teze doktrate. Një falenderim i veçantë shkon për familjen time, bashkëshortin, vajzat dhe prindërit e mi, për mbështetjen që më kanë dhënë gjatë periudhës së vështirë e të lodhshme të përgatitjes së disertacionit.

Gjithashtu dëshiroj të falenderoj Fakultetin Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike i cili më dha mundësinë që të kryej doktoratën pranë Departamentit të Matematikës së këtij fakulteti.

Hyrje

Qëllimi i kësaj teze është studimi i një klase të veçantë gjysmëgrupesh, atyre të renditur teoria e të cilëve është përgjithësim i teorisë së gjysmëgrupeve të zakonshëm. Në mënyrë të veçantë jemi ndalur tek disa veti të gjysmëgrupeve të renditur kur këta kanë një numër të fundëm përfutuesish.

Teoria e gjysmëgrupeve të renditur zë fill në fillim të viteve 80' me punimet e Niovi Kehayopulu [13], [14], [15], [16], [17], [18] dhe [19] tek të cilat duket qartazi tendenca për të përgjithësuar disa rezultate të teorisë së gjysmëgrupeve duke përdorur si model *le*-gjysmëgrupet të cilat nga ana e vet përgjithësojnë gjysmëgrupin fuqi të një gjysmëgrupi të dhënë. Arsyeja që u ndoq kjo linjë qëndron në suksesin që patën në ato vite punimet e Lajos, Szazs dhe Steinfeld (shiko p.sh. [56]) një pjesë e të cilave kishin të bënin me karakterizimin e rregullsisë dhe intra rregullsisë së gjysmëgrupeve me anën e kuazi idealeve gjë që rriti shpresat se veti të gjysmëgrupeve të cilat kanë të bëjnë me elementët mund të përshkruhen me anën e disa nënbashkësive të veçanta siç janë kuazi idealet. Më vonë Kehayopulu së bashku me *le*-gjysmëgrupet filloi të studiojë struktura më të përgjithshme si $\vee$ -gjysmëgrupet dhe *po*-gjysmëgrupet duke hequr dorë fare nga kushti që gjysmëgrupi lidhur me renditjen të formojë latisë. Qëllimi ishte përgjithësimi i mëtejshëm i rezultateve të Lajos, Szazs dhe Steinfeld. Një gjë u vu re qysh në fillim, që vërtetimet e rezultateve për *po*-gjysmëgrupet ngjasonin me ato të rezultateve analoge tek *le*-gjysmëgrupet pothuajse fjalë për fjalë. Në disa raste si p.sh. tek [24] apo tek [35] vetë Kehayopulu deklaroi se teoria e *le*-gjysmëgrupeve bazuar në elementët idealë dhe ajo e *po*-gjysmëgrupeve bazuar në idealet e renditur janë paralele me njëra tjetrën por në asnjë rast nuk është përshkruar ndonjë mekanizëm me anën e të cilit rezultatet të kaloheshin pa kosto nga njëra tek tjetra. Një nga qëllimet e kësaj teze është pikërisht gjetja e këtij mekanizmi. Ky mekanizëm bazohet në teoremën e zhytjes së një *po*-gjysmëgrupi S në një *le*-gjysmëgrup Σ të vërtetuar nga Kehayopulu, Pasku dhe Tsingelis në [32]. Çelësi i mekanizmit qëndron në faktin që idealeve të renditur të S ju korrespondojnë elementë idealë të Σ -ës dhe anasjelltas. Për të dëshmuar që mekanizmi është rezultativ ne kemi vërtetuar në kapitullin 4 për *po*-gjysmëgrupet rezultate të ngjashme me ato të vërtetuara tek [26] dhe tek [36] për *le*-gjysmëgrupet. Theksojmë se vërtetimet nuk janë imitime vërtetimesh rezultatesh analoge por përdorin mekanizmin e sipërpërmendur.

Arsyeja përse teorinë në fjalë ngjasojnë kaq shumë me njëra-tjetrën mund të jetë edhe më e thellë sesa kaq sa përmendëm më sipër. Për këtë jemi detyruar të studiojmë në kapitullin 3 lidhje që ekzistojnë midis dy kategorive përkatëse, asaj të ℓ -gjysmëgrupeve dhe asaj të *po*-gjysmëgrupeve. Konkretisht kemi treguar se kategoria ℓ -**sgrp** me objekte *le*-gjysmëgrupet me përfitim të fundëm që janë edhe shpërndarëse dhe morfizma homomorofizmat që ruajnë superiorët është nënkategori reflektive e kategorisë $\vee$ -**sgrp** që ka për objekte $\vee$ -gjysmëgrupet me përfitim të fundëm dhe për morfizma homomorfizmat që ruajnë superiorët. Theksojmë se ky

rezultat u bë i mundur falë një përmirësimi të teoremës së zhytjes në [32] tek e cila zhytja e përdorur aty nuk i ruan në përgjithësi superiorët që mund të ekzistojnë në burim. Përmirësimi i bërë jo vetëm eviton pikërisht këtë defekt por edhe mundëson zhytjen e një $\vee$ -gjysmëgrupi me përfitim të fundëm (si Ω -algjebër) tek një ℓ -gjysmëgrup me përfitim të fundëm. Gjithashtu në këtë kapitull është treguar se kategoria ℓ -**sgrp** është izomorfe me kategorinë e T -algjebrave mbi kategorinë $\vee$ -**sgrp** ku T është monadi që lind nga reflektiviteti i sipërpërmendur. Pra në një farë mënyre çdo ℓ -gjysmëgrup me përfitim të fundëm është një algjebër e lirë me bazë një $\vee$ -gjysmëgrup me përfitim të fundëm. Ideja për këtë rezultat lindi kur po ndërtoheshin në fillim të kapitullit $\vee$ -gjysmëgrupet e lirë me bazë një bashkësi të renditur çfardo si dhe u frymëzua nga disa rezultate të Ernest Manes tek [41].

Është e rëndësishme të theksojmë se për herë të parë në këtë tezë janë përkufizuar paraqitjet e $\vee$ -gjysmëgrupeve dhe në veçanti paraqitjet e fundme. Arsyeja që deri më sot nuk ka qënë e mundur të realizohej kjo gjë është se në ndryshim nga gjysmëgrupet e zakonshëm, tek ata të renditur faktori i një gjysmëgrupi të lirë të renditur sipas një kongruence të përftuar nga një bashkësi relacionesh nuk është në përgjithësi një gjysmëgrup i renditur. Ndonëse ka pasur tentativa nga autorë të ndryshëm si Kehayopulu dhe Tsingelis apo Xie Xiang-Yun, të cilët kanë përkufizuar pseudo renditjet apo kongruencat e rregullta dhe ato fortësisht të rregullta, përsëri këto kanë qënë të papërshtatshme për të përkufizuar paraqitjet e fundme pasi kongruencat e sipërpërmendura përftohen nga një numër i pafundëm relacionesh. Në këtë tezë ne i kemi parë $\vee$ -gjysmëgrupet si Ω -algjebra dhe kjo na ka mundësuar të bëjmë një përshkrim sistematik të kongruencës së përftuar nga një bashkësi relacionesh në një $\vee$ -gjysmëgrup të lirë me bazë një bashkësi të renditur, dhe të tregojmë se faktori është një $\vee$ -gjysmëgrup. Më tej jemi ndalur në gjetjen e kushteve që sjellin përfundueshmërinë e sistemit të reduktimit që i shoqërohet një paraqitjeje të dhënë të një $\vee$ -gjysmëgrupi.

Një vend në këtë kapitull i është lënë edhe ndërtimit të gjysmëgrupeve të renditur metrikë të lirë. Gjysmëgrupet e renditur metrikë janë përkufizuar për herë të parë në këtë tezë në analogji me gjysmëgrupet e zakonshëm metrikë të përkufizuar dhe të studiuar nga Saunders tek [1] me qëllim gjetjen e konditave për zhytjen e një gjysmëgrupi të çfardoshëm tek një gjysmëgrup i lirë.

Në teorinë e gjysmëgrupeve të zakonshëm një rol të dorës së parë luan studimi i relacionit $\mathcal{H}$ të Grinit. Arsyeja për këtë lidhet me faktin që një $\mathcal{H}$ -klasë e Grinit H që plotëson të ashtëquajturën konditë të Grinit: $H^2 \cap H \neq \emptyset$ është nëngrup i gjysmëgrupit. Kjo është në fakt teorema e famshme e Grinit. Nëse çdo $\mathcal{H}$ -klasë plotëson këtë konditë, atëherë gjysmëgrupi do të sillet lokalisht si një grup. Të tillë gjysmëgrupe quhet plotësisht të rregullt dhe janë mjaft të studiuar. Deri në vitin 2003 nuk ishte bërë asnjë përpjekje nga Kehayopulu apo të tjerë që studionin le -gjysmëgrupet për të ekzaminuar strukturën e një $\mathcal{H}$ -klase të Grinit në rastin e le -gjysmëgrupeve. Kjo u bë e mundur për herë të parë nga Petro dhe Pasku tek [42] ku u vërtetuan disa rezultate interesante që hedhin dritë mbi strukturën e $\mathcal{H}$ -klasave. Aty u

tregua se në përgjithësi $\mathcal{H}$ -klasat që kënaqin konditën e Grinit nuk formojnë as nëngjysmëgrup dhe u la i hapur problemi i gjetjes së konditave shtesë nën të cilat $\mathcal{H}$ -klasa formon nëngjysmëgrup. Kapitulli 2 i kësaj teze i kushtohet tërësisht këtij problemi, gjetjes së konditave në fjalë. Arsyeja që kërkojmë të tilla kondita lidhet me një projekt ende në progres të autores së kësaj teze për përgjithësimin në rastin e le -gjysmëgrupeve të disa rezultate të de Luca dhe Varricchio që kanë të bëjnë me fundshmërinë lokale të gjysmëgrupeve më përftim të fundëm dhe që plotësojnë konditën e minimalitetit për bi-idealet kryesore. Përgjithësimi i synuar do të kërkonte domosdoshmërisht që $\mathcal{H}$ -klasat e Grinit që plotësojnë konditën e Grinit të jenë nëngjysmëgrupe.

Kondita e cila është gjetur kërkon që çdo dy elementë kuazi idealë të ndërrojnë me njëri tjetrin. Është interesante të përmendim se nëse kondita të ngjashme plotësohen për elementët idealë të majtë (përk. elementët idealë të djathtë) atëherë është treguar se çdo $\mathcal{L}$ -klasë (përk. $\mathcal{R}$ -klasë) që plotëson konditën e Grinit formon nëngjysmëgrup. Një rezultat i ngjashëm vlen edhe për relacionin $\mathcal{J}$ madje për të është vërtetuar se le -gjysmëgrupet gjysmë të thjeshtë tek të cilët elementët idealë të majtë ndërrojnë, zërthimi në $\mathcal{J}$ -klasa formon një semilatisë $\vee e$ -gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas. Ky rezultat është analog me teoremën e zërthimit të vërtetuar nga Kehayopulu dhe Tsingelis në [34] e cila në thelb pohon se po -gjysmëgrupet e renditur tek të cilët idealet e majtë të renditur formojnë një semilatisë janë pikërisht ata që zbërthehen si semilatisa po -gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas. Një paragraf i veçantë kapitullit 2 i kushtohet të ashtëquajturve elementë $\mathcal{L}$ (përk. $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{H}$) idempotentë që janë ata elementë që janë $\mathcal{L}$ (përk. $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{H}$) ekuivalentë me katrorët e tyre. Është treguar se të tillë elementë formojnë nëngjysmëgrup të klasës përkatëse dhe se ky nëngjysmëgrup kënaq të njëjtin relacion lidhur me klasën që do të kenaqte një kuazi ideal sikur klasa të ishte gjysmëgrup.

Frymëzuar nga rezultati kryesor i [34], në kapitullin 5 është vërtetuar një rezultat analog me atë të [34] ku në vend të idealeve të majtë janë marrë bi-idealet. Leverdia në këtë rast është që zërthimi është më i imët pasi dihet se relacioni $\mathcal{B}$ është më fin se ai $\mathcal{L}$. Si një zbatim i këtij rezultati është dhënë një karakterizim i panjohur më parë i gjysmëgrupeve të Klifordit si semilatisa gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ të thjeshtë.

Një rrjedhim interesant i teoremës tonë të zërthimit është se kur po -gjysmëgrupi është edhe me përftim të fundëm dhe plotëson konditën e minimalitetit për bi-idealet e renditur, atëherë ai zbërthehet si një semilatisë e fundme po -gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ -të thjeshtë. Sigurisht, duke marrë si renditje barazimin, përftohet analogu i rezultatit më lart për gjysmëgrupet e zakonshëm. Edhe ky është një rezultat i panjohur më parë.

Në kapitullin e fundit është bërë një përpyetje për të studiuar relacionet e Grinit në disa lloje po -gjysmëgrupesh që ju përngjasin gjysmëgrupit fuqi të një gjysmëgrupi si dhe për të gjetur kushte nën të cilat $\mathcal{H}$ -klasat formojnë nëngjysmëgrupe.

KAPITULLI 1

Njohuri Hyrëse

1.1 Bashkësitë e renditura

Po e fillojmë këtë kapitull hyrës me dhënien e disa koncepteve bazë të cilat marin pjesë në ndërtimin e teorisë së gjysmëgrupeve të renditur. Së pari një relacion binar $\leq$ në një bashkësi joboshe X do të quhet relacion renditjeje (renditje e pjesshme) në qoftë se

- (i) Për çdo $x \in X, x \leq x$;
- (ii) Për çdo $x, y \in X$, në qoftë se $x \leq y$ dhe $y \leq x$, atëherë $x = y$ dhe
- (iii) Për çdo $x, y, z \in X$, në qoftë se $x \leq y$ dhe $y \leq z$, atëherë $x \leq z$.

Sa herë që në një bashkësi X është përcaktuar një renditje e pjesshme $\leq$ do të themi se X është një bashkësi e renditur lidhur me $\leq$. Zakonisht ky fakt shkruhet në formën $(X, \leq)$.

Shembull 1.1.1 Bashkësia e numrave natyrorë $\mathbb{N}$ lidhur me renditjen e zakonshme formon një bashkësi të renditur. Po ashtu në qoftë se si relacion në $\mathbb{N}$ merret ai i plotpjestueshmërisë.

Një shembull më interesant dhe që do të përdoret më vonë në një situatë të veçantë në punim është ai i mëposhtmi.

Shembull 1.1.2 Le të jetë $(X, \leq)$ një bashkësi e renditur e çfardoshme. Shënojmë me $\mathcal{T}(X)$ bashkësinë e të gjithë transformimeve të X -it në X dhe në të futim relacionin $\preceq$ duke pozuar

$$f \preceq g \text{ vetëm kur për çdo } x \in X, f(x) \leq g(x).$$

Një shembull tjetër është ai i bashkësisë fuqi të një bashkësie X .

Shembull 1.1.3 Le të jetë $\mathcal{P}(X)$ bashkësia fuqi e një bashkësie joboshe X . Një relacion i natyrshëm renditjeje në $\mathcal{P}(X)$ është ai i përcaktuar nga përfshirja, domethënë $A \leq B$ vetëm kur $A \subseteq B$.

Në qoftë se $(X, \leq)$ është një bashkësi e renditur, elementi $a \in X$ do të quhet minimal në qoftë se

$$\forall x \in X, x \leq a \Rightarrow x = a,$$

dhe do të quhet elementi më i vogël në qoftë se

$$\forall x \in X, a \leq x.$$

Një element $a \in X$ do të quhet elementi më i madh në qoftë se

$$\forall x \in X, x \leq a.$$

Është e qartë që a është i vetëm kur ekziston.

Shembull 1.1.4 $\mathbb{N}$ ka element minimal 1 lidhur me të dyja renditjet e përcaktuara në të më lart, por ajo nuk ka element më të madh lidhur me asnjërën prej tyre. Ndërkaq, në qoftë se a është element minimal i $(X, \leq)$, atëherë $\alpha \in \mathcal{T}(X)$ i tillë që $\alpha(x) = a$ për çdo $x \in X$ do të jetë element minimal në $(\mathcal{T}(X), \preceq)$. Në qoftë se a është elementi më i madh i X , atëherë $\alpha \in \mathcal{T}(X)$ i tillë që $\alpha(x) = a$ për çdo $x \in X$ do të jetë elementi më i madh në $(\mathcal{T}(X), \preceq)$. Në $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ elementi X është elementi më i madh aty dhe $\emptyset$ është minimal.

Në qoftë se Y është nënbashkësi joboshe e bashkësisë së renditur $(X, \leq)$, atëherë do të themi se $c \in X$ është një kufi i poshtëm për Y kur $c \leq y$ për çdo $y \in Y$. Në qoftë se bashkësia e kufijve të poshtëm të Y është joboshe dhe ka element më të madh d , atëherë d do të quhet kufiri i përpiktë i poshtëm (inferiori) i Y . Ky është i vetëm kur ekziston dhe shënimi përkatës është $d = \wedge \{y : y \in Y\}$. Në qoftë se $Y = \{a, b\}$ atëherë shënimi është $d = a \wedge b$. Sa herë që kufiri i përpiktë i poshtëm i çdo dy elementëve të $(X, \leq)$ ekziston do të themi se X është semilatisë e poshtme. Ndërkaq, në qoftë se ky kufi ekziston për çdo nënbashkësi Y të X do të themi se X është semilatisë e poshtme e plotë. Veprimi $\wedge$ në X është një veprim shoqërimtar, ndërrimtar dhe idempotent, domethënë për çdo $a, b, c \in X$,

$$a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c, a \wedge b = b \wedge a \text{ dhe } a \wedge a = a.$$

Përkufizime analoge mund të jepen për kufijtë e përpiktë të sipërm (superiorët) dhe shënimet përkatëse janë

$$\vee \{y : y \in Y\},$$

dhe $a \vee b$ në rastin kur $Y = \{a, b\}$. Bashkësia e renditur X do të quhet semilatisë e sipërme kur $a \vee b$ ekziston për çdo $a, b \in X$ dhe do të quhet semilatisë e sipërme e plotë kur superior ekziston për çdo $Y \subseteq X$. Si tek rasti i semilatisave të poshtme, edhe tek ai i të sipërmeve veprimi $\vee$ është shoqërimtar, ndërrimtar dhe idempotent. Bashkësia e renditur $(X, \leq)$ do të quhet latisë në qoftë se është njëherazi semilatisë e sipërme dhe e poshtme. Ajo do të quhet latisë e plotë kur është semilatisë e poshtme dhe e sipërme e plotë. Kur duam ti vemë në dukje të dy veprimet $\wedge$ dhe $\vee$ tek një latisë atëherë atë e shkruajmë $(X, \leq, \wedge, \vee)$. Latisa do të quhet shpërndarëse kur për çdo $a, b, c \in X$ kemi

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

Shembull 1.1.5 $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ formon latisë të plotë shpërndarëse ku veprimet $\wedge$ dhe $\vee$ janë përkatësisht $\cap$ dhe $\cup$. Ndërkaq për çdo latisë $(X, \leq, \wedge, \vee)$, $(\mathcal{T}(X), \leq)$ formon po ashtu latisë ku $f \wedge g$ dhe $f \vee g$ janë përcaktuar duke pozuar

$$(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x) \text{ dhe } (f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x).$$

Lidhur me këto dy veprime, $\mathcal{T}(X)$ është shpërndarëse sa herë që e tillë ka qenë $(X, \leq, \wedge, \vee)$.

1.2 Gjysmëgrupet e renditur

Një gjysmëgrup i renditur ose shkurt një *po*-gjysmëgrup është një treshe $(S, \cdot, \leq)$ ku $\leq$ është një relacion renditjeje në S dhe $\cdot$ është një veprim shoqërimtar në S i cili plotëson vetitë

$$a \leq b \Rightarrow xa \leq xb \text{ dhe } ax \leq bx \text{ për çdo } x \in S.$$

Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një *po*-gjysmëgrup që ka një element e më të madh, atëherë ai do të quhet *po*e-gjysmëgrup dhe nëse $(S, \leq)$ është një semilatisë e sipërme, atëherë ai do të quhet një $\vee$ e-gjysmëgrup. Në qoftë se për më tepër ndodh që $(S, \leq)$ është latisë, atëherë S do të quhet *le*-gjysmëgrup. Shënimi standart për një *le*-gjysmëgrup është $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$. Këtu relacioni i renditjes nuk shkruhet në mënyrë eksplicite por kuptohet nga ekuivalenca $a \leq b$ vetëm kur $a \wedge b = a$. Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një *po*-gjysmëgrup dhe nëse $(S, \leq)$ është një latisë atëherë ai do të quhet *l*-gjysmëgrup.

Shembull 1.2.1 Në qoftë se $(S, \cdot)$ është një gjysmëgrup i çfardoshëm, atëherë treshja

$$(\mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq)$$

është një *le*-gjysmëgrup ku $\cdot$ është veprimi i induktuar i veprimit $\cdot$ të gjysmëgrupit $(S, \cdot)$ në $\mathcal{P}(S)$. Si element më të madh këtu kemi S -në.

Shembull 1.2.2 Le të jetë $\{1 < 2 < \dots < n\}$ një zinxhir i fundëm dhe $\mathcal{O}_n$ bashkësia e të gjithë transformimeve të zinxhirit të dhënë në vetvete që ruajnë renditjen, domethënë

$$f \in \mathcal{O}_n \text{ në qoftë se } i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j).$$

Është e qartë që lidhur me kompozimin e pasqyrimeve $\mathcal{O}_n$ formon një gjysmëgrup. Si renditje në $\mathcal{O}_n$ mund të përcaktohet ajo e shembullit 1.1.2 dhe tregohet lehtësisht se

$(\mathcal{O}_n, \circ, \preceq)$ është një le -gjysmëgrup me element më të madh e ku $e(i) = n$ për çdo $i = 1, \dots, n$. Në këtë rast veprimet $\wedge$ dhe $\vee$ jepen si më poshtë

$$(f \wedge g)(i) = \min\{f(i), g(i)\} \text{ dhe } (f \vee g)(i) = \max\{f(i), g(i)\}.$$

Një element x i një po -gjysmëgrupi S do të quhet element ideal i djathtë (përk. i majtë) në qoftë se $xe \leq x$ (përk. $ex \leq x$). Ai do të quhet element ideal në qoftë se është njëherazi element ideal i majtë dhe i djathtë i S . Një element x do të quhet element kuazi-ideal në qoftë se $xe \wedge ex \leq x$. Vihet re lehtë se elementët idealë të njëanshëm janë elementë kuazi-idealë. Një element x i S do të quhet element bi-ideal i S në qoftë se $xex \leq x$. Është e qartë që elementët kuazi-idealë të S janë gjithashtu elementë bi-idealë të S .

Shembull 1.2.3 Në qoftë se B është një bi-ideal i gjysmëgrupit $(S, \cdot)$, domethënë B është një nëngjysmëgrup i S i tillë që $BSB \subseteq B$, atëherë elementi B i le -gjysmëgrupit $\mathcal{P}(S)$ do të jetë element bi-ideal aty.

Një element x i një le -gjysmëgrupi S do të quhet i rregullt në qoftë se $x \leq xex$ dhe intra i rregullt në qoftë se $x \leq ex^2e$. Elementi x do të quhet gjysmë i thjeshtë në qoftë se $x \leq exexe$. Më vonë do të shohim se në rastin e le -gjysmëgrupeve gjysmë thjeshtësia karakterizohet me anën e idempotencës së elementëve idealë.

Një le -gjysmëgrup S do të quhet i rregullt (përk. intra i rregullt, gjysmë i thjeshtë) kur çdo element i tij është i rregullt (përk. intra i rregullt, gjysmë i thjeshtë).

Shembull 1.2.4 Le të jetë x një element i rregullt sipas Von Neumann në një gjysmëgrup $(S, \cdot)$, domethënë ka ekzistuar një $x' \in S$ i tillë që $x = xx'x$. Atëherë, elementi $\{x\} \in \mathcal{P}(S)$ është i rregullt sipas përkufizimit të rregullsisë për elementët e le -gjysmëgrupeve pasi $\{x\} = \{x\} \cdot \{x'\} \cdot \{x\} \subseteq \{x\} \cdot S \cdot \{x\}$. Në mënyrë të ngjashme intra-rregullsia e x në S sjell intra-rregullsinë e $\{x\}$ në $\mathcal{P}(S)$. Kujtojmë se x quhet intra i rregullt në S në qoftë se kanë ekzistuar $a, b \in S$ të tillë që $x = ax^2b$. Gjithashtu ka vend edhe e anasjella, rregullsia (përk. intra-rregullsia) e $\{x\}$ në $\mathcal{P}(S)$ sjell rregullsinë (përk. intra-rregullsinë) e x në S . Ndërkaq, në qoftë se I nga S është një ideal gjysmë i thjeshtë, domethënë që $I \subseteq S(ISI)S$ atëherë elementi ideal I në $\mathcal{P}(S)$ do të jetë aty një element ideal gjysëm i thjeshtë.

Lidhur me elementët idealë të njëanshëm, Kehayopulu në [20], [21] përcaktoi relacionet e mëposhtëm të ekuivalencës në një le -gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$:

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in S \times S \mid x \vee ex = y \vee ey\},$$

$$\mathcal{R} = \{(x, y) \in S \times S \mid x \vee xe = y \vee ye\},$$

$$\mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}$$

Relacioni $\mathcal{H}$ më vonë është quajtur nga Petro dhe Pasku në [42] relacioni i Grin-Kehayopulu. Ndërsa lidhur me elementët bi-idealë Kehayopulu përcaktoi në [27] relacionin e mëposhtëm të ekuivalencës.

$$\mathcal{B} = \{(x, y) \in S \times S \mid x \vee xex = y \vee yey\}.$$

Relacionet $\mathcal{H}$ dhe $\mathcal{B}$ janë interesante përse i përket masës me të cilën rregullsia dhe intra-rregullsia transmetohen nga elementët e veçantë tek nënbashkësitë. Konkretisht, në [42] Petro dhe Pasku vunë re se çdo $\mathcal{H}$ -klasë H përmban një element kuazi-ideal të vetëm q idempotencia e të cilit sjell rregullsinë e gjithë H -së. Ndërkaq, në qoftë se H kënaq të ashtëquajturën konditë e Grinit $H^2 \cap H \neq \emptyset$, atëherë H është intra e rregullt. Në rastin e relacionit $\mathcal{B}$, ashtu siç edhe pritet, situata është edhe më e favorshme. Konkretisht, në [45] Pasku dhe Petro vërtetuan se rregullsia (përk. intra-rregullsia) e një elementi x sjell rregullsinë (përk. intra-rregullsinë) e të gjithë $\mathcal{B}$ -klasës B që e përmban atë. Në qoftë se për më tepër B kënaq konditën e Grinit $B^2 \cap B \neq \emptyset$, atëherë B është e rregullt dhe intra e rregullt.

Më tej po japin kuptime analoge me të më sipërmet në *po*-gjysmëgrupet në përgjithësi.

Së pari, në qoftë se A është një nënbashkësi joboshe e një *po*-gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$, atëherë do të shënojmë me

$$(A] = \{x \in S : \exists a \in A \text{ që } x \leq a\},$$

pra bashkësinë e elementëve të S që janë poshtë ndonjë elementi të A -së. Një nënbashkësi joboshe A e një *po*-gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$ do të quhet ideal i majtë (përk. i djathtë) i S në qoftë se

- (1) $SA \subseteq A$ (përk. $SA \subseteq A$) dhe
- (2) $(A] = A$.

Ideal do të quhet ajo nënbashkësi që është ideal i majtë dhe i djathtë njëkohësisht. Për një element a të S , shënojmë me $L(a)$ (përk. $R(a)$) idealin e majtë (përk. të djathtë) të S të përfshuar nga a . Tregohet se $L(a) = (a \cup Sa]$ dhe se $R(a) = (a \cup aS]$. Ndërsa ideali $I(a)$ i S i përfshuar nga a është $(a \cup aS \cup Sa \cup SaS]$.

Një nënbashkësi joboshe Q e një *po*-gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$ do të quhet kuazi-ideal i S në qoftë se

- (1) $(QS] \cap (SQ] \subseteq Q$ dhe
- (2) $(Q] = Q$.

Mund të provohet lehtësisht se për $a \in S$, kuazi-ideali i S i përfshuar nga a është $Q(a) = (a \cup ((aS] \cap (Sa)]]$. Është e qartë që idealet e njëanshëm dhe ata të dyanshëm të S janë kuazi-ideale.

Më tej po japim një përkufizim të bi-idealeve në po -gjysmëgrupe pak më të ndryshëm sesa ai i dhënë në [30]. Një nënbashkësi joboshe B e një po -gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$ do të quhet bi-ideal i S në qoftë se

- (1) $(BSB] \subseteq B$;
- (2) $(B] = B$ dhe
- (3) $(B]$ është nëngjysmëgrup i S .

Duket sheshit që çdo kuazi-ideal është edhe një bi-ideal.

Një po -gjysmëgrup S quhet i thjeshtë majtas (përk. i thjeshtë djathtas, i thjeshtë $\mathcal{B}$ -i thjeshtë) në qoftë se S është i vetmi ideal i majtë (përk. ideal i djathtë, ideal, bi-ideal) i S . Do të themi që një po -gjysmëgrup S zbërthehet si një semilatisë po -gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas (përk. të thjeshtë djathtas, $\mathcal{B}$ -të thjeshtë) në qoftë se ekziston një semilatisë Y dhe një familje $\{S_\alpha : \alpha \in Y\}$ po -nëngjysmëgrupesh të S të thjeshtë majtas (përk. të thjeshtë djathtas, $\mathcal{B}$ -të thjeshtë) S të tillë që:

- 1) $S_\alpha \cap S_\beta = \emptyset$ për çdo $\alpha \neq \beta$ në Y ,
- 2) $S = \cup \{S_\alpha : \alpha \in Y\}$,
- 3) $S_\alpha \cdot S_\beta \subseteq S_{\alpha\beta}$.

Ky përkufizim është ekuivalent me supozimin e ekzistencës së një kongruence σ në S të tillë që për çdo $a, b \in S$, $(ab, ba) \in \sigma$ dhe $(a, a^2) \in \sigma$. Në fakt klasat e σ janë pikërisht nëngjysmëgrupet S_α të zbërthimit të mësipërm. Kongruenca të tilla quhen edhe kongruenca semilatisë. Në qoftë se ndodh që $a \leq b$ të sjellë që $(a, ab) \in \sigma$, atëherë σ do të quhet kongruencë e plotë.

Një element a i një po -gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$ do të quhet i rregullt në qoftë se $a \in (aSa]$, dhe S do të quhet i rregullt kur çdo $a \in S$ është i rregullt. Elementi $a \in S$ quhet intra i rregullt në qoftë se $a \in (Sa^2S]$ dhe S do të quhet intra i rregullt kur çdo $a \in S$ është i tillë.

Një element $a \in S$ do të quhet i rregullt majtas (përk. i rregullt djathtas) në qoftë se $a \in (Sa^2]$ (përk. $a \in (S^2a]$). Kur çdo element $a \in S$ është i rregullt majtas (përk. i rregullt djathtas) do të themi që S është i rregullt majtas (përk. i rregullt djathtas). Një element $a \in S$ do të quhet prim kur $xy \leq a \Rightarrow x \leq a$ ose $y \leq a$. Një element $a \in S$ do të quhet dobësisht prim në qoftë se për çdo dy elementë idealë $x, y \in S$, $xy \leq a \Rightarrow x \leq a$ ose $y \leq a$. Një element $a \in S$ do të quhet gjysmë prim kur $x^2 \leq a \Rightarrow x \leq a$. Më tej do të zbulojmë se si elementët prim dhe gjysmë prim përdoren për të studiuar intra rregullsinë e po -gjysmëgrupeve.

1.3 Kategoritë dhe funktorët

Përkufizim 1.3.1 Me kategori $\mathbb{C}$ do të kuptojmë një klasë $\mathcal{O}$, së bashku me një klasë $\mathcal{M}$ që është bashkim i ndarë i formës

$$\mathcal{M} = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O}} \text{hom}_{\mathbb{C}}(a,b).$$

Elementët e $\mathcal{M}$ do ti quajmë *morfizma* ose *shigjeta* dhe ato të $\mathcal{O}$ do ti quajmë *objekte*. Për çdo tre objekte $(a,b,c) \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \times \mathcal{O}$, ekziston një funksion $\text{hom}_{\mathbb{C}}(b,c) \times \text{hom}_{\mathbb{C}}(a,b) \rightarrow \text{hom}_{\mathbb{C}}(a,c)$. Imazhi i çiftit (β, α) sipas këtij funksioni do të quhet *kompozim* i β dhe α , dhe do të shkruhet $\beta\alpha$. Kompozimi kënaq dy aksiomat e mëposhtme.

- (i) *Shoqërimtaria*: Sa herë që kompozimet kanë kuptim, kemi të vërtetë $(\gamma\beta)\alpha = \gamma(\beta\alpha)$.
- (ii) *Ekzistenca e njëshave*: Për çdo $a \in \mathcal{O}$ ekziston një element $1_a \in \text{hom}_{\mathbb{C}}(a,a)$ i tillë që $1_a\alpha = \alpha$ dhe $\beta 1_a = \beta$ kurdoherë që kompozimi është përcaktuar.

Nëse nuk ka ngatërresa, do të shkruajmë $\mathbb{C}(a,b)$ në vend të $\text{hom}_{\mathbb{C}}(a,b)$ ose ndonjëherë $\text{hom}(a,b)$. Vërejmë se $\text{hom}(a,b)$ mund të jetë boshe për çifte të caktuara (a,b) . Për çdo morfizëm $\alpha \in \text{hom}_{\mathbb{C}}(a,b)$, do të themi se a është *fillimi* i α dhe b është *fundi* i α . Çdo dy morfizma $\alpha, \beta \in \mathbb{C}(a,b)$ do të quhen *paralelë*. Në qoftë se është dhënë morfizmi α dhe duam të vemë në dukje fillimin dhe fundin e tij, ne përdorim shënimet $\iota\alpha$ për fillimin dhe $\tau\alpha$ për fundin.

Me shënimin $c \in \mathbb{C}$ do të nënkuptojmë që c është *objekt* i $\mathbb{C}$ dhe objektet e një kategorie do të shënohen me shkronjat e para të alfabetit Latin $a, b, c, d, \dots$. Për morfizmat do të përdorim shkronjat e, f, g, h , ose shkronjat Greke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

Më poshtë po rendisim një listë kategorish të mirënjohura dhe mjaft të përdorshme.

Set : kategoria e bashkësive dhe pasqyrimeve mes tyre.

Grp : kategoria e grupeve dhe e homomorfizmave mes tyre.

Ab : kategoria e grupeve abelianë dhe e homomorfizmave mes tyre.

Rings : kategoria e unazave dhe homomorfizmave mes tyre

R-Mod : kategoria e **R**-moduleve të majtë dhe e homomorfizmave mes tyre.

Top : kategoria e hapësirave topologjike dhe e funksioneve të vazhdueshëm mes tyre

Po ashtu edhe çdo monoid S (çdo grup në veçanti) mund të konsiderohet si kategori me një objekt i cili është bashkësia S kurse si shigjeta merren translacionet e majta $\lambda_s : S \rightarrow S$ për çdo $s \in S$. Në këtë rast njëshi do të jetë λ_1 ku 1 është njëshi i S -së.

Një kategori i përngjet deri diku një strukturë algjebrike që ka si elemente struktura algjebrike të një lloji të caktuar, për shembull grupe, unaza, module apo thjesht bashkësi, të cilat janë në relacion me njëra-tjetrën nëpërmjet të ashtëquajturave morfizma midis këtyre strukturave. Është e natyrshme që analogjinë ta shtyjme më tej. Ashtu sikurse midis strukturave algjebrike ekzistojnë homomorfizmat që shërbejnë për ti dalluar nga njëra-tjetra ato, për kategoritë përkufizohen funktorët me një qëllim të ngjashëm.

Përkufizim 1.3.2 Le të jenë dhënë $\mathbb{C}$ dhe $\mathbb{B}$ dy kategori. (i) Një *funktor kovariant* $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ me fillim $\mathbb{C}$ dhe fund $\mathbb{B}$, konsiston në dy funksione: *funksioni i objekteve* T , që i lidh çdo objekti $c \in \mathbb{C}$ një objekt $T(c) \in \mathbb{B}$ dhe *funksioni i shigjetave* i shënuar përsëri me T , që i lidh çdo shigjete $\alpha : c \rightarrow c'$ të $\mathbb{C}$ një shigjetë $T(\alpha) : T(c) \rightarrow T(c')$ të $\mathbb{B}$. Funksioni T duhet të kenaqë konditat

$$T(1_c) = 1_{T(c)}, \text{ për çdo } c \in \mathbb{C}$$

dhe $T(\beta\alpha) = T(\beta)T(\alpha)$ sa herë që $\beta\alpha$ është përcaktuar.

(ii) Një *funktor kontravariant* $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{B}$ përsëri konsiston në dy funksione: *Funksioni i objekteve* T , i cili i lidh çdo objekti $c \in \mathbb{C}$ një objekt $T(c) \in \mathbb{B}$ dhe *funksioni i shigjetave* i shënuar përsëri me T , që i lidh çdo shigjete $\alpha : c \rightarrow c'$ të $\mathbb{C}$ një shigjetë $T(\alpha) : T(c') \rightarrow T(c)$ të $\mathbb{B}$. Ky funksion duhet të kënaqë kushtet

$$T(1_c) = 1_{T(c)}, \text{ për çdo } c \in \mathbb{C}$$

dhe $T(\beta\alpha) = T(\alpha)T(\beta)$ sa herë që $\beta\alpha$ është përcaktuar.

Shembull 1.3.3 Le të jetë R një unazë unitare çfardo. Funktori $F : \mathbf{Set} \rightarrow R\text{-}\mathbf{Mod}$ i lidh çdo bashkësi X R -modulin e lirë $\bigoplus_{x \in X} R_x$ me bazë X dhe çdo pasqyrimi $\alpha : X \rightarrow X'$, R -homomorfizmin $F(\alpha) : \bigoplus_{x \in X} R_x \rightarrow \bigoplus_{x' \in X'} R_{x'}$ ekzistenca e të cilit rrjedh nga vetia universale e moduleve të lirë.

Shembull 1.3.4 Funktori $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ që çdo grupi G i lidh bashkësinë G dhe çdo homomorfizmi $h : G \rightarrow G'$ i lidh pasqyrimin e bashkësive $h : G \rightarrow G'$ do të quhet *funktor harraq* pasi harron strukturën e objekteve dhe të morfizmave në kategorinë e parë.

Shembull 1.3.5 Shënojmë me $\mathcal{A} : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ çiftin e pasqyrimeve i pari prej të cilëve çdo grupi G i vë në korrespondencë abelianizimin e tij $G/[G, G]$ ku $[G, G]$

është nëngrupi i komutatorëve i G -së, kurse i dyti çdo homomorfizmi $h: G \rightarrow G'$ grupesh i vë në korrespondencë homomorfizmin $\mathcal{A}(h): G/[G, G] \rightarrow G'/[G', G']$ të tillë që $\mathcal{A}(h)(g[G, G]) = h(g)[G', G']$. Tregohet që $\mathcal{A}$ është funktor. Ky funktor quhet funktori *faktor-komutator*.

Përkufizim 1.3.6 Le të jenë S dhe T dy funktorë kovariantë të $\mathcal{C}$ në $\mathcal{D}$. Transformim natyral $h: S \rightarrow T$ do të quhet një funksion që çdo objekti $C \in \mathcal{C}$ i cakton një morfizëm $h(C): S(C) \rightarrow T(C)$ në $\mathcal{D}$ të tillë që për çdo morfizëm $\gamma: C \rightarrow C'$ diagrami

$$\begin{array}{ccc} S(C) & \xrightarrow{h(C)} & T(C) \\ S(\gamma) \downarrow & & \downarrow T(\gamma) \\ S(C') & \xrightarrow{h(C')} & T(C') \end{array}$$

është ndërrimtar. E thënë më thjesht, transformimi natyral $h: S \rightarrow T$ mund të kuptohet si një familje shigjetash $h(C): S(C) \rightarrow T(C)$ në $\mathcal{D}$ e indeksuar sipas të gjitha $C \in \mathcal{C}$ që kënaq kushtin e vënë për diagramin më sipër. Shpesh herë do të jetë më praktike në qoftë se elementët e familjes që përcakton një transformim natyral h të mos i shënojmë në trajtën $h(C)$ por h_C . Transformimi natyral $h: S \rightarrow T$ do të quhet *ekuivalencë natyrale* në qoftë se çdo $h(C): S(C) \rightarrow T(C)$ me vetinë e mësipërme është izomorfizëm në $\mathcal{D}$. Në këtë rast funktorët T dhe S quhen *natyralisht ekuivalentë ose natyralisht izomorfë*.

Shembull 1.3.7 Le të jenë dhënë $\mathcal{I}: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ funktori identik dhe $\mathcal{A}: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Grp}$ funktori faktor-komutator. Pasqyrimi h që çdo grupi G i lidh homomorfizmin $h(G): G \rightarrow G/[G, G]$ të tillë që $h(G)(g) = g[G, G]$ vërtetohet lehtë që është një transformim natyral $h: \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{A}$.

Përkufizim 1.3.8 Në qoftë se $\mathcal{A}$ dhe $\mathcal{B}$ janë kategori, do të shënojmë me $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ kategorinë që ka për objekte funktorët kovariantë të $\mathcal{A}$ në $\mathcal{B}$ dhe në qoftë se S, T janë dy funktorë të tillë, atëherë $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(S, T) = \{\tau \mid \tau \text{ është transformim natyral i } S \text{ në } T\}$. Kompozimi $\tau' \circ \tau$ i dy transformimeve natyrale τ dhe τ' është përcaktuar me anën e barazimit $(\tau' \circ \tau)(a) = \tau'(a) \circ \tau(a)$ për çdo $a \in \mathcal{A}$.

Për dy kategori të dhëna A dhe X , bashkëngjitje nga X në A është një treshe $\langle F, G, \varphi \rangle: X \rightarrow A$ ku F dhe G janë funktorë

$$X \xrightleftharpoons[G]{F} A$$

dhe φ është një funksion i cili i cakton çdo çifti objektsh $x \in X$ dhe $a \in A$ një bijeksion bashkësisht

$$\varphi: A(Fx, a) \cong X(x, Ga)$$

i cili është natyral në x dhe a . Këtu natyraliteti ka kuptimin që në qoftë se $k: a \rightarrow a'$ dhe $h: x \rightarrow x'$ janë shigjeta në A dhe X , atëherë diagramët e mëposhtëm janë ndërrimtarë

$$\begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \\ k_* \downarrow & & \downarrow (Gk)_* \\ A(Fx, a') & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga') \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A(Fx, a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x, Ga) \\ (Fh)_* \downarrow & & \downarrow (h)_* \\ A(Fx', a) & \xrightarrow{\varphi} & X(x', Ga') \end{array}$$

Çdo bashkëngjitje çon në lindjen e një transformimi natyral $\eta: I_X \rightarrow GF$ i quajtur njëshi i bashkëngjitjes i tillë që për çdo $x \in X$, η_x është universal nga x në G . Gjithashtu ajo çon në lindjen e një tjetër transformimi natyral $\varepsilon: FG \rightarrow I_A$ i quajtur ko-njëshi i bashkëngjitjes i tillë që për çdo $a \in A$, ε_a është universal nga a në F .

Një monad $T = \langle T, \eta, \mu \rangle$ në një kategori X përbëhet nga një funktor $T: X \rightarrow X$ dhe dy transformime natyrale

$$\eta: I_X \rightarrow T \text{ dhe } \mu: T^2 \rightarrow T$$

të cilat bëjnë diagramet e mëposhtme ndërrimtarë

$$\begin{array}{ccc} T^3 & \xrightarrow{T\mu} & T^2 \\ \mu T \downarrow & & \downarrow \mu \\ T^2 & \xrightarrow{\mu} & T \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} IT & \xrightarrow{\eta I} & T^2 & \xrightarrow{T\eta} & TI \\ \downarrow = & & \downarrow \mu & & \downarrow = \\ T & \xrightarrow{=} & T & \xrightarrow{=} & T \end{array}$$

Çdo bashkëngjitje $\langle F, G, \varphi \rangle: X \rightarrow A$ çon në lindjen e një monadi X . Kjo bëhet duke marrë si $T: X \rightarrow X$ funktorin kompozim GF , njëshi η i bashkëngjitjes është transformimi natyral $\eta: I_X \rightarrow T$ dhe ko-njëshi $\varepsilon: FG \rightarrow I_A$ çon në lindjen e një transformimi natyral $\mu = G\varepsilon F: T^2 = GFGF \rightarrow GF = T$.

Në qoftë se $T = \langle T, \eta, \mu \rangle$ është monad në X , një T -algjebër $\langle x, h \rangle$ është një çift i përbërë nga një objekt $x \in X$ (objekti përkatës i algjebërës) dhe një shigjetë $h: Tx \rightarrow x$ e X (pasqyrimi strukturor i algjebërës) i cili i bën të dy diagramët

$$\begin{array}{ccc}
T^2x & \xrightarrow{Th} & Tx \\
\mu_x \downarrow & & \downarrow h \\
Tx & \xrightarrow{h} & x
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
x & \xrightarrow{\eta_x} & Tx \\
& \searrow I & \downarrow h \\
& & x
\end{array}$$

ndërrimtarë. Diagrami i parë është ligji i shoqërimtarisë dhe i dyti është ligji i njëshit. Një morfizm $f : \langle x, h \rangle \rightarrow \langle x', h' \rangle$ i T -algjebrave është një shigjetë $f : x \rightarrow x'$ e X e cila bën ndërrimtar diagramin e mëposhtëm.

$$\begin{array}{ccc}
Tx & \xrightarrow{h} & x \\
Tf \downarrow & & \downarrow f \\
Tx' & \xrightarrow{h'} & x'
\end{array}$$

Një rezultat thelbësor pohon se çdo monad përcaktohet nga T -algjebra e tij. Në fakt, në qoftë se $\langle T, \eta, \mu \rangle$ është monad në X , atëherë bashkësia e të gjithë T -algjebrave dhe morfizmave të tyre formojnë një kategori X^T . Ka një bashkëngjitje

$$\langle F^T, G^T, \eta^T, \mu^T \rangle : X \rightarrow X^T$$

në të cilën funktorët G^T dhe F^T jepen të përcaktuara si më poshtë

$$\begin{array}{ccc}
G^T : \langle x, h \rangle & \longrightarrow & x \\
\downarrow f & & \downarrow f \\
\langle x', h' \rangle & \longrightarrow & x'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
F^T : x & \longrightarrow & \langle Tx, \mu_x \rangle \\
\downarrow f & & \downarrow Tf \\
x' & \longrightarrow & \langle Tx', \mu_{x'} \rangle
\end{array}$$

Shembull 1.3.9 Shembulli që do të paraqisim është marrë nga teza e doktoratës së E. Manes [41].

Le të jetë $\mathcal{P}$ funktori kovariant i bashkësisë fuqi mbi **Set** i cili i cakton çdo bashkësie X bashkësinë fuqi $\mathcal{P}X$ dhe çdo pasqyrimi bashkësish $f : X \rightarrow Y$ pasqyrimin $\mathcal{P}f : \mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}Y$ të tillë që $(\mathcal{P}f)S$ është imazhi i drejtë i S sipas f . Për çdo bashkësi X , le të jetë $\eta_X : X \rightarrow \mathcal{P}X$ pasqyrimi i cili çon çdo $x \in X$ te bashkësia me një element $\{x\}$, ndërsa $\mu_X : \mathcal{P}\mathcal{P}X \rightarrow \mathcal{P}X$ çon çdo bashkësi bashkësish te bashkimi i tij. Është provuar në [41] që $\langle \mathcal{P}, \eta, \mu \rangle$ është monad $\mathcal{P}$ mbi **Set**. Gjithashtu është vërtetuar që çdo $\mathcal{P}$ -algjebër $\langle x, h \rangle$ është një *po*-bashkësi $\vee$ -e plotë ku $x \leq y$ është përcaktuar nga $h\{x, y\} = y$, dhe $\vee S = hS$ për çdo $S \subseteq X$. Është provuar se çdo *po*-bashkësi $\vee$ -e plotë është një $\mathcal{P}$ -algjebër në këtë mënyrë. Pra si përfundim, kategoria e $\mathcal{P}$ -algjebrave është kategoria e të gjithë *po*-bashkësive $\vee$ -të plota me morfizma renditjen dhe funksionet $\vee$ -ruajtës.

Duke u kthyer pas te bashkëngjitjet dhe monadët që ato përcaktojnë, kujtojmë që me dhënien e një bashkëngjitjeje $\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightarrow A$, ne mund të ndërtojmë një monad $T = \langle GF, \eta, G\varepsilon F \rangle$ mbi X dhe pastaj kategorinë X^T të T -algjebrave të tij. Është provuar se ekziston një funktor i vetëm $\mathcal{C} : A \rightarrow X^T$ i tillë që $G^T \mathcal{C} = G$ dhe $\mathcal{C} F = F^T$. Ky është quajtur funktori i krahasimit. Teorema e mëposhtme, e njohur si teorema Beck-ut që karakterizon algjebtrat jep kondita ekuivalente nën të cilat funktori $\mathcal{C}$ është izomorfizëm.

Teoremë 1.3.10 *Le të jetë*

$$\langle F, G, \eta, \varepsilon \rangle : X \rightarrow A$$

një bashkëngjitje, $\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadi i cili ajo përcakton në X , X^T kategoria e T -algjebrave për këtë monad, dhe

$$\langle F^T, G^T, \eta^T, \varepsilon^T \rangle : X \rightarrow X^T$$

bashkëngjitja korresponduese . Atëherë kushtet e mëposhtme janë ekuivalente.

- (i) *Funktori i krahasimit $\mathcal{C} : A \rightarrow X^T$ është izomorfizëm;*
- (ii) *Funktori $G : A \rightarrow X$ krijon bashkëbarazues për ato çifte paralele f, g në A për të cilët Gf, Gg ka një bashkëbarazues absolut në X ;*
- (iii) *Funktori $G : A \rightarrow X$ krijon bashkëbarazues për ato çifte paralele f, g në A për të cilët Gf, Gg ka një bashkëbarazues të ndashëm në X .*

Së fundmi do të japim nocionet që lidhen me bashkëbarazuesat që përdoren në teoremën e Beck-ut. Me pirun në një kategori A do të kuptojmë një diagram

$$a \xrightleftharpoons[\partial_1]{\partial_0} b \xrightarrow{e} c \quad (1.1)$$

në A ku $e\partial_0 = e\partial_1$. Do të themi se e është bashkëbarazues i një çifti shigjetash paralele ∂_0 dhe ∂_1 në qoftë se ai është pirun dhe në qoftë se për çdo $f : d \rightarrow d$, ka një shigjetë të vetme $f' : c \rightarrow d$ e tillë që $f = f'e$. Një pirun shpërndarës është një pirun si në (1.1) me dy shigjeta shtesë

$$a \xleftarrow{t} b \xleftarrow{s} c$$

të cilat kënaqin vetitë

$$e\partial_0 = e\partial_1, es = 1, \partial_0 t = 1, \partial_1 t = se.$$

Do të themi se një funktor $G : A \rightarrow X$ krijon bashkëbarazues për një çift paralel

$$f, g : a \rightrightarrows b$$

në A kur për secilin bashkëbarazues $u : Gb \rightarrow z$ të Gf, Gg në X gjendet një objekt i vetëm c dhe një shigjetë e vetme $e : b \rightarrow c$ me kushin që $Gc = z$ dhe $Ge = u$ dhe për më tepër kjo shigjetë e vetme është bashkëbarazues i f dhe g .

1.4 Kombinatorikë mbi fjalët

Lë të jetë A një bashkësi jo boshe dhe A^+ bashkësia e të gjithë vargjeve të fundme me elemente nga A . Këto vargje shpesh quhen fjalë dhe shkruhen në formën $a_1 \cdots a_n$, dhe a_i -të që e përbëjnë quhen shkronja të fjalës. Gjatësi $|u|$ e fjalës u quhet numri i shkronjave përbërëse të saj. Për çdo $n \geq 1$ shënohet me A^n bashkësia e të gjitha fjalëve me gjatësi n . Në bashkësinë A^+ futet veprimi i bashkëngjities së fjalëve

$$(a_1 \cdots a_n)(b_1 \cdots b_m) = a_1 \cdots a_n b_1 \cdots b_m.$$

Me këtë veprim A^+ kthehet në një gjysmëgrup i cili quhet gjysmëgrupi i lirë me bazë A . Një gjysmëgrup $(S, \cdot)$ do të quhet me përfitim të fundëm në qoftë se është shëmbëllim epimorfik i një gjysmëgrupi të lirë A^+ ku A është bashkësi e fundme. Krahës A^+ kemi edhe A^* që është monoidi i lirë me bazë A . Ky ka një fjalë më tepër sesa A^+ që është fjala boshe λ . Produkti i λ -ës me çdo fjalë tjetër jep këtë të fundit. Një fjalë $u \in A^*$ do të quhet faktor i një fjale v në qoftë se $v = puq$ ku $p, q \in A^*$. Në qoftë se të paktën një nga p, q është joboshe, atëherë u quhet faktor i përpiktë i v . Fjalë e pafundme e dyanshme mbi një alfabet A do të quhet çdo pasqyrim

$$\omega : \mathbb{Z} \rightarrow A.$$

Për çdo $n \in \mathbb{Z}$, shënojmë me $\omega_n = \omega(n)$ dhe tani fjalën ω mund ta shkruajmë në formën

$$\omega = \cdots \omega_{-3} \omega_{-2} \omega_{-1} \omega_0 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \cdots$$

Bashkësinë e të gjitha fjalëve të tilla e shënojmë me $A^{\pm\omega}$. Një fjalë $u \in A^*$ do të quhet faktor i $\omega \in A^{\pm\omega}$ në qoftë se ekzistojnë $i, j \in \mathbb{Z}$ të tilla që $i \leq j$ dhe që $u = \omega_i \cdots \omega_j$. Do të themi se vargu $\omega[i, j] = \omega_i \cdots \omega_j$ është një shfaqje e u -së në ω . Fjalët e pafundme djathtas do të jepen si pasqyrime

$$\omega : \mathbb{N}_+ \rightarrow A.$$

Bashkësia e fjalëve të pafundme djathtas shënohet me A^ω . Kuptimi i faktorëve për to jepet ngjashmërisht me më sipër.

Një faktor u i një fjale të pafundme t do të thuhet se shfaqet në mënyrë uniforme ose me boshllëqe të kufizuara, në qoftë se ekziston një $k \in \mathbb{N}$ e tillë që në çdo faktor të t -së me gjatësi k ekziston të paktën një shfaqje e u -së. Për një fjalë të pafundme t , ne përcaktojmë në bashkësinë $F(t)$ të faktorëve të t -së madhësinë

$$k(t, u) = \sup\{|\omega| \mid \omega \in F(t) \text{ dhe } u \notin \omega\}.$$

Kuptohet se u shfaqet në mënyrë uniforme në t , atëherë dhe vetëm atëherë kur $k(t, u) < \infty$.

Do të themi se një fjalë e pafundme t është uniformisht rekurente në qoftë se të gjithë faktorët e saj shfaqen uniformisht në të. Për fjalët uniformisht rekurente ka vend rezultati i mëposhtëm.

Rrjedhim 1.4.1. (Rrjedhimi 2.3.2 [8]) *Le të jete J një ideal i A^* . Në qoftë se për çdo fjalë uniformisht rekurente $\omega \in A^\omega$ kemi që $F(\omega) \cap J \neq \emptyset$, atëherë ekziston $n > 0$ e tillë që $A^n A^* \subseteq J$.*

Një gjysmëgrup $(S, \cdot)$ do të quhet lokalisht i fundëm në qoftë se çdo nëngjysmëgrup i S me përfitim të fundëm është i fundëm. Le të jenë S një gjysmëgrup dhe S' nëngjysmëgrup i S . Do të themi se nëngrupet e S janë lokalisht të fundëm në S' në qoftë se për çdo nëngrup G të S është e vërtetë që çdo nëngrup i tij i përfutur nga një bashkësi e fundme e S' do të jetë i fundëm.

Në një gjysmëgrup çfardo $(S, \cdot)$ mund të përkufizohet një renditje e pjesshme

$$s \leq_B t \text{ vetëm në qoftë se } B(s) \subseteq B(t),$$

ku $B(s) = sSs \cup \{s\}$ është bi-ideali i S i përfutur nga s . Do të themi se një gjysmëgrup S plotëson konditën $\min_B$ në qoftë se çdo zinxhir zbritës $\dots \leq_B s_n \leq_B \dots \leq_B s_2 \leq_B s_1$ përfundon.

Teoremë 1.4.2. (Teorema 3.6.4 [8]) *Le të jetë T një gjysmëgrup që kënaq $\min_B$ dhe T' një nëngjysmëgrup i T i tillë që të gjithë nëngrupet e T janë lokalisht të fundëm në T' . Atëherë, T është lokalisht i fundëm.*

1.5 Disa rezultate utilitare

Në këtë paragraf do të listojmë disa rezultate të cilat do të përdoren gjatë kësaj teze doktorate. Po e fillojmë me dhënien e dy karakterizimeve për rregullsinë dhe intrarregullsinë e një le -gjysmëgrupi të marra së bashku.

Teoremë 1.5.1 (Teorema [26]) *Një le -gjysmëgrup S është i rregullt vetëm kur bashkësia $\mathcal{Q}$ e të gjithë elementëve kuazi-idealë lidhur me veprimin $\cdot$ të S -së formon një gjysmëgrup të rregullt sipas von-Nojmanit.*

Rrjedhim 1.5.2 (Rrjedhimi [26]) Një $\mathcal{L}$ -gjysmëgrup S është i rregullt dhe intra i rregullt vetëm kur bashkësia $\mathcal{Q}$ e të gjithë elementëve kuazi-idealë lidhur me veprimin $\cdot$ të S -së formon një bandë.

Në qoftë se S është një $\mathcal{L}$ -gjysmëgrup dhe H është një $\mathcal{H}$ -klasë e tij, Petro dhe Pasku në [42] treguan se H përmban një element kuazi-ideal q i cili është elementi më i madh i klasës që quhet elementi kuazi-ideal përfaqësues i H -së dhe shënohet me q_H . Kur H plotëson konditën e Grinit ($H^2 \cap H \neq \emptyset$), siç vihet re nga teorema që pason, ky element përcakton rregullsinë dhe intra rregullsinë e H -së.

Teoremë 1.5.3 (Teorema 2.1 [42]) Le të jetë H një $\mathcal{H}$ -klasë e një $\mathcal{L}$ -gjysmëgrupi S e cila kënaq konditën e Grinit dhe le të jetë $q = q_H$. Atëherë:

- (1) $q^2 \in H$ dhe $q = qe \wedge eq$;
- (2) q është i vetmi element kuazi-ideal i H ;
- (3) në qoftë se $x, y \in H$, atëherë $y \leq xe$ dhe $y \leq ex$;
- (4) $q^2 = qeq = q^n$ për çdo $n \geq 2$, në veçanti q^2 është idempotent;
- (5) çdo element i H -së është intra i rregullt;
- (6) q është idempotent vetëm kur q është i rregullt rast në të cilin çdo element i H -së është i rregullt.

Teoremë 1.5.4 (Teorema 3.1 [42]) Le të jetë H një $\mathcal{H}$ -klasë e një $\mathcal{L}$ -gjysmëgrupi S . Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.

- (1) H formon nëngjysmëgrup të S -së;
- (2) $x^2 \in H$ për çdo $x \in H$;
- (3) H kënaq konditën e Grinit dhe $qx = q^2 = xq$ për çdo $x \in H$ ku $q = q_H$.

Lidhur me relacionin $\mathcal{B}$ në $\mathcal{L}$ -gjysmëgrupe Pasku dhe Petro treguan në [45] se çdo $\mathcal{B}$ -klasë B përmban një element bi-ideal të vetëm $b = b_B$ që quhet elementi bi-ideal përfaqësues i B -së. Ky element përcakton rregullsinë dhe intra rregullsinë e $\mathcal{B}$ -klasës siç tregohet më poshtë.

Pohim 1.5.5 (Pohimi 2.1 [45]) Një $\mathcal{B}$ -klasë B është e rregullt vetëm kur b_B është element i rregullt.

Pohim 1.5.6 (Pohimi 2.2 [45]) Një $\mathcal{B}$ -klasë B është e intra e rregullt vetëm kur b_B është element intra i rregullt.

Kur B plotëson konditën e Grinit ($B^2 \cap B \neq \emptyset$), atëherë cilësitë e B -së përmirësohen.

Teoremë 1.5.7 (Teorema 2.1 [45]) Në qoftë se një $\mathcal{B}$ -klasë B kënaq konditën e Grinit, atëherë:

- (1) B është e rregullt;
- (2) Elementi bi-ideal përfaqësues b_B është idempotent dhe $b_B = b_B e b_B$;
- (3) B është intra e rregullt.

Teoremë 1.5.8 (Teorema 3.1 [45]) *Le të jetë B një $\mathcal{B}$ -klasë e S . Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

- (1) B është nëngjysmëgrup i S ;
- (2) $x^2 \in B$ për çdo $x \in B$;
- (3) b_B është zero e B .

Kehayopulu, Pasku dhe Tsingelis në [32] treguan se çdo po -gjysmëgrup mund të zhytet izomorfikisht në një le -gjysmëgrup. Më tej po japim disa detaje të zhytjes së paraqitur në [32].

Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po -gjysmëgrup, atëherë ne mund ta zgjerojmë S në mënyrë të tillë që të ketë një element më të vogël i cili është njëkohësisht edhe zero shumëzimi. Kjo realizohet duke i shtuar S një element 0 dhe duke përcaktuar në $S^0 = S \cup \{0\}$ shumëzimin e ri $*$ dhe renditjen e re të tilla që

$$a * b = \begin{cases} ab & \text{nqs } a, b \in S \\ 0 & \text{nqs } a = 0 \text{ ose } b = 0 \end{cases} \text{ dhe } \leq_0 := \leq \cup \{(0, x) \mid x \in S^0\}.$$

Në qoftë se tani $\emptyset \neq A \subseteq S^0$, shënojmë

$$(A]_0 := \{x \in S^0 \mid x \leq_0 y \text{ për ndonjë } y \in A\}.$$

Është e qartë që $(A]_0 = (A] \cup \{0\}$ ku $(A] = \{x \in S \mid x \leq y \text{ për ndonjë } y \in A\}$. Më tej le të jetë

$$\Sigma = \{(A]_0 \mid \emptyset \neq A \subseteq S^0\}.$$

Në Σ përcaktojmë shumëzimin $\circ$ dhe renditjen e pjesshme $\leq$ të tilla që

$$(A]_0 \circ (B]_0 := (A * B]_0 \text{ dhe } (A]_0 \leq (B]_0 \text{ vetëm në qoftë se } (A]_0 \subseteq (B]_0.$$

Është provuar tek [32] që $(\Sigma, \circ, \leq)$ formon një le -gjysmëgrup me element më të madh S ku inferiori dhe superior i jepen me anën e barazimeve

$$(A]_0 \wedge (B]_0 = (A \cap B]_0, (A]_0 \vee (B]_0 = (A \cup B]_0.$$

Gjithashtu është provuar se $(S, \cdot, \leq)$ zhytet në $(\Sigma, \circ, \leq)$ me anën e pasqyrimin $a \mapsto (a]$. Një drejtim i rëndësishëm në teorinë e po -gjysmëgrupeve është edhe ai i zbërthimit të po -gjysmëgrupeve si semilatise po -gjysmëgrupesh më të thjeshtë për tu studiuar. Më poshtë po përmendim dy prej tyre, i pari prej të cilëve karakterizon po -

gjysmëgrupet intra të rregullt ndërsa i dyti *po*-gjysmëgrupet që kënaqin një konditë interesante komutativiteti për idealet e majtë të renditur.

Teoremë 1.5.9 (Teorema 1 [22]) *Një gjysmëgrup i renditur S është intra i rregullt vetëm kur S është një semilatisë gjysmëgrupesh të thjeshtë. Në mënyrë të njëvlershme, kur S është bashkim nëngjysmëgrupesh të thjeshtë.*

Teoremë 1.5.10 (Teorema 6 [34]) *Le të jetë $(S, \cdot, \leq)$ një *po*-gjysmëgrup. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

- (1) *S është semilatisë *po*-gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas.*
- (2) *Në qoftë se L_1, L_2 dhe L janë ideale të majtë të S , atëherë $(L_1 L_2] = (L_2 L_1]$ dhe $(L^2] = (L]$.*
- (3) *Në qoftë se L_1, L_2 janë ideale të majtë të S , atëherë $L_1 \cap L_2 = (L_1 L_2]$.*
- (4) *$(aS] \subseteq (Sa] = L(a) = L(a^2)$ për çdo $a \in S$.*
- (5) *S është i rregullt majtas dhe çdo ideal i majtë është ideal i dyanshëm.*
- (6) *$\mathcal{N} = \mathcal{I} = \mathcal{L}$.*
- (7) *$\mathcal{L}$ është një kongruencë semilatisë e plotë në S .*
- (8) *S është një semilatisë e plotë gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas.*

Tek [36] Kehayopulu ka dhënë disa karakterizime të intra-rregullsisë në *po*-gjysmëgrupet që kanë element më të madh me anën e elementëve prim dhe gjysmë të thjeshtë. Po renditim më poshtë këto rezultate.

Pohim 1.5.11 (Pohimi 9 [36]) *Le të jetë S një *le*-gjysmëgrup. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

- (1) *Elementët idealë të S janë idempotentë.*
- (2) *Në qoftë se a, b janë elementë idealë atëherë $a \wedge b = ab$.*
- (3) *$r(l(a)) \wedge r(l(b)) = r(l(a))r(l(b))$ për çdo $a, b \in S$.*
- (4) *$r(l(a)) = (r(l(a)))^2$ për çdo $a \in S$.*
- (5) *S është gjysmë i thjeshtë.*

Pohim 1.5.12 (Pohimi 10 [36]) *Le të jetë S një *poe*-gjysmëgrup. Në qoftë se idealet e S janë dobësisht prim, atëherë ata janë idempotentë dhe formojnë një zinxhir.*

Teoremë 1.5.13 (Teorema 12 [36]) *Le të jetë S një *le*-gjysmëgrup. Elementët idealë të S janë dobësisht prim vetëm kur ata formojnë një zinxhir dhe plotësohet një nga konditat ekuivalente të Pohimit 1.4.11.*

Pohim 1.5.14 (Pohim 13 [36]) *Një *poe*-gjysmëgrup S është intra i rregullt vetëm atëherë kur elementët idealë të S janë gjysmë të thjeshtë.*

Pohim 1.5.15 (Pohimi 14 [36]) *Le të jetë S një poe-gjysmëgrup. Në qoftë se elementët idealë të S janë prim, atëherë ata formojnë një zinxhir dhe S është intra i rregullt.*

Pohim 1.5.16 (Pohimi 15 [36]) *Le të jetë S një le-gjysmëgrup intra i rregullt. Në qoftë se elementët idealë të S formojnë një zinxhir, atëherë ata janë prim.*

Teoremë 1.5.17 (Teorema 16 [36]) *Le të jetë S një le-gjysmëgrup. Elementët idealë të S janë prim atëherë dhe vetëm atëherë kur ata formojnë një zinxhir dhe S është intra i rregullt.*

Teoremë 1.5.18 ([6]) *Në qoftë se S është një gjysmëgrup me përfitim të fundëm që kënaq $\min_B$ dhe i tillë që të gjithë nëngrupet i ka të fundëm, atëherë S është i fundëm.*

Pohim 1.5.19. ([43]) *Le të jetë S një gjysmëgrup me përfitim të fundëm i cili kënaq $\min_B$. Çdo kongruencë $\mathcal{K}$ në S që përmban $\mathcal{B}$ është me indeks të fundëm në S .*

Teoremë 1.5.20. ([7]) *Një gjysmëgrup me përfitim të fundëm S është i fundëm vetëm në qoftë se kënaq konditën e minimalitetit për idealet kryesore të majtë (përk. të djathtë) dhe të gjithë nëngrupet e tij me përfitim të fundëm janë të fundëm.*

KAPITULLI 2

Teorema të tipit të Grinit në le -gjysmëgrupe

Studimi i relacioneve të Grinit në teorinë e gjysmëgrupeve ka pasur shumë ndikim që kur ato u përkufizuan në mes të viteve 50'. Relacionet e Grinit bëhen të dobishme kur duam të shohim se sa larg është një gjysmëgrup i dhënë nga struktura më të thjeshta të tilla si gjysmëgrupet e thjeshta ose plotësisht të thjeshta, semilatisat e grupeve, gjysmëgrupeve të rregullta ose inverse dhe kështu me rradhë. Një nga rezultatet më të spikatur që lidhet me këto relacione është Teorema e Grinit e cila pohon se çdo $\mathcal{H}$ -klasë H e një gjysmëgrupi S që kënaq kushtin $H \cap H^2 \neq \emptyset$ (zakonisht kjo quhet kondita e Grinit) formon një nëngrup të S . Është e qartë se gjysmëgrupet që plotësojnë konditën e Grinit për çdo $\mathcal{H}$ -klasë janë lokalisht të ngjashme me grupet. Ata në fakt njihen si gjysmëgrupe plotësisht të rregullt dhe luajnë një rol thelbësor në teorinë e gjysmëgrupeve.

Në kontrast me relacionin $\mathcal{H}$ të Grinit në gjysmëgrupet e zakonshëm, relacioni i Grin-Kehayopulu në le -gjysmëgrupe dështon të ketë vetinë e përshkruar tek teorema e Grinit.

Në fakt $\mathcal{H}$ -klasat që kënaqin konditën e Grinit nuk është e thënë të jenë nëngjysmëgrupe. Shembulli i mëposhtëm që iu propozua autorëve të [42] nga M.V.Volkov tregon ekzistencën e një $\mathcal{H}$ -klase në le -gjysmëgrupin të të gjithë pasqyrimeve që ruajnë renditjen të një zinxhiri të fundëm i cili kënaq konditën e Grinit por që dështon të jetë një nëngjysmëgrup.

Shembull 2.0.1 Konsiderojmë le -gjysmëgrupin S e të gjithë transformimeve që ruajnë renditjen të një zinxhiri të fundëm $\{1 < 2 < \dots < n\}$. Është e thjeshtë të përshkruajmë relacionin e Grinit të $\mathcal{H}$ mbi S :

$$(a, b) \in \mathcal{H} \text{ vetëm në qoftë se } n.a = n.b$$

Atëherë për $n = 3$ transformimet

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

dhe

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

janë $\mathcal{H}$ -ekuivalente. $\mathcal{H}$ -klasa e tyre H plotëson konditën e Grinit meqënëse a është idempotent, por $b^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \notin H$, prej nga H dështon të jetë një nëngjysmëgrup.

Në këto rrethana vlerësohet të gjenden kondita të moderuara nën të cilin $\mathcal{H}$ -klasat ose më në përgjithësi $\mathcal{L}$ -klasat (përk. $\mathcal{R}$ -klasat) formojnë nëngjysmëgrupe.

Arsyeja përse kërkojmë kondita të tilla lidhet me një projekt tonin ende në progres që synon përgjithësimin e rezultatit të mëposhtëm në rastin e le -gjysmëgrupeve. Rezultati në fjalë është Teorema 3.6.4 e de Luca dhe Varricchio tek [8] e cila formulohet si vijon: Nëse $(T, \cdot)$ është një gjysmëgrup i zakonshëm i cili kënaq konditën e minimalitetit për bi-idealet kryesore dhe i tillë që çdo nëngrup i tij është lokalisht i fundëm, atëherë T është lokalisht i fundëm. Një rezultat i ngjashëm me këtë është provuar nga Coudrain dhe Schutzenberger tek [6] ku të qëniti lokalisht i fundëm është zëvendësuar me të fundëm. Tek analogu i mundshëm i rezultatit të sipër cituar termi nëngrup do të zëvendësohej me termin nëngjysmëgrup pasi analogu i vërtetimit të teoremës në fjalë për le -gjysmëgrupet në një fazë të caktuar të tij do të kishte të bënte me një $\mathcal{H}$ -klasë të Grin-Kehayopulu që plotëson konditën e Grinit.

Mirëpo, siç u pa më sipër në përgjithësi $\mathcal{H}$ -klasa në këto kushte nuk formon nëngjysmëgrup, ndërsa vërtetimi i analoges së Teoremës 3.6.4 për le -gjysmëgrupet kërkon që kjo të ndodhë gjithmonë. Për këtë arsye ne duhet të supozojmë ndonjë konditë shtesë nën të cilën $\mathcal{H}$ -klasat që plotësojnë konditën e Grinit formojnë patjetër gjysmëgrupe. Meqë rezultate analoge me atë të de Luca dhe Varricchio kanë vend edhe për idealet e njëanshëm (shih [7]), e për pasojë është me vend të kërkojmë ti përgjithësojmë ato për elementët idealë të njëanshem tek le -gjysmëgrupet, atëherë është me interes që të gjenden kondita nën të cilat një $\mathcal{L}$ apo $\mathcal{R}$ -klasë e Grin-Kehayopulu që plotëson konditën e Grinit të formojë nëngjysmëgrup.

Në këtë kapitull ne propozojmë kushtin: *çdo dy elementë idealesh të majtë ndërrojnë me njëri-tjetrin*. Ky kusht nuk është artificial. Në [34] Kehayopulu dhe Tsingelis konsideruan gjysmëgrupe të renditur që kanë vetinë që çdo dy ideale të majtë L_1 dhe L_2 plotësojnë $(L_1 L_2) = L_1 \cap L_2$, e cila në mënyrë të qartë implikon analogen e konditës tonë, dhe i karakterizuan ata si gjysmëgrupe të renditur që zbërthehen në një semilatisë gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas, duke përgjithësuar kështu një rezultat të Saitô për gjysmëgrupet pa renditje në [48]. Gjithashtu në [11] Kehayopulu ka treguar se në le -gjysmëgrupet kondita që ne propozuam së bashku me rregullsinë e majtë është ekuivalent me $l \triangleright r$ e cila nga ana e saj nënkupton rregullsinë e majtë dhe që elementët ideal të majtë janë në të njëjtën kohë elementë ideal të djathtë.

Ne provojmë në teoremën tonë 2.3.7 se çdo $\mathcal{L}$ -klasë që plotëson konditën e Grinit formon një nëngjysmëgrup me kushtin që çdo dy ideale të majta ndërrohen.

Përsa i përket teoremës analoge të Grinit për $\mathcal{H}$ -klasat në le -gjysmëgrupet ne propozojmë një konditë tjetër: *çdo dy elementë kuazi idealë ndërrojnë me njëri-tjetrin*. Gjithashtu ky kusht nuk është i pazakonshëm. Në mënyrë të qartë ai përgjithëson

konditën tonë të mëparshme që elementët idealë të majtë janë elementë kuazi-idealë. Gjithashtu dihet që në gjysmëgrupet e zakonshme vetia $Q_1Q_2 = Q_1 \cap Q_2$ për çdo kuazi-ideal Q_1, Q_2 karakterizon gjysmëgrupet Klifordit.

2.1 $\mathcal{L}$ -klasat që janë nëngjysmëgrupe

Do të japim më poshtë disa nocione bazë që do të përdoren përgjatë paragrafit tjetër.

Shënojmë me S një le -gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$. Përcaktojmë pasqyrimin

$$\ell : S \rightarrow S \text{ duke pozuar } \ell(x) = ex \vee x,$$

dhe tregojmë që $\ell(x)$ është elementi ideal i majtë më i vogël i cili është më i madh se x . Që $\ell(x)$ është një element ideal rrjedh nga fakti se

$$e \cdot (ex \vee x) = e^2x \vee ex = ex \leq \ell(x).$$

Gjithashtu përkufizimi i $\ell(x)$ tregon që $\ell(x) \geq x$. Mbetet për të treguar se nëse λ është një element ideal i majtë i S i tillë që $x \leq \lambda$, atëherë $\ell(x) \leq \lambda$. Vërtet,

$$\begin{aligned} \ell(x) &= ex \vee x \\ &\leq e\lambda \vee \lambda \quad \text{meqënëse } x \leq \lambda \\ &\leq \lambda \quad \text{meqënëse } \lambda \text{ është një element ideal i majtë.} \end{aligned}$$

Tani ne jemi gati që të përcaktojmë relacionin e $\mathcal{L}$ në S . Do të themi se dy elementet $x, y \in S$ janë në relacion $\mathcal{L}$ me njëri-tjetrin, e shkruajmë si $(x, y) \in \mathcal{L}$ vetëm dhe vetëm nëse $\ell(x) = \ell(y)$. Me fjalë të tjera

$$\mathcal{L} = \{(x, y) \in S \times S \mid \ell(x) = \ell(y)\}.$$

Është e qartë se $\mathcal{L}$ është një relacion ekuivalence, kështu që ne mund të flasim për $\mathcal{L}$ -klasat e saj. Një veti kyçe e $\mathcal{L}$ -klasave është përshkruar në vijim.

Lemë 2.1.1. Çdo $\mathcal{L}$ -klasë L e S ka një element ideal të vetëm $\ell(a)$ ku a është një element çfardo i L .

Vërtetim. Së pari, për çdo $a \in L$ tregojmë që $\ell(a) \in L$. Vërtet, meqënëse $\ell(a)$ është një element ideal i majtë, $\ell(\ell(a)) = \ell(a)$ dhe pastaj përkufizimi i $\mathcal{L}$ tregon që $(a, \ell(a)) \in \mathcal{L}$ ose në mënyrë ekuivalente, $\ell(a) \in L_a$. Së fundmi, nëse $\lambda \in L$ është një element ideal i majtë, atëherë nga njëra anë $\ell(\lambda) = \lambda$ dhe nga ana tjetër $\ell(\lambda) = \ell(a)$ meqënëse $a \in L$, dhe kështu marrim që $\lambda = \ell(a)$. ■

Elementi $\ell(a)$ i lemës së mësipërme quhet *elementi ideal i majtë përfaqësues* i L .

Një $\mathcal{L}$ -klasë L thuhet se kënaq konditën e Grinit nëse ekzistojnë $b, c \in L$ të tilla që $bc \in L$.

Elementi ideal përfaqësues luan një rol kyç përse i përket konditës së Grinit si tregohet më poshtë.

Teoremë 2.1.2 *Një $\mathcal{L}$ -klasë L kënaq konditën e Grinit vetëm nëse elementi ideal përfaqësues λ është element idempotent.*

Vërtetim. Kondita e nevojshme është e qartë prandaj ngelet të vërtetohet që nëse $b, c, bc \in L$, atëherë $\lambda = \lambda^2$. Meqënëse nga lema 2.1.1, $b, c \leq \lambda$, atëherë $bc \leq \lambda^2$. Duke kaluar tek elementi ideal i majtë i gjeneruar nga të dyja anët në mosbarazimin e fundit marrim që $\ell(bc) \leq \ell(\lambda^2)$. Por λ^2 është një element ideal i majtë gjithashtu dhe për këtë arsye $\ell(bc) \leq \lambda^2$. Duke kujtuar që $bc \in L_\lambda$, kemi $\lambda \leq \lambda^2$ i cili bashkë me mosbarazimin e qartë $\lambda^2 \leq \lambda$ implikon barazimin e kërkuar $\lambda = \lambda^2$. ■

Është interesante të kërkojmë se për çfarë kushtesh një $\mathcal{L}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit formon një nëngjysmëgrup të S . Përgjigjja e rastit kur një klasë kërkohet të jetë një grup është shumë e lehtë dhe provohet në pohimin 2.1.4. Më parë na duhet lema e mëposhtme.

Lemë 2.1.3 *Supozojmë se $\mathcal{L}$ -klasa L është nëngjysmëgrup i S . Nëse λ është elementi ideal i majtë përfaqësues i L atëherë për çdo element $x \in L$, $\lambda x = \lambda = ex$.*

Vërtetim. Është e qartë që λx është një element ideal i majtë i S . Meqënëse L supozohet të formojë një nëngjysmëgrup dhe $x \in L$, atëherë $\lambda x \in L$ dhe kështu nga lema 2.1.1 marrim që $\lambda x = \lambda$.

Më tej,

$$\lambda = \lambda x \leq ex \leq \lambda,$$

që provon se $\lambda x = ex$. ■

Pohimi i mëposhtëm është analog i pohimit 2.3 të [42].

Pohim 2.1.4 *Një $\mathcal{L}$ -klasë L është nëngrup i S vetëm nëse L përbëhet nga një element i vetëm idempotent.*

Vërtetim. Kondita e nevojshme është e qartë. Supozojmë tani se L është nëngrup i S dhe le të jetë λ elementi ideal i majtë përfaqësues i L , $\bar{\lambda}$ është inversi i tij dhe i element njësi. Së pari shohim që i është një element ideal i majtë. Vërtet,

$$\begin{aligned} ei &= e\lambda\bar{\lambda} \\ &= \lambda\bar{\lambda} \quad \text{nga lema 2.1.3} \\ &= i, \end{aligned}$$

duke provuar atë që donim. Por λ është i vetmi element ideal i majtë i L prandaj $\lambda = i$.

Për më tepër nëse $x \in L$, atëherë

$$\begin{aligned} i &= \lambda && \text{nga më sipër} \\ &= \lambda x && \text{nga lema 2.1.3} \\ &= ix = x && \text{meqënëse } i \text{ është njëshi} \end{aligned}$$

Që provon se $L = \{i\}$ ka vetëm një element. ■

Në vijim do të konsiderojmë *le*-gjysmëgrupet që kënaqin kushtin: *çdo dy elementë idealë të majtë ndërrohen me njëri-tjetrin*. Ne provuam në teoremën 2.1.3 që në gjysmëgrupe të tilla çdo $\mathcal{L}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup. Supozojmë se na jepet një *le*-gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ me elementin më të madh ε dhe le të jetë $\mathbb{L}$ bashkësia e elementëve ideal të majtë të S . Për çdo $e \in \mathbb{L}$ shënojmë $]e] = \{x \in S : x \leq e\}$. Është e qartë që $]e]$ është nëngjysmëgrup i S sepse nëse $x, y \in]e]$, atëherë $xy \leq ee \leq \varepsilon e \leq e$. Me relacionin e renditjes të S të ngushtuar në $]e]$, kjo e fundit formon një *le*-gjysmëgrup me element më të madh e . Shënojmë me $\mathcal{L}^{(e)}$ relacionin $\mathcal{L}$ të përcaktuar në $]e]$. Me shënimet e mësipërme ne kemi lemën në vijim.

Lemë 2.1.5 Nëse $e \in \mathbb{L}$ është idempotent, atëherë $L_e^{(e)}$ është nëngjysmëgrup.

Vërtetim. Së pari, për çdo $x \in S$, ex është një element ideal i majtë i S meqënëse $\varepsilon(ex) = (\varepsilon e)x \leq ex$.

Së dyti, është e thjeshtë të shohim që për çdo $x \in L_e^{(e)}$ kemi $e = ex$.

Më tej, nëse $x, y \in L_e^{(e)}$ atëherë mund të shkruajmë

$$\begin{aligned} e &= (ex)(ey) = e(ex)y \quad \text{idealet e majtë ndërrohen} \\ &= e(xy) \leq e^3 = e, \end{aligned}$$

nga e cila rrjedh lehtë që $xy \in L_e^{(e)}$. ■

Teoremë 2.1.6 Nëse S është një *le*-gjysmëgrup në të cilin çdo dy elementë ideal të majtë ndërrohen, atëherë çdo $\mathcal{L}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S .

Vërtetim. Supozojmë se L është një $\mathcal{L}$ -klasë në S që kënaq konditën e Grinit. Shënojmë λ elementin ideal të majtë përfaqësues të L i cili nga lema 2.1.1 ka për të qënë idempotent dhe nga lema 2.1.3 kënaq barazimin $\lambda = \varepsilon \lambda$. Pohojmë që $L = L_\lambda \subseteq L_\lambda^{(\lambda)}$. Për të parë këtë vërejmë së pari se për çdo $x \in L = L_\lambda$, $\varepsilon x = ex$.

Rrjedh që për elementin ideal të $]\lambda]$ të gjeneruar nga x kemi se,

$$\begin{aligned}
\lambda x \vee x &= (\varepsilon \lambda) x \vee x \\
&= (\lambda \varepsilon) x \vee x && \text{idealet e majtë ndërrohen} \\
&= \lambda(\varepsilon x) \vee x = \lambda \lambda \vee x && \text{nga lema 2.1.3} \\
&= \lambda && \text{meqënëse } x \leq \lambda,
\end{aligned}$$

e cila tregon se $x \in L_\lambda^{(\lambda)}$ duke provuar kështu përfshirjen $L = L_\lambda \subseteq L_\lambda^{(\lambda)}$.

Le të jetë $a, b \in L_\lambda$. Meqënëse $L_\lambda \subseteq L_\lambda^{(\lambda)}$ dhe $L_\lambda^{(\lambda)}$ është nëngjysmëgrup nga lema 2.1.5 kemi që $\lambda = \lambda ab \vee ab$. Por

$$\begin{aligned}
\lambda ab \vee ab &\leq \varepsilon ab \vee ab \\
&\leq \varepsilon \lambda^2 \vee \lambda^2 && \text{meqënëse } a, b \leq \lambda \\
&= \varepsilon \lambda \vee \lambda && \text{meqënëse } \lambda = \lambda^2 \\
&= \lambda,
\end{aligned}$$

e cila provon se $\lambda = \varepsilon ab \vee ab$ ose njësoj që $ab \in L_\lambda$ duke e përfunduar vërtetimin. ■

2.2 $\mathcal{H}$ -klasat që janë nëngjysmëgrupe

Le të konsiderojmë *le*-gjysmëgrupet të cilat plotësojnë kushtin që *çdo dy elemente kuazi-idealë ndërrohen me njëri tjetrin* dhe vërtetojmë se në të tilla *le*-gjysmëgrupe çdo $\mathcal{H}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup. Supozojmë se na është dhënë një *le*-gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ me elementin më të madh e dhe le të jetë $\mathbb{I}$ bashkësia e elementëve ideal të S . Për çdo $\varepsilon \in \mathbb{I}$ shënojmë $]\varepsilon] = \{x \in S : x \leq \varepsilon\}$. Është e qartë se $]\varepsilon]$ është nëngjysmëgrup i S sepse nëse $x, y \in]\varepsilon]$, atëherë $xy \leq \varepsilon \leq \varepsilon \leq \varepsilon$. Me relacionin e renditjes të S të ngushtuar në $]\varepsilon]$, kjo e fundit formon *le*-gjysmëgrup me element më të madh ε . Shënojmë me $\mathcal{H}^{(\varepsilon)}$ relacionin e $\mathcal{H}$ të përcaktuar në $]\varepsilon]$.

Teoremë 2.2.1 Nëse S është një *le*-gjysmëgrup në të cilin elementët kuazi-ideal ndërrohen, atëherë çdo $\mathcal{H}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S .

Vërtetim. Le të jetë H_q $\mathcal{H}$ -klasa e dhënë ku q është kuazi-ideali i tij përfaqësues. Nga [42] dimë që $q \leq eq$ dhe $q \leq qe$. Rrjedh që $q \leq eqe$, prandaj $q \in]eqe]$. Le të jetë $H_q^{(eqe)}$ një $\mathcal{H}$ -klasa e q në *le*-gjysmëgrupin $]. Pohojmë së pari se $H_q \subseteq H_q^{(eqe)}$. Vërtet, nëse $x \in H_q$, atëherë nga [42] kemi $xe = qe$ dhe $ex = eq$. Duke përdorur barazimin e parë shohim që$

$$x(eqe) \vee x = (xe)(qe) \vee x = (qe)(qe) \vee x = qe \vee x = qe = q(eqe) \vee q. \quad (2.1)$$

Në një mënyrë simetrike duke përdorur barazimin e dytë të dhënë më sipër, gjejmë që

$$(eqe)x \vee x = (eq)(ex) \vee x = (eq)(eq) \vee x = eq \vee x = eq = (eqe)q \vee q. \quad (2.2)$$

Tani, (2.1) dhe (2.2) implikojnë se $x \in H_q^{(eqe)}$ gjë që provon pohimin tonë të parë.

Së dyti pohojmë se $H_q^{(eqe)}$ formon nëngjysmëgrup të S. Vërejmë se $H_q^{(eqe)}$ kënaq konditën e Grinit sepse $H_q^{(eqe)}$ përmban H_q dhe kjo e fundit e kënaq konditën.

Le të jenë tani $x, y \in H_q^{(eqe)}$. Meqënëse

$$(eqe)x = (eqe)q = eq,$$

atëherë

$$(eqe)xy = (eq)y.$$

Më tej kemi

$$\begin{aligned} eq \geq e^2q &= eqe && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &= (eq)(eqe) \geq (eq)y = (eqe)(xy) \\ &= (ex)(eq)y && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &\geq e(ex)(eq)y \geq (ex)(eqe)y && \text{si më parë} \\ &= (ex)(eq) && \text{meqënëse } (eqe)y = (eqe)q = eq \\ &\geq e(ex)(eq) = (ex)(eqe) && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &= eqe && \text{meqënëse } x(eqe) = qe \\ &\geq eq, \end{aligned}$$

që provon se $(eqe)(xy) = eq$. Tani vërtetojmë që $(xy)(eqe) = qe$.

$$\begin{aligned} qe &\geq qe^2 = eqe && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &= (eqe)(qe) \geq x(qe) \\ &= x(y(eqe)) = x(qe)(ye) && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &\geq x(qe)(ye)e = x(eqe)(ye) && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &= x(eqe)e = exeqe && \text{kuazi-idealet ndërrohen} \\ &= eqe \geq qe, \end{aligned}$$

që tregon se $(xy)(eqe) = qe$. Kjo bashkë me barazimin e paraardhës sjell që $xy \in H_q^{(eqe)}$ gjë që provon pohimin e dytë.

Së fundmi vërtetojmë që H_q është nëngjysmëgrup. Le të jenë $x, y \in H_q$. Meqënëse $H_q \subseteq H_q^{(eqe)}$ dhe kjo e fundit është nëngjysmëgrup, atëherë $xy \in H_q^{(eqe)}$, për rrjedhojë kemi

$$(xy)(eqe) = q(eqe) = qe.$$

Tani mund të shkruajmë

$$qe = (xy)(eqe) \leq (xy)e \leq q^2e \leq qe,$$

që vërteton se $(xy, q) \in \mathcal{R}$. Në mënyrë të ngjashme $(xy, q) \in \mathcal{L}$ për rrjedhim $xy \in H_q$ që përfundon vërtetimin e teoremës. ■

Po supozojmë tani se le -gjysmëgrupi S plotëson konditën

$$\mathcal{S}: \text{Për çdo } x \in S, \text{ në qoftë se } x \leq ab, \text{ atëherë ekzistojnë } A \subseteq (a] \text{ dhe } B \subseteq (b] \text{ të tilla që } x = \bigvee_{\alpha \in A, \beta \in B} \alpha\beta.$$

Shembull i një le -gjysmëgrupi të tillë është ai $(\mathcal{P}(S), \cdot, \subseteq)$. Për të tillë le -gjysmëgrupe ka vend ky pohim.

Pohim 2.2.2 Në qoftë se ekzistojnë elementët minimalë $m, n \in H$ të tillë që $mn \in H$, atëherë kemi që H është nëngjysmëgrup i S .

Vërtetim. Meqë jemi në kushtet e Grinit për $\mathcal{H}$ -klasën H , atëherë për çdo $x \in H$ kemi që $x \leq em$. Nga kondita $\mathcal{S}$ ekzistojnë $E \subseteq]e]$ dhe $M \subseteq]m]$ të tilla që $x = \bigvee_{\varepsilon_i \in E, \mu_j \in M} \varepsilon_i \mu_j$. Por m është minimale kështu që $M = \{m\}$ dhe

$$x = \bigvee_{\varepsilon_i \in E} \varepsilon_i m = (\bigvee_{\varepsilon_i \in E} \varepsilon_i) m = \varepsilon m.$$

Njëlloj tregohet se

$$x = n\varepsilon'.$$

Nga kushti kemi që $me = mne$ prej nga merret barazimi $\varepsilon me = \varepsilon mne$ ose e thënë ndryshe që $xe = (xn)e$ barazim i cili siguron që $(x, xn) \in \mathcal{R}$. Meqënëse $(x, n) \in \mathcal{R}$ dhe $\mathcal{R}$ është kongruencë e majtë, kemi $(x^2, xn) \in \mathcal{R}$. Si përfundim $(x, x^2) \in \mathcal{R}$. Njëlloj si më sipër $en = enm$ prej nga $(en)\varepsilon' = (emn)\varepsilon'$ ose ndryshe që $ex = e(mx)$. Kjo do të thotë se $(x, mx) \in \mathcal{L}$ e meqë $(x, m) \in \mathcal{L}$, edhe $(x^2, mx) \in \mathcal{L}$ prej nga merret që $(x, x^2) \in \mathcal{L}$. Atëherë kemi që për çdo $x \in H$, $x^2 \in H$ gjë që sjell se H është nëngjysmëgrup. ■

2.3 $\mathcal{J}$ - klasat që janë nëngjysmëgrupe

Shënojmë me S një le -gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$. Përcaktojmë pasqyrimin

$$t: S \rightarrow S \text{ duke pozuar } t(x) = exe \vee xe \vee ex \vee x,$$

dhe do tregojmë që $t(x)$ është elementi ideal më i vogël i cili është më i madh se x . Që $t(x)$ është element ideal rrjedh nga fakti që

$$(exe \vee xe \vee ex \vee x) \cdot e = exe^2 \vee xe^2 \vee exe \vee xe \leq exe \vee xe \vee ex \vee x,$$

dhe që

$$e \cdot (exe \vee xe \vee ex \vee x) = e^2 xe \vee exe \vee e^2 x \vee ex \leq exe \vee xe \vee ex \vee x.$$

Gjithashtu përkufizimi i $t(x)$ tregon që $t(x) \geq x$. Mbetet të tregojmë që në qoftë se τ është një element ideal i S i tillë që $x \leq \tau$, atëherë $t(x) \leq \tau$. Vërtet,

$$\begin{aligned} t(x) &= exe \vee xe \vee ex \vee x \\ &\leq exe \vee te \vee et \vee \tau \quad \text{meqënëse } x \leq \tau \\ &\leq \tau \quad \text{meqënëse } \tau \text{ është element ideal.} \end{aligned}$$

Tani jemi gati të përcaktojmë relacionin $\mathcal{J}$ në S . Do të themi se dy elementë $x, y \in S$ janë të lidhura sipas $\mathcal{J}$, gjë që shënohet $(x, y) \in \mathcal{J}$ vetëm nëse $t(x) = t(y)$. Me fjalë të tjera

$$\mathcal{J} = \{(x, y) \in S \times S \mid t(x) = t(y)\}.$$

Del menjëherë se $\mathcal{J}$ është relacion ekuivalence, prandaj ne mund të flasim rreth $\mathcal{J}$ -klasave të tij. Një veti kyçe e $\mathcal{J}$ -klasave është përshkruar në lemën e mëposhtme.

Lemë 2.3.1 Çdo $\mathcal{J}$ -klasë J e S ka një element ideal të vetëm $t(a)$ ku a është një element çfardo i J .

Vërtetim. Së pari, për çdo $a \in J$ do të tregojmë që $t(a) \in J$. Vërtet, meqënëse $t(a)$ është element ideal, $t(t(a)) = t(a)$ dhe atëherë përkufizimi i $\mathcal{J}$ tregon se $(a, t(a)) \in \mathcal{J}$ ose njësoj, $t(a) \in J_a$. Së fundmi, në qoftë se $\tau \in J$ është element ideal, atëherë nga njëra anë $t(\tau) = \tau$ dhe nga ana tjetër $t(\tau) = t(a)$ meqënëse $a \in J$, kështu marrim që $\tau = t(a)$. ■

Elementi $t(a)$ i lemës së mësipërme quhet *elementi ideal përfaqësues* i J .

Një $\mathcal{J}$ -klasë thuhet se kënaq *konditën e Grinit* në qoftë se gjenden $b, c \in J$ të tilla që $bc \in J$. Elementi ideal përfaqësues luan një rol kyç lidhur me konditën e Grinit siç e tregon teorema e mëposhtme

Teoremë 2.3.2 Një $\mathcal{J}$ -klasë J kënaq konditën e Grinit vetëm në qoftë se elementi ideal përfaqësues i tij τ është idempotent.

Vërtetim. Kondita e nevojshme është e qartë kështu që mbetet të provojmë që nëse $b, c, bc \in J$, atëherë $\tau = \tau^2$. Meqënëse nga lema 2.3.1 $b, c \leq \tau$, atëherë $bc \leq \tau^2$. Duke kaluar te elementi ideal i gjeneruar nga të dyja anët në mosbarazimin e fundit ne marrim $t(bc) \leq t(\tau^2)$. Por τ^2 është element ideal gjithashtu prandaj $t(bc) \leq \tau^2$. Duke

kujtuar që $bc \in J_\tau$, kemi $\tau \leq \tau^2$ e cila së bashku me mosbarazimin e qartë $\tau^2 \leq \tau$ implikojnë barazimin e dëshiruar $\tau = \tau^2$. ■

Është interesante të dimë se në cilat kushte një $\mathcal{J}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit formon një nëngjysmëgrup të S . Përgjigjja e këtij rasti kur klasa kërkohet të jetë grup është e lehtë dhe është provuar në pohimin 2.3.5. Më parë na duhet lema e mëposhtme.

Lemë 2.3.3 Supozojmë se $\mathcal{J}$ -klasa J është nëngjysmëgrup i S . Në qoftë se τ është elementi ideal përfaqësues i J , atëherë për çdo element $x \in J$

$$\tau x \tau = \tau = exe \text{ dhe } \tau x e = \tau = ex \tau.$$

Në veçanti kemi $\tau e = \tau = e \tau$.

Vërtetim. Është e qartë se $\tau x \tau$ është element ideal i S . Meqenëse J është supozuar të formojë nëngjysmëgrup dhe $x \in J$, atëherë $\tau x \tau \in J$ dhe kështu nga lema 2.3.1 marrim $\tau x \tau = \tau$. Më tej,

$$\tau = \tau x \tau \leq \tau x e \leq exe \leq \tau,$$

që provon se $\tau x e = \tau = exe$. Në mënyrë të ngjashme provohet se $ex \tau = \tau = exe$. Në qoftë se zëvendësojmë x me τ në dy barazimet e fundit dhe të kujtojmë nga teorema 2.3.2 që $\tau = \tau^2$, atëherë përftojme $\tau e = \tau = e \tau$. ■

Lema e mëposhtme tregon që barazimet e mësipërme janë gjithmonë të sigurt në qoftë se e supozojmë S të rregullt dhe intra të rregullt.

Pohim 2.3.4 Supozojmë se S është i rregullt dhe intra i rregullt atëherë për çdo $x \in S$ elementi ideal τ i gjeneruar nga x kënaq barazimet e lemës 2.3.3.

Vërtetim. Vërtet,

$$\begin{aligned} \tau x \tau &= (exe \vee ex \vee xe \vee x) \cdot x \cdot (exe \vee ex \vee xe \vee x) \\ &\geq exe \cdot x \cdot exe \vee exe \cdot x \cdot ex \vee exe \cdot x \cdot xe \vee xe \cdot x \cdot exe \\ &\geq exe \vee ex \vee x \vee xe = \tau. \end{aligned}$$

Nga ana tjetër $\tau x \tau \leq \tau \leq \tau$, për rrjedhojë kemi $\tau x \tau = \tau$. Gjithashtu kemi

$$\tau = \tau x \tau \leq \tau x e \leq exe \leq \tau,$$

që provon se $\tau x e = exe = \tau$. Barazimi $ex \tau = \tau$ provohet simetrikisht dhe dy barazimet e fundit të lemës 2.3.3 rrjedhin në të njëjtën mënyrë. ■

Pohimi i mëposhtëm është analog i pohimit 2.3 të [42].

Pohim 2.3.5 Një $\mathcal{J}$ -klasë J është nëngrup i S vetëm në qoftë se J përbëhet nga një element idempotent i vetëm.

Vërtetim. Kondita e nevojshme është e qartë. Tani supozojmë se J është nëngrup i S dhe le të jetë τ elementi ideal përfaqësues i J , $\bar{\tau}$ i anasjelli i tij dhe i elementi i njësisë. Fillimisht do të shohim se i është element ideal. Vërtet,

$$\begin{aligned} ei &= e\tau\bar{\tau} \\ &= \tau\bar{\tau} \quad \text{nga lema 2.3.3} \\ &= i = ie \quad \text{në të njëjtën mënyrë si më sipër,} \end{aligned}$$

që vërteton atë që pohuam. Por τ është elementi ideal i vetëm i J pra $\tau = i$. Më tej në qoftë se $x \in J$, atëherë

$$\begin{aligned} i &= \tau \quad \text{nga më sipër} \\ &= \tau x \tau \quad \text{nga lema 2.3.3} \\ &= i x i = x \quad \text{meqënëse } i \text{ është njëshi,} \end{aligned}$$

që provon se $J = \{i\}$ përbëhet nga vetëm një element. ■

Në vijim do të konsiderojmë *le*-gjysmëgrupet që kënaqin konditën Λ : çdo dy elementë idealë të majtë ndërrojnë me njëri-tjetrin. Ne vërtetojmë në teoremën tonë 2.3.7 që në të tillë gjysmëgrupe çdo $\mathcal{J}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup. Supozojmë se na është dhënë një *le*-gjysmëgrup $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ me element më të madh ε dhe le të jetë I bashkësia e elementëve idealë të S . Ashtu si më parë, për çdo $e \in I$ shënojmë $]e] = \{x \in S : x \leq e\}$. Është e qartë që $]e]$ është nëngjysmëgrup i S sepse në qoftë se $x, y \in]e]$, atëherë $xy \leq ee \leq e\varepsilon \leq e$. Me relacionin e renditjes së S të ngushtuar në $]e]$, kjo e fundit formon *le*-gjysmëgrup me element më të madh e . Shënojmë me $\mathcal{J}^{(e)}$ relacionin $\mathcal{J}$ të përcaktuar në $]e]$. Me shënimet e mësipërme kemi lemën e mëposhtme.

Lemë 2.3.6 Në qoftë se $e \in I$ është idempotent, atëherë $J_e^{(e)}$ është nëngjysmëgrup.

Vërtetim. Së pari, për çdo $x \in S$, ex është element ideal i majtë i S meqënëse $\varepsilon(ex) = (\varepsilon e)x \leq ex$. Së dyti, është e thjeshtë të shihet se për çdo $x \in J_e^{(e)}$ kemi $e = exe$. Më tej, në qoftë se $x, y \in J_e^{(e)}$, atëherë mund të shkruajmë

$$\begin{aligned} e &= (exe)(eye) = e(xe)(ye) = (ex)e(ye) \quad e \text{ është idempotent} \\ &= e(ex)(ye) \quad \text{nga kondita } \Lambda \\ &= e(xy)e \leq e^4 = e, \end{aligned}$$

nga e cila rrjedh lehtë se $xy \in J_e^{(e)}$. ■

Teoremë 2.3.7 Në qoftë se S kënaq konditën Λ , atëherë çdo $\mathcal{J}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S .

Vërtetim. Supozojmë se J është një $\mathcal{J}$ -klasë në S që kënaq konditën e Grinit. Shënojmë τ elementin ideal përfaqësues të $\mathcal{J}$ i cili nga lema 2.3.1 ka për të qënë idempotent dhe nga lema 2.3.3 kënaq $\tau = \varepsilon\tau\varepsilon$. Pohojmë se $J = J_\tau \subseteq J_\tau^{(\tau)}$. Për të treguar këtë vërejmë së pari se për çdo $x \in J = J_\tau$, $\varepsilon\tau\varepsilon = \varepsilon x \varepsilon$. Rrjedh se për elementin ideal të $]\tau]$ të gjeneruar nga x kemi që,

$$\begin{aligned} \tau x \tau \vee \tau x \vee x \tau \vee x &= (\varepsilon\tau\varepsilon)x(\varepsilon\tau\varepsilon) \vee (\varepsilon\tau\varepsilon)x \vee x(\varepsilon\tau\varepsilon) \vee x \\ &= \varepsilon\tau(\varepsilon x \varepsilon)\tau\varepsilon \vee (\varepsilon\tau\varepsilon)x \vee x(\varepsilon\tau\varepsilon) \vee x \\ &= \varepsilon\tau^3\varepsilon \vee (\varepsilon\tau\varepsilon)x \vee x(\varepsilon\tau\varepsilon) \vee x \\ &= \varepsilon\tau\varepsilon = \tau \end{aligned}$$

meqënëse $(\varepsilon\tau\varepsilon)x \vee x(\varepsilon\tau\varepsilon) \vee x \leq \tau = \varepsilon\tau\varepsilon$, e cila tregon se $x \in J_\tau^{(\tau)}$ duke provuar kështu përfshirjen $J = J_\tau \subseteq J_\tau^{(\tau)}$. Le të jenë $a, b \in J_\tau$. Meqënëse $J_\tau \subseteq J_\tau^{(\tau)}$ dhe $J_\tau^{(\tau)}$ është nëngjysmëgrup nga lema 2.3.6 kemi që $\tau = \tau ab \tau \vee \tau ab \vee ab \tau \vee ab$. Por

$$\begin{aligned} \tau ab \tau \vee \tau ab \vee ab \tau \vee ab &\leq \varepsilon ab \varepsilon \vee \varepsilon ab \vee ab \varepsilon \vee ab \\ &\leq \varepsilon \tau^2 \varepsilon \vee \varepsilon \tau^2 \vee \tau^2 \varepsilon \vee \tau^2 && \text{meqënëse } a, b \leq \tau \\ &= \varepsilon \tau \varepsilon \vee \varepsilon \tau \vee \tau \varepsilon \vee \tau && \text{meqënëse } \tau = \tau^2 \\ &= \tau, \end{aligned}$$

e cila provon se $\tau = \varepsilon ab \varepsilon \vee \varepsilon ab \vee ab \varepsilon \vee ab$ ose njësoj $ab \in J_\tau$ që përfundon vërtetimin. ■

Pohim 2.3.8 *Le të jetë S një le-gjysmëgrup me element më të madh ε . Atëherë S është gjysmë i thjeshtë dhe kënaq konditën Λ , vetëm në qoftë se zbërthimi i S në $\mathcal{J}$ -klasa formon një semilatisë $\vee$ -gjysmëgrupesh gjysmë të thjeshtë majtas. Për më tepër $\mathcal{J}$ -klasat e këtij zbërthimi janë gjysmë të thjeshta, intra të rregullta dhe kënaqin konditën Λ .*

Vërtetim. $\Rightarrow$. Meqënëse S është gjysmë i thjeshtë, atëherë pohimi 9 i [36] implikon që bashkësia e elementëve idealë I formon semilatisë dhe teorema 2.3.7 implikon që për çdo $\alpha \in I$, $\mathcal{J}$ -klasa e tij J_α është $\vee$ -gjysmëgrup me element më të madh α . Më tej do të provojmë që çdo element ideal t në $\vee$ -gjysmëgrupin J_α është gjysmë prim. Kjo do të ishte e menjëhershme në qoftë se ne do të tregonim që J_α është e thjeshtë majtas meqënëse kjo nënkupton në veçanti që α është i vetmi element ideal në J_α i cili është qartësisht gjysmë prim. Pohimi 13 i [36] do të implikonte më pas që J_α është një $\vee$ -gjysmëgrup intra i rregullt. Tani do të tregojmë që për çdo $\alpha \in I$, i vetmi element ideal i majtë në $\vee$ -gjysmëgrupin J_α është vetë α . Vërtet, në qoftë se $b \in J_\alpha$ është një element ideal i majtë aty, atëherë

$$\begin{aligned}
b \leq \alpha &= (\alpha b)\alpha && \text{nga lema 2.3.3} \\
&= \alpha^2 b = \alpha b && \text{meqënëse } \Lambda \text{ është e vërtetë} \\
&\leq b && b \text{ është element ideal i majtë në } J_\alpha,
\end{aligned}$$

që provon se $b = \alpha$. Kjo tregon gjithashtu se J_α është një $\vee$ -gjysmëgrup gjysmë i thjeshtë. Më tej do të tregojmë që çdo dy ideale të majtë të J_α ndërrojnë me njëri-tjetrin. Kjo do të ishte e menjëhershme nën supozimin për Λ në qoftë se ne tregojmë se idealet e majtë të J_α janë gjithashtu ideale të majtë të S . Për të treguar këtë të fundit le të jetë $b \in J_\alpha$ ideal i majtë aty. Së pari vërejmë se $\varepsilon b \leq \varepsilon \alpha \leq \alpha$ dhe se $\varepsilon b \in J_\alpha$ meqënëse

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\varepsilon b)\varepsilon \vee \varepsilon(\varepsilon b) \vee (\varepsilon b)\varepsilon \vee \varepsilon b &= \varepsilon b \varepsilon \\
&= \alpha && \text{nga lema 2.3.3.}
\end{aligned}$$

Më tej

$$\begin{aligned}
b \geq \alpha b &= (\alpha \varepsilon)b && \text{meqënëse } b \text{ është ideal i majtë dhe nga lema 2.3.3} \\
&= \alpha^2(\varepsilon b) && \text{meqënëse } \alpha \text{ është idempotent} \\
&= \alpha(\varepsilon b)\alpha && \text{nga kondita } \Lambda \\
&= \alpha(\varepsilon b)\alpha^2 \geq \alpha(\varepsilon b)(\varepsilon b)\alpha && \text{nga } \varepsilon b \leq \alpha \\
&\geq \varepsilon b && \text{meqënëse } J_\alpha \text{ është intra i rregullt,}
\end{aligned}$$

që provon se b është element ideal i majtë i S . Së fundmi provojmë se në qoftë se α, β janë elementë idealë të S , atëherë $J_\alpha \cdot J_\beta \subseteq J_{\alpha\beta}$. Le të jenë $x \in J_\alpha$ dhe $y \in J_\beta$, atëherë nga lema 2.3.3 $\varepsilon x \varepsilon = \alpha$ dhe $\varepsilon y \varepsilon = \beta$ dhe duam të tregojmë që $\varepsilon xy \varepsilon = \alpha\beta$. Vërtet,

$$\begin{aligned}
\alpha\beta \geq \varepsilon(\alpha\beta) &\geq \varepsilon(xy)\varepsilon && \text{meqënëse } \varepsilon \text{ është idempotent} \\
&= \varepsilon(\varepsilon x)(y\varepsilon) && \text{nga kondita } \Lambda \\
&= (\varepsilon x)\varepsilon(y\varepsilon) && \text{nga kondita } \Lambda \\
&= \varepsilon(x\varepsilon y)\varepsilon,
\end{aligned}$$

prandaj kemi

$$\alpha\beta \geq \varepsilon(xy)\varepsilon \geq \varepsilon(x\varepsilon y)\varepsilon.$$

Më tej shohim që

$$\varepsilon(\varepsilon(x\varepsilon y)\varepsilon)\varepsilon = (\varepsilon x \varepsilon)(\varepsilon y \varepsilon) = \alpha\beta,$$

për rrjedhim $\varepsilon(xy)\varepsilon = \alpha\beta$ që tregon se $xy \in J_{\alpha\beta}$.

$\Leftarrow$. Meqënëse çdo $\mathcal{J}$ -klasë është nëngjysmëgrup, atëherë elementi ideal përfaqësues i tij është idempotent dhe S është gjysmë i thjeshtë. Përpara se të tregojmë që çdo dy elementë idealë të majtë të çfardoshëm të S ndërrojnë, ne vërejmë se në qoftë se $b \in J_\beta$ është element ideal i majtë i S dhe β është elementi ideal përfaqësues, atëherë b është një element ideal në $\vee e$ -gjysmëgrupin J_β meqënëse $\beta b \leq \varepsilon b \leq b$. Le të jenë tani b dhe c elementë ideal të majtë të S dhe le të jenë J_β dhe J_γ $\mathcal{J}$ -klasat e S që përmbajnë b dhe c përkatësisht ku β dhe γ janë elementët idealë përkatës. Meqënëse $\mathcal{J}$ -klasat formojnë semilatisë dhe meqënëse S është gjysmë e thjeshtë, atëherë

$$bc \in J_\beta J_\gamma \subseteq J_{\beta\gamma} = J_{\beta \wedge \gamma},$$

dhe ngjashmërisht

$$cb \in J_\gamma J_\beta \subseteq J_{\gamma\beta} = J_{\gamma \wedge \beta}.$$

Pra ka elementë idealë të majtë të S , konkretisht bc dhe cb që i përkasin të njëjtës $\mathcal{J}$ -klasë $J_{\beta \wedge \gamma}$, prandaj $bc = cb$ meqënëse klasa është e thjeshtë majtas. Kjo tregon se S kënaq konditën Λ . ■

Siç e përmendëm edhe në hyrje, rezultati i pohimit 2.3.8 është i afërt me atë të teoremës 1 të [22] e cila mbetet e vërtetë për gjysmëgrupet e renditur në përgjithësi dhe që identifikon gjysmëgrupet e renditur intra të rregullt me semilatisa gjysmëgrupesh të thjeshtë. Duke pasur parasysh këtë ngjashmëri është e arsyeshme të ngremë pyetjen: *A ka ndonjë lidhje ndërmjet le-gjysmëgrupeve intra të rregullt dhe le-gjysmëgrupeve të cilët janë gjysmë të thjeshtë dhe kënaqin konditën Λ ?* Vërejmë se në një drejtim është e qartë që le-gjysmëgrupet intra të rregullt janë gjysmë të thjeshtë (shih [13]) dhe nga drejtimi tjetër nuk është e vështirë të shohim se le-gjysmëgrupet gjysmë të thjeshtë që kënaqin konditën Λ janë intra të rregullt.

2.4 Elementët $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{H}$ dhe $\mathcal{B}$ -idempotentë

Siç është parë më herët një $\mathcal{H}$ -klasë që plotëson konditën e Grinit mund të mos jetë gjysmëgrup, megjithatë siç do të shohim në vazhdim ajo përmban një nëngjysmëgrup maksimal lidhur me përfshirjen që ka sjelljen e një kuazi-ideali. Rezultate të ngjashme vlejnë edhe për $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ dhe $\mathcal{B}$ -klasat.

Do të themi se një element a i një le-gjysmëgrupi S është $\mathcal{L}$ -idempotent (përkatësisht $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$ -idempotent) në qoftë se $(a, a^2) \in \mathcal{L}$ (përkatësisht $(a, a^2) \in \mathcal{R}, (a, a^2) \in \mathcal{H}, (a, a^2) \in \mathcal{B}$).

Së pari teorema 2.1.2 siguron që elementët $\mathcal{L}$ -idempotentë ekzistojnë vërtet.

Teoremë 2.4.1 Në qoftë se një $\mathcal{L}$ -klasë L plotëson konditën e Grinit, atëherë bashkësia $\mathcal{L}$ e elementëve $\mathcal{L}$ -idempotentë që ajo përmban formon nëngjysmëgrup të S . Për më tepër $L\mathcal{L} \cap \mathcal{L}L \subseteq \mathcal{L}$.

Vërtetim. Vërtet, le të jenë $x, y \in \mathcal{L}$, pra $(x, y) \in \mathcal{L}, (x, x^2) \in \mathcal{L}$ dhe $(y, y^2) \in \mathcal{L}$. Po të nisemi nga barazimi

$$ex \vee x = ey \vee y$$

dhe të shumëzojmë djathtas të dyja anëve me y përftojmë

$$exy \vee xy = ey^2 \vee y^2 = ey \vee y,$$

sepse $y \in \mathcal{L}$. Kjo tregon se $xy \in L$. Tani të tregojmë se $(xy)^2 \in L$. Vërtet,

$$\begin{aligned} e(xy)^2 \vee (xy)^2 &= (ex \vee x)(yxy) \\ &= (ex)(yxy) && \text{nga kondita e Grinit} \\ &= (ey)(yxy) && \text{sepse } (x, y) \in \mathcal{L} \\ &= (ey^2)(xy) = (ey)(xy) && \text{sepse } y \in \mathcal{L} \\ &= (ex)(xy) = exy && \text{sepse } (x, y) \in \mathcal{L} \text{ dhe } x \in \mathcal{L} \\ &= e(xy) \vee (xy), \end{aligned}$$

çka tregon se $(xy, (xy)^2) \in \mathcal{L}$.

Për pjesën e dytë të pohimit le të jetë $x\lambda = \lambda'x' \in L\mathcal{L} \cap \mathcal{L}L$. Së pari vemë re se

$$l(x\lambda) = ex\lambda \vee x\lambda = (ex \vee x)\lambda = e\lambda\lambda = e\lambda,$$

që tregon se $x\lambda \in L$. Tani të tregojmë se $x\lambda = \lambda'x' \in \mathcal{L}$. Vërtet,

$$\begin{aligned} l((x\lambda)^2) &= (e(x\lambda) \vee (x\lambda))x\lambda \\ &= (e\lambda)(x\lambda) && \text{nga më sipër} \\ &= (e\lambda')(\lambda'x') && \lambda' \in L \\ &= (e\lambda')x' && \lambda' \in \mathcal{L} \\ &= e(x\lambda) = l(x\lambda), \end{aligned}$$

gjë që tregon se $x\lambda = \lambda'x' \in \mathcal{L}$. ■

Një pohim i ngjashëm me të mësipërmin vlen edhe për elementët $\mathcal{R}$ -idempotentë. Po e paraqesim më poshtë pa vërtetim pasi vërtetimi është i ngjashëm me atë të pohimit më sipër.

Teoremë 2.4.2 Në qoftë se një $\mathcal{R}$ -klasë R plotëson konditën e Grinit, atëherë bashkësia $\mathcal{R}$ e elementëve $\mathcal{R}$ -idempotentë që ajo përmban formon nëngjysmëgrup të S . Për më tepër $R\mathcal{R} \cap \mathcal{R}R \subseteq \mathcal{R}$.

Në rastin e relacionit $\mathcal{H}$ rezultati për elementët $\mathcal{H}$ -idempotentë është po aq interesant.

Le të jetë H një $\mathcal{H}$ -klasë çfardo. Po shënojmë me $\mathcal{H} = \{\alpha \in H : \alpha^2 \in H\}$ nënbashkësinë e elementëve $\mathcal{H}$ -idempotentë që i përkasin H -së. Për këtë bashkësi ka vend teorema e mëposhtme.

Teoremë 2.4.3 Në qoftë se H plotëson konditën e Grinit, atëherë $\mathcal{H}$ formon nëngjysmëgrup të S . Për më tepër $\mathcal{H}H \cap H\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}$.

Vërtetim. Që $\mathcal{H} \neq \emptyset$ rrjedh nga [42]. Të tregojmë tani se $\mathcal{H}$ formon nëngjysmëgrup. Vërtet, për çdo $\alpha, \beta \in \mathcal{H}$ kemi

$$\begin{aligned} r((\alpha\beta)^2) &= r(\alpha\beta\alpha\beta) \\ &= \alpha\beta\alpha r(\beta) = \alpha\beta\alpha r(\alpha) \\ &= \alpha\beta r(\alpha^2) = \alpha\beta r(\alpha) \\ &= \alpha\beta r(\beta) = \alpha r(\beta^2) \\ &= \alpha r(\beta) = r(\alpha\beta), \end{aligned}$$

që tregon se $((\alpha\beta)^2, \alpha\beta) \in \mathcal{R}$. Nga ana tjetër kemi që

$$r(\alpha\beta) = \alpha r(\beta) = \alpha r(\alpha^2) = r(\alpha^2) = r(\alpha),$$

që së bashku me përfshirjen më sipër tregon se $((\alpha\beta)^2, \alpha) \in \mathcal{R}$. Njëloj tregohet se $((\alpha\beta)^2, \alpha) \in \mathcal{L}$ nga e cila përfundimisht rrjedh se $\alpha\beta \in \mathcal{H}$.

Të vërtetojmë tani pjesën e dytë. Le të jetë $qx = x'q' \in \mathcal{H}H \cap H\mathcal{H}$ ku $q, q' \in \mathcal{H}$ dhe $x, x' \in H$. Vërejmë se

$$r(qx) = qr(x) = qr(q) = r(q^2) = r(q),$$

dhe se po ashtu

$$l(x'q') = l(x')q' = l(q')q' = l(q'^2) = l(q'),$$

prej nga marrim se $qx = x'q' \in H$. Më tej shohim se

$$\begin{aligned} r((qx)^2) &= qxr(qx) = qxr(q) && \text{nga më sipër} \\ &= (x'q')r(q) = (x'q')r(q') && \text{nga supozimet} \\ &= x'r(q'^2) = x'r(q') && \text{sepse } q' \in \mathcal{H} \\ &= r(x'q') = r(qx), \end{aligned}$$

e cila tregon se qx është $\mathcal{R}$ -idempotent. Në mënyrë të ngjashme tregohet se $x'q'$ është $\mathcal{L}$ -idempotent gjë që përfundimisht sjell se $qx = x'q' \in \mathcal{H}$. ■

Në përfundim do të shohim edhe rastin e relacionit $\mathcal{B}$ të përkufizuar nga Kehayopulu tek [27]. Është treguar tek [45] se $\mathcal{B}$ është më fin se $\mathcal{H}$ dhe se në qoftë se një $\mathcal{B}$ -klasë plotëson konditën e Grinit atëherë ajo është e rregullt dhe se përmban një element idempotent i cili në këtë rast është elementi bi-ideal përfaqësues i $\mathcal{B}$ -klasës. Këto do ti shfrytëzojmë për të vërtetuar pohimin e mëposhtëm.

Teoremë 2.4.4 *Në qoftë se një $\mathcal{B}$ -klasë B plotëson konditën e Grinit, atëherë bashkësia $\mathfrak{B}$ e elementëve $\mathcal{B}$ -idempotentë që ajo përmban formon nëngjysmëgrup të S . Për më tepër kemi që $B\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}B \subseteq \mathfrak{B}$.*

Vërtetim. Le të jenë $x, y \in \mathfrak{B}$. Domethënë $(x, y) \in \mathcal{B}$, $(x, x^2) \in \mathcal{B}$ dhe $(y, y^2) \in \mathcal{B}$. Tregojmë së pari se $xy \in B$ dhe më pas se $xy \in \mathfrak{B}$.

$$\begin{aligned} xyexy \vee xy &= xxexy \vee xy && \text{sepse } y \in B = B_y \subseteq R_y = R_x \\ &= xxeyy \vee xy && \text{sepse } x \in B = B_x \subseteq L_x = L_y \\ &= xey \vee xy && x, y \in \mathfrak{B} \subseteq B \text{ dhe se } B \subseteq R_x, L_y \\ &= xey = xex && \text{nga kondita e Grinit dhe se } B \subseteq L_x \\ &xex \vee x && \text{sepse } B \text{ është e rregullt.} \end{aligned}$$

Së dyti shohim se

$$\begin{aligned} (xy)^2 e(xy)^2 &= (xyx)(yex)(yxy) \\ &= (xyx)(xey)(yxy) && y \in B \subseteq R_x \text{ dhe } x \in B \subseteq L_y \\ &= (xy)(xey)(xy) && \text{pasi } x, y \in \mathfrak{B} \\ &= (xy)(yex)(xy) && \text{njëlloj si më sipër} \\ &= x(yex)y = x(xey)y = xex = xex \vee x, \end{aligned}$$

që përfundon vërtetimin e pjesës së parë.

Për të vërtetuar pjesën e dytë së pari vemë re se çdo element $x\beta = \beta'x' \in B\mathfrak{B} \cap \mathfrak{B}B$ i përket B . Vërtet,

$$\begin{aligned} b(x\beta) &= (x\beta ex \vee x)\beta \\ &= (\beta'x'e\beta' \vee x)\beta \\ &= (\beta'\beta'e\beta' \vee x)\beta && \text{sepse } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{L}, \mathcal{R} \\ &= (\beta'e\beta')\beta && \beta' \in \mathfrak{B} \text{ dhe kondita e Grinit} \\ &= (\beta e\beta)\beta && (\beta', \beta) \in \mathcal{B} \\ &= \beta e\beta = b(\beta) && \beta \in \mathfrak{B}. \end{aligned}$$

Tani të tregojmë se $(x\beta)^2 \in B$. Vërtet,

$$\begin{aligned}
b((x\beta)^2) &= (x\beta)(x\beta)e(x\beta)(x\beta) \\
&= (x\beta)(\beta e\beta)(x\beta) && \text{nga më sipër} \\
&= (x\beta)(\beta e\beta')(\beta'x') && (\beta', \beta) \in \mathcal{B} \\
&= x\beta^2 e\beta'^2 x' = x\beta e\beta'x' && \beta', \beta \in \mathcal{B} \\
&= \beta'x' e x\beta = \beta'\beta'e\beta\beta && \text{sepse } \mathcal{B} \subseteq \mathcal{R}, \mathcal{L} \\
&= \beta'e\beta && \beta', \beta \in \mathcal{B} \\
&= \beta e\beta = b(x\beta),
\end{aligned}$$

që mbyll vërtetimin. ■

KAPITULLI 3

Aspekte kategorike të teorisë së gjysmëgrupeve të renditur

3.1 Objekte universalë në kategorinë e po -gjysmëgrupeve

Gjysmëgrupet e renditur janë studiuar për pothuajse katër dekada nga Kehayopulu dhe pasardhësit e saj me qëllim që të përgjithësojnë disa veti të gjysmëgrupeve të zakonshëm kryesisht përfitimin e disa vetive të reja globale të gjysmëgrupeve të zakonshëm nga veti lokale të gjysmëgrupeve të renditur. Një mënyrë natyrale për të kaluar nga gjysmëgrupet e zakonshme te gjysmëgrupet e renditur dhe anasjellas është marrja në konsideratë e gjysmëgrupit fuqi $(\mathcal{P}(S), \cdot)$ të një gjysmëgrupi $(S, \cdot)$ duke zgjeruar shumëzimin te nënbashkësitë dhe duke e renditur atë sipas përfshirjes së nënbashkësive. Del se ato rezultate të mirënjohura të gjysmëgrupeve të zakonshëm përftohen nga analogët e tyre në teorinë e gjysmëgrupeve të renditur duke kaluar në drejtim të kundërt, nga gjysmëgrupet e renditur $\mathcal{P}(S)$ te vetë S . Si shembull për këtë janë disa rezultate nga një artikull i fundit i Kehayopulu [36].

Dobia e gjysmëgrupit fuqi shkon më tej. Në artikullin e tyre të përbashët [32] Kehayopulu, Pasku dhe Tsingelis përdorën një version të renditur të gjysmëgrupit fuqi me qëllim që të zhysnin një gjysmëgrup të renditur në një le -gjysmëgrup. Për qëllimin tonë është e arsyeshme të paraqesim këtu një version të modifikuar të zhytjes të dhënë në [32]. Për një po -gjysmëgrup të dhënë $(S, \cdot, \leq)$ është përcaktuar $\mathcal{A} = \{(A) \mid \emptyset \neq A \subseteq S\}$ ku $(A) = \{x \in S \mid x \leq y \text{ për ndonjë } y \in A\}$ dhe veprimi $\circ$ në $\mathcal{A}$ nga $(A) \circ (B) = (A \cdot B)$. Është provuar që $(\mathcal{A}, \circ, \subseteq)$ është një po -gjysmëgrup $\vee$ -i plotë dhe shpërndarës që përmban S . Një zhytje e ngjashme gjysmëgrupesh të renditur në le -gjysmëgrupet jepet në [31].

Çuditërisht, gjysmëgrupet e renditur lindin në mënyrë natyrale në fusha të ndryshme të matematikës, si për shembull ajo e gjuhëve formale, automatave dhe makinat. Konkretisht çdo gjuhë të njohur L i bashkangjitet një gjysmëgrup i renditur S i quajtur gjysmëgrupi sintaktik i renditur i L , i cili është gjysmëgrupi i tranzicionit i automatonit minimal $\mathcal{A} = (Q, A, \cdot, \{q_0\}, F)$ të L dhe renditet duke pozuar $s \leq t$ në qoftë se për çdo $x \in S^1$ dhe çdo $q \in Q, q \cdot tx \in F \Rightarrow q \cdot sx \in F$. Pra është tunduese të përpiqesh të klasifikosh gjuhë të njohura sipas kuptimit të vetive algjebrike të gjysmëgrupeve të tyre të renditur (shih [46]). E rëndësishme është të vërejmë se ashtu si $\mathcal{P}(S)$ në teorinë e gjysmëgrupeve të renditur, gjysmëgrupet fuqi dhe varietetet fuqi kanë luajtur një rol qëndror në teorinë e gjuhëve formale dhe automatave. Për shembull në [4] Cano dhe Pin konsiderojnë monoidin e bashkësive të sipërme $\mathcal{P}^\uparrow(M)$ të një monoidi të renditur M elementët e të cilit janë bashësitë e sipërme

$\uparrow X = \{s \in M \mid s \geq x \text{ për ndonjë } x \in X\}$ të gjeneruara nga nënbashkësitë $X \in \mathcal{P}(M)$ dhe prodhimi i dy bashkësive të sipërme $X, Y \in \mathcal{P}^\uparrow(M)$ jepet nga $X \cdot Y = \{z \in M \mid z \geq xy \text{ ku } x \in X \text{ dhe } y \in Y\}$. Vërejmë këtu që $\mathcal{P}^\uparrow(M)$ e [4] dhe $\mathcal{A}$ e [32] janë të kundërta të njëra-tjetrës, në fakt elementët e $\mathcal{A}$ janë bashkësi të poshtme të gjeneruara nga nënbashkësitë e S . Për këtë arsye ne do të zëvendësojmë në të ardhmen shënimin për $\mathcal{A}$ me $\mathcal{P}^\uparrow(S)$. Është treguar në [4] që në qoftë se $\mathbf{V}$ është një variete monoidësh të fundëm të renditur dhe $\mathbf{P}^\uparrow \mathbf{V}$ varieteti përkatës e monoidëve të fundëm të renditur të gjeneruar nga monoidi i bashkësive të sipërme të përfaqësuesve të $\mathbf{V}$, atëherë $\mathbf{P}^\uparrow(\mathbf{P}^\uparrow \mathbf{V}) = \mathbf{P}^\uparrow \mathbf{V}$. Kjo është një veti interesante e mbyllshmërisë e cila përmirëson rezultatet për rastin e parenditshmërisë ku operatori $\mathbf{P}^\uparrow$ nuk është idempotent.

Qëllimi i këtij kapitulli është i dyfishtë. Së pari, të përdorë gjysmëgrupin e bashkësive të poshtme të përcaktuara në [32] në mënyrë që rindërtojë objektin e lirë me bazë një bashkësi të renditur në kategorinë e po -gjysmëgrupeve $\vee$ -të plotë dhe shpërndarës dhe homomorfizmave $\vee$ -ruajtës. Çështja e ekzistencës së të tilla objekteve është legjitime meqënëse gjysmëgrupet e lirë të renditur në një bashkësi të renditur të dhënë të ndërtuara në [47] në përgjithësi nuk janë $\vee$ -të plotë ose shpërndarëse

Qëllimi i dytë është rindërtimi i gjysmëgrupeve të lirë të renditur të dhënë në [47] duke marrë parasysh faktin që në rastin e parenditshmërisë një gjysmëgrup i lirë nuk është vetëm një gjysmëgrup, por një gjysmëgrup me një morfizëm gjatësie, ose njësoj është një objekt nga kategoria e hollë e gjysmëgrupeve mbi $(\mathbb{N}, +)$. Kjo përjasje zë fill në punën e Lyndon në [39] mbi grupet e lirë dhe më vonë u ndoq nga Saunders në [1] puna e të cilit lidhet me problemin e zhytjes të gjysmëgrupeve në gjysmëgrupet e lirë, dhe problemi i të përcaktuarit nëse një nëngjysmëgrup i një gjysmëgrupi të lirë është vetë i lirë. Përsa i përket po -gjysmëgrupeve si objekte nga kategoria e po -gjysmëgrupeve mbi gjysmëgrupin e renditur aditiv të numrave natyrorë, ne ndërtojmë aty objekte të lirë me bazë një objekt në kategorinë e bashkësive të renditura mbi bashkësinë e renditur të numrave natyrorë.

3.1.1 Ndërtimi i po -gjysmëgrupeve të lirë

Meqënëse ndërtimet tona të ardhshme janë bazuar mbi ndërtimin gjysmëgrupeve të lirë pjesërisht të renditur me bazë një bashkësi pjesërisht të renditur të dhënë nga Pin dhe Weil në [47], ne do të japim më poshtë një paraqitje të shkurtër të kësaj të fundit. Vërejmë se një diskutim i dobishëm rreth gjysmëgrupeve të lirë të renditur është bërë në [33].

Në qoftë se $(X, \leq)$ një bashkësi e renditur, atëherë konsiderojmë gjysmëgrupin e lirë $F(X)$ mbi X i cili është i përbërë nga vargje të fundëm $(x_1, \dots, x_n)$ me shkronja $x_i \in X$ dhe me shumëzimin të përcaktuar nga bashkëngjitja

$$(x_1, \dots, x_y) \cdot (y_1, \dots, y_m) = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m).$$

Renditja $\leq$ në $F(X)$ është përcaktuar duke pozuar

$$(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_m) \text{ vetëm nëse } n = m \text{ dhe } x_i \leq y_i, \forall i = 1, \dots, n.$$

Është e lehtë të shohësh që $(F(X), \cdot, \leq)$ është një gjysmëgrup i renditur që përmban bashkësinë e renditur $(X, \leq)$ dhe që kënaq vetinë universale të mëposhtme. Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një gjysmëgrup i renditur i parë si bashkësi e renditur $(S, \leq)$ (me shumëzimin $\cdot$ të harruar) dhe në qoftë se $f : (X, \leq) \rightarrow (S, \leq)$ është një pasqyrim që ruan renditjen, atëherë f zgjerohet në mënyrë të vetme në një homomorfizëm që ruan renditjen $\hat{f} : (F(X), \cdot, \leq) \rightarrow (S, \cdot, \leq)$.

Për një bashkësi të renditur të dhënë $(X, \leq)$, konsiderojmë gjysmëgrupin e renditur të lirë $(F(X), \cdot, \leq)$ mbi $(X, \leq)$ dhe që zhytet në $(\mathcal{P}^\downarrow(F(X)), \circ, \subseteq)$ ku $\mathcal{P}^\downarrow(F(X)) = \{[A] \mid \emptyset \neq A \subseteq F(X)\}$. Është e qartë që $(X, \leq)$ zhytet në $(\mathcal{P}^\downarrow(F(X)), \subseteq)$ me anë të pasqyrimin $\iota : X \rightarrow \mathcal{P}^\downarrow(F(X))$ të përcaktuar nga $x \mapsto [x]$. Do të vërtetojmë teoremën e mëposhtme.

Teoremë 3.1.1 $(\mathcal{P}^\downarrow(F(X)), \circ, \subseteq)$ është i lirë në kategorinë *po-gjysmëgrupeve* $\vee$ -të plotë dhe shpërndarëse dhe homomorfizmave $\vee$ -ruajtës me bazë bashkësinë e renditur $(X, \leq)$.

Vërtetim. Për të provuar pohimin duhet të tregojmë që për çdo *po-gjysmëgrup* $\vee$ -të plotë dhe shpërndarës $(S, \cdot, \leq)$ dhe çdo pasqyrim që ruan renditjen $f : (X, \leq) \rightarrow (S, \leq)$, ka një homomorfizëm të vetëm $\vee$ -ruajtës $\varphi : (\mathcal{P}^\downarrow(F(X)), \circ, \subseteq) \rightarrow (S, \cdot, \leq)$ të tillë që $\varphi \iota = f$. Përpara se të përcaktojmë φ vërejmë se vetia universale e $(F(X), \cdot, \leq)$ tregon se f indukon një homomorfizëm të vetëm që ruan renditjen $\hat{f} : (F(X), \cdot, \leq) \rightarrow (S, \cdot, \leq)$. Tani përcaktojmë

$$\varphi : \mathcal{P}^\downarrow(F(X)) \rightarrow S \text{ i tillë që } [A] \mapsto \bigvee_{a \in A} \hat{f}(a).$$

Së pari tregojmë që φ është homomorfizëm. Vërtet, le të jenë $[A], [B] \in \mathcal{P}^\downarrow(F(X))$ $[A], [B] \in \mathcal{P}^\downarrow(F(X))$, atëherë

$$\begin{aligned}
\varphi([A] \circ [B]) &= \varphi([A \cdot B]) = \bigvee_{a \cdot b \in A \cdot B} \hat{f}(a \cdot b) && \text{nga përkufizimi i } \varphi \\
&= \bigvee_{a \cdot b \in A \cdot B} \hat{f}(a) \cdot \hat{f}(b) && \hat{f} \text{ është homomorfizëm} \\
&= \left(\bigvee_{a \in A} \hat{f}(a) \right) \cdot \left(\bigvee_{b \in B} \hat{f}(b) \right) && S \text{ është shpërndarëse} \\
&= \varphi([A]) \cdot \varphi([B]) && \text{nga përkufizimi i } \varphi.
\end{aligned}$$

Më tej tregojmë që φ ruan renditjen. Vërtet, le të jetë $[A] \subseteq [B]$, atëherë

$$\varphi([A]) = \bigvee_{a \in A} \hat{f}(a) \leq \bigvee_{b \in B} \hat{f}(b) = \varphi([B]),$$

meqënëse për çdo $a \in A$, ekziston $b \in B$ e tillë që $a \leq b$. Gjithashtu φ ruan superiorët. Le të jetë $[A_i]$ një familje elementësh çfardo në $\mathcal{P}^\downarrow(F(X))$, atëherë

$$\varphi(\bigvee_{i \in I} [A_i]) = \varphi([\bigcup_{i \in I} A_i]) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{a_i \in A_i} \hat{f}(a_i) = \bigvee_{i \in I} \varphi([A_i]).$$

Është e qartë se për çdo $x \in X$,

$$\varphi \iota(x) = \varphi([x]) = \hat{f}(x) = f(x),$$

që tregon se $\varphi \iota = f$. Një homomorfizëm i tillë $\vee$ -ruajtës φ është i vetëm sepse në qoftë se ψ është një tjetër homomorfizëm i tillë që kënaq $\psi \iota = f$, atëherë për çdo $x \in X$ do të kishim $\psi([x]) = f(x)$. Meqënëse ψ është homomorfizëm, atëherë për çdo fjalë $(x_1, \dots, x_n) \in F(X)$,

$$\begin{aligned}
\psi([(x_1, \dots, x_n)]) &= \psi([x_1]) \cdots \psi([x_n]) \\
&= f(x_1) \cdots f(x_n) = \hat{f}((x_1, \dots, x_n)) \\
&= \varphi([(x_1, \dots, x_n)]),
\end{aligned}$$

që tregon se ψ dhe φ përputhen mbi $\vee$ -gjeneratorët e $\mathcal{P}^\downarrow(F(X))$. Së fundmi, në qoftë se $[A]$ është një element çfardo i $\mathcal{P}^\downarrow(F(X))$, atëherë

$$\begin{aligned}
\psi([A]) &= \psi(\bigvee_{\alpha \in A} [\alpha]) = \bigvee_{\alpha \in A} \psi([\alpha]) && \text{meqënëse } \psi \text{ është } \vee\text{-ruajtës} \\
&= \bigvee_{\alpha \in A} \varphi(\alpha) && \text{meqënëse } \varphi \text{ përputhet me } \psi \text{ mbi } F(X) \\
&= \varphi(\bigvee_{\alpha \in A} [\alpha]) = \varphi([A]),
\end{aligned}$$

e cila përfundon vërtetimin. ■

3.1.2 Paraqitjet e $\vee$ -gjysmëgrupeve

Në rastin e paraqitjeve të gjysmëgrupeve të zakonshëm veprohet duke thyer një gjysmëgrup të lirë $F(X)$ mbi X për kongruencën $R^\#$ të përfutur nga një bashkësi relacionesh R që për saktësi është një bashkësi çiftesh nga $F(X) \times F(X)$. Atëherë

gjysmëgrupi faktor $F(X)/R^\#$ do të thuhet se ka paraqitje $(X:R)$ ku X është bashkësia e përfutuesve dhe R ajo e relacioneve ose relatorëve. Kjo përjasje dështon në rastin e gjysmëgrupeve të renditur sepse në përgjithësi faktori i një gjysmëgrupi të renditur sipas një kongruence nuk është më një *po*-gjysmëgrup. Konstatimi i parë i kësaj anomalie është bërë nga Kehayopulu dhe Tsingelis tek [28]. Më tej të njëjtët autorë kanë studiuar të ashtëquajturat pseudo-renditje tek *po*-gjysmëgrupet të cilat për fat të keq nuk lejojnë përkufizimin e paraqitjeve të fundme pasi bashkësia e relacioneve që përbëjnë pseudo-renditjen është e pafundme. Gjithashtu kongruencat e rregullta dhe fortësisht të rregullta të studiara nga Xie Xiang-Yun tek [58] nuk janë të përshtatshme për përkufizimin e paraqitjeve të *po*-gjysmëgrupeve pasi ato janë ngushtësisht të lidhura me pseudo-renditjet e [28]. Është provuar në fakt se ρ është kongruencë e rregullt në një *po*-gjysmëgrup vetëm në qoftë se ekziston një pseudo-renditje σ e tillë që $\rho = \sigma \cap \sigma^{-1}$. Edhe rezultatet e mëtejshme të Xie Xiang-Yun tek [59] janë në të njëjtën linjë me ato të [58]. Për këto arsye ne vendosëm të ndjekim një përjasje tjetër. Përpara se të shpjegojmë rrugen që do të ndjekim, do të paraqesim këtu një version tjetër të zhytjes së dhënë tek [32] të një *po*-gjysmëgrupi tek një *le*-gjysmëgrup i plotë dhe distributiv. Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një *po*-gjysmëgrup që ka element më të vogël i cili është njëkohësisht edhe zero e shumëzimit, quajmë $\mathcal{F}^\downarrow(S)$ nënbashkësinë e $\mathcal{P}^\downarrow(S)$ që ka për elementë bashkësitë e poshtme $[A]$ ku $A \subseteq S$ është bashkësi e fundme. Lidhur me veprimin $\circ$ të shumëzimit të përcaktuar tek [32], $\mathcal{F}^\downarrow(S)$ formon nëngjysmëgrup të $\mathcal{P}^\downarrow(S)$. Ky nëngjysmëgrup është *po*-gjysmëgrup lidhur me përfshirjen dhe për të kemi ekzistencën e superiorëve të fundëm. Konkretisht, për çdo familje të fundme $(A_i) \in \mathcal{F}^\downarrow(S)$ ku $i \in I$ dhe I e fundme, nga [32] shihet se $\bigvee_{i \in I} (A_i) = (\bigcup_{i \in I} A_i)$ dhe meqënëse secila prej A_i -ve është e fundme, atëherë $(\bigcup_{i \in I} A_i) \in \mathcal{F}^\downarrow(S)$. Ndërkaq është e qartë që $\iota(S) \subseteq \mathcal{F}^\downarrow(S)$ ku ι është zhytja e përcaktuar tek [32]. Pra përfundimisht mund të themi se çdo *po*-gjysmëgrup S zhytet tek $\vee$ -gjysmëgrupi $\mathcal{F}^\downarrow(S)$ i bashkësive të fundme të poshtme.

Le të supozojmë se $(X, \leq)$ është një bashkësi e renditur dhe $(F(X), \cdot, \leq)$ *po*-gjysmëgrupi i lirë me bazë $(X, \leq)$ i ndërtuar tek [47]. Tek [51] është ndërtuar $\vee$ -gjysmëgrupi i plotë nga sipër i lirë $(\mathcal{P}^\downarrow(F(X)), \circ, \subseteq)$ me bazë bashkësinë e renditur të dhënë $(X, \leq)$. Elementët e këtij $\vee$ -gjysmëgrupi janë bashkësitë e poshtme $[A]$, renditja është përfshirja dhe shumëzimi është dhënë me anën e barazimit $[A] \circ [B] = [AB]$. Në qoftë se në vend të $\mathcal{P}^\downarrow(F(X))$ marrim nën $\vee$ -gjysmëgrupin $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ të përcaktuar më sipër, atëherë $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ nuk është më $\vee$ i plotë siç ishte $\mathcal{P}^\downarrow(F(X))$ por për të ekzistojnë superiorët e fundme. Gjithashtu $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ është i lirë me bazë $(X, \leq)$ në kategorinë me objekte *po*-gjysmëgrupet distributivë tek të cilët ekzistojnë superiorët e fundëm dhe morfizma homomorfizmat që ruajnë

superiorët e fundëm. E mira e $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ është që lidhur me $\circ$ dhe $\vee$ formon një Ω -algjebër $(\mathcal{F}^\downarrow(F(X)), \circ, \vee)$ dhe siç dihet nga Teorema 3.5 e [5] faktori A/ρ i një Ω -algjebre A për një kongruencë ρ çfardo në A jep përsëri një Ω -algjebër të të njëjtit lloj me A . Ekziston një rezultat tek [5] analog me atë të Pohimit 1.5.8 tek [9] që përshkruan kongruencën $R^\#$ të përfutur nga një bashkësi relacionesh në një gjysmëgrup S . Rezultati në fjalë është Teorema 6.2 e cila pohon se bashkësia $\mathcal{C}_\Omega(A)$ e të gjithë kongruencave në një Ω -algjebër A është një sistem algjebrik i mbyllur që do të thotë se $\mathcal{C}_\Omega(A)$ përputhet me $\mathcal{B}_\Gamma(A^2)$ ku Γ është një fushë operatorësh në A^2 dhe $\mathcal{B}_\Gamma(A^2)$ është bashkësia e të gjithë nën Γ -algjebrave të A^2 lidhur me operatorët Γ . Më poshtë do të tregojmë me hollësi se si përdoret ky rezultat për të gjetur se kush është kongruenca më e vogël në një Ω -algjebër A që përmban një bashkësi të dhënë R . Më pas do ta përdorim këtë përshkrim të adaptuar për rastin e $(\mathcal{F}^\downarrow(F(X)), \circ, \vee)$.

Për të vërtetuar barazimin $\mathcal{C}_\Omega(A) = \mathcal{B}_\Gamma(A^2)$ tek teorema 6.2 e [5] duhet përcaktuar Γ në mënyrë të përshtatshme. Për këtë janë përcaktuar këto operatorë

- (i) Për çdo $a \in A$ një veprim 0-or $\lambda = \lambda(a)$ i tillë që $\lambda = (a, a)$;
- (ii) Një operator 1-or μ i tillë që $\mu(x, y) = (y, x)$;
- (iii) Një operator 2-or ν i tillë që

$$\nu((x, y), (z, t)) = (x, t) \text{ në qoftë se } y = z \text{ dhe } (x, y) \text{ përndryshe}$$

- (iv) Për çdo $\omega \in \Omega(n+1)$ ku $n \geq 0$, për çdo n -she $(a_1, \dots, a_n)$ nga A dhe për çdo $i = 1, \dots, n+1$, është përcaktuar një operator 1-or $\rho = \rho(\omega, a_1, \dots, a_n, i)$ i tillë që

$$\rho(x, y) = (\omega(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_i, \dots, a_n), \omega(a_1, \dots, a_{i-1}, y, a_i, \dots, a_n)).$$

Është e qartë se një kongruencë në A nuk është gjë tjetër veçse një nën-algjebër e $A \times A$ lidhur me operatorët Γ , pra një element i $\mathcal{B}_\Gamma(A^2)$. Kjo sjell që për çdo bashkësi R relacionesh në A , domethënë për çdo nënbashkësi të $A \times A$, kongruenca në A e përfutur nga R është prerja e të gjithë nënalgjebrave të $\mathcal{B}_\Gamma(A^2)$ që përmbajnë R -në. Rrjedhimisht, për të përfutur kongruencën në fjalë, në fillim ndërtojmë bashkësinë R^c që është bashkimi i të gjitha $\rho(x, y)$ ku $(x, y) \in R$, $\omega \in \Omega(n+1)$, $n \geq 0$, dhe $(a_1, \dots, a_n)$ një n -she çfardo nga A . Pastaj aplikojmë mbi çdo element të R^c së ndërtuar operatorët λ , μ dhe ν duke përfutur kështu një bashkësi të re $(R^c)^e$ që është ekuivalenca e përfutur nga R^c . Nga përkufizimi i kongruencës kemi që $(R^c)^e = R^\#$. Ky rezultat është analogu i atij të ndërtimit të kongruencave tek [9].

Le të jetë tani $(S, \cdot, \leq)$ një $\vee$ -gjysmëgrup. Do të themi se çifti $((X, \leq), R)$ është një paraqitje e $(S, \cdot, \leq)$ në qoftë se $(X, \leq)$ është një bashkësi e renditur, R është një nënbashkësi e $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))^2$ dhe $S \cong \mathcal{F}^\downarrow(F(X))/R^\#$. Në qoftë se X është i fundëm atëherë do të themi se S është me përfitim të fundëm, dhe në qoftë se për më tepër R është e fundme, do të themi se S është me paraqitje të fundme.

Skema e përgjithshme e përshkruar më lart për ndërtimin e kongruencës së përftuar nga një relacion i dhënë në një Ω -algjebër çfardo, mund të adaptohet lehtësisht në rastin e $\mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ të konsideruar si Ω -algjebër me dy veprime, $\circ$ dhe $\vee$. Fillimisht, për çdo relacion $((U], (V])$ nga R -ja, krijojmë dy bashkësi,

$$\{((W_1] \circ (U] \circ (W_2], (W_1] \circ (V] \circ (W_2]) \mid (W_1], (W_2]) \in \mathcal{F}^\downarrow(F(X))\}$$

dhe

$$\{((W_1] \vee (U] \vee (W_2], (W_1] \vee (V] \vee (W_2]) \mid (W_1], (W_2]) \in \mathcal{F}^\downarrow(F(X))\},$$

e më pas marrim bashkimin e bashkësive të tilla të ndërtuara për të gjitha çiftet $((U], (V])$ nga R -ja, bashkim i cili jep R^c , dhe më pas merret ekuivalenca e përftuar nga kjo e fundit.

3.1.2.1 Vetë fundshmërie të paraqitjeve

Lidhur me kongruencën e përcaktuar nga R mund të percaktojmë një sistem reduktimi $(\Sigma, \rightarrow)$ ku $\Sigma = \mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ dhe derivimet një-hapëshe $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ janë dy llojesh:

$$\sigma_1 = (W_1] \circ (U] \circ (W_2], \sigma_2 = (W_1] \circ (V] \circ (W_2] \text{ dhe } ((U], (V]) \in R,$$

ose

$$\sigma_1 = (W_1] \vee (U] \vee (W_2], \sigma_2 = (W_1] \vee (V] \vee (W_2] \text{ dhe } ((U], (V]) \in R.$$

Në qoftë se R është një bashkësi zbritëse relacionesh në sensin që për çdo $((U], (V]) \in R$ të kemi $\forall u \in U, \exists v \in V, u > v$, atëherë $\sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ sjell që $\sigma_2 \subseteq \sigma_1$.

Një rast më i përgjithshëm paraqitjesh sesa ato me përfitim të fundëm është ai kur bashkësia e renditur $(X, \leq)$ është Noterian në sensin që në X nuk ekziston asnjë zinxhir zbritës i pafundëm. Për të tilla paraqitje ka vend lema e mëposhtme.

Lemë 3.1.1 *Në qoftë se $(X, \leq)$ është një bashkësi e renditur Noteriane, atëherë bashkësia e renditur $(F(X), \leq)$ është gjithashtu Noterian.*

Vërtetim. Do të vërtetojmë se çdo zinxhir

$$u \geq u_1 \geq u_2 \geq \dots \quad (\text{N.1})$$

në $F(X)$ përfundon. Vërtetimi do të bëhet me induksion sipas gjatësisë së u . Në rastin kur gjatësia është 1, atëherë fjalët u_k për $k \geq 1$ janë shkronja, rrjedhimisht nga fakti që $(X, \leq)$ është Noterian marrim se zinxhiri në fjalë në këtë rast përfundon. Supozojmë tani për induksion se pohimi vlen për fjalët me gjatësi n dhe duam ta provojmë për ato me gjatësi $n+1$. Kështu gjatësia e u është $n+1$. Le të jetë për çdo $k \geq 1$, x_{k1} shkronja e parë e fjalës u_k dhe x shkronja e parë e fjalës u . Për këto shkronja kemi zinxhirin

$$x \geq x_{11} \geq x_{21} \geq \dots$$

i cili nga supozimi për bashkësinë e renditur $(X, \leq)$ përfundon, të themi në y dhe kjo ndodh tek fjala u_n . Konsiderojmë tani zinxhirin

$$u' \geq u'_1 \geq u'_2 \geq \dots \quad (\text{N.2})$$

ku u' është përftuar nga u duke larguar x me të cilin fillon, ndërsa për $k=1, \dots, n-1$, u'_k është përftuar nga u_k duke larguar x_{k1} me të cilën fillon dhe për $k \geq n$, u'_k përftohet nga u_k duke larguar y me të cilin fillon. Mirëpo në këtë rast gjatësia e u' është n dhe atëherë nga supozimi induktiv do të kemi që zinxhiri (N.2) përfundon, le të themi tek u'_p . Tani është e qartë që zinxhiri i dhënë (N.1) do të përfundojë tek fjala $u_p = yu'_p$. ■

Rast me interes paraqitjesh është ai kur relacionet (U, V) të R -së janë të tilla që $U = \{u\}$ dhe $V = \{v\}$ ku $u, v \in F(X)$ të tilla që $u > v$. Për të parë nëse sistemi i reduktimit në raste si ky është Noterian ne mund të shmangim derivimet e llojit të dytë duke vepruar në këtë mënyrë. Shkruajmë $[A]$ në formën $\bigvee_{a \in A} [a]$, transformojmë secilën $[a]$ tek një e pareduktueshme $(a_0]$ dhe pastaj marrim $\bigvee_{a \in A} (a_0] = (\bigcup_{a \in A} a_0]$ e cila është vetë e pareduktueshme. Në rastin më të përgjithshëm të relacioneve zbritës çdo $[A]$ mund të reduktohet tek një $[B]$ e pareduktueshme modulo bashkësinë e derivimeve të llojit të dytë. Pra problemi i reduktimit të një element $[A]$ të dhënë tek një $[B]$ i pareduktueshëm sillet tek verifikimi për derivimet e llojit të parë. Teorema 3.1.2 që vijon konfirmon se çdo $[A] \in \mathcal{F}^\downarrow(F(X))$ është ekuivalent modulo R me një $[B]$ e cila është e pareduktueshme. E thënë ndryshe, sistemi $(\Sigma, \rightarrow)$ është Noterian.

Teoremë 3.1.2 *Në qoftë se bashkësia e renditur $(X, \leq)$ është Noteriane dhe R është një bashkësi zbritëse relacionesh, atëherë sistemi i reduktimit $(\Sigma, \rightarrow)$ është sistem Noterian.*

Vërtetim. Supozojmë se ekziston një zinxhir i pafundëm zbritës me derivime të llojit të parë

$$\sigma_1 \rightarrow \sigma_2 \rightarrow \dots \rightarrow \sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1} \rightarrow \dots \quad (\text{N.3})$$

që i shkruar ndryshe do të ishte

$$(A_1] \rightarrow (A_2] \rightarrow \cdots \rightarrow (A_n] \rightarrow (A_{n+1}] \rightarrow \cdots$$

Këtij zinxhiri i korrespondon vargu jo-rritës i bashkësive të poshtme

$$(A_1] \supseteq (A_2] \supseteq \cdots \supseteq (A_n] \supseteq (A_{n+1}] \supseteq \cdots \quad (\text{N.4})$$

Vëmë re nuk mund të ndodhë që ky varg zbritës të stabilizohet pas njëfare indeksi n , pasi po të ishte ashtu do të kishim nënvargun

$$(A_n] = (A_{n+1}] = \cdots$$

dhe ndërkaq këtij i korrespondon në krahun tjetër nënvargu rigorozisht zbritës

$$\sigma_n \rightarrow \sigma_{n+1} \rightarrow \cdots$$

Asnjë nga derivimet $\sigma_t \rightarrow \sigma_{t+1}$ më lart nuk mund të jetë i llojit të parë pasi në atë rast do të kishim që çdo element i A_{t+1} do të ishte rigorozisht poshtë një elementi të A_t e për pasojë $(A_{t+1}] \subset (A_t]$ përkundër barazimeve të supozuara më lart. Nga ana tjetër asnjë nga derivimet $\sigma_t \rightarrow \sigma_{t+1}$ nuk është i llojit të dytë pasi kjo do të binte ndesh me kushtin. Kështu mbetet që vargu (N.4) të mos stabilizohet askund. Në kushtet tona çdo derivim $(A_n] \rightarrow (A_{n+1}]$ tek (N.3) do të ishte i formës $(W_1 \cdot U \cdot W_2] \rightarrow (W_1 \cdot V \cdot W_2]$ ku për çdo $u \in U$ ekziston një $v \in V$ e tillë që $u > v$. Kjo do të thotë që çdo $\omega_1 u \omega_2 \in A_n$ ekziston një $\omega_1 v \omega_2 \in A_{n+1}$ e tillë që $\omega_1 u \omega_2 > \omega_1 v \omega_2$. Nga kjo rrjedh se mund të gjendet një zinxhir zbritës

$$a_1 > a_2 > \cdots \quad (\text{N.5})$$

në $F(X)$ ku $a_i \in A_i$ për çdo $i \geq 1$. Por kjo kundërshton rezultatin e lemës 3.1.1 e për pasojë konkludojmë se (N.3) përfundon. ■

Një anomali që i bën sistemet e reduktimit jo Noteriane është ekzistenca e cikleve. Lema 2.2.5 e [2] pohon se çdo sistem reduktimi i cili është globalisht i fundëm dhe aciklik, është edhe Noterian. Kjo tregon se mungesa e cikleve së bashku me fundshmërinë globale do të sillnin përfundueshmërinë. Më tej do të shohim se me çfarë është ekuivalente mungesa e cikleve në terma të teorisë së gjysmëgrupeve.

Në tezën e tij të doktoratës [44] Pasku i shoqëroi çdo sistemi reduktimi $(\Sigma, \rightarrow)$ një nënmonoid P të monoidit të plotë të transformimeve $\mathcal{T}(\Sigma)$ të bashkësisë Σ në mënyrën e mëposhtme:

$$P = \{\tau \in \mathcal{T}(\Sigma) : \tau(a) = b \text{ vetëm në qoftë se } b \text{ është pasardhës i } a \text{ ose } a = b\}.$$

Është e qartë që, lidhur me kompozimin e transformimeve, P formon një nënmonoid të $\mathcal{T}(\Sigma)$ i cili quhet monoidi i reduktimeve të $(\Sigma, \rightarrow)$. Qëllimi aty ka qënë studimi i sistemeve Noteriane dhe konfluente me mjete të teorisë së gjysmëgrupeve. Siç e thamë më lart, këtu do të tentojmë të njëjtën gjë por lidhur me përfundueshmerinë.

Konsiderojmë koproduktin $P * P$ në kategorinë e monoidëve të P me veten e vet. Më tej, le të jetë $\mathbb{Z}\Sigma$ grupi i lirë abelian me bazë Σ . Çdo $\tau \in P$ përcakton një endomorfizëm $[\tau] \in \text{End}(\mathbb{Z}\Sigma)$ të dhënë nga barazimi

$$[\tau](\sum_{i \in I} z_i a_i) = \sum_{i \in I} z_i \tau(a_i).$$

Në këtë mënyrë përcaktohet një homomorfizëm

$$\varphi: P \rightarrow \text{End}(\mathbb{Z}\Sigma) \text{ i tillë që } \tau \mapsto [\tau]$$

Ky homomorfizëm bën të mundur ekzistencën e produktit gjysëm të drejtë $\mathbb{Z}\Sigma \rtimes_{\varphi} P$.

Për çdo $a \in \Sigma$ përcaktojmë tani

$$\lambda_a: P \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma \rtimes_{\varphi} P$$

të tillë që

$$\tau \mapsto (a - \tau(a), \tau).$$

Ky është homomorfizëm pasi për τ_1 dhe τ_2 nga P nga njëra anë kemi që

$$\lambda_a(\tau_2 \circ \tau_1) = (a - \tau_2(\tau_1(a)), \tau_2 \circ \tau_1),$$

dhe nga ana tjetër që

$$\begin{aligned} \lambda_a(\tau_2) \cdot \lambda_a(\tau_1) &= (a - \tau_2(a), \tau_2) \cdot (a - \tau_1(a), \tau_1) \\ &= (a - \tau_2(a) + [\tau_2](a - \tau_1(a)), \tau_2 \circ \tau_1) \\ &= (a - \tau_2(a) + \tau_2(a) - \tau_2(\tau_1(a)), \tau_2 \circ \tau_1) \\ &= (a - \tau_2(\tau_1(a)), \tau_2 \circ \tau_1), \end{aligned}$$

që tregon barazimin $\lambda_a(\tau_2 \circ \tau_1) = \lambda_a(\tau_2) \cdot \lambda_a(\tau_1)$.

Vetia universale e koprodukteve sjell ekzistencën e një homomorfizmi unik $\lambda: P * P \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma \rtimes_{\varphi} P$ i tillë që $\lambda \circ \iota = \lambda_a$ ku $\iota: P \rightarrow \mathbb{Z}\Sigma \rtimes_{\varphi} P$ është injeksioni përkatës i koproduktit.

Pohim 3.1.3 Sistemi $(\Sigma, \rightarrow)$ nuk përmban cikle atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo $a \in \Sigma$, $\text{im}(\lambda) \cap P = \emptyset$.

Vërtetim. Supozojmë se ekziston një element $\tau_1 * \dots * \tau_n$ i tillë që pasqyrohet me anën e λ tek $(0, \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n) \in \mathbb{Z}\Sigma \rtimes_{\varphi} P$. Atëherë do të kishim

$$\begin{aligned} (0, \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n) &= \lambda(\tau_1 * \dots * \tau_n) \\ &= (a - \tau_1(a), \tau_1) \cdots (a - \tau_n(a), \tau_n) \\ &= (a - (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_n)(a), \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n) \end{aligned}$$

prej nga marrim që $(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_n)(a) = a$ ose ndryshe që tek a ekziston një cikël, pra një kontradiktë.

Anasjellas, nëse do të kishim një cikël në një element $a \in \Sigma$, atëherë do të gjendeshin $\tau_1, \dots, \tau_n \in P$, të tilla që $(\tau_1 \circ \dots \circ \tau_n)(a) = a$. Në këto kushte do të kishim që

$$\begin{aligned} \lambda(\tau_1 * \dots * \tau_n) &= (a - \tau_1(a), \tau_1) \cdots (a - \tau_n(a), \tau_n) \\ &= (a - (\tau_1 \circ \dots \circ \tau_n)(a), \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n) \\ &= (0, \tau_1 \circ \dots \circ \tau_n) \in P, \end{aligned}$$

në kundërshtim me supozimin. Atëherë mbetet që të mos ketë pasur një cikël në a . ■

3.1.3 Ndërtimi i *po-gjysmëgrupeve metrikë të lirë*

Do të përcaktojmë tani kategorinë e gjysmëgrupeve metrikë të renditur dhe do të ndërtojmë aty objektet e lirë. Kategoria e gjysmëgrupeve metrikë është përcaktuar nga B. Saunders në [1]. Do të japim më poshtë përkufizimin e tij. *Një gjysmëgrup metrik është një treshe $(S, \cdot, \ell_S)$ ku $(S, \cdot)$ është një gjysmëgrup dhe $\ell_S : S \rightarrow \mathbb{N}$ është një homomorfizëm tek gjysmëgrupi mbledhës i numrave natyrorë i cili zakonisht është quajtur funksion gjatësie i S . Në qoftë se $(S_1, \cdot, \ell_{S_1})$ dhe $(S_2, \cdot, \ell_{S_2})$ janë dy gjysmëgrupe metrikë, atëherë një morfizëm $h : (S_1, \cdot, \ell_{S_1}) \rightarrow (S_2, \cdot, \ell_{S_2})$ është pikërisht një homomorfizëm gjysmëgrupesh $h : (S_1, \cdot) \rightarrow (S_2, \cdot)$ me vetinë shtesë që $\ell_{S_2} \circ h = \ell_{S_1}$.*

Një përkufizim alternativ i gjysmëgrupeve metrikë do të ishte duke i parë ata si objekte nga kategoria e gjysmëgrupeve mbi gjysmëgrupin mbledhës të numrave natyrorë. Për përkufizimin e përgjithshëm të kategorisë së objekteve mbi një objekt të caktuar i referohemi monografisë [40].

Do të japim tani përkufizimet tona për bashkësitë metrike të renditura dhe gjysmëgrupet metrikë të renditur.

Përkufizim 3.1.4 Kategoria e bashkësive metrike të renditura **OMSets** ka për objekte treshet $(X, \preceq, \ell_X)$ ku $(X, \preceq)$ është një bashkësi e renditur dhe $\ell_X : X \rightarrow \mathbb{N}$ është një pasqyrim që kënaq implikimin $\ell_X(x_1) < \ell_X(x_2) \Rightarrow x_1 \prec x_2$. Një morfizëm

$f : (X, \preceq, \ell_X) \rightarrow (Y, \preceq, \ell_Y)$ është një pasqyrim që ruan renditjen $f : (X, \preceq) \rightarrow (Y, \preceq)$ dhe që kënaq vetinë shtesë që $\ell_Y \circ f = \ell_X$.

Një bashkësi metrike e renditur $(X, \preceq, \ell_X)$ thuhet se ka një *metrike konstante* në qoftë se ℓ_X është funksion konstant.

Shembull 3.1.5 Jepet një bashkësi jo boshe X dhe supozojmë se $<$ është relacion renditje në X . Në [37] Kobayashi ka përcaktuar renditjen gjatësi-leksikografike $<_{lex}$ tek gjysmëgrupet e lirë $F(X)$ si vijon. Le të jenë $x = (x_1, \dots, x_m)$ dhe $y = (y_1, \dots, y_n)$ fjalë në $F(X)$. Në qoftë se $m < n$, atëherë $x <_{lex} y$, dhe në qoftë se $m = n$ por ekziston $1 \leq i \leq m-1$ e tillë që $x_i = y_i$ për $t = 1, \dots, i$ dhe $x_{i+1} < y_{i+1}$, atëherë $x <_{lex} y$. Është provuar që kjo renditje është frytdhënëse në studimin e sistemeve të rishkrimit. Tani ne mund të përcaktojmë $\ell_{F(X)} : F(X) \rightarrow \mathbb{N}$ nga $(x_1, \dots, x_n) \mapsto n$ dhe të shohim që $(F(X), <_{lex}, \ell_{F(X)})$ bëhet bashkësi metrike e renditur. Gjithashtu, në qoftë se e shohim X si një nënbashkësi të $F(X)$ dhe të shënojmë me $\tilde{\ell}_X$ ngushtimin e $\ell_{F(X)}$ mbi X , shohim që $(X, <, \tilde{\ell}_X)$ është bashkësi metrike e renditur me metrike konstante njësh.

Përkufizim 3.1.6 Kategoria e gjysmëgrupeve metrikë të renditur **OMSgrp** ka për objekte katërshen $(S, \cdot, \preceq, \ell_S)$ ku $(S, \cdot, \preceq)$ është gjysmëgrup i renditur, $(S, \cdot, \ell_S)$ është gjysmëgrup metrik dhe homomorfizmi ℓ_S kënaq implikimin $\ell_S(s_1) < \ell_S(s_2) \Rightarrow s_1 < s_2$. Një morfizm $f : (S_1, \cdot, \preceq, \ell_{S_1}) \rightarrow (S_2, \cdot, \preceq, \ell_{S_2})$ është një homomorfizm që ruan renditjen $f : (S_1, \cdot, \preceq) \rightarrow (S_2, \cdot, \preceq)$ që kënaq vetinë shtesë $\ell_{S_2} \circ f = \ell_{S_1}$.

Për një bashkësi të renditur të dhënë $(X, \preceq, \ell_X)$ me metrike konstante, ne do të tregojmë që gjysmëgrupit të lirë $F(X)$ mund ti jepet struktura e një gjysmëgrupi metrik të renditur ku renditja lind nga ajo në X . Së pari, është e thjeshtë të përcaktojmë funksionin gjatësi:

$$\ell_{F(X)} : F(X) \rightarrow \mathbb{N} \text{ i tillë që } (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n \ell_X(x_i).$$

Është e qartë se $\ell_{F(X)}$ është homomorfizm gjysmëgrupesh i cili pasqyron çdo fjalë të $F(X)$ tek gjatësia e tij shumëzuar me konstanten $\ell_X(x)$ për çdo $x \in X$.

Përpara se të përcaktojmë renditjen $\preceq$ në $F(X)$, ne bëjmë përkufizimin që vijon.

Në qoftë se $u = (x_1, \dots, x_n), u' = (y_1, \dots, y_n) \in F(X)$ janë fjalë të së njëjtës gjatësi, atëherë do të themi se u është leksikografisht përpara u' , dhe e shënojmë me $u \preceq_{lex} u'$, vetëm në qoftë se për çdo $i = 1, \dots, n, x_i \preceq y_i$.

Tani konsiderojmë relacionin e mëposhtëm në $F(X)$.

$u \preceq v$ vetëm nëse, ose $\ell_{F(X)}(u) < \ell_{F(X)}(v)$, ose $\ell_{F(X)}(u) = \ell_{F(X)}(v)$ dhe $u \preceq_{lex} v$.

Është e lehtë të shihet se $\preceq$ është pjesërisht i renditur në $F(X)$ dhe që për çdo $u, v, w \in F(X)$, në qoftë se $u \preceq v$, atëherë $wu \preceq wv$ dhe $uw \preceq vw$, të cilat e bëjnë $(F(X), \cdot, \preceq)$ gjysmëgrup të renditur. Për më tepër kemi që $(F(X), \cdot, \preceq, \ell_{F(X)})$ është një gjysmëgrup metrik i renditur. Vërejmë për përdorim të mëtejshëm që ekziston një morfizm injektiv $\iota: (X, \preceq, \ell_X) \rightarrow (F(X), \preceq, \ell_{F(X)})$ bashkësish metrike të renditura të përcaktuar nga $x \mapsto (x)$.

Teoremë 3.1.7 Në qoftë se $(X, \preceq, \ell_X)$ është një bashkësi metrike e renditur me konstante metrike, atëherë $(F(X), \cdot, \preceq, \ell_{F(X)})$ është gjysmëgrupi metrik i renditur i lirë me bazë $(X, \preceq, \ell_X)$.

Vërtetim. Kemi për të vërtetuar që për çdo gjysmëgrup metrik të renditur $(S, \cdot, \preceq, \ell_S)$ dhe çdo morfizm bashkësish metrike të renditura $f: (X, \preceq, \ell_X) \rightarrow (S, \preceq, \ell_S)$, ekziston një morfizm i vetëm gjysmëgrupesh metrike të renditura $\varphi: (F(X), \cdot, \preceq, \ell_{F(X)}) \rightarrow (S, \cdot, \preceq, \ell_S)$ i tillë që $\varphi \circ \iota = f$.

Pasqyrimi i bashkësive $f: X \rightarrow S$ indukon një homomorfizm gjysmëgrupesh $\varphi: F(X) \rightarrow S$ (i shënuar me $\hat{f}$ në hyrje). Do tregojmë se φ është morfizm gjysmëgrupesh metrikë të renditur. Për këtë qëllim ne kemi për të provuar se $\ell_S \circ \varphi = \ell_{F(X)}$ dhe se, në qoftë se $u \preceq v$ në $F(X)$, atëherë $\varphi(u) \preceq \varphi(v)$ në S . Për të parën, le të jetë $(x_1, \dots, x_n)$ një fjalë çfardo në $F(X)$, atëherë

$$\begin{aligned} \ell_S(\varphi((x_1, \dots, x_n))) &= \ell_S(f(x_1) \cdots f(x_n)) && \text{nga përkufizimi i } \varphi \\ &= \ell_S(f(x_1)) + \cdots + \ell_S(f(x_n)) && \ell_S \text{ është homomorfizm} \\ &= \ell_X(x_1) + \cdots + \ell_X(x_n) && f \text{ është pasqyrim bashkësish metrike} \\ &= \ell_{F(X)}((x_1, \dots, x_n)) && \text{nga përkufizimi i } \ell_{F(X)}. \end{aligned}$$

Për të dytën, le të jetë $u \preceq v$ në $F(X)$. Janë të mundura dy raste. I pari, $\ell_{F(X)}(u) < \ell_{F(X)}(v)$ dhe i dyti $\ell_{F(X)}(u) = \ell_{F(X)}(v)$ por $u \preceq_{lex} v$. Në rastin e parë kemi

$$\ell_S(\varphi(u)) = \ell_{F(X)}(u) < \ell_{F(X)}(v) = \ell_S(\varphi(v)),$$

e cila tregon se $\ell_S(\varphi(u)) < \ell_S(\varphi(v))$, rrjedhimisht $\varphi(u) \prec \varphi(v)$. Në rastin e dytë, supozojmë $u = (x_1, \dots, x_n)$ dhe $v = (y_1, \dots, y_n)$ dhe që $x_i \preceq y_i$ për $i = 1, \dots, n$. Atëherë

$$\varphi(u) = f(x_1) \cdots f(x_n) \preceq f(y_1) \cdots f(y_n) = \varphi(v),$$

që provon kështu pohimin për këtë rast.

Më tej, duke përdorur përkufizimin e φ , shohim që $\varphi \circ \iota = f$.

Së fundi kemi për të provuar që φ është e vetme me vetitë e dhëna. Vërtet, në qoftë se $\psi : (F(X), \cdot, \preceq, \ell_{F(X)}) \rightarrow (S, \cdot, \preceq, \ell_S)$ është një tjetër morfizëm gjysmëgrupesh metrikë të renditur i tillë që $\psi \circ \iota = f$, atëherë nga kushti $\varphi \circ \iota = f$, kemi që për çdo $x \in X$, $\psi(x) = f(x) = \varphi(x)$ që tregon se ψ dhe φ përputhen në gjeneratorët e $F(X)$ prandaj ato janë të barabarta me njëra-tjetrën. ■

Së fundi vërtetojmë pohimin e mëposhtëm.

Pohim 3.1.8 Në qoftë se $(X, \preceq)$ është latisë, atëherë $(F(X), \cdot, \preceq)$ është një latisë shpërdarëse.

Vërtetim. Do tregojmë se ekzistojnë $a \wedge b$ dhe $a \vee b$ për dy elemente çfardo a, b të $F(X)$ dhe që për ndonjë $c \in F(X)$, $c(a \vee b) = ca \vee cb$ dhe $(a \vee b)c = ac \vee bc$. Le të jenë $a = (x_1, \dots, x_s)$ dhe $b = (y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_k)$, ku prapashtesat $(y_{s+1}, \dots, y_k)$ mund të jenë bosh. Për ekzistencën e $a \wedge b$ do të provojmë se

$$a \wedge b = \begin{cases} (x_1 \wedge y_1, \dots, x_s \wedge y_s) & \text{në qoftë se } s = k \\ a & \text{në qoftë se } s < k \end{cases}$$

Vërtet, në qoftë se $s < k$, atëherë nga përkufizimi, $a < b$ dhe $a \wedge b = a$. Tani, në qoftë se $s = k$, nga përkufizimi i $\preceq$ është e qartë se $(x_1 \wedge y_1, \dots, x_s \wedge y_s) \preceq a$ dhe $(x_1 \wedge y_1, \dots, x_s \wedge y_s) \preceq b$. Tani le të jetë $c = (z_1, \dots, z_t) \in F(X)$ e tillë që $c \preceq a$ dhe $c \preceq b$. Rrjedh se $t \leq s$. Në qoftë se $t < s$, atëherë menjëherë do të përftonim $c \preceq (x_1 \wedge y_1, \dots, x_s \wedge y_s)$. Përndryshe, në qoftë se $t = s$, atëherë $z_i \leq x_i$ dhe $z_i \leq y_i$ për $i = 1, \dots, t$, prandaj $z_i \leq x_i \wedge y_i$ për $i = 1, \dots, t$ dhe si rezultat $c \preceq (x_1 \wedge y_1, \dots, x_s \wedge y_s)$. Për ekzistencën e $a \vee b$ pohojmë se

$$a \vee b = \begin{cases} (x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) & \text{në qoftë se } s = k \\ b & \text{në qoftë se } s < k \end{cases}$$

Vërtet, në qoftë se $s < k$, atëherë nga përkufizimi $a < b$ dhe $a \vee b = b$. Në qoftë se tani $s = k$, atëherë përsëri përkufizimi i $\preceq$ siguron se $(x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) \geq a$ dhe $(x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) \geq b$. Le të jetë tani $c = (z_1, \dots, z_t) \in F(X)$ i tillë që $a \preceq c$ dhe $b \preceq c$, atëherë $s \leq t$. Në qoftë se $t > s$, atëherë rrjedh menjëherë $a, b < c$, për rrjedhojë $(x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) \preceq c$. Përndryshe, në qoftë se $t = s$, atëherë $x_i \vee y_i \preceq z_i$ për $i = 1, \dots, s$ e cila implikon se

$$(x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) \preceq (z_1, \dots, z_s),$$

duke provuar kështu pohimin. Së fundi, le të jetë $c = (z_1, \dots, z_t)$, $a = (x_1, \dots, x_s)$ dhe $b = (y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_k)$. Do të provojmë se $c(a \vee b) = ca \vee cb$. Barazimi tjetër $(a \vee b)c = ac \vee bc$ provohet në mënyrë duale. Në qoftë se $k > s$, atëherë

$$c(a \vee b) = (z_1, \dots, z_t, y_1, \dots, y_s, y_{s+1}, \dots, y_k) = cb,$$

dhe

$$ca \vee cb = cb$$

meqënëse $\ell_x(ca) < \ell_x(cb)$. Nëse tani $k = s$, atëherë

$$c(a \vee b) = (z_1, \dots, z_t, x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s),$$

dhe

$$\begin{aligned} ca \vee cb &= (z_1, \dots, z_t, x_1, \dots, x_s) \vee (z_1, \dots, z_t, y_1, \dots, y_s) \\ &= (z_1, \dots, z_t, x_1 \vee y_1, \dots, x_s \vee y_s) \\ &= c(a \vee b) \end{aligned}$$

që përfundon vërtetimin. ■

3.2 ℓ -Gjysmëgrupet të para si algjebra

Një *po*-gjysmëgrup mund të zhytet në një ℓ -gjysmëgrup siç tregohet në [32] dhe [31], por në secilin rast zhytja nuk ruan superiorët që mund të ekzistojnë në burim. Qëllimi i parë i këtij paragrafi është të ri-përcaktojë ℓ -gjysmëgrupin në të cilin *po*-gjysmëgrupi zhytet në një mënyrë të tillë që anomalia e mësipërme të mos ndodhë. Qëllimi i dytë lidhet me një diskutim që bëhet prej kohësh rreth ngjashmërisë të teorisë së *po*-gjysmëgrupeve e cila bazohet mbi idealet e renditur dhe asaj të ℓ -gjysmëgrupeve e cila bazohet mbi elementët idealë. Komente të dobishme rreth kësaj teme mund të gjenden për shembull në [35]. Qëllimi ynë është të shohim për ngjashmëri globale ndërmjet *po* dhe ℓ -gjysmëgrupeve, dhe global këtu nënkupton këndvështrimin nga pikëpamja kategorike. Në mënyrë më të qartë, nga njëra anë ne gjejmë bashkëngjitje ndërmjet kategorive me objekte *po*-gjysmëgrupet dhe nga ana tjetër asaj me objekte ℓ -gjysmëgrupet. Funktori i parë që të vjen ndërmend nga e para te e dyta kategori është funktori përfshirës. Një funktor tjetër jo aq evident sa i pari, është ai i drejtimit të kundërt dhe përkufizimi i tij mbështetet në zhytjen e përcaktuar në pjesën e parë të kapitullit. Çifti është në fakt një çift funksorësh të bashkëngjitur dhe më interesantja, kategoria e ℓ -gjysmëgrupeve që ne marrim në konsideratë rezulton të jetë izomorfe me kategorinë e T -algjebrave mbi *po*-gjysmëgrupet ku T

është monadi i përcaktuar me anë të bashkëngjitjes. Me fjalë më të thjeshta, ℓ -gjysmëgrupet mund të shihen si T -algjebra në kategorinë e po -gjysmëgrupeve.

3.2.1 Teorema e zhytjes

Në këtë paragraf do të konsiderojmë gjysmëgrupet e renditur $(S, \cdot, \leq)$ të cilët përmbajnë një element zero i cili është në të njëjtën kohë elementi më i vogël i S dhe për shkurtim themi se një gjysmëgrup i tillë ka një element zero. Ky nuk është një kufizim real meqenëse në qoftë se ne kemi një gjysmëgrup të renditur $(S, \cdot, \leq)$ që nuk përmban një të tillë, atëherë ne mund ta zgjerojmë S në një gjysmëgrup të renditur me një element më të vogël i cili është në të njëjtën kohë zeroja e shumëzimit. Kjo bëhet duke i shtuar S një element 0 dhe duke i përcaktuar $S^0 = S \cup \{0\}$ një shumëzim të ri $*$ dhe një renditje të re $\leq_0$ sipas

$$a * b = \begin{cases} ab & \text{në qoftë se } a, b \in S \\ 0 & \text{në qoftë se } a = 0 \text{ ose } b = 0 \end{cases} \text{ dhe } \leq_0 := \leq \cup \{(0, x) \mid x \in S^0\}.$$

Është e qartë që S zhytet në S^0 dhe struktura algjebrike e S mbetet e paprekur. Kështu që tani e në vazhdim ne supozojmë që po -gjysmëgrupi $(S, \cdot, \leq)$ ka një element zero që shënohet me 0 . Gjithashtu ne i shtojmë një veti tjetër po -gjysmëgrupit tonë, atë të shpërndarjes. Në qoftë se X, Y janë nënbashkësi të fundme të S dhe $\bigvee_{x \in X} x$ dhe

$\bigvee_{y \in Y} y$ ekzistojnë në S , atëherë $\bigvee_{xy \in X \cdot Y} xy$ ekziston gjithashtu dhe

$$\bigvee_{xy \in X \cdot Y} xy = \left(\bigvee_{x \in X} x \right) \cdot \left(\bigvee_{y \in Y} y \right).$$

Më tej do të përcaktojmë bashkësitë e poshtme si vijon. Në qoftë se $A \subseteq S$ është e fundme jo-boshe, atëherë konsiderojmë $C(A)$ nënbashkësinë e S e cila përmban A së bashku me të gjithë superiorët e nënbashkësive të A që mund të ekzistojnë në S . Me fjalë të tjera, $\alpha \in C(A)$ vetën në qoftë se gjendet $A' \subseteq A$ e tillë që $\alpha = \bigvee_{a' \in A'} a'$. Është e qartë se, për çdo $a \in A$, $a = \bigvee \{a\}$, atëherë $A \subseteq C(A)$. Gjithashtu është e qartë se $C(C(A)) = C(A)$. Tani përcaktojmë

$$\Pi^\downarrow(S) = \{(C(A)) : \emptyset \neq A \subseteq S \text{ e fundme}\},$$

ku

$$(C(A)) = \{s \in S : \text{ekziston ndonjë } \alpha \in C(A) \text{ e tillë që } s \leq \alpha\}.$$

Ne mund ta shndërrojmë $\Pi^\downarrow(S)$ në një gjysmëgrup duke përcaktuar

$$(C(A)) \circ (C(B)) = (C(A) \cdot C(B)).$$

Ky veprim është i mirë-përcaktuar meqënëse nëse $(C(A)) = (C(A'))$ dhe $(C(B)) = (C(B'))$, atëherë

$$\begin{aligned}(C(A)) \circ (C(B)) &= (C(A) \cdot C(B)) = (C(A)) \cdot (C(B)) \\ &= (C(A')) \cdot (C(B')) = (C(A')) \cdot (C(B')) = (C(A')) \circ (C(B')).\end{aligned}$$

Gjithashtu $\circ$ është shoqërimtar meqënëse shoqërimtar është edhe veprimi $\cdot$ i përfshirë në përkufizim.

Lemë 3.2.1 Për çdo dy nënbashkësi të fundme jo boshe $A, B \subseteq S$, $(C(A) \cdot C(B)) = (C(A \cdot B))$.

Vërtetim. Le të jetë $x \leq \alpha\beta$ ku $\alpha \in C(A)$ dhe $\beta \in C(B)$. Atëherë, $\alpha = \bigvee_{a' \in A'} a'$ dhe $\beta = \bigvee_{b' \in B'} b'$ ku $A' \subseteq A$ dhe $B' \subseteq B$. Rrjedh se

$$x \leq \left(\bigvee_{a' \in A'} a' \right) \cdot \left(\bigvee_{b' \in B'} b' \right) = \bigvee_{a'b' \in A'B'} a'b' \in C(AB),$$

që provon se $x \in (C(AB))$. Për të anasjellën, le të jetë $x \in (C(AB))$, atëherë ekziston një familje e fundme indeksesh I e tillë që $x \leq \bigvee_{i \in I} a_i b_i$ ku $a_i \in A$ dhe $b_i \in B$, atëherë

$$x \leq \bigvee_{i \in I} a_i b_i \leq \left(\bigvee_{i \in I} a_i \right) \cdot \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \in C(A) \cdot C(B),$$

që provon se $x \in (C(A) \cdot C(B))$. ■

Më tej përcaktojmë një relacion renditje $\leq$ në $\Pi^\downarrow(S)$ si vijon.

$$(C(A)) \leq (C(B)) \text{ vetëm në qoftë se } (C(A)) \subseteq (C(B)),$$

ose me fjalë të tjera, $\leq$ nuk është gjë tjetër veçse $\subseteq$ i cili është në mënyrë të qartë relacion renditje. Më tej do të tregojmë që me këtë relacion renditje, $\Pi^\downarrow(S)$ është latisë me element zero i cili është edhe elementi më i vogël gjithashtu.

Le të jetë $(C(A_i))$ një familje e fundme elementësh me $i \in I$. Do të provojmë se

$$\bigvee_{i \in I} (C(A_i)) = (C(\bigcup_{i \in I} A_i)) \quad (3.1)$$

Vërtet, meqënëse për çdo $i \in I$, $A_i \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, atëherë $C(A_i) \subseteq C(\bigcup_{i \in I} A_i)$ dhe $(C(A_i)) \subseteq (C(\bigcup_{i \in I} A_i))$. Në qoftë se tani $(C(A_i)) \subseteq (C(A))$ për çdo $i \in I$, atëherë për çdo $\alpha_i \in C(A_i)$, $\alpha_i \in (C(A))$. Le të jetë tani $\alpha \in C(\bigcup_{i \in I} A_i)$, atëherë gjenden nënbashkësitë $A'_i \subseteq A_i$ të tilla që $\alpha = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{a'_i \in A'_i} a'_i$. Është e qartë se $\bigvee_{a'_i \in A'_i} a'_i \in C(A_i)$ dhe nga më sipër, $\bigvee_{a'_i \in A'_i} a'_i \in C(A)$ dhe $\alpha \in C(A)$ meqënëse $C(A) = C(C(A))$. Kështu në qoftë se

$x \in (C(\bigcup_{i \in I} A_i))$, atëherë $x \leq \alpha$ ku $\alpha \in C(\bigcup_{i \in I} A_i)$ dhe meqënëse $\alpha \in C(A)$ do të kishim $x \in (C(A))$ që provon se $(C(\bigcup_{i \in I} A_i)) \subseteq \bigvee_{i \in I} (C(A_i))$ e cila implikon (3.1).

Përsëri, le të jetë $(C(A_i))$ një familje e fundme elementësh me $i \in I$. Do provojmë se kur S është me përfitim të fundëm atëherë

$$\bigwedge_{i \in I} (C(A_i)) = (C(\bigcap_{i \in I} (C(A_i)))) \quad (3.2)$$

Vërtet, meqënëse $\bigcap_{i \in I} (C(A_i)) \subseteq (C(A_i))$ për të gjitha $i \in I$, atëherë

$$C(\bigcap_{i \in I} (C(A_i))) \subseteq (C(A_i)) \text{ dhe } (C(\bigcap_{i \in I} (C(A_i)))) \subseteq (C(A_i)),$$

për të gjitha $i \in I$. Më tej, në qoftë se $(C(A)) \subseteq (C(A_i))$ për të gjitha $i \in I$, atëherë

$$(C(A)) \subseteq \bigcap_{i \in I} (C(A_i)) \subseteq C(\bigcap_{i \in I} (C(A_i))) \text{ rrjedhimisht } (C(A)) \subseteq (C(\bigcap_{i \in I} (C(A_i))))],$$

e cila provon (3.2).

Të provojmë tani se për çdo $(C(A))$ dhe çdo familje të fundme $(C(B_i))$ për $i \in I$ kemi

$$(C(A)) \circ \left(\bigvee_{i \in I} (C(B_i)) \right) = \bigvee_{i \in I} (C(A)) \circ (C(B_i))$$

dhe

$$\left(\bigvee_{i \in I} (C(B_i)) \right) \circ (C(A)) = \bigvee_{i \in I} (C(B_i)) \circ (C(A)).$$

Do të provojmë vetëm barazimin e parë meqënëse vërtetimi i të dytit është i ngjashëm. Ana e majtë e barazimit transformohet si më poshtë

$$\begin{aligned} (C(A)) \circ \left(\bigvee_{i \in I} (C(B_i)) \right) &= (C(A)) \circ (C(\bigcup_{i \in I} B_i)) && \text{nga (3.1)} \\ &= (C(A \cdot (\bigcup_{i \in I} B_i))) && \text{nga përkufizimi i } \circ \text{ dhe lema 3.2.1} \\ &= (C(\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i)) && \text{shumëzimi është shpërndarës} \\ &&& \text{lidhur me bashkimin.} \end{aligned}$$

Ndërsa ana e djathtë transformohet.

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in I} (C(A)) \circ (C(B_i)) &= \bigvee_{i \in I} (C(A \cdot B_i)) && \text{nga përkufizimi i } \circ \text{ dhe lema 3.2.1} \\ &= (C(\bigcup_{i \in I} C(A \cdot B_i))) && \text{nga (3.1).} \end{aligned}$$

Tani meqënëse $\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i \subseteq \bigcup_{i \in I} C(A \cdot B_i)$, atëherë $(C(\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i)) \subseteq (C(\bigcup_{i \in I} C(A \cdot B_i)))$.

Përfshirja e anasjellë e kësaj të fundit është gjithashtu e vërtetë. Vërtet,

$$\begin{aligned} (C(\bigcup_{i \in I} C(A \cdot B_i))) &\subseteq (C(C(\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i))) \\ &= (C(\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i)). \end{aligned}$$

Kjo tregon se $(C(\bigcup_{i \in I} A \cdot B_i)) = (C(\bigcup_{i \in I} C(A \cdot B_i)))$ dhe si rezultat se $(C(A)) \circ (\bigvee_{i \in I} (C(B_i))) = \bigvee_{i \in I} (C(A)) \circ (C(B_i))$.

Është e qartë se $(\Pi^\downarrow(S), \circ, \subseteq)$ është ℓ -gjysmëgrup me një element zero që është edhe zero shumëzimi e $\Pi^\downarrow(S)$. Është lehtësisht e verifikueshme që ky element është (0) ku 0 është zero e S .

Tani e zhysim S në $\Pi^\downarrow(S)$ me anë të pasqyrimt

$$\iota: S \rightarrow \Pi^\downarrow(S) \text{ i tillë që } x \mapsto (C(x)) = (x).$$

Do të provojmë që ky është një homomorfizëm injektiv i cili ruan superiorët e fundëm që mund të ekzistojnë në S . Vërtet,

$$\iota(xy) = (xy) = (C(xy)) = (C(x)) \circ (C(y)) = \iota(x) \circ \iota(y),$$

e cila tregon se ι është homomorfizëm gjysmëgrupesh. Ai është qartësisht injektiv pasi $(x) = (y)$ sjell që $x = y$. Për të provuar se ai ruan superiorët e fundëm që ekzistojnë në S , le të jetë $\bigvee_{i \in I} x_i$ një superior i tillë, atëherë

$$\iota(\bigvee_{i \in I} x_i) = (C(\bigvee_{i \in I} x_i)) = (C(\bigcup_{i \in I} \{x_i\})) = \bigvee_{i \in I} (C(x_i)) = \bigvee_{i \in I} \iota(x_i).$$

Pasqyrimi ι ruan inferiorët e fundëm gjithashtu. Vërtet,

$$\iota(x \wedge y) = (C(x \wedge y)) = (x \wedge y),$$

dhe

$$\iota(x) \wedge \iota(y) = (x) \wedge (y) = (C((C(x)) \cap (C(y)))) = (x \wedge y),$$

prandaj $\iota(x \wedge y) = \iota(x) \wedge \iota(y)$.

Teoremë 3.2.2 Çdo po-gjysmëgrup $(S, \cdot, \leq)$ me përfitim të fundëm dhe me zero zhytet në ℓ -gjysmëgrupin $(\Pi^\downarrow(S), \circ, \subseteq)$ me anë të pasqyrimt $x \mapsto (C(x))$ i cili ruan superiorët dhe inferiorët e fundëm që mund të ekzistojnë në S . ℓ -gjysmëgrupi $(\Pi^\downarrow(S), \circ, \subseteq)$ është shpërndarë, ka element zero dhe është me përfitim të fundëm.

Vërtetim. Mbetet të vërtetojmë pjesën e fundit pasi pjesa tjetër është vërtetuar ndërkaq. Do të provojmë që në qoftë se ekziston një bashkësi e fundme $(X, \leq)$ dhe një epimorfizëm $\vee$ -gjysmëgrupesh

$$\phi: \mathcal{F}^\downarrow(F(X)) \rightarrow S,$$

atëherë ky indukton një epimorfizëm $\vee$ -gjysmëgrupesh

$$\phi_*: \mathcal{F}^\downarrow(F(X)) \rightarrow \Pi^\downarrow(S).$$

Më përpara vëmë re këtë fakt. Në qoftë se $A = \{s_1, \dots, s_n\} \subseteq S$, atëherë duke qënë se S përmban superiorët e fundëm do të kemi barazimin $C(A) = \{s_1, \dots, s_n, \vee_{t=1}^n s_t\}$ rrjedhimisht $(C(A)) = (\vee_{t=1}^n s_t]$ dhe $\vee_{t=1}^n s_t = s \in S$. Pra çdo $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$ përkon me një $(s]$ ku $s \in S$. Përcaktojmë per çdo $U \subseteq F(X)$ të fundme, $\phi_*((U)) = (\phi((U)))$. Meqë ϕ është homomorfizëm, edhe ϕ_* do të jetë i tillë. Duke marrë parasysh vërejtjen e mësipërme dhe faktin që ϕ është syryektiv, marrim që

$$(C(A)) = (s] = (\phi((U))) = \phi_*((U)),$$

që tregon se edhe ϕ_* është syryektiv. ■

3.2.2 Një situatë bashkëngjitjeje

Konsiderojmë dy kategori, e para është kategoria $\vee$ -**sgrp** objektet e së cilës janë $\vee$ -gjysmëgrupet me përfitim të fundëm dhe për morfizma të gjithë homomorfizmat që ruajnë superiorët, ndërsa e dyta është kategoria ℓ -**sgrp** objektet e së cilës janë ℓ -gjysmëgrupet me përfitim të fundëm dhe shpërndarës dhe me morfizma të gjithë homomorfizmat që ruajnë superiorët. Qëllimi i këtij paragrafi është të provojë që ℓ -**sgrp** është nënkategori reflektive e $\vee$ -**sgrp** gjë që nënkupton që funktori përfshirës $K: \ell\text{-sgrp} \rightarrow \vee\text{-sgrp}$ ka të bashkëngjitur të majtë. Gjithashtu do të diskutojmë se çfarë kuptimi kanë nga pikëpamja e teorisë së gjysmëgrupeve vetitë universale të njëshit dhe konjëshit të bashkëngjitjes te çdo objekt.

Përpara se të provojmë rezultatin tonë kryesor të këtij paragrafi ne do të tregojmë që operatori $\Pi^\downarrow$ përcakton një funktor $\Pi^\downarrow: \vee\text{-sgrp} \rightarrow \ell\text{-sgrp}$. Vërtet, përcaktojmë $\Pi^\downarrow$ duke i lidhur çdo objekti $S \in \vee\text{-sgrp}$ ℓ -gjysmëgrupin e tij të bashkësive të poshtme $\Pi^\downarrow(S)$ e cila është provuar të jetë me përfitim të fundëm dhe shpërndarëse pra një objekt nga $\ell\text{-sgrp}$, dhe çdo homomorfizmi $\vee$ -ruajtës $f: S \rightarrow S'$ pasqyrimin $\Pi^\downarrow(f): \Pi^\downarrow(S) \rightarrow \Pi^\downarrow(S')$ të përcaktuar nga $(C(A)) \mapsto (C(f(A)))$. Së pari, vërejmë që $\Pi^\downarrow(f)$ është pasqyrim i mirë-përcaktuar. Për këtë le të jenë $A, B \subseteq S$ të tilla që $(C(A)) = (C(B))$ dhe duam të tregojmë se $(C(f(A))) = (C(f(B)))$. Vërtet, le të jetë $\alpha = \vee_{i \in I} f(a_i) \in C(f(A))$, atëherë

$$\begin{aligned}
\alpha = \bigvee_{i \in I} f(a_i) &= f(\bigvee_{i \in I} a_i) && \text{meqënëse } f \text{ ruan superiorët} \\
&\leq f(\bigvee_{j \in J} b_j) && \text{meqënëse } C(A) \subseteq (C(B)) \\
&= \bigvee_{j \in J} f(b_j) \in C(f(B)),
\end{aligned}$$

që provon se $C(f(A)) \subseteq (C(f(B)))$, pra që $(C(f(A))) \subseteq (C(f(B)))$. Në mënyrë të njëjtë provohet përfshirja e anasjellë, për rrjedhojë korrektësia e $\Pi^\downarrow(f)$. Më tej do provojmë që $\Pi^\downarrow(f)$ është homomorfizëm që ruan superiorët e çfardoshëm. Vërtet,

$$\begin{aligned}
\Pi^\downarrow(f)((C(A)) \circ (C(B))) &= \Pi^\downarrow(f)((C(AB))) && \text{nga lema 3.2.1} \\
&= (C(f(AB))) = (C(f(A)f(B))) && f \text{ është homomorfizëm} \\
&= (C(f(A))) \circ (C(f(B))) \\
&= \Pi^\downarrow(f)((C(A))) \circ \Pi^\downarrow(f)((C(B)))
\end{aligned}$$

që provon se $\Pi^\downarrow(f)$ është homomorfizëm. Për të treguar që ai ruan superiorët e fundëm marrim një superior të tillë $\bigvee_{i \in I} (C(A_i))$ dhe llogarisim

$$\begin{aligned}
\Pi^\downarrow(f)(\bigvee_{i \in I} (C(A_i))) &= \Pi^\downarrow(f)((C(\bigcup_{i \in I} A_i))) && \text{nga (3.1)} \\
&= (C(f(\bigcup_{i \in I} A_i))) && \text{nga përkufizimi i } \Pi^\downarrow(f) \\
&= (C(\bigcup_{i \in I} f(A_i))) && f \text{ ndërron me bashkimet} \\
&= \bigvee_{i \in I} (C(f(A_i))) && \text{nga (3.1)} \\
&= \bigvee_{i \in I} \Pi^\downarrow(f)((C(A_i))) && \text{nga përkufizimi i } \Pi^\downarrow(f).
\end{aligned}$$

Për të përfunduar vërtetimin që $\Pi^\downarrow$ është funktor, kemi për të treguar që ai ruan kompozimin dhe çon njëshat tek njëshat. Për të parën, le të jenë $g : S' \rightarrow S''$ dhe $f : S \rightarrow S'$ dy morfizma të kompozueshëm në $\vee\text{-}\mathbf{sgrp}$. Shohim që për çdo $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$,

$$\begin{aligned}
(\Pi^\downarrow(g) \circ \Pi^\downarrow(f))((C(A))) &= \Pi^\downarrow(g)(\Pi^\downarrow(f)((C(A)))) \\
&= \Pi^\downarrow(g)((C(f(A)))) \\
&= (C(gf(A))) \\
&= \Pi^\downarrow(gf)((C(A))),
\end{aligned}$$

e cila tregon se $\Pi^\downarrow(g) \circ \Pi^\downarrow(f) = \Pi^\downarrow(gf)$. Së fundmi, në qoftë se $id_S : S \rightarrow S$ është morfizmi njësh në ndonjë objekt S dhe $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$, atëherë

$$\Pi^\downarrow(id_S)((C(A))) = (C(id_S(A))) = (C(A)) = id_{\Pi^\downarrow(S)}((C(A))),$$

pra $\Pi^\downarrow(id_S) = id_{\Pi^\downarrow(S)}$.

Teoremë 3.2.3 *Kategoria ℓ -sgrp është nënkategori reflektive e $\vee$ -sgrp.*

Vërtetim. Do të provojmë se funktori përfshirës $K: \ell\text{-sgrp} \rightarrow \vee\text{-sgrp}$ është i bashkëngjitur i djathtë i $\Pi^\downarrow$ dhe për këtë qëllim ne na nevojitet të tregojmë se për çdo objekt $S \in \vee\text{-sgrp}$ dhe çdo objekt $L \in \ell\text{-sgrp}$ ka një bijeksion bashkësisht

$$\psi: \vee\text{-sgrp}(S, K(L)) \rightarrow \ell\text{-sgrp}(\Pi^\downarrow(S), L),$$

i cili është natyral në të dy variablat. Për çdo morfizm $f: S \rightarrow K(L)$ përcaktojmë

$$\psi(f): \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L \text{ ku } (C(A)) \mapsto \bigvee_{a \in A} f(a).$$

Ky është një pasqyrim i mirë-përcaktuar. Vërtet, le të jenë $A, B \subseteq S$ të tilla që $(C(A)) = (C(B))$. Për çdo $a \in A$ ka ndonjë $\beta_a \in C(B)$ e tillë që $a \leq \beta_a$ meqënëse $A \subseteq (C(B))$. Atëherë

$$\bigvee_{a \in A} a \leq \bigvee_{a \in A} \beta_a \leq \bigvee_{b \in B} b,$$

pastaj duke zbatuar pasqyrimin $\vee$ -ruajtës f marrim

$$\psi(f)((C(A))) = \bigvee_{a \in A} f(a) \leq \bigvee_{b \in B} f(b) = \psi(f)((C(B))).$$

Në mënyrë të ngjashme përftohet përfshirja e anasjellë e për rrjedhojë barazimi $\psi(f)((C(A))) = \bigvee_{a \in A} f(a) = \bigvee_{b \in B} f(b) = \psi(f)((C(B)))$ që vërteton në këtë mënyrë korrektësinë e $\psi(f)$.

Pasqyrimi $\psi(f)$ është një homomorfizm që ruan renditjen. Le të provojmë fillimisht që $\psi(f)$ është homomorfizm gjysmëgrupesh. Vërtet, le të jenë $(C(A)), (C(B)) \in \Pi^\downarrow(S)$, atëherë

$$\begin{aligned} \psi(f)((C(A)) \circ (C(B))) &= \psi(f)((C(A \cdot B))) && \text{nga përkufizimi i } \psi(f) \\ &= \bigvee_{a \cdot b \in A \cdot B} f(a \cdot b) && f \text{ është homomorfizm} \\ &= (\bigvee_{a \in A} f(a)) \cdot (\bigvee_{b \in B} f(b)) && S \text{ është shpërndarëse} \\ &= \psi(f)((C(A))) \cdot \psi(f)((C(B))) && \text{nga përkufizimi i } \psi(f). \end{aligned}$$

Më tej do tregojmë që ψ ruan renditjen. Vërtet, le të jenë $(C(A)) \subseteq (C(B))$, atëherë

$$\psi(f)((C(A))) = \bigvee_{a \in A} f(a) \leq \bigvee_{b \in B} f(b) = \psi(f)((C(B))),$$

meqënëse për çdo $a \in A$, gjendet $\beta_b \in C(B)$ e tillë që $a \leq \beta_b$. Gjithashtu $\psi(f)$ ruan superiorët. Le të jetë $(C(A_i))$ një familje e fundme elementësh në $\Pi^\downarrow(S)$, atëherë

$$\psi(f)(\bigvee_{i \in I} (C(A_i))) = \psi(f)((C(\bigcup_{i \in I} A_i))) = \bigvee_{i \in I} \bigvee_{a_i \in A_i} f(a_i) = \bigvee_{i \in I} \psi(f)((C(A_i))).$$

Tani do tregojmë që ψ është bijeksion. Pasqyrimi është qartësisht injektiv sepse në qoftë se $f, g : S \rightarrow K(L)$ janë dy morfizma të ndryshme që ndryshojnë për shembull në ndonjë $x \in S$, atëherë

$$\psi(f)((x)) = (f(x)) \neq (g(x)) = \psi(g)((x)),$$

e cila provon se $\psi(f) \neq \psi(g)$. Për të provuar se ψ është surjektiv ne përdorim faktin që S zhytet në $\Pi^\downarrow(S)$ me anë të pasqyrimin $x \mapsto (x)$. Le të jetë $g : \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L$ një morfizëm në ℓ -sgrp dhe le të jetë f ngushtimi i g në S . Do të provojmë se $g = \psi(f)$ e cila implikon surjektivitetin e ψ . Për çdo $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$ barazimet e mëposhtme janë të vërteta

$$\begin{aligned} \psi(f)((C(A))) &= \bigvee_{a \in A} (f(a)) \\ &= \bigvee_{a \in A} (g(a)) \\ &= g\left(\bigvee_{a \in A} (a)\right) \quad \text{meqënëse } g \text{ ruan superiorët} \\ &= g((C(A))) \end{aligned}$$

që provon barazimin $g = \psi(f)$. Mbetet të provojmë natyralitetin në variablin e parë dhe të dytë. Le të jetë $\sigma : S \rightarrow S'$ një homomorfizëm $\vee$ -ruajtës dhe duam të tregojmë që diagrami i mëposhtëm

$$\begin{array}{ccc} \vee\text{-sgrp}(S, K(L)) & \xrightarrow{\psi} & \ell\text{-sgrp}(\Pi^\downarrow(S), L) \\ \sigma^* \uparrow & & \uparrow \mathcal{P}^\downarrow(\sigma)^* \\ \vee\text{-sgrp}(S', K(L)) & \xrightarrow{\psi} & \ell\text{-sgrp}(\Pi^\downarrow(S'), L) \end{array}$$

është ndërrimtar. Kjo do të thotë që për çdo homomorfizëm $\vee$ -ruajtës $f' : S' \rightarrow K(L)$ duhet të kemi që $\psi(f' \circ \sigma) = \psi(f') \circ \Pi^\downarrow(\sigma)$. Për çdo $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$, nga njëra anë kemi që

$$\psi(f' \circ \sigma)((C(A))) = \bigvee_{x \in A} f'(\sigma(x)),$$

dhe nga ana tjetër

$$\begin{aligned}
(\psi(f') \circ \Pi^\downarrow(\sigma))(C(A)) &= \psi(f')(C(\sigma(A))) \\
&= \psi(f')(C(\bigvee_{x \in A} \sigma(x))) \\
&= f'(\bigvee_{x \in A} \sigma(x)) \\
&= \bigvee_{x \in A} f'(\sigma(x)),
\end{aligned}$$

e cila provon barazimin. Natyraliteti në të dytin variabël do të thotë që për çdo homomorfizëm që ruan superiorët $\lambda : L \rightarrow L'$ diagrami

$$\begin{array}{ccc}
\vee\text{-sgrp}(S, K(L)) & \xrightarrow{\psi} & \ell\text{-sgrp}(\Pi^\downarrow(S), L) \\
\lambda^* \downarrow & & \downarrow \psi(\lambda)^* \\
\vee\text{-sgrp}(S, K(L')) & \xrightarrow{\psi} & \ell\text{-sgrp}(\Pi^\downarrow(S), L')
\end{array}$$

është ndërrimtar. Për këtë duhet të provojmë që për çdo $f : S \rightarrow K(L)$, $\psi(\lambda f) = \lambda \psi(f)$. Vërtet, për çdo $(C(A)) \in \Pi^\downarrow(S)$,

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda f)(C(A)) &= \bigvee_{x \in A} (\lambda f)(x) \\
&= \lambda \left(\bigvee_{x \in A} f(x) \right) \quad \text{meqënëse } \lambda \text{ ruan superiorët} \\
&= \lambda(\psi(C(A))) \quad \text{nga përkufizimi i } \psi,
\end{aligned}$$

që provon se $\psi(\lambda f) = \lambda \psi(f)$. ■

Teorema e mësipërme bëhet e dobishme kur kemi të bëjmë me homomorfizma ndërmjet objekteve në $\ell\text{-sgrp}$ me fund në imazhin e $\Pi^\downarrow$. Rrjedhimi i mëposhtëm dhe vërejtja që e pason e zbulojnë më së miri këtë.

Rrjedhim 3.2.4 *Le të jenë $L \in \ell\text{-sgrp}$ dhe $S \in \vee\text{-sgrp}$. Atëherë çdo homomorfizëm $f : \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L$ mund të faktorizohet si kompozim $\varepsilon_L \circ \Pi^\downarrow(f')$ ku $\varepsilon_L : \Pi^\downarrow(K(L)) \rightarrow L$ është komponentja në L e ko-njeshit ε të bashkëngjitjes dhe $f' : S \rightarrow K(L)$ është një homomorfizëm i vetëm.*

Vërtetim. Nga teoria standarte, $\varepsilon_L : \Pi^\downarrow(K(L)) \rightarrow L$ është një shigjetë universale nga $\Pi^\downarrow$ në L . Pjesa tjetër rrjedh nga universaliteti i ε_L . ■

Në praktikë rezultati i rrjedhimit funksionon si vijon. Një homomorfizëm të dhënë $f : \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L$, e ngushtojmë atë në S dhe e pasqyrojmë ngushtimin $\tilde{f}$ mbrapa tek $\vee\text{-sgrp}$ duke aplikuar ψ^{-1} për të përfutur $f' = \psi^{-1}(\tilde{f})$. Atëherë rrjedhimi pohon se $f = \varepsilon_L \circ \Pi^\downarrow(f')$ e cila në terma më të thjeshtë nënkupton që f mund të realizohet si

shtrirje në nënbashkësitë i ngushtimit të tij në S pasuar nga komponentja e ko-njëshit ε_L .

Një situatë e ngjashme ndodh në qoftë se ne ndërrojmë ko-njëshin me njëshin e bashkëngjitjes. Në këtë rast kemi rrjedhimin e mëposhtëm.

Rrjedhim 3.2.5 *Le të jenë $L \in \ell\text{-sgrp}$ dhe $S \in \vee\text{-sgrp}$. Atëherë homomorfizmi $f : S \rightarrow K(L)$ mund të realizohet si kompozimi $K(f') \circ \eta_S$ ku $\eta_S : S \rightarrow K\Pi^\downarrow(S)$ është komponentja në S e njëshit η të bashkëngjitjes dhe $f' : \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L$ është një homomorfizëm i vetëm.*

3.2.3 ℓ -Gjysmëgrupet me përfitim të fundëm dhe shpërndarëse të para si T -algjebra

Le të jetë $\langle \Pi^\downarrow, K, \eta, \varepsilon \rangle : \vee\text{-sgrp} \rightarrow \ell\text{-sgrp}$ bashkëngjitja e teoremës 3.2.3, $\langle T, \eta, \mu \rangle$ monadi që ajo përcakton në $\vee\text{-sgrp}, \vee\text{-sgrp}^T$ kategoria e T -algjebrave për këtë monad, dhe $\langle (\Pi^\downarrow)^T, K^T, \eta^T, \varepsilon^T \rangle : \vee\text{-sgrp} \rightarrow \vee\text{-sgrp}^T$ bashkëngjitja korresponduese. Me këto të dhëna kemi teoremën e mëposhtme.

Teoremë 3.2.6 *Funktori i krahasimit $\mathcal{C} : \ell\text{-sgrp} \rightarrow \vee\text{-sgrp}^T$ është izomorfizëm.*

Vërtetim. Vërtetimi përdor karakterizimet (iii) të teoremës së Beck-ut. Për këtë qëllim kemi për të treguar që çdo çift morfizmash paralelë

$$L_1 \xrightleftharpoons[g]{f} L_2$$

në $\ell\text{-sgrp}$ ka një bashkëbarazues të vetëm

$$L_1 \xrightleftharpoons[g]{f} L_2 \xrightarrow{e} L$$

sa herë që çifti korrespondues

$$K(L_1) \xrightleftharpoons[K(g)]{K(f)} K(L_2)$$

ka një bashkëbarazues të ndashëm

$$K(L_1) \xrightleftharpoons[K(g)]{K(f)} K(L_2) \xrightarrow{u} S$$

në $\vee$ -**sgrp**. Për më tepër $K(L) = S$ dhe $K(e) = u$. Nga supozimi ynë, gjenden morfizmat $t: K(L_2) \rightarrow K(L_1)$ dhe $\sigma: S \rightarrow K(L_2)$ me vetitë

$$uK(f) = uK(g), u\sigma = 1_S, K(f)t = 1_{K(L_2)}, K(g)t = \sigma u. \quad (3.3)$$

Do të tregojmë se

$$K(L_1) \xrightleftharpoons[K(g)]{K(f)} K(L_2) \xrightarrow{u} K(\Pi^\downarrow(S)) \quad (3.4)$$

është bashkëbarazues në $\vee$ -**sgrp**. Le të jetë $h: K(L_2) \rightarrow S'$ një morfizëm në $\vee$ -**sgrp** me vetinë

$$hK(f) = hK(g). \quad (3.5)$$

Nga teorema 3.2.3, σ indukon në ℓ -**sgrp** një morfizëm $\psi(\sigma): \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L_2$ dhe le të jetë $K(\psi(\sigma)): K(\Pi^\downarrow(S)) \rightarrow K(L_2)$ morfizmi korrespondues i tij në $\vee$ -**sgrp**. Do të tregojmë se $hK(\psi(\sigma))$ është i vetmi morfizëm me vetinë $hK(\psi(\sigma))u = h$. Vërtet, për çdo $x \in K(L_2)$ kemi

$$\begin{aligned} (hK(\psi(\sigma))u)(x) &= (hK(\psi(\sigma))(u(x))) && \text{nga përkufizimi i } \iota \\ &= h\sigma(u(x)) && \text{meqënëse } \sigma \text{ është ngushtimi i } K(\psi(\sigma)) \\ &= (hK(g))(t(x)) && \text{nga konditat (3.3)} \\ &= (hK(f))(t(x)) && \text{nga konditat (3.5)} \\ &= h(x) && \text{meqënëse nga (3.3) } K(f)t = 1_{K(L_2)}. \end{aligned}$$

Për të provuar unicitetin supozojmë se $\xi: K(\Pi^\downarrow(S)) \rightarrow S'$ është një morfizëm me vetinë që $\xi u = h$ dhe duam të tregojmë që $hK(\psi(\sigma)) = \xi$. Për këtë është e mjaftueshme të provojmë që ata përputhen mbi elementët e trajtës $[s]$ ku $s \in S$ meqënëse kjo është një bashkësi $\vee$ -përfutuesish për $K(\Pi^\downarrow(S))$ dhe të dy morfizmat ruajnë superiorët. Nga kushti $u\sigma = 1_S$ shohim që u është syrijektiv, prandaj çdo $s \in S$ mund të shkruhet si $s = u(x)$ me $x \in K(L_2)$. Tani kemi

$$\begin{aligned}
hK(\psi(\sigma))([s]) &= hK(\psi(\sigma))([u(x)]) \\
&= (hK(\psi(\sigma))u)(x) = h(x) = \xi u(x) \quad \text{nga vetia e } hK(\psi(\sigma)) \text{ dhe } \xi \\
&= \xi([u(x)]) = \xi([s]),
\end{aligned}$$

e cila provon se $hK(\psi(\sigma)) = \xi$. Kështu kemi që (3.4) është bashkëbarazues në $\vee$ -**sgrp**. Më tej do tregojmë se

$$L_1 \xrightarrow[g]{f} L_2 \xrightarrow{u} \Pi^\downarrow(S)$$

është i vetmi bashkëbarazues në ℓ -**sgrp** i

$$L_1 \xrightarrow[g]{f} L_2$$

dhe që dukshëm funktori K pasqyron $\Pi^\downarrow(S)$ në $K(\Pi^\downarrow(S))$ dhe u identikisht në vetvete. Në qoftë se $\mu: L_2 \rightarrow L_3$ është morfizëm në ℓ -**sgrp** i tillë që $\mu f = \mu g$, atëherë tek kategoria $\vee$ -**sgrp** gjendet një morfizëm $w: K(\Pi^\downarrow(S)) \rightarrow K(L_3)$ i tillë që $wu = K(\mu)$. Tani w mund të konsiderohet si një morfizëm i ℓ -**sgrp**, pra si një $w: \Pi^\downarrow(S) \rightarrow L_3$ atëherë kemi barazimin $wu = \mu$. Uniciteti i w në ℓ -**sgrp** siguron unicitetin e kopjes së tij në $\vee$ -**sgrp** me vetinë $wu = \mu$. Së fundmi, uniciteti i morfizmit $u: L_2 \rightarrow \Pi^\downarrow(S)$ si bashkëbarazues i

$$L_1 \xrightarrow[g]{f} L_2$$

rrjedh nga fakti që $\Pi^\downarrow(S)$ është i vetmi objekt që pasqyrohet në $K(\Pi^\downarrow(S))$ me anë të funktorit përfshirës K . ■

KAPITULLI 4

Nga *le*-gjysmëgrupet në *po*-gjysmëgrupet

Në artikullin e saj [35] Kehayopulu ka bërë vërejtjen e mëposhtme: *teoria e gjysmëgrupeve të renditur e bazuar mbi idealet dhe teoria e le-gjysmëgrupeve e bazuar mbi elementët idealë janë paralele me njëra-tjetrën. Të gjitha rezultatet mbi le-gjysmëgrupet që bazohen mbi elementet idealë shprehen në gjysmëgrupet e renditur në terma të idealeve, dhe anasjellas. Është befasuese që, për rezultatet mbi gjysmëgrupet e renditur që bazohen në idealet, pikat nuk luajnë ndonjë rol thelbësor, por bashkësitë.*

Pëveçse është bërë ky vërtetim dhe janë dhënë disa rezultate që e mbështesin atë, nuk është bërë ndonjë përpjekje për të gjetur një lidhje ndërmjet dy klasave më tej se fakti që *le*-gjysmëgrupet janë një nënklasë e mirfillë e *po*-gjysmëgrupeve.

Qëllimi i këtij kapitulli është të prezantojë një mekanizëm me anë të të cilit mund të përftojme rezultate mbi *po*-gjysmëgrupet, homologet e të cilëve në *le*-gjysmëgrupet janë të njohura që janë të vërteta, duke kaluar kështu nga klasa më e vogël e *le*-gjysmëgrupeve tek ajo më e gjerë e *po*-gjysmëgrupeve. Rezultati kyç që e bën të mundur këtë është teorema e zhytjes e Kehayopulu, Pasku dhe Tsingelis e vërtetuar në [32] e cila interpreton çdo *po*-gjysmëgrup S si një nëngjysmëgrup të renditur të një *le*-gjysmëgrupi Σ . Pasqyrimi përfshirës ι i S në Σ është i tillë që idealet e majtë, të djathtë dhe kuazi-idealët e S pasqyrohen me anë të ι në mënyrë bijektive në ideale të majtë, të djathtë dhe elementët kuazi-idealë të Σ . Një pjesë e të anasjellës së pohimit të mësipërm gjithashtu është provuar se është e vërtetë. Të dyja korrespondencat janë në fakt zemra e mekanizmit tonë i cili na lejon të provojmë se disa rezultate interesante nga [26], [34] dhe [36] kanë analogët e tyre për *po*-gjysmëgrupet gjithashtu. Ndryshe nga disa punime të Kehayopulu dhe Tsingelis, ne nuk i riveërtetojmë këto rezultate duke imituar vërtetimet e tyre nga punimet përkatëse [26], [34] dhe [36], por i përftojme ato si rrjedhime të rezultateve përkatëse të punimeve më sipër duke përdorur mekanizmin e ndërtuar.

4.1 Mekanizmi i kalimit dhe disa rezultate

Rezultati i lemës së mëposhtme është vendimtar për sa i përket pjesës tjetër të këtij kapitulli.

Lemë 4.1.1 *Nqs Q është kuazi-ideal i S , atëherë $(Q]_0$ është element kuazi-ideal i Σ . Anasjellas, nqs $(Q]_0$ është element kuazi-ideal i Σ , atëherë $Q' = Q \setminus \{0\}$ është kuazi-ideal i S .*

Vërtetim. Për konditën e nevojshme shohim që

$$\begin{aligned} (Q]_0 \circ S \wedge S \circ (Q]_0 &= (Q * S \cap S * Q]_0 \quad \text{nga përkufizimi i } \circ \text{ dhe i } \wedge \\ &\subseteq ((QS] \cap (SQ])_0 \quad Q \subseteq S, QS \subseteq (QS], SQ \subseteq (SQ] \\ &\subseteq (Q]_0 \quad Q \text{ është kuazi-ideal.} \end{aligned}$$

Për të anasjellën kemi

$$\begin{aligned} (Q'S] \cap (SQ'] &\subseteq ((Q'S] \cap (SQ'])_0 \\ &\subseteq ((Q * S]_0 \cap (S * Q]_0)_0 \\ &\subseteq (Q]_0 \circ S \wedge S \circ (Q]_0 \quad \text{nga përkufizimi i } \circ \text{ dhe i } \wedge \\ &\subseteq (Q]_0 \quad (Q]_0 \text{ është element kuazi-ideal.} \end{aligned}$$

Por $(Q'S] \cap (SQ'] \subseteq S$, prandaj $(Q'S] \cap (SQ'] \subseteq (Q'] = Q'$ që provon pohimin. ■

Vërejmë se lema e mësipërme qëndron e vërtetë në qoftë se zëvendësojmë fjalën kuazi-ideal me ideal i majtë (përk. i djathtë, i dyanshëm). Vërtetimi i këtyre është i ngjashëm me vërtetimin e lemës së mësipërme ndaj është shmangur.

Le të jetë $(S, \cdot, \leq)$ një *po*-gjysmëgrup dhe $(\Sigma, \circ, \subseteq)$ *le*-gjysmëgrupi i [32] ku S zhytet. Do të shënojmë me $Q(S)$ bashkësinë e të gjithë kuazi-idealëve të S dhe me $Q(\Sigma)$ bashkësinë e elementëve kuazi-idealë të Σ .

Teoremë 4.1.2 *Një po-gjysmëgrup $(S, \cdot, \leq)$ është i rregullt vetëm në qoftë se $Q(S)$ formon një gjysmëgrup Von Neumann të rregullt.*

Vërtetim. Supozojmë se S është i rregullt. Vërtetojmë së pari që Σ është i rregullt gjithashtu.

Vërtet, marrim $(A]_0 \in \Sigma$ dhe $a \in (A]_0$. Nqs $a = 0$, atëherë $0 = a0a \in (ASA]_0$ që provon se $0 \in (ASA]_0 = (A]_0 \circ S \circ (A]_0$. Në qoftë se $a \neq 0$, atëherë $a \in S$ dhe meqënëse S është i rregullt atëherë gjendet një $a' \in S$ i tillë që $a \leq aa'a$. Por $aa'a \in (ASA]_0 = (A]_0 \circ S \circ (A]_0$ duke provuar edhe njëherë se $a \in (A]_0 \circ S \circ (A]_0$. Kështu kemi se $(A]_0 \subseteq (A]_0 \circ S \circ (A]_0$. Tani [26] implikon se $Q(\Sigma)$ është von Neumann i rregullt. Do të provojmë që kjo e fundit implikon se $Q(S)$ është von Neumann i rregullt gjithashtu. Le të jenë $Q_1, Q_2 \in Q(S)$. Nga lema 4.1.1 $(Q_1]_0, (Q_2]_0 \in Q(\Sigma)$ dhe për pasojë $(Q_1 Q_2]_0 = (Q_1]_0 \circ (Q_2]_0 \in Q(\Sigma)$. Lema 4.1.1 e aplikuar për $Q_1 Q_2$ e cila është nënbashkësi e S implikon që $Q_1 Q_2 \in Q(S)$ që provon se $Q(S)$ formon gjysmëgrup. Të vërtetojmë tani që kjo e fundit është von Neumann e

rregullt. Le të jenë $Q = (Q] \in Q(S)$ dhe $(Q]_0$ elementët kuazi-idealë korrespondues të saj në Σ . Nga supozimi gjendet $(Q']_0 \in Q(\Sigma)$ e tillë që

$$(Q]_0 = (Q]_0 \circ (Q']_0 \circ (Q]_0 = (Q * Q' * Q]_0.$$

Rrjedh që

$$(Q] = (QQ''Q]$$

ku $Q'' = Q' \setminus \{0\}$ është kuazi-ideal i S (lema 4.1.1). Por $(Q] = Q$ meqënëse Q është kuazi-ideal i S dhe $(QQ''Q] = QQ''Q$ meqënëse $Q(S)$ është gjysmëgrup, që sjell se $Q = QQ''Q$ duke provuar kështu që $Q(S)$ është von Neumann i rregullt.

Anasjellas, supozojmë se $Q(S)$ formon një gjysmëgrup von Neumann të rregullt. Do të vërtetojmë së pari që $Q(\Sigma)$ është gjysmëgrup von Neumann i rregullt gjithashtu.

Le të jenë $(Q_1]_0, (Q_2]_0 \in Q(\Sigma)$ dhe $Q'_1, Q'_2 \in Q(S)$ kuazi-idealët korrespondues të tyre të lemës 4.1.1. Supozimi implikon që $Q'_1 Q'_2 \in Q(S)$, dhe pastaj nga lema 4.1.1 kemi që $(Q'_1 * Q'_2]_0 \in Q(\Sigma)$. Kjo implikon që $(Q_1 * Q_2]_0 \in Q(\Sigma)$ ose në mënyrë ekuivalente që $(Q_1]_0 \circ (Q_2]_0 \in Q(\Sigma)$ duke provuar kështu që $Q(\Sigma)$ formon gjysmëgrup. Tani do të tregojmë se çdo $(Q]_0 \in Q(\Sigma)$ ka të anasjellë. Le të jetë përsëri $Q' \in Q(S)$ kuazi-ideali korrespondues i lemës 4.1.1 dhe le të jetë $K' \in Q(S)$ inversi i tij, atëherë $Q' = Q' K' Q'$. Nga kjo marrim në Σ se

$$(Q]_0 = (Q']_0 = (Q' * K' * Q']_0 = (Q]_0 \circ (K']_0 \circ (Q]_0.$$

Kjo dhe fakti se $(K']_0$ është element kuazi-ideal në Σ tregojnë se $(K']_0$ është inversi i $(Q]_0$ në $Q(\Sigma)$ që provon se $Q(\Sigma)$ është von Neumann i rregullt.

Përsëri [26] implikon që Σ është le -gjysmëgrup i rregullt. Do të përdorim këtë për të provuar se S është po -gjysmëgrup i rregullt. Le të jetë $a \in S$ dhe le të jetë $(a]_0$ elementi i tij korrespondues në Σ . Rregullsia e këtij të fundit implikon se gjendet një $(A]_0 \in \Sigma$ i tillë që

$$(a]_0 = (a]_0 \circ (A]_0 \circ (a]_0 = (\{a\} * A * \{a\}]_0,$$

e cila implikon se gjendet $a' \in A$ e tillë që $a \leq aa'a$, atëherë S është po -gjysmëgrup i rregullt. ■

Rrjedhim 4.1.3 *Një po-gjysmëgrup $(S, \cdot, \leq)$ është i rregullt dhe intra i rregullt vetëm në qoftë se $Q(S)$ formon bandë.*

Vërtetim. Supozojmë se S është i rregullt dhe intra i rregullt. Nga vërtetimi i teoremës 4.1.2 ne dimë që Σ është *le*-gjysmëgrup i rregullt. Do të provojmë tani se Σ është intra i rregullt. Le të jetë $(A]_0$ një element çfardo i ndryshëm nga zero i Σ dhe a një element i ndryshëm nga zero çfardo i A . Meqënëse S është intra i rregullt, rrjedh që gjenden $x_a, y_a \in S$ të tilla që $a \leq x_a a^2 y_a$ dhe atëherë kemi

$$(A]_0 \subseteq (X_A]_0 \circ (a^2]_0 \circ (Y_A]_0 = (X_A]_0 \circ (a]_0^2 \circ (Y_A]_0 \subseteq S \circ (a]_0^2 \circ S$$

ku $X_A = \{x_a \mid a \in A\}$ dhe ngjashmërisht $Y_A = \{y_a \mid a \in A\}$. Kjo nënkupton që $(A]_0$ është intra i rregullt si e pohuam. Rrjedhimi i [26] implikon që $Q(\Sigma)$ është bandë.

Do të provojmë që kjo implikon se $Q(S)$ është bandë gjithashtu. Vërtet, le të jetë Q një kuazi-ideal çfardo i S dhe le të jetë $(Q]_0$ elementi kuazi-ideal korrespondues në Σ i cili nga më sipër është idempotent, atëherë

$$(Q]_0 = (Q]_0 \circ (Q]_0 = (QQ]_0$$

Meqënëse $Q \subseteq S$ dhe $Q(S)$ formon gjysmëgrup (teorema 4.1.2), barazimi i mësipërm implikon se

$$Q = (Q] = (QQ] = QQ,$$

e cila provon se Q është idempotent.

Anasjellas, supozojmë se $Q(S)$ është bandë e për rrjedhojë një gjysmëgrup von Neumann i rregullt në veçanti. Teorema 4.1.2 implikon se S është i rregullt. Për të provuar se S është intra i rregullt ne veprojmë si më poshtë. Fillimisht vërtetojmë se $Q(\Sigma)$ është bandë. Për këtë le të jetë $(Q]_0$ një element kuazi-ideal çfardo. Duke shkruar $Q' = Q \setminus \{0\}$ ne dimë nga lema 4.1.1 që Q' është kuazi-ideal i S i cili supozohet të jetë idempotent, atëherë $Q' = Q'Q'$. Kjo implikon lehtë se

$$(Q]_0 = (Q * Q]_0 = (Q]_0 \circ (Q]_0,$$

i cili tregon se $(Q]_0$ është idempotent. Rrjedhimi i [26] implikon që Σ është intra i rregullt. Ne do ta përdorim këtë për të treguar se S është intra i rregullt gjithashtu. Le të jetë $a \in S$ dhe $(a]_0$ elementi korrespondues i tij në Σ . Supozimi për Σ implikon që

$$(a]_0 \subseteq S \circ (a]_0^2 \circ S = S \circ (a^2]_0 \circ S,$$

nga i cili marrim se gjenden $x, y \in S$ të tilla që $a \leq x_a a^2 y_a$. Kjo qartësisht nënkupton se a është një element intra i rregullt duke përfunduar kështu vërtetimin. ■

Përkufizim 4.1.4 *Një po-gjysmëgrup $(S, \cdot, \leq)$ quhet gjysmë i thjeshtë në qoftë se për çdo nënbashkësi jo boshe A të S , kemi $A \subseteq (ASASA)$.*

Pohim 4.1.5 *Le të jetë S një po-gjysmëgrup. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente.*

(1) *Idealet e S janë idempotentë.*

(2) *Në qoftë se I dhe J janë ideale të S , atëherë $I \cap J = (IJ)$.*

(3) *Për çdo $A, B \subseteq S$, $((A)_r)_l \cap ((B)_r)_l = (((A)_r)_l \cap ((B)_r)_l)$.*

(4) *Për çdo $A \subseteq S$, $((A)_r)_l = ((A)_r)_l^2$.*

(5) *S është gjysmë i thjeshtë.*

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2) Nqs idealet e S janë idempotentë, atëherë elementët e Σ janë idempotentë. Kjo rrjedh lehtë nga korrespondenca e lemës 4.1.1 dhe përkufizimi i $\circ$ në Σ . Pohimi 9 i [36] i aplikuar në një çift çfardo idealesh I, J të S tregon që

$$(I \cap J]_0 = (I]_0 \wedge (J]_0 = (IJ]_0,$$

Nga kjo marrim

$$I \cap J = (IJ],$$

siç e pohuam.

(2) $\Rightarrow$ (3) Është i qartë meqënëse $((A)_r)_l$ dhe $((B)_r)_l$ janë ideale të S .

(3) $\Rightarrow$ (4) E qartë.

(4) $\Rightarrow$ (5) Le të jetë $A \subseteq S$. Nga supozimi ynë, ideali $(A \cup AS \cup SA \cup SAS]$ i S i përftuar nga A është idempotent, për rrjedhojë një idempotent i Σ është elementi ideal korrespondues i tij $(A \cup AS \cup SA \cup SAS]_0$ i përftuar nga $(A]_0$. Pohimi 9 i [36] implikon që Σ është gjysmë i thjeshtë. Le të jetë $A \subseteq S$ dhe $(A]_0$ elementi korrespondues i tij në Σ . Meqënëse kjo e fundit ishte gjysmë e thjeshtë, atëherë

$$(A]_0 \subseteq S \circ (A]_0 \circ S \circ (A]_0 \circ S = (SASAS]_0.$$

Nga i cili marrim se

$$A \subseteq (SASAS]$$

duke provuar kështu që S është gjysmë i thjeshtë.

(5) $\Rightarrow$ (1) Do të tregojmë se Σ është gjysmë i thjeshtë. Vërtet, le të jetë $(A]_0 \subseteq \Sigma$ ku $A \subseteq S^0$.

Nga supozimi ynë për S i aplikuar për $A' = A \setminus \{0\}$ kemi që

$$A' \subseteq (SA'SA'S],$$

e cila implikon se

$$(A]_0 \subseteq (S^0 * A * S^0 * A * S^0]_0 = S \circ (A]_0 \circ S \circ (A]_0 \circ S$$

duke provuar kështu gjysmë thjeshtësinë e Σ . Pohimi 9 i [36] implikon se çdo element ideal i Σ ka për të qënë idempotent. Do të tregojmë se çdo ideal i S është idempotent gjithashtu. Vërtet, le të jetë I një ideal i S dhe $(I]_0$ elementi ideal korrespondues në Σ i cili është idempotent, prandaj

$$(I]_0 = (I]_0 \circ (I]_0 = (I^2]_0,$$

i cili implikon se

$$I = (I] = (I^2] = (I](I] = (I]^2 = I^2,$$

duke provuar kështu që idealet e S janë idempotentë. ■

Përkufizim 4.1.6 Le të jetë $(S, \cdot, \leq)$ po-gjysmëgrup. Një nënbashkësi jo boshe A e S do të quhet nënbashkësi prim në qoftë se për çdo çift nënbashkësish A_1, A_2 të S , $A_1 A_2 \subseteq (A]$ implikon që $A_1 \subseteq (A]$ ose $A_2 \subseteq (A]$.

Një nënbashkësi A do të quhet dobësisht prim në qoftë se për çdo çift idealesh I, J të S , $IJ \subseteq (A]$ implikon që $I \subseteq (A]$ ose $J \subseteq (A]$. Së fundmi, A do të quhet gjysmë prim në qoftë se për çdo $B \subseteq S, B^2 \subseteq (A]$ implikon që $B \subseteq (A]$.

Analoget e pohimeve 10, 11, teoremës 12, pohimeve 13, 14, 15 dhe teoremës 16 të [36] qëndrojnë të vërteta për po-gjysmëgrupet.

Pohim 4.1.7 Le të jetë S po-gjysmëgrup. Në qoftë se idealet e S janë dobësisht prim, atëherë ata janë idempotentë dhe formojnë zinxhir.

Vërtetim. Le të tregojmë së pari që çdo element ideal $(I]_0$ i Σ është dobësisht prim. Vërtet, supozojmë se $(I_1]_0 \circ (I_2]_0 \subseteq (I]_0$. Në qoftë se $I_1 = \{0\}$ ose $I_2 = \{0\}$, atëherë rezultati është i vërtetë. Në qoftë se asnjëri nga të mësipërmët nuk është zero, atëherë marrim, I'_1, I'_2 dhe I' idealet korrespondues në S të lemës 4.1.1. Supozimi ynë implikon që $I'_1, I'_2 \subseteq I'$, nga e cila marrim që ose $I'_1 \subseteq I'$ ose $I'_2 \subseteq I'$ meqënëse idealet

e S janë dobësisht prim. Në qoftë se për shembull $I'_1 \subseteq I'$, atëherë është e qartë se $(I_1]_0 \subseteq (I']_0$ duke provuar se $(I']_0$ është dobësisht prim. Tani pohimi 10 i [36] implikon që çdo element ideal i Σ është idempotent. Do të provojmë që e njëjta gjë është e vërtetë për idealet e S . Le të jetë I një ideal çfardo i S dhe le të jetë $(I]_0$ elementi i tij korrespondues në Σ për të cilin ne dimë që është idempotent, kështu $(I]_0 = (I]_0 \circ (I]_0 = (I^2]_0$. Kjo implikon qartësisht se $I = I^2$ duke provuar kështu që I është idempotent. Përsëri, fakti që elementët idealë të Σ janë dobësisht prim dhe pohimi 10 i [36] implikojnë që elementët idealë të Σ formojnë zinxhir. Së fundmi do të provojmë se e njëjta gjë mbetet e vërtetë për idealet e S . Le të jenë I, J ideale të S dhe $(I]_0, (J]_0$ elementet idealë korrespondues në Σ . Në qoftë se për shembull $(I]_0 \subseteq (J]_0$, atëherë duket qartë se $I \subseteq J$ duke provuar kështu pohimin. ■

Pohim 4.1.8 *Le të jetë S po-gjysmëgrup. Në qoftë se për çdo dy ideale I, J të S , $I \cap J = (IJ]$ dhe bashkësia e idealeve formon një zinxhir, atëherë çdo ideal është dobësisht prim.*

Vërtetim. Do të provojmë së pari që për çdo dy elemente idealë $(I]_0, (J]_0$ të Σ , $(I]_0 \wedge (J]_0 = (I]_0 \circ (J]_0$. Kjo është qartësisht e vërtetë në qoftë se secili prej elementeve idealë të mësipërm është i barabartë me zero. Në qoftë se jo, atëherë marrim I', J' idealet korrespondues të S . Supozimi i aplikuar për I' dhe J' pohon se $I' \cap J' = (I'J']$ dhe kjo qartësisht implikon se

$$(I]_0 \wedge (J]_0 = (I' \cap J']_0 = (I'J']_0 = (I * J]_0 = (I]_0 \circ (J]_0,$$

duke provuar kështu pohimin. Së dyti, meqënëse idealet e S formojnë zinxhir, elementet idealë të Σ formojnë zinxhir gjithashtu. Vërtet, në qoftë se $(I]_0$ dhe $(J]_0$ janë dy elemente idealë jo zero të Σ dhe I', J' janë idealët përkatës të S , atëherë nga supozimi $I' \subseteq J'$ ose $J' \subseteq I'$. Në secilin rast ne përftojmë që $(I]_0 \subseteq (J]_0$ ose $(J]_0 \subseteq (I]_0$. Tani, Σ kënaq të dy konditat e pohimit 11 të [36] për rrjedhojë elementët e tij idealë janë dobësisht prim. Do të përdorim këtë për të treguar se e njëjta gjë qëndron e vërtetë për idealet e S . Le të jetë I ideal i S dhe I_1, I_2 një çift idealesh të S të tillë që $I_1 I_2 \subseteq I$. Rrjedh se

$$(I_1]_0 \circ (I_2]_0 = (I_1 * I_2]_0 = (I_1 I_2]_0 \subseteq (I]_0,$$

Kjo së bashku me supozimin implikojnë që për shembull, $(I_1]_0 \subseteq (I]_0$, prandaj $I_1 \subseteq I$ duke provuar kështu pohimin. ■

Teorema e mëposhtme është një kombinim i pohimeve 4.1.5, 4.1.7 dhe 4.1.8.

Teoremë 4.1.9 *Le të jetë S po-gjysmëgrup. Idealet e S janë dobësisht prim vetëm në qoftë se ata formojnë zinxhir dhe kënaqet një nga pesë pohimet ekuivalente të pohimit 4.1.5.*

Pohim 4.1.10 *Një po-gjysmëgrup S është intra i rregullt vetëm në qoftë se idealet e S janë gjysmë prim.*

Vërtetim. Nga vërtetimi i rrjedhimit 4.1.3 ne dimë që në qoftë se S është intra i rregullt atëherë i tillë është edhe Σ . Pohimi 13 i [36] implikon që elementët idealë të Σ janë gjysmë prim. Tani le të jetë I ideal i S dhe $(I]_0$ elementi ideal i tij korrespondues i Σ . Në qoftë se $B \subseteq S$ i tillë që $B^2 \subseteq I$, atëherë për $(B]_0$ kemi që $(B]_0^2 = (B^2]_0 \subseteq (I]_0$, prandaj nga më sipër marrim që $(B]_0 \subseteq (I]_0$. Kjo implikon se $B \subseteq I$.

Anasjellas, në qoftë se idealet e S janë gjysmë prim, atëherë edhe elementet idealë të Σ janë të tillë. Vërtet, le të jetë $(I]_0$ një element ideal i Σ dhe $(B]_0$ i tillë që $(B * B]_0 = (B]_0^2 \subseteq (I]_0$. Për $B' = B \setminus \{0\}$ dhe $I' = I \setminus \{0\}$ ideal të S kemi që $B'^2 \subseteq I'$. Supozimi për S pastaj implikon që $B' \subseteq I'$, prandaj $(B]_0 \subseteq (I]_0$. Tani pohimi 13 i [36] implikon që Σ është intra i rregullt dhe pastaj nga vërtetimi i rrjedhimit 4.1.3 shohim që S është intra i rregullt. ■

Pohim 4.1.11 *Le të jetë S po-gjysmëgrup. Në qoftë se idealet e S janë prim, atëherë ata formojnë zinxhir dhe S është intra i rregullt.*

Vërtetim. Në qoftë se idealet e S janë prim, atëherë ata janë dobësisht prim dhe gjysmë prim, prandaj nga pohimi 4.1.7, idealet formojnë zinxhir. Më tej, meqënëse idealet janë gjysmë prim, atëherë nga pohimi 4.1.10, S është intra i rregullt. ■

Pohim 4.1.12 *Le të jetë S një po-gjysmëgrup intra i rregullt. Në qoftë se idealet e S formojnë zinxhir, atëherë ata janë prim.*

Vërtetim. Vërtetimi i pohimit 4.1.8 tregon që në qoftë se idealet e S formojnë zinxhir, atëherë elementët idealë të Σ formojnë zinxhir gjithashtu. Pohimi 15 i [36] pastaj implikon që elementët idealë të Σ janë prim. Do të tregojmë që nga kjo rrjedh se e njëjta gjë qëndron e vërtetë për idealet e S . Prandaj le të jetë I ideal i S dhe $A, B \subseteq S$. Të tilla që $AB \subseteq I$. Rrjedh se

$$(A]_0 \circ (B]_0 = (A * B]_0 = (AB]_0 \subseteq (I]_0,$$

atëherë $(A]_0 \subseteq (I]_0$ ose $(B]_0 \subseteq (I]_0$. Në secilin rast do të kishim që $A \subseteq I$ ose $B \subseteq I$ duke përfunduar kështu vërtetimin. ■

Si kombinim i pohimeve 4.1.11 dhe 4.1.12 përftojme pohimin e mëposhtëm.

Teoremë 4.1.13 *Le të S po-gjysmëgrup. Idealet e S janë prim vetëm në qoftë se ata formojnë zinxhir dhe S është intra i rregullt.*

Rezultati i teoremës 4.1.13 qëndron i vërtetë në qoftë se relacioni i renditjes në po-gjysmëgrupin është thjesht barazimi, me fjalë të tjera në qoftë se S është gjysmëgrup i zakonshëm. Është e qartë se në këtë rast koncepti ynë për idealet prim përputhet me konceptin e zakonshëm të idealeve prim në teorinë e gjysmëgrupeve dhe një po-gjysmëgrup intra i rregullt me renditjen që është barazim është një gjysmëgrup intra i rregullt në sensin e zakonshëm. Nga kjo vërejtje ne marrim si rrjedhim një rezultat të Szasz në [57].

Rrjedhim 4.1.14 *Le të jetë S gjysmëgrup. Idealet e S janë prim vetëm në qoftë se ata formojnë zinxhir dhe S është intra i rregullt.*

Autorja e këtij disertacioni ka studiuar në preprintin [49] ato le -gjysmëgrupe në të cilët çdo dy elementë idealë të majtë ndërrohen. Kjo konditë është quajtur aty kondita Λ . Ajo ka provuar mes të tjerave se le -gjysmëgrupet gjysmë të thjeshtë që kënaqin konditën Λ karakterizohen si ato le -gjysmëgrupe në të cilët zbërthimi në $\mathcal{J}$ -klasa formon një semilatisë $\vee$ -gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas. Është pohuar se Λ është një konditë natyrale dhe për të mbështetur këtë pohim përmendet ngjashmëria e Λ me atë të teoremës 6 (2) të [34] e cila jep tetë karakterizime ekuivalente të po-gjysmëgrupeve të cilat zbërthehen si semilatisa gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas. Del se ajo ngjashmëri që përmendëm më sipër nuk është thjesht një koincidence por një shembull i një lidhjeje më të thellë që ekziston ndërmjet po-gjysmëgrupeve dhe le -gjysmëgrupeve.

Lidhur me këtë provojmë në fund teoremën e mëposhtme.

Teoremë 4.1.15 *Një po-gjysmëgrup S është një semilatisë e plotë gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas vetëm në qoftë se Σ në të cilën S zhytet është gjysmë i thjeshtë dhe kënaq konditën Λ .*

Vërtetim. Nga teorema 6 (2) tek [34] S kënaq vetinë: në qoftë se L_1, L_2 dhe L janë ideale të majtë, atëherë $(L_1 L_2] = (L_2 L_1]$ dhe $(L^2] = L$. Rrjedh që Σ është gjysmë i thjeshtë. Vërtet, nga pohimi 9 i [36] ne kemi për të vërtetuar që çdo element ideal i Σ është idempotent. Le të jetë $(I]_0$ një element ideal në Σ dhe le të jetë I' ideali korrespondues i tij në S për të cilin dimë që $(I'^2] \subseteq I'$.

Duke u kthyer pas te Σ kemi për $(I]_0$ që

$$(I]_0^2 = (I]_0 \circ (I]_0 = (I']_0 \circ (I']_0 = (I' * I']_0 = (I' I']_0 = (I']_0 = (I]_0,$$

që provon se ai është idempotent. Do të vazhdojmë duke treguar se Σ kënaq Λ . Për këtë le të jenë $(L_1]_0, (L_2]_0$ dy elemente idealë të Σ dhe L'_1, L'_2 idealet e majtë

korrespondues të tyre në S . Dimë që $(L_1' L_2'] = (L_2' L_1']$. Për homologët e tyre në Σ kemi

$$\begin{aligned} (L_1]_0 \circ (L_2]_0 &= (L_1']_0 \circ (L_2']_0 = (L_1' * L_2']_0 \\ &= (L_1' L_2']_0 = (L_2' L_1']_0 && \text{nga me sipër} \\ &= (L_2' * L_1']_0 = (L_2']_0 \circ (L_1']_0 = (L_2]_0 \circ (L_1]_0 \end{aligned}$$

e cila provon Λ .

Anasjellas, supozojmë se Σ është gjysmë i thjeshtë dhe kënaq Λ dhe duam të tregojmë se S kënaq (2) të teoremës 6 të [34]. Vërejmë së pari se në le -gjysmëgrupet që kënaqin Λ çdo element ideal i majtë është element ideal i djathtë po ashtu, pra edhe element ideal. Le të jetë tani L një ideal i majtë i S dhe le të jetë $(L]_0$ elementi ideal i majtë korrespondues i tij në Σ i cili nga vërejtja më sipër është gjithashtu element ideal e për rrjedhoje idempotent nga supozimi. Pra

$$(L^2]_0 = (L * L]_0 = (L]_0 \circ (L]_0 = (L]_0,$$

e cila tregon se $(L^2] = (L] = L$.

Më tej, në qoftë se na jepen L_1, L_2 ideale të majtë të S ne duam të provojmë se $(L_1 L_2] = (L_2 L_1]$. Duke marrë elementët idealë të majtë korrespondues $(L_1]_0$ dhe $(L_2]_0$ në Σ të cilët nga supozimi ynë ndërrojnë dhe kemi

$$(L_1 L_2]_0 = (L_1]_0 \circ (L_2]_0 = (L_2]_0 \circ (L_1]_0 = (L_2 L_1]_0,$$

që tregon se $(L_1 L_2] = (L_2 L_1]$ duke përfunduar kështu vërtetimin. ■

KAPITULLI 5

Teorema zbërthimi për *po*-gjysmëgrupet

Zbërthimi i një gjysmëgrupi si semilatisë i një tipi të caktuar gjysmëgrupesh ka luajtur një rol qëndror në teorinë e gjysmëgrupeve dhe problemi për ti karakterizuar zbërthime të tilla në terma të idealeve ose përgjithësimeve të tyre ka qënë një temë e cila shfaqet shpesh në teorinë e gjysmëgrupeve. Për shembull, Saitô ka treguar në [48] që një gjysmëgrup S është semilatisë gjysmëgrupesh të thjeshtë majtas, vetëm në qoftë se bashkësia e idealeve të majtë të S është semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive. Një rezultat i ngjashëm u vërtetua nga Lajos në [38] ku ai karakterizonte gjysmëgrupet e Klifordit si ata gjysmëgrupe bi-idealet e të cilëve formojnë semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive. Në analogji me [48], Kehayopulu dhe Tsingelis provuan në [34] që një gjysmëgrup i renditur S zbërthehet si një semilatisë gjysmëgrupesh të renditur të thjeshtë majtas vetëm në qoftë se bashkësia e idealeve të majtë të renditur formon semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive.

Qëllimi i këtij kapitulli është të provojë një teoremë zbërthimi të ngjashme me atë të Kehayopulu dhe Tsingelis ku idealet e renditur të majtë zëvendësohen me bi-ideale të renditur. Më saktësisht ne tregojmë që një gjysmëgrup i renditur S zbërthehet si një semilatisë gjysmëgrupesh të renditur $\mathcal{B}$ -të thjeshtë vetëm nëse bashkësia e bi-idealeve të renditur të tij formon semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive. Të motivuar nga rezultati i mësipërm dhe duke hequr konditën e idempotencës së bi-idealeve, ne studiojmë ata *le*-gjysmëgrupe në të cilët elementët bi-idealë ndërrojnë me njëri-tjetrin dhe provojmë që në të tillë gjysmëgrupe çdo $\mathcal{B}$ -klasë B që kënaq konditën e Grin-it ($B^2 \cap B \neq \emptyset$) formon një nëngjysmëgrup. Më tej përdorim këtë për të treguar që pa ndihmën e rezultatit nga [34], *po*-gjysmëgrupet në të cilët bi-idealet formojnë semilatisë, zbërthehen në një semilatisë gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ -të thjeshtë.

5.1 Një teoremë zbërthimi për *po*-gjysmëgrupet

Siç e pohuam edhe në hyrje, qëllimi i këtij paragrafi është të provojë një analoge të teoremës 6 të [34] ku fjala “ideal i majtë i renditur” është zëvendësuar me “bi-ideal i renditur”.

Teoremë 5.1.1 *Le të jetë $(S, \cdot, \leq)$ një *po*-gjysmëgrup. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

- (1) S është semilatisë gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ -të thjeshtë.
- (2) Në qoftë se B_1 , B_2 dhe B janë bi-ideale të S , atëherë $(B_1 B_2] = (B_2 B_1]$, $(B^2] = B$ dhe $B_1 \cap B_2 = (B_1 B_2]$.

(3) Në qoftë se B_1, B_2 janë bi-ideale të S , atëherë $B_1 \cap B_2 = (B_1 B_2]$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë $c \in (B_1 B_2]$, atëherë gjenden $b_1 \in B_1$ dhe $b_2 \in B_2$ të tillë që $c \leq b_1 b_2$. Duke shënuar me σ kongruencën e supozuar në teoremë, kemi që $(b_1 b_2)_\sigma = (b_2 b_1)_\sigma$. Fakti që $b_1 b_2 \in (b_2 b_1)_\sigma$ dhe që $(b_2 b_1)_\sigma$ është $\mathcal{B}$ -i thjeshtë, implikon që gjendet $x \in S$ i tillë që $b_1 b_2 \leq b_2 b_1 \cdot x \cdot b_2 b_1$. Prandaj $c \leq b_2 b_1 \cdot x \cdot b_2 b_1$ dhe atëherë

$$\begin{aligned} c &\in (b_2 b_1 \cdot x \cdot b_2 b_1) \subseteq (B_2 B_1 \cdot S \cdot B_2 B_1] \\ &\subseteq (B_2 S B_2 B_1] && \text{meqënëse } B_1 S \subseteq S \\ &\subseteq (B_2 B_1] && \text{meqënëse } B_2 \text{ është bi-ideal,} \end{aligned}$$

që tregon se $(B_1 B_2] \subseteq (B_2 B_1]$. Përfshirja e kundërt provohet në mënyrë të ngjashme, për rrjedhojë kemi barazimin $(B_1 B_2] = (B_2 B_1]$.

Le të provojmë tani që $(B^2] = B$ për çdo bi-ideal B të S . Për çdo $b \in B$, $b \in (b)_\sigma$ por $(b)_\sigma$ formon nëngjysmëgrup të S prandaj $b^2 \in (b)_\sigma$. Fakti që $(b)_\sigma$ është $\mathcal{B}$ -i thjeshtë implikon që gjendet ndonjë $x \in S$ i tillë që $b \leq b^2 x b^2$, atëherë $b \in (B^2 S B^2] \subseteq (B^2]$ e cila provon se $B \subseteq (B^2]$. Përfshirja e kundërt rrjedh nga fakti që $B = (B)$ është më përkufizim një nëngjysmëgrup i S .

Së fundi provojmë që $B_1 \cap B_2 = (B_1 B_2]$. Fillimisht vërejmë se për çdo bi-ideal B të S kemi që $(B) = (BSB]$. Për të parë këtë kujtojmë se konditat që bi-idealet janë idempotentë dhe ndërrojnë me njëri-tjetrin implikojnë se e njëjta gjë qëndron e vërtetë për idealet e majtë si rast i veçantë i bi-idealeve, atëherë teorema 6 (5) të [34] implikon se S është rregullt majtas. Atëherë

$$\begin{aligned} B &\subseteq (SB^2] && \text{nga rregullsia majtas} \\ &= (BSB] \subseteq (B) && \text{meqënëse bi-idealet ndërrojnë,} \end{aligned}$$

që provon se $(B) = (BSB]$. Le të jenë tani B_1 dhe B_2 dy bi-ideale të S , atëherë

$$\begin{aligned} (B_1 B_2] &= (B_1 B_2 S B_2] && \text{nga vërejtja e mësipërme} \\ &= ((B_1 B_2] S B_2] = ((B_2 B_1] S B_2] && \text{meqënëse bi-idealet ndërrojnë} \\ &= (B_2 B_1 S B_2] \subseteq (B_2 S B_2] && \text{meqënëse } B_1 S \subseteq S \\ &= (B_2]. \end{aligned}$$

Në të njëjtën mënyrë tregohet se $(B_1 B_2] \subseteq (B_1]$, pra $(B_1 B_2] = (B_2 B_1] \subseteq B_1 \cap B_2$ që tregon se $B_1 \cap B_2$ është jo boshe e për rrjedhojë një bi-ideal i S si prerje e dy bi-idealeve. Por edhe njëherë bi-idealet janë idempotentë prandaj

$$B_1 \cap B_2 = (B_1 \cap B_2)^2 \subseteq (B_1 B_2],$$

që implikon $B_1 \cap B_2 = (B_1 B_2]$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Vërejmë përsëri që konditat që po supozojmë implikojnë se çdo gjë e pohuar në teoremën 6 të [34] është e vërtetë meqënëse idealet e majtë janë në të njëjtën kohë bi-ideale gjithashtu. Në veçanti kemi që për çdo $a \in S$ ideali i majtë $L(a)$ i S i gjeneruar nga a është i barabartë me $(Sa]$. Do të tregojmë se e njëjta gjë është e vërtetë për bi-idealën $B(a)$ të S të gjeneruar nga a . Vërtet,

$$\begin{aligned} B(a) &= S \cap B(a) = (S \cdot B(a)) = (S(a \cup a^2 \cup aSa]) && \text{nga supozimi} \\ &= (Sa \cup Sa^2 \cup SaSa) = (Sa \cup SaSa) && \\ &= (Sa) = L(a) && \text{nga më sipër.} \end{aligned}$$

Barazimi $B(a) = L(a)$ tregon se $\mathcal{B} = \mathcal{L}$ në S , atëherë zbërthimi i S në $\mathcal{B}$ -klasa është një zbërthim semilatisë nëngjysmëgrupesh të thjeshtë majtas. Do të provojmë që çdo $\mathcal{B}$ -klasë $(a)_B$ është në fakt $\mathcal{B}$ -e thjeshtë duke treguar se çdo bi-ideal B i $(a)_B$ është në fakt ideal i majtë i $(a)_B$ dhe për rrjedhim $B = (a)_B$ nga të qënurit të thjeshtë majtas të $(a)_B = (a)_L$. Lidhur me këtë supozojmë $y \in ((a)_B B]$ atëherë $y \leq \alpha \cdot b$ ku $\alpha \in ((a)_B]$ dhe $b \in B$. Rrjedh se $\alpha \leq a'$ ku a' është gjenerator i $B(a)$. Meqënëse B është bi-ideal i $(a')_B$, atëherë $B(a')_B B \subseteq B$, dhe për çdo $b_1, b_2 \in B$,

$$B(b_1 a' b_2) = B(a'),$$

ose në mënyrë ekuivalente

$$(b_1 a' b_2 \cdot S \cdot b_1' a b_2) = (a' \cdot S \cdot a').$$

Kjo e fundit implikon që ka ndonjë $x \in S$ e tillë që $a' \leq b_1 x b_2$. Rrjedh se $y \leq b_1 x b_2 b$, por $b_1 x b_2 b \in (BSB) \subseteq (B]$, atëherë $y \in (B]$ që provon se $((a)_B B) \subseteq (B]$ e cila tregon se $(a)_B$ është ideal i majtë siç kërkohej.

(2) $\Rightarrow$ (3). Është triviale.

(3) $\Rightarrow$ (2). Meqënëse $B_1 \cap B_2 = (B_1 B_2]$, atëherë $B_2 \cap B_1 = (B_2 B_1]$, prandaj $(B_1 B_2) = (B_2 B_1]$. Duke marrë $B_1 = B_2 = B$ përftojmë $B = B \cap B = (BB) = (B^2]$. ■

5.2 Një zbatim tek gjysmëgrupet e zakonshëm

Në këtë paragraf të shkurtër do të zbatojmë rezultatin e teoremës 5.1.1 për rastin kur relacioni i renditjes në një gjysmëgrup të dhënë $(S, \cdot)$ është përcaktuar duke pozuar $\leq := \{(a, b) \in S \times S : a = b\}$. Është e qartë që një gjysmëgrup i tillë i renditur $(S, \cdot, \leq)$ nuk është veçse gjysmëgrupi i zakonshëm $(S, \cdot)$. Një bi-ideal i renditur në këtë rast është thjesht një bi-ideal i zakonshëm, domethënë një nëngjysmëgrup $B \subseteq S$ i tillë që $BSB \subseteq B$.

Teoremë 5.2.1 *Le të jetë $(S, \cdot)$ gjysmëgrup. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

- (1) *S është semilatisë gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ -të thjeshtë.*
- (2) *Në qoftë se B_1, B_2 dhe B janë bi-ideale të S , atëherë $B_1 B_2 = B_2 B_1$, $B^2 = B$ dhe $B_1 \cap B_2 = B_1 B_2$.*
- (3) *Në qoftë se B_1, B_2 janë bi-ideale të S , atëherë $B_1 \cap B_2 = B_1 B_2$.*

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Është e menjëhershme nga (1) $\Rightarrow$ (2) i teoremës 5.1.1 në qoftë se kujtojmë që në rastin e të parenditurave ka vend barazimi $(B_1 B_2] = B_1 B_2$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Është evidente.

(3) $\Rightarrow$ (1). Kondita (3) karakterizon semilatisat e grupeve (teorema 11, [38]). Për rrjedhojë S është semilatisë grupesh dhe secila nga këta grupe është gjysmëgrup $\mathcal{B}$ -i thjeshtë. Kjo provon (1). ■

Rrjedhimi i menjëhershëm i mëposhtëm i teoremës 5.2.1 dhe teoremës 11 të [38] nuk duket se është i njohur më parë.

Rrjedhim 5.2.2 *Një gjysmëgrup $(S, \cdot)$ është semilatisë grupesh vetëm në qoftë se ai është semilatisë gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ -të thjeshtë.*

Kondita e mjaftueshme e të mësipërme mund të provohet gjithashtu duke përdorur (2) e teoremës 5.2.1 dhe teoremën 12 të [38] e cila karakterizom semilatisat e grupeve si ato gjysmëgrupe bi-idealët e të cilëve formojnë semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive.

5.3 Kalimi nga le-gjysmëgrupet tek po-gjysmëgrupet

Rezultati i lemës së mëposhtme është thelbësor për të gjithë këtë paragraf.

Lemë 5.3.1 *Në qoftë se B është bi-ideal i S , atëherë $(B]_0$ është element bi-ideal i Σ . Anasjellas, në qoftë se $(B]_0$ është element bi-ideal i Σ , atëherë $B' = B \setminus \{0\}$ është bi-ideal i S .*

Vërtetim. Për konditën e nevojshme shohim që

$$\begin{aligned} (B]_0 \circ S \circ (B]_0 &= (B * S * B]_0 && \text{nga përkufizimi i } \circ \\ &= (BSB]_0 \subseteq (B]_0 && \text{meqenëse } B \text{ është bi-ideal i } S. \end{aligned}$$

Për të anasjellën

$$\begin{aligned} B' S B' &\subseteq (B' S B'] \subseteq (B' S B']_0 \\ &= (B * S * B]_0 = (B]_0 \circ S \circ (B]_0 \subseteq (B]_0 && \text{meqenëse } (B] \text{ është element bi-ideal.} \end{aligned}$$

Por $B' S B' \subseteq S$, atëherë $B' S B' \subseteq (B'] = B'$ që provon pohimin. ■

Përpara se të vërtetojmë rezultatin tonë kryesor të këtij paragrafi, konsiderojmë situatën e mëposhtme.

Le të jetë $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ një le -gjysmëgrup me element më të madh e në të cilin çdo dy elementë bi-idealë ndërrojnë me njëri-tjetrin. Këtë veti do ta quajmë kondita **B**. Supozojmë se B_β është një $\mathcal{B}$ -klasë e S që kënaq konditën e Grinit. Elementi β është elementi bi-ideal përfaqësues i klasës. Klasa B_β do të shënohet me $B_\beta^{(e)}$ në mënyrë që të shmangim ngatërresën me një klasë tjetër që do të futet më vonë. Meqënëse $B_\beta^{(e)}$ kënaq konditën e Grinit, atëherë nga [45] dimë që β është idempotent dhe çdo element i $B_\beta^{(e)}$ është intra i rregullt, për rrjedhojë $\beta \leq e\beta e$. Kjo dhe fakti që β është elementi më i madh i klasës implikojnë që

$$B_\beta^{(e)} \subseteq (e\beta e) = \{x \in S \mid x \leq e\beta e\}.$$

Ky vëzhgim do të jetë i dobishëm siç do të tregohet në vazhdim. Së pari vërejmë që $(e\beta e)$ është nëngjysmëgrup i S dhe me relacionin e renditjes të induktuar aty, $(e\beta e)$ bëhet një le -gjysmëgrup me element më të madh $e\beta e$. Le të jetë $B_\beta^{(e\beta e)}$, $\mathcal{B}$ -klasa e β në $(e\beta e)$. Vërejmë këtu se β është bi-ideal i $(e\beta e)$ meqënëse

$$\beta(e\beta e)\beta = (\beta e\beta)(e\beta) \leq \beta(e\beta) \leq \beta.$$

Duke qënë bi-ideal, ai do të jetë elementi më i madh i klasës për rrjedhojë elementi bi-ideal përfaqësues i tij. Në qoftë se kujtojmë se le -gjysmëgrupi ynë $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ ka vetinë që çdo dy elemente bi-idealë ndërrojnë me njëri-tjetrin, atëherë shohim që $e\beta e$ është idempotent meqënëse

$$\begin{aligned} e\beta e &\geq e\beta e \cdot e\beta e \geq \beta \cdot e\beta e \\ &= e \cdot \beta \cdot \beta e && \text{nga kondita } \mathbf{B} \\ &= e\beta e && \text{meqënëse } \beta \text{ është idempotent.} \end{aligned}$$

Pohim 5.3.2 *Le të jetë $\langle S, \cdot, \vee, \wedge \rangle$ një le -gjysmëgrup me element më të madh e në të cilin çdo dy elementë bi-idealë ndërrojnë me njëri-tjetrin. Atëherë çdo $\mathcal{B}$ -klasë që kënaq konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S .*

Vërtetim. Si më parë shënojmë me $B_\beta^{(e)}$ $\mathcal{B}$ -klasën e dhënë dhe me $B_\beta^{(e\beta e)}$ $\mathcal{B}$ -klasën e β në $(e\beta e)$. Do tregojmë që $B_\beta^{(e)} \subseteq B_\beta^{(e\beta e)}$. Vërtet, për çdo $x \in B_\beta^{(e)}$ kemi të vërtetë

$$\begin{aligned}
\beta = xex \vee x &\geq x \cdot e\beta e \cdot x \vee x \\
&\geq xe \cdot e\beta e \cdot ex \vee x = ex \cdot xe \cdot e\beta e \vee x && \text{nga kondita } \mathbf{B} \\
&= e\beta^2 e \cdot e\beta e \vee x && \text{meqënëse } ex = e\beta \text{ dhe } xe = \beta e \\
&= e\beta e \vee x && \text{meqënëse } e\beta e \text{ është idempotent} \\
&= \beta e^2 \vee x && \text{nga kondita } \mathbf{B} \\
&\geq \beta e \vee x \geq \beta && \text{meqënëse } x \leq \beta = \beta e\beta \leq \beta e.
\end{aligned}$$

Më tej do provojmë se $B_\beta^{(e\beta e)}$ është nëngjysmëgrup i $(e\beta e]$. Le të jenë $x, y \in B_\beta^{(e\beta e)}$.

Meqënëse $B_\beta^{(e)} \subseteq B_\beta^{(e\beta e)}$ dhe $B_\beta^{(e)}$ kënaq konditën e Grinit, atëherë $B_\beta^{(e\beta e)}$ kënaq këtë konditë gjithashtu dhe nga [45] kemi që

$$e\beta e \cdot x \cdot e\beta e = e\beta e \cdot y \cdot e\beta e = \beta.$$

Por kondita $\mathbf{B}$ sjell se

$$e\beta e \cdot x \cdot e\beta e = e\beta e \cdot e\beta e \cdot x = e\beta e \cdot x,$$

prandaj $e\beta e \cdot x = \beta$. Në të njëjtën mënyrë marrim se $x \cdot e\beta e = \beta$. Në veçanti kemi që $\beta \cdot e\beta e = \beta$ dhe $e\beta e \cdot \beta = \beta$. Meqënëse $\beta = \beta e\beta$ marrim që $\beta e = \beta$ dhe $e\beta = \beta$, rrjedhimisht $e\beta e = \beta$ dhe nga më sipër kemi që

$$e\beta e \cdot x = x \cdot e\beta e = e\beta e = \beta.$$

Më tej kemi

$$\begin{aligned}
\beta &\geq \beta^2 \cdot e\beta e \cdot \beta^2 \vee \beta^2 \geq xy \cdot e\beta e \cdot xy \vee xy \\
&= xy \cdot \beta \cdot y \vee xy = xy \cdot e\beta e \cdot y \vee xy \\
&= x \cdot e\beta e \cdot y \vee xy = e\beta e \vee xy = \beta \vee xy = \beta,
\end{aligned}$$

e cila provon se $xy \in B_\beta^{(e\beta e)}$. Së fundmi, do tregojmë që $B_\beta^{(e)}$ formon gjysmëgrup. Le të jenë $x, y \in B_\beta^{(e)}$. Meqënëse $B_\beta^{(e)} \subseteq B_\beta^{(e\beta e)}$ dhe meqënëse nga më sipër $B_\beta^{(e\beta e)}$ është gjysmëgrup, atëherë $xy \in B_\beta^{(e\beta e)}$ dhe prandaj

$$xy \cdot e\beta e \cdot xy \vee xy = \beta.$$

Tani kemi

$$\beta \geq xy \cdot e \cdot xy \vee xy \geq xy \cdot e\beta e \cdot xy \vee xy = \beta,$$

që provon se $xy \in B_\beta^{(e)}$. ■

Kthehemi tani të tregojmë se si të kalojmë nga Σ ku S zhytet në vetvete.

Lemë 5.3.3 Për çdo $x \in S$, $\mathcal{B}$ -klasa B_x^S e x në S përfshihet me anë të ι në $\mathcal{B}$ -klasën $B_{(x)_0}^\Sigma$ të $(x)_0$ në Σ .

Vërtetim. Në qoftë se $y \in B_x^S$, atëherë

$$(ySy \cup y] = (xSx \cup x],$$

prandaj

$$(y * S * y \cup y]_0 = (x * S * x \cup x]_0,$$

ose në mënyrë ekuivalente

$$(y]_0 \circ S \circ (y]_0 \vee (y]_0 = (x]_0 \circ S \circ (x]_0 \vee (x]_0,$$

duke provuar se $(y]_0 \in B_{(x)_0}^\Sigma$ dhe për rrjedhojë përfshirjen $\iota(B_x^S) \subseteq B_{(x)_0}^\Sigma$. ■

Lemë 5.3.4 Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është po-gjysmëgrup në të cilin bashkësia e bi-idealeve formon semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive, atëherë e njëjta gjë mbetet e vërtetë në bashkësinë e elementëve bi-idealë të $(\Sigma, \circ, \subseteq)$ ku S zhytet. Për më tepër, bashkësia e $\mathcal{B}$ -klasave të Σ formon semilatisë.

Vërtetim. Le të jenë $(A]_0, (B]_0$ dy elementë bi-idealë të Σ dhe A', B' bi-idealët përkatës të tyre të lemës 5.3.1 për të cilat dimë se

$$A'B' = B'A' \text{ dhe } A'^2 = A'.$$

Atëherë,

$$(A]_0 \circ (B]_0 = (A' * B']_0 = (A'B']_0 = (B'A']_0 = (B' * A']_0 = (B]_0 \circ (A]_0,$$

dhe

$$(A]_0^2 = (A]_0 \circ (A]_0 = (A' * A']_0 = (A'A']_0 = (A']_0 = (A]_0,$$

duke provuar kështu pohimin e parë.

Për të provuar pohimin e dytë, le të jenë $B_{(C]_0}^\Sigma, B_{(D]_0}^\Sigma$ dy $\mathcal{B}$ -klasa ku $(C]_0$ dhe $(D]_0$ janë elementët bi-idealë përfaqësues përkatës të klasave. Në qoftë se $(X]_0 \in B_{(C]_0}^\Sigma$ dhe $(Y]_0 \in B_{(D]_0}^\Sigma$, atëherë

$$\begin{aligned} (X]_0 \circ (Y]_0 \circ S &= (X]_0 \circ (Y]_0 \vee (X]_0 \circ (Y]_0 \\ &= (X]_0 \circ (Y]_0 \circ S \circ S \circ (X]_0 \circ (Y]_0 \vee (X]_0 \circ (Y]_0 & S \text{ është idempotent} \\ &= (X]_0 \circ S \circ (X]_0 \circ (Y]_0 \circ S \circ (Y]_0 \vee (X]_0 \circ (Y]_0 & \text{nga kondita B} \\ &= (C]_0 \circ (D]_0 & \text{nga [36],} \end{aligned}$$

pra $(X]_0 \circ (Y]_0 \in B_{(C]_0 \circ (D]_0}^\Sigma$ duke përfunduar kështu vërtetimin. ■

Rrjedhim 5.3.5 Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është po-gjysmëgrup në të cilin bashkësia e bi-idealeve formon semilatisë lidhur me shumëzimin e nënbashkësive, atëherë S zbërthehet si semilatisë e gjysmëgrupeve $\mathcal{B}$ -të thjeshtë.

Vërtetim. Nga lema 5.3.4 kemi që Σ kënaq konditën **B** dhe elementët bi-idealë janë idempotentë, atëherë nga pohimi 5.3.2 çdo $\mathcal{B}$ -klasë e Σ është nëngjysmëgrup. Nga ana tjetër lema 5.3.3 tregon se për çdo $x \in S$, B_x^S mund të shihet si nënbashkësi e $B_{(x]_0}^\Sigma$ e cila është nëngjysmëgrup, atëherë B_x^S është nëngjysmëgrup i S . Vërtet, le të jenë $y, z \in B_x^S$, atëherë

$$(ySy \cup y] = B = (zSz \cup z],$$

ku $B = (xSx \cup x]$. Meqënëse $B_{(x]_0}^\Sigma$ është nëngjysmëgrup, atëherë

$$(y]_0 \circ (z]_0 \circ S \circ (y]_0 \circ (z]_0 \vee (y]_0 \circ (z]_0 = (B]_0,$$

e cila implikon se

$$(yzSyz \cup yz] = B,$$

dhe si rrjedhim se $yz \in B_x^S$. Së dyti, për të treguar që zbërthimi i S në $\mathcal{B}$ -klasa është zbërthim semilatisash, mjafton të gjejmë një mënyrë indeksimi të $\mathcal{B}$ -klasave sipas një semilatisë në mënyrë të tillë që shumëzimi i $\mathcal{B}$ -klasave të përputhet me shumëzimin e indekseve të tyre përkatës. Kjo bëhet lehtë duke i caktuar çdo klasë B_x^S bi-idealit β_x të S të gjeneruar nga x dhe duke shënuar klasën me $B_{\beta_x}^S$ në vend të B_x^S . Për çdo çift klasash $B_{\beta_x}^S, B_{\beta_y}^S$ shohim që

$$\begin{aligned} B_{\beta_x}^S \cdot B_{\beta_y}^S &\cong \iota(B_{\beta_x}^S) \circ \iota(B_{\beta_y}^S) \\ &\subseteq B_{(\beta_x]_0}^\Sigma \circ B_{(\beta_y]_0}^\Sigma && \text{nga lema 5.3.3} \\ &\subseteq B_{(\beta_x]_0 \circ (\beta_y]_0}^\Sigma && \text{nga lema 5.3.4} \\ &= B_{(\beta_x \beta_y]_0}^\Sigma = B_{(\beta_{xy}]_0}^\Sigma && \text{meqënëse } xSx \cdot ySy = xySxy, \end{aligned}$$

e cila provon se imazhi $\iota(B_{\beta_x}^S \cdot B_{\beta_y}^S)$ i $B_{\beta_x}^S \cdot B_{\beta_y}^S$ në Σ përfshihet në $B_{(\beta_{xy}]_0}^\Sigma$, atëherë

$$\iota(B_x^S) \circ \iota(B_y^S) \subseteq \iota(S) \cap B_{(\beta_{xy}]_0}^\Sigma.$$

Por $B_{\beta_{xy}}^S \cong \iota(S) \cap B_{(\beta_{xy})_0}^\Sigma$ ku izomorfizmi është ngushtimi i ι mbi $B_{\beta_{xy}}^S$, kështu që $\iota(B_{\beta_x}^S) \circ \iota(B_{\beta_y}^S) \subseteq \iota(B_{\beta_{xy}}^S)$ që tregon se $B_{\beta_x}^S \cdot B_{\beta_y}^S \subseteq B_{\beta_{xy}}^S$.

Tani do të provojmë thjeshtësinë e $\mathcal{B}$ -klasave të S . Meqënëse elementët bi-idealë të Σ formojnë semilatisë, dy konkluzione mund të nxirren. Së pari, është e qartë se relacionet $\mathcal{B}$ dhe $\mathcal{J}$ përputhen në Σ dhe së dyti, Σ është gjysmë i thjeshtë meqënëse për çdo $(X)_0 \in \Sigma$,

$$(X)_0 \subseteq (XSX)_0 = S \circ (X)_0 \circ S \circ (X)_0 \circ S.$$

Tani pohimi 2.3.8 implikon se $\mathcal{B}$ -klasat e Σ janë nëngjysmëgrupe të thjeshtë majtas. Për të parë këtë, le të jetë B_x^S një $\mathcal{B}$ -klasë çfardo dhe le të jetë $y \in B_x^S$. Së pari vërejmë se

$$\iota(y \cdot B_x^S \cdot y \cdot \{y\}) = \iota(S) \cap ((y)_0 \circ B_{(x)_0}^\Sigma \circ (y)_0 \vee (y)_0). \quad (5.1)$$

Më tej shohim se

$$\begin{aligned} (y)_0 \circ B_{(x)_0}^\Sigma \circ (y)_0 \vee (y)_0 &= B_{(x)_0}^\Sigma \circ (y)_0^2 \vee (y)_0 \quad \text{nga kondita } \mathbf{B} \\ &= B_{(x)_0}^\Sigma \vee (y)_0 = B_{(x)_0}^\Sigma \quad \text{meqënëse } B_{(x)_0}^\Sigma \text{ është i thjeshtë majtas.} \end{aligned}$$

Në qoftë se zëvendësojmë në (5.1) $(y)_0 \circ B_{(x)_0}^\Sigma \circ (y)_0$ me $B_{(x)_0}^\Sigma$ përftojmë

$$\iota(y \cdot B_x^S \cdot y \cup \{y\}) = \iota(S) \cap B_{(x)_0}^\Sigma,$$

dhe meqënëse $\iota(S) \cap B_{(x)_0}^\Sigma$ është e barabartë me $\iota(B_x^S)$ përftojmë se $\iota(y \cdot B_x^S \cdot y \cup \{y\}) = \iota(B_x^S)$ e cila provon se B_x^S është $\mathcal{B}$ -i thjeshtë. ■

5.4 Kongruencat në po-gjysmëgrupet me përftim të fundëm

Le të supozojmë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i përftuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X, \leq)$. Shënojmë me $F(X)$ po-gjysmëgrupin e lirë me bazë $(X, \leq)$. Elementët e $F(X)$ janë fjalët me gjatësi të fundme $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ku x_i -të janë shkronja të X -it dhe se shumëzimi i dy fjalëve të tilla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dhe $(y_1, y_2, \dots, y_m)$ jepet me anën e bashkëngjitjes

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_m) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Nga ana tjetër renditja në bashkësinë e renditur $(X, \leq)$ indukton një renditje në gjysmëgrupin e lirë $F(X)$ që percaktohet si më poshtë

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq (y_1, y_2, \dots, y_m) \text{ vetëm kur } n = m \text{ dhe } x_i \leq y_i, \forall i = 1, 2, \dots, n.$$

Ekziston një epimorfizëm $\varphi: F(X) \rightarrow S$ që çdo fjale $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i vë në korrespondencë prodhimin $\varphi(x_1)\varphi(x_2)\dots\varphi(x_n)$ në S të elementëve $\varphi(x_1), \varphi(x_2), \dots, \varphi(x_n)$ që u korrespondojnë shkronjave $x_1, x_2, \dots, x_n$. Është e qartë që ky është një epimorfizëm gjysmëgrupesh që ruan renditjen. Gjithashtu në $F(X)$ mund të përcaktojmë një tjetër renditje e quajtur renditja gjatësi-leksikografike $\leq_{lex}$ e cila është kombinim i renditjes së dhënë më lart dhe asaj të përcaktuar nga krahasimi i gjatësive të fjalëve, domethënë

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq_{lex} (y_1, y_2, \dots, y_m) \text{ vetëm kur } n < m, \\ \text{ose kur } n = m \text{ dhe } x_i \leq y_i \text{ për çdo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Për çdo $s \in S$ përcaktojmë bashkësinë

$$\Delta(s) = \{\omega \in \varphi^{-1}(s) : \omega \text{ është element minimal lidhur me } \leq_{lex}\}.$$

Një mënyrë më eksplicite për të ndërtuar $\Delta(s)$ do të ishte që së pari, nga të gjithë parafytyrat në $F(X)$ të s -së të mereshin ato fjalë ω me gjatësi minimale dhe më pas për secilën ω të mereshin elementët minimalë të prerjes $(\omega] \cap \varphi^{-1}(s)$ lidhur me renditjen $\leq$ (sa herë që kjo prerje është jo-boshe). Bashkimi i bashkësive me elementë minimalë të gjetur në këtë mënyrë do të jepte pikërisht $\Delta(s)$. Këtu vërejmë se procesi i gjetjes së elementëve minimalë më të vegjël ose baraz me një fjalë të dhënë në $F(X)$ është një proces i fundëm pasi $(X, \leq)$ është e fundme.

Rezultatet e mëposhtme janë analoge të atyre tek [43] por në rastin kur gjysmëgrupi është edhe i renditur.

Le të jete tani $\mathcal{K}$ një kongruencë në S dhe $\mathcal{K}_s$ një $\mathcal{K}$ -klasë çfardo. Shënojmë me

$$M_s = \bigcup_{s' \in \mathcal{K}_s} \Delta(s')$$

Qartësisht M_s përmban të gjithë përfaqësuesit minimalë lidhur me $\leq_{lex}$ të elementëve $s' \in \mathcal{K}_s$. Do të tregojmë se bashkësia

$$M = \bigcup_{s \in S} M_s$$

e cila do të quhet bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\mathcal{K}$, është një bashkësi e mbyllur sipas faktorëve që nënkupton se çdo faktor i një fjale të M është përsëri fjalë e

M -së. Vërtet, supozojmë ekziston një $\omega = u_1 v u_2 \in M$ e tillë që $v \in F(X) - M$. Kjo do të thotë se ekziston $v' \in \varphi^{-1}(\mathcal{K}_{\varphi(v)})$ e tillë që $v' <_{lex} v$. Nga ana tjetër, meqënëse $(\varphi(v), \varphi(v')) \in \mathcal{K}$ atëherë $(\varphi(u_1)\varphi(v)\varphi(u_2), \varphi(u_1)\varphi(v')\varphi(u_2)) \in \mathcal{K}$ ose ndryshe që fjala $\omega' = u_1 v' u_2 \in \varphi^{-1}(\mathcal{K}_{\varphi(v)})$. Ndërkaq duket se $u_1 v' u_2 <_{lex} u_1 v u_2$ gjë që përbën kontradiktë.

Në qoftë se tani $I = F(X) - M \neq \emptyset$, atëherë I është ideal i S . Vërtet, sikur të ekzistonin $u \in I$ dhe $v \in F(X)$ të tillë që $uv \in M$ ose $vu \in M$, atëherë nga fakti që M është e mbyllur sipas faktorëve do të mernim në secilin rast se $u \in M$ në kundërshtim me supozimin. Në këtë mënyrë ne kemi vërtetuar lemën e mëposhtme.

Lemë 5.4.1. Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i përfshuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X, \leq)$ dhe $\mathcal{K}$ një kongruencë në S e tillë që $F(X) - M \neq \emptyset$, ku M është bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\mathcal{K}$, atëherë $I = F(X) - M$ është ideal i po-gjysmëgrupit të lirë $F(X)$.

Në lemën e mëposhtme do të shënojmë me Δ relacionin diagonal $\{(x, x) \mid x \in S\}$ në S dhe do të supozojmë se relacioni $\mathcal{B}$ është kongruencë semilatisë e plotë.

Lemë 5.4.2. Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i përfshuar nga një bashkësi e renditur e fundme $(X, \leq)$ dhe $\mathcal{K}$ një kongruencë në S dhe le të jetë M bashkësia e përfaqësuesve minimalë të $\mathcal{K}$. Në qoftë se $\mathcal{K}$ përmban relacionin $\mathcal{B}$, dhe $\mathcal{B} \neq \Delta$ ose $\mathcal{B} = \Delta$ por S kënaq $\min_{\mathcal{B}}$, atëherë $F(X) - M \neq \emptyset$.

Vërtetim. Supozojmë së pari se $\mathcal{B} \neq \Delta$. Në qoftë se $(x, y) \in \mathcal{B}$, atëherë

$$(xSx \cup x) = (ySy \cup y),$$

dhe atëherë $x \leq y$, ose $x \leq ysy$ për ndonjë $s \in S$. Meqënëse $\mathcal{B}$ është kongruencë e plotë, sipas rastit do të kishim që ose $(x, xy) \in \mathcal{B}$, ose që $(x, xysy) \in \mathcal{B}$. Në secilin rast atëherë do të kishim ekzistencën e fjalëve të ndryshme në $F(X)$ sipas renditjes $\leq_{lex}$ që përfaqësojnë të njëjtin element në S . Meqënëse $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{K}$, do të kemi se $M \neq F(X)$.

Në rastin e dytë kur $\mathcal{B} = \Delta$ dhe S kënaq $\min_{\mathcal{B}}$ vërejmë së pari se

$$x \geq_{\mathcal{B}} x^2 \geq_{\mathcal{B}} x^3 \geq_{\mathcal{B}} \dots \geq_{\mathcal{B}} x^n \geq_{\mathcal{B}} \dots,$$

dhe supozimi për $\min_{\mathcal{B}}$ do të sillte ekzistencën e një $n \geq 1$ të tillë që $(x^n, x^{n+1}) \in \mathcal{B}$. Mirëpo $\mathcal{B} = \Delta$ prandaj $x^n = x^{n+1}$. Kjo e fundit implikon ekzistencën e dy fjalëve të ndryshme në $F(X)$ sipas renditjes $\leq_{lex}$ që përfaqësojnë të njëjtin element të S , rrjedhimisht $M \neq F(X)$. ■

Kujtojmë nga [8] se një fjalë t me gjatësi të pafundme me shkronja nga një alfabet çfarëdo do të quhet uniformisht rekurente në qoftë se për çdo faktor të saj u ekziston një numer natyror k_u i tillë që çdo faktor i t me gjatësi k_u përmban të paktën një herë u -në si faktor të vetin.

Fjalët rekurente përdoren për të testuar nëse është i fundëm komplementi i një ideali J të një gjysmëgrupi të lirë A^* tek ky i fundit. Për më tepër kujtojmë rezultatin e mëposhtëm nga [8].

Rrjedhim 5.4.4 (Rrjedhimi 2.3.2 tek [8]) *Le të jetë J një ideal i A^* . Në qoftë se për çdo fjalë uniformisht rekurente $\omega \in A^\omega$, $F(\omega) \cap J \neq \emptyset$ atëherë komplementi $C = A^* - J$ është i fundëm.*

Pohim 5.4.5 . *Le të jetë $(S, \cdot, \leq)$ një po-gjysmëgrup me përfitim të fundëm i cili kënaq $\min_B$. Çdo kongruencë $\mathcal{K}$ në S që përmban $\mathcal{B}$ është me indeks të fundëm në S .*

Vërtetim. Nga lema 5.4.2 dhe ajo 5.4.3 jemi të sigurt se $M \neq F(X)$. Meqenëse M pritët me çdo $\varphi^{-1}(\mathcal{K}_s)$ ku $s \in S$, atëherë do të mjaftonte të vertetonim se $M = F(X) - I$ është e fundme. Për këtë do të përdorim përfundimin e rrjedhimit 5.4.4. Le të jetë ω një fjalë e pafundme me shkronja nga X dhe po shënojmë me $F(\omega)$ bashkësinë e të gjithë faktorëve të fundëm të saj. Duhet të tregojmë se $F(\omega) \cap I \neq \emptyset$. Supozojmë se $\omega = a_1 a_2 \dots$, është fjala rekurente e dhënë. Shënojmë me

$$B_0 = (\varphi(a_1))_b = (\varphi(a_1)S\varphi(a_1) \cup \varphi(a_1)],$$

bi-ideal in kryesor në S të përfutur nga $\varphi(a_1)$. Meqenëse ω është uniformisht rekurente, për faktorin a_1 , gjendet $k_{a_1} \in \mathbb{N}$ e tillë që çdo faktor i ω me gjatësi k_{a_1} do ta ketë a_1 si faktor të vetin të paktën një herë. Po ta zbatojmë këtë për faktorin e ω që fillon me a_2 , marrim ekzistencën e një $v_1 \in F(\omega)$ të tillë që $u_1 = a_1 v_1 a_1 \in F(\omega)$. Më tej shohim se

$$\begin{aligned} B_1 &= (\varphi(u_1))_b \\ &= (\varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1)S\varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1) \cup \varphi(a_1)\varphi(u_1)\varphi(a_1)] \\ &\subseteq (\varphi(a_1)S\varphi(a_1)] \subseteq B_0 \end{aligned}$$

Tani mund të përcaktojmë induktivisht një varg elementësh

$$a_1, u_1 = a_1 v_1 a_1, u_2 = u_1 v_2 u_1, \dots, u_k = u_{k-1} v_k u_{k-1}, u_{k+1} = u_k v_{k+1} u_k, \dots,$$

në mënyrë të tillë që $u_k \in F(\omega)$, $k \geq 1$ dhe

$$\varphi(a_1) \geq_B \varphi(u_1) \geq_B \varphi(u_2) \geq_B \dots \geq_B \varphi(u_k) \geq_B \varphi(u_{k+1}) \geq_B \dots$$

Por nga kushti kemi që S kënaq konditën $\min_{\mathcal{B}}$ kështu që gjendet një $k \in \mathbb{N}$ e tillë që $(\varphi(u_k), \varphi(u_{k+1})) \in \mathcal{B}$ e për pasojë $\varphi(u_k), \varphi(u_{k+1}) \in \mathcal{K}_{\varphi(u_k)}$. Por kjo e fundit do të thotë se u_k dhe u_{k+1} i përkasin së njëjtës $\varphi^{-1}(\mathcal{K}_{\varphi(u_k)})$ dhe ndërkaq $u_k <_{lex} u_{k+1}$ që nënkupton se $u_{k+1} \in F(\omega) \cap I$. ■

Kombinimi i teoremës 2.1 tek [52] me pohimin 5.4.5 jep rrjedhimin e mëposhtëm.

Rrjedhim 5.4.6 . *Në qoftë se $(S, \cdot, \leq)$ është një po-gjysmëgrup i renditur me përftim të fundëm që plotëson konditën $\min_{\mathcal{B}}$ lidhur me bi-idealet e renditur dhe është i tillë që bashkësia e bi-idealeve të renditur formon semilatisë lidhur me shumëzimin e bashkësive, atëherë S është një semilatisë e fundme po-gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ të thjeshtë.*

Analogu i rrjedhimit 5.4.6 për gjysmëgrupet e pa renditur, që përftohet duke marrë si relacion të renditjes pikërisht barazimin, do të ishte si më poshtë.

Rrjedhim 5.4.7. *Në qoftë se $(S, \cdot)$ është një gjysmëgrup me përftim të fundëm që plotëson konditën $\min_{\mathcal{B}}$ lidhur me bi-idealet dhe është i tillë që bashkësia e bi-idealeve formon semilatisë lidhur me shumëzimin e bashkësive, atëherë S është një semilatisë e fundme gjysmëgrupesh $\mathcal{B}$ të thjeshtë.*

KAPITULLI 6

Disa relacione të tipit të Grinit në le -gjysmëgrupet

6.1 Relacione të përcaktuara nga elementët minimalë

Le të jetë $(S, \leq)$ një gjysmëgrup i renditur me element më të madh e që është njëkohësisht semilatisë e sipërme. Kujtojmë se më herët kemi shënuar me $(a]$ bashkësinë $\{x \in S : x \leq a\}$. Gjithashtu kujtojmë që një element $a \in S$ do të quhet minimal në qoftë se kur $b \leq a \Rightarrow b = a$. Pohimi i mëposhtëm tregon se minimaliteti i një elementi në $(a]$ në fakt nuk është edhe aq i lidhur me a -në vetë por është global.

Pohim 6.1.1 Në qoftë se a_0 është minimal në $(a]$, atëherë ai është minimal në S .

Vërtetim. Vërtet, në qoftë se $x \in S$ dhe $x \leq a_0$, meqenëse $a_0 \leq a$, atëherë $x \leq a$ e për rrjedhojë $x \in (a]$. Por kjo kundërshton minimalitetin e a_0 ndaj mbetet që $x = a_0$ e si pasojë a_0 do të jetë minimal në S . ■

Përkufizim 6.1.2 Shënojmë me $M(a)$ bashkësinë e të gjithë elementeve minimalë që ndodhen në $(a]$.

Pohim 6.1.3 Për çdo $a \in S$ ka vend barazimi $M(a) = \bigcup_{b \in (a]} M(b)$.

Vërtetim. Vërtet, është e qartë si fillim se për çdo $b \in (a]$, $(b) \subseteq (a]$. Në qoftë se tani $m \in (b)$ është një element minimal aty, i tillë do të jetë ai edhe në S e për pasojë edhe në $(a]$ që do të thotë se i përket $M(a)$. Anasjellas, në qoftë se $m \in M(a)$ është minimal, atëherë $m \in M(m) \subseteq \bigcup_{b \in (a]} M(b)$. ■

Le të jetë tani $x \in S$ një element minimal. Nga përkufizimi i $r(x)$ shihet se $M(r(x)) \neq \emptyset$. Ka vend ky pohim.

Pohim 6.1.4 Në qoftë se $y \in M(r(x))$, atëherë $r(y) \leq r(x)$.

Vërtetim. Në veçanti $y \in (r(x)]$, prandaj $y \leq r(x)$. Nga ku $r(y) \leq r(r(x)) = r(x)$. ■

Përkufizim 6.1.5 Quajmë bërthamë të $r(x)$ bashkësinë $\bar{M}(r(x)) = \{y \in M(r(x)) : r(x) = r(y)\}$.

Bërthama është jo boshe në qoftë se qëllon që x të jetë element minimal. Në bashkësinë $M(S)$ të elementëve minimalë të S përcaktojmë relacionin $\mathcal{R}_m^*$ si më poshtë

$$(x, y) \in \mathcal{R}_m^* \text{ atëherë dhe vetëm atëherë kur } y \in \overline{M}(r(x)).$$

Pohim 6.1.6 *Relacioni $\mathcal{R}_m^*$ është relacion ekuivalence në $M(S)$.*

Vërtetim. Vërtet, për çdo $x \in M(S)$ është e qartë që $x \in \overline{M}(r(x))$ që tregon se $(x, x) \in \mathcal{R}_m^*$. Së dyti, në qoftë se $(x, y) \in \mathcal{R}_m^*$, atëherë $y \in \overline{M}(r(x))$, që në veçanti do të thotë që $r(y) = r(x)$. Nga kjo kemi që $x \leq r(y)$ e meqë $x \in M(S)$ marim që $x \in \overline{M}(r(y))$ që tregon se $(y, x) \in \mathcal{R}_m^*$. Së fundi, në qoftë se $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}_m^*$, atëherë $x \in M(S)$, $x \leq r(y)$ dhe $r(x) = r(y)$, e po ashtu, $y \in M(S)$, $y \leq r(z)$ dhe $r(y) = r(z)$. Duke i marrë parasysh të gjitha këto nxjerrim si konkluzion se $x \leq r(z)$ dhe $r(x) = r(z)$ e meqënëse $x \in M(S)$ kemi që $(x, z) \in \mathcal{R}_m^*$. ■

Në mënyrë të ngjashme futet edhe kuptimi i relacionit $\mathcal{L}_m^*$ si relacioni që ekuivalenton elementet minimalë që përftojnë të njëjtin element ideal të majtë. Ndërsa relacioni $\mathcal{H}_m$ jepet me perkufizim si prerja $\mathcal{L}_m^* \cap \mathcal{R}_m^*$.

Në qoftë se tani $(x, y) \in \mathcal{R}_m^*$, atëherë vemë re së pari se

$$r(xy) = xr(y) = xr(x) = r(x^2). \quad (6.1)$$

Nga ana tjetër shohim që

$$x^2 \leq xe \leq xe \vee x = r(x) \text{ dhe se } x^2e \leq xe^2 \leq xe \leq xe \vee x = r(x),$$

prej nga marim

$$r(x^2) = x^2e \vee x^2 \leq r(x). \quad (6.2)$$

Nga (6.1) dhe (6.2) del se $r(xy) = r(x^2) \leq r(x)$ dhe atëherë $r(xy) \in (r(x)]$. Ndërkaq për elementin xy mund të shkruajmë

$$xy \leq xy \vee x \leq xe \vee x = r(x),$$

që tregon se $xy \in (r(x)]$. Është e qartë që sa herë që $(x, y) \in \mathcal{R}_m^*$, duhet që edhe $xe = ye$. Në kushtet tona kur $x, y \in M(S)$ mund të nxjerrim më shumë përfundime. Konkretisht $x \wedge ye \leq x$, por x është minimal kështu që $x \wedge ye = x$ që sjell se $x \leq ye$. Njëlloj tregohet se $y \leq xe$. Anasjellas, në qoftë se $x, y \in M(S)$ të tillë që $x \leq ye$ dhe $y \leq xe$, atëherë

$$xe \leq (ye)e \leq ye$$

dhe

$$r(x) = x \vee xe \leq ye \leq y \vee ye = r(y).$$

Në mënyrë duale çdokush mund të tregojë se edhe $r(y) \leq r(x)$ dhe atëherë $r(x) = r(y)$. Kështu kemi vërtetuar këtë

Teoremë 6.1.7 Për çdo $x, y \in M(S)$, $(x, y) \in \mathcal{R}_m^*$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x \leq ye$ dhe $y \leq xe$.

Vlen edhe dualja e teoremës së mësipërme për relacionin $\mathcal{L}_m^*$.

Teoremë 6.1.8 Për çdo $x, y \in M(S)$, $(x, y) \in \mathcal{L}_m^*$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $x \leq ey$ dhe $y \leq ex$.

Më tej do të shohim disa lloje latisash tek të cilat elementët minimalë kanë rol formues. Bëjmë këtë përkufizim

Përkufizim 6.1.9 Një le -gjysmëgrup S do të quhet i diskretizueshëm në qoftë se:

- (i) për çdo $a \in S$, bashkësia $M([a])$ e elementëve minimalë të $[a]$ është joboshe;
- (ii) për çdo $a \in S$, $\vee M([a]) = a$, dhe për çdo $m \in M([a])$, $\vee (M([a]) \setminus \{m\}) \neq a$;
- (iii) për çdo dy elementë minimalë $a, b \in S$, prodhimi i tyre ab është gjithashtu minimal.

Është e qartë që $\vee M(S) = e$ ku e është elementi më i madh i S -së. Në qoftë se $a \in S$ çfardo, atëherë

$$ae \vee a = r(a) = \vee \{m \in S : m \in M(r(a))\}.$$

Në qoftë se qëllon që a të jetë minimal, atëherë $a \leq ae$ sepse $a \wedge ae \leq a$ dhe minimaliteti i a do të sillte barazimin $a \wedge ae = a$ nga ku marrim $a \leq ae$. Në këto kushte shihet që

$$ae = ae \vee a = r(a) = \vee \{m \in S : m \in M(r(a))\}.$$

Është për tu shënuar ky fakt.

$$\forall x \in M(S), \exists \bar{x} \in S, x \vee \bar{x} = e.$$

Vërtet, si $\bar{x}$ mjafton të merret $\vee \{y \in M(S) : y \neq x\}$. Nga përkufizimi 6.1.9 shihet që $\bar{x} \neq x$ dhe se $x \vee \bar{x} = e$. Pra tek le -gjysmëgrupet e diskretizueshëm kemi që çdo x minimal ka një plotës $\bar{x}$. Do të futim tani tek le -gjysmëgrupet e diskretizueshëm dy lloje relacionesh të ngjashëm me ato të Grinit në gjysmëgrupet e zakonshëm.

Përkufizim 6.1.10 $(a, b) \in \mathcal{R}^*$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = b$, ose kur gjenden $u, v \in M(S)$ të tilla që $(a \leq bu$ ose $a \leq b\bar{u})$ dhe $(b \leq av$ ose $b \leq a\bar{v})$.

Verifikohet lehtësisht se $\mathcal{R}^*$ është relacion ekuivalence. Në mënyrë analoge futet edhe relacioni $\mathcal{L}^*$.

Përkufizim 6.1.11 $(a, b) \in \mathcal{L}^*$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $a = b$, ose kur gjenden $u, v \in M(S)$ të tilla që $(a \leq ub \text{ ose } a \leq \bar{u}b)$ dhe $(b \leq va \text{ ose } b \leq \bar{v}a)$.

Tani futim dy relacione analoge me të mësipërmit.

Përkufizim 6.1.12 $(a, b) \in \mathcal{R}^{**}$ vetëm në qoftë se $a = b$, ose ekzistojnë U dhe $V \in M(S)$ të tilla që $a \leq bu$ dhe $b \leq av$ ku $u = \vee\{x \in U\}$ dhe $v = \vee\{x \in V\}$.

Edhe $\mathcal{R}^{**}$ ashtu si edhe $\mathcal{R}^*$ është relacion ekuivalence. Për të bindur lexuesin po vërtetojmë tranzitivitetin si më pak evident. Le të supozojmë për këtë se

$$a \leq bu, b \leq av, b \leq cw \text{ dhe } c \leq bz,$$

ku u, v, w dhe z janë superiorë të bashkësive U, V, W dhe Z të përbërë nga elementë minimalë. Nga mosbarazimet e mësipërme rrjedh se

$$a \leq c(wu) \text{ dhe } c \leq a(vz),$$

ose ndryshe

$$a \leq c\xi \text{ dhe } c \leq a\eta, a \leq c\xi \text{ dhe } c \leq a\eta,$$

ku $\xi = \vee M((wu))$ dhe $\eta = \vee M((vz))$. Është evidente që

Pohim 1.13 *Relacioni $\mathcal{R}^*$ është me fin se ai $\mathcal{R}^{**}$.*

Ngjashmërisht me $\mathcal{R}^{**}$ mund të përkufizohet edhe $\mathcal{L}^{**}$ i cili është po ashtu relacion ekuivalence dhe tregohet për të se $\mathcal{L}^*$ është më fin se $\mathcal{L}^{**}$. Gjithashtu mund të tregohet lehtësisht se $\mathcal{R}^{**}$ dhe $\mathcal{L}^{**}$ janë përkatësisht kongruenca të majta dhe të djathta.

6.2 Relacione lokale të Grinit në le-gjysmëgrupet e diskretizueshëm

Në qoftë se elementi a është nga S çfardo dhe $x, y \in (r(a)]$ dy elementë të çfardoshëm, atëherë për ta kemi

$$xy \leq r(a)r(a) = r(a)e = ae \leq r(a),$$

e cila tregon se $(r(a)]$ formon nëngjysmëgrup të S . Kujtojmë se më herët kemi përkufizuar bërthamën $\overline{M}(r(a))$ të përbërë nga të gjithë përfutuesit minimalë të $r(a)$

më të vegjël ose baraz me $r(a)$. Shënojmë me $\langle \overline{M}(r(a)) \rangle$ nëngjysmëgrupin e $(r(a))$ të përfshirë nga $\overline{M}(r(a))$.

Lemë 6.2.1 Për çdo $\alpha \in \langle \overline{M}(r(a)) \rangle$, $\alpha \leq \alpha e$.

Vërtetim. Vërtet, le të jetë $\alpha = x_1 \cdots x_n$ ku çdo $x_i \in \overline{M}(r(a))$. Atëherë

$$\begin{aligned} \alpha e \vee \alpha = r(\alpha) &= x_1 \cdots x_{n-1} x_n e \vee x_1 \cdots x_{n-1} x_n \\ &= x_1 \cdots x_{n-1} (x_n e \vee x_n) \\ &= x_1 \cdots x_{n-1} x_n e = \alpha e, \end{aligned}$$

që tregon se $\alpha \leq \alpha e$. ■

Përkufizim 6.2.2 Do të themi se $(\alpha, \beta) \in \langle \overline{M}(r(a)) \rangle \times \langle \overline{M}(r(a)) \rangle$ janë në relacion $\overline{\mathcal{R}}$ me njëri-tjetrin në qoftë se $r(\alpha) = r(\beta)$.

Është evidente që $\overline{\mathcal{R}}$ është relacion ekuivalence në $\langle \overline{M}(r(a)) \rangle$. Për $\overline{\mathcal{R}}$ ka vend pohimi i mëposhtëm.

Pohim 6.2.3 $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{R}}$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $\beta \leq \alpha e$ dhe $\alpha \leq \beta e$.

Vërtetim. Vërejmë se

$$\begin{aligned} \alpha &\leq r(\alpha) \\ &= r(\beta) \quad \text{nga kushti për } \alpha \text{ dhe } \beta \quad \alpha \leq r(\alpha) \\ &= \beta e \quad \text{nga lema më lart} \end{aligned}$$

që tregon se $\alpha \leq \beta e$. Njëlloj tregohet edhe se $\beta \leq \alpha e$.

Anasjellas, meqënëse $\beta \leq \alpha e$ dhe $\alpha \leq \beta e$, mund të shkruajmë

$$\beta e \leq \alpha e^2 \leq \alpha e,$$

e meqë $\beta \leq \alpha e$, atëherë $r(\beta) \leq \alpha e = r(\alpha)$. Në mënyrë simetrike kemi që $r(\alpha) \leq r(\beta)$ dhe atëherë kemi barazimin e kërkuar. ■

Pohim 6.2.4 $\overline{\mathcal{R}}$ është kongruencë e majtë në $\langle \overline{M}(r(a)) \rangle$.

Vërtetim. Le të jenë $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{R}}$ dhe $\gamma \in \langle \overline{M}(r(a)) \rangle$. Nga pohimi 6.2.3 kemi që $\alpha \leq \beta e$ dhe $\beta \leq \alpha e$. Duke shumëzuar me γ nga e majta e të dyja anëve të mosbarazimeve të dhëna, marrim që $\gamma \alpha \leq \gamma \beta e$ dhe $\gamma \beta \leq \gamma \alpha e$. Përsëri pohimi 6.2.3 sjell që $(\gamma \alpha, \gamma \beta) \in \overline{\mathcal{R}}$. ■

Në mënyrë analoge përkufizojmë relacionin $\overline{\mathcal{L}}$ në $\langle \overline{M}(r(a)) \rangle$.

Përkufizim 6.2.5 Do të themi se $(\alpha, \beta) \in \langle \overline{M}(r(a)) \rangle \times \langle \overline{M}(r(a)) \rangle$ janë në relacion $\overline{\mathcal{L}}$ me njëri-tjetrin në qoftë se $l(\alpha) = l(\beta)$.

Sikurse $\overline{\mathcal{R}}$ edhe $\overline{\mathcal{L}}$ është relacion ekuivalence për të cilin vlejné pohimet analoge të pohimeve 6.2.3 dhe 6.2.4.

Pohim 6.2.6 $(\alpha, \beta) \in \overline{\mathcal{L}}$ atëherë dhe vetëm atëherë kur $\beta \leq e\alpha$ dhe $\alpha \leq e\beta$.

Pohim 6.2.7 $\overline{\mathcal{L}}$ është kongruencë e djathtë në $\langle \overline{M}(r(a)) \rangle$.

Pasi kemi përkufizuar $\overline{\mathcal{L}}$ dhe $\overline{\mathcal{R}}$ mund të përkufizojmë $\overline{\mathcal{H}} = \overline{\mathcal{L}} \cap \overline{\mathcal{R}}$. Një veti interesante e $\overline{\mathcal{H}}$ -klasave është që çdo dy elementë a, b që janë $\overline{\mathcal{H}}$ ekuivalentë ndërrojnë së brendshmi në sensin e mëposhtëm.

Pohim 6.2.8 Në qoftë se $(a, b) \in \overline{\mathcal{H}}$, atëherë $e(ab)e = e(ba)e$.

Vërtetim. Dimë se në veçanti $a \leq eb$ dhe se $b \leq ae$. Duke shumëzuar anë për anë marim $ab \leq e(ba)e$. Në mënyrë të ngjashme mund të përftojme $ba \leq e(ab)e$. Nga të dy mosbarazimet e mësipërme rrjedh barazimi $e(ab)e = e(ba)e$. ■

Interesohemi për $\overline{\mathcal{H}}$ -klasat të cilat janë nëngjysmëgrupe të S -së. Më tej po japim një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm që një $\overline{\mathcal{H}}$ -klasë të formojë gjysmëgrup.

Pohim 6.2.9 Një $\overline{\mathcal{H}}$ -klasë $\overline{H}$ formon nëngjysmëgrup të S kur për çdo $\alpha \in \overline{H}$ të kemi që $\alpha^2 \in \overline{H}$.

Vërtetim. Vërtetojmë kushtin e mjaftueshëm vetëm pasi i nevojshmi është evident. Le të jenë dhënë $x, y \in \overline{H}$. Në veçanti kemi që $(x, y) \in \overline{\mathcal{L}}$ e meqë $\overline{\mathcal{L}}$ është kongruencë e djathtë, kemi $(xy, y^2) \in \overline{\mathcal{L}}$. Por nga kushti $(y^2, y) \in \overline{\mathcal{L}}$ e atëherë kemi që $(xy, x) \in \overline{\mathcal{L}}$. Në mënyrë të ngjashme tregohet se edhe $(xy, x) \in \overline{\mathcal{R}}$ nga ku meret që $xy \in \overline{H}_x = \overline{H}$. ■

Dy rezultate të tjera të ngjashme janë këto të mëposhtmet.

Pohim 6.2.10 Në qoftë se për çdo $\alpha \in \overline{H}$, ekziston një $x_\alpha \in \overline{H}$ e tillë që $\alpha x_\alpha, x_\alpha \alpha \in \overline{H}$, atëherë $\overline{H}$ është nëngjysmëgrup.

Vërtetim. Meqë $(x_\alpha, \alpha) \in \overline{\mathcal{R}}$, atëherë $(\alpha x_\alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{R}}$ dhe nga kushti i pohimit kemi që $(\alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{R}}$. Gjithashtu, $(x_\alpha, \alpha) \in \overline{\mathcal{L}}$ sjell se $(x_\alpha \alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{L}}$ nga e cila njëlloj si më sipër marim $(\alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{L}}$. Atëherë për çdo $\alpha \in \overline{H}$ kemi që $\alpha^2 \in \overline{H}$ dhe mund të aplikojmë pohimin 6.2.9 për të nxjerrë se $\overline{H}$ është nëngjysmëgrup. ■

Pohim 6.2.11 Në qoftë se ekzistojnë $\alpha, \beta \in \bar{H}$ të tilla që për çdo $x \in \bar{H}$, $\alpha x \in \bar{H}$ dhe $x\beta \in \bar{H}$, atëherë $\bar{H}$ është nëngjysmëgrup.

Vërtetim. Meqë $(\beta, x) \in \bar{\mathcal{R}}$, atëherë $(x\beta, x^2) \in \bar{\mathcal{R}}$ nga ku marim $(\beta, x^2) \in \bar{\mathcal{R}}$ dhe se $(x, x^2) \in \bar{\mathcal{R}}$. Njëlloj, meqë $(\alpha, x) \in \bar{\mathcal{L}}$, atëherë $(\alpha x, x^2) \in \bar{\mathcal{L}}$ dhe se $(x, x^2) \in \bar{\mathcal{L}}$. Pra treguam se për çdo $x \in \bar{H}$ edhe $x^2 \in \bar{H}$. Edhe një herë pohimi 6.2.9 sjell që $\bar{H}$ formon nëngjysmëgrup. ■

Le të shënojmë me $\mathfrak{R}, \mathfrak{L}$ dhe $\mathfrak{H}$ relacionet e zakonshëm të Grinit në gjysmëgrupin S dhe me R^g, L^g dhe H^g klasat përkatëse në S . Më tej do të shohim se kur le -gjysmëgrupi plotëson një konditë shtesë, atëherë kanë vend përfshirjet $\bar{\mathcal{R}} \subseteq \mathfrak{R}$, $\bar{\mathcal{L}} \subseteq \mathfrak{L}$ dhe $\bar{\mathcal{H}} \subseteq \mathfrak{H}$. Kondita që duhet të plotësohet është:

$$\mathcal{I} : \text{Për çdo } X, Y \subseteq S \text{ në qoftë se } \vee X = \vee Y \text{ atëherë } X = Y.$$

Pohim 6.2.12 Në qoftë se le -gjysmëgrupi S plotëson konditën $\mathcal{I}$, atëherë kanë vend përfshirjet $\bar{\mathcal{R}} \subseteq \mathfrak{R}$, $\bar{\mathcal{L}} \subseteq \mathfrak{L}$ dhe $\bar{\mathcal{H}} \subseteq \mathfrak{H}$.

Vërtetim. Do ta bëjmë vërtetimin vetëm për relacionin $\mathcal{R}$. Supozojmë se $(a, b) \in \bar{\mathcal{R}}$ dhe duam të tregojmë se $aS \cup a = (a)_r = (b)_r = bS \cup b$. Duke pasur parasysh plotësimin e konditës $\mathcal{I}$, mjafton të shohim nëse $\vee(a)_r = \vee(b)_r$. Meqë S ka element më të madh e , vemë re se $\vee(a)_r = ae \vee a$. Por $a \leq ae$, prandaj $\vee(a)_r = ae$. Ngjashmërisht $\vee(b)_r = be$. Nga supozimi që $(a, b) \in \bar{\mathcal{R}}$ kemi që $ae = r(a) = r(b) = be$ e cila mbyll vërtetimin. ■

Një rrjedhim i menjëhershëm i kësaj është ky.

Rrjedhim 6.2.13 Në qoftë se një $\bar{\mathcal{H}}$ -klasë $\bar{H}$ plotëson konditën e Grinit ($\bar{H}^2 \cap \bar{H} \neq \emptyset$) atëherë ekziston një nëngrup i S që përmban $\bar{H}$.

Vërtetim. Le të jetë $a \in \bar{H}$ një element çfardo. Nga pohimi 6.2.12 kemi që $\bar{H}_a \subseteq H_a^g$. Meqënëse $\bar{H}_a$ plotëson konditën e Grinit, atë konditë do ta plotësojë edhe H_a^g e për rrjedhojë do të jetë nëngrup i S . Ky është pikërisht nëngrupi i S që përmban $\bar{H}_a$. ■

Pohim 6.2.14 Në qoftë se le -gjysmëgrupi S plotëson konditën $\mathcal{I}$, atëherë çdo $\bar{\mathcal{H}}$ -klasë që plotëson konditën e Grinit është nëngjysmëgrup i S .

Vërtetim. Le të jetë $\bar{H}$ klasa në fjalë dhe H^g nëngrupi i rrjedhimit 6.2.13 që përmban $\bar{H}$ dhe i elementi i njësishtëm i tij. Për çdo $\alpha \in \bar{H}$, meqënëse $\alpha S = iS$, atëherë $\vee(\alpha S) = \vee(iS)$ ose ndryshe $\alpha e = ie$. Më tej mund të shkruajmë

$$\begin{aligned}
r(\alpha) &= r(\alpha i) && \text{meqënëse } i \text{ është njësh} \\
&= (\alpha i)e \vee \alpha i \\
&= \alpha(ie \vee i) \\
&= \alpha(ie) && \text{meqënëse } i \leq ie \\
&= \alpha(\alpha e) && \text{nga më lart} \\
&= r(\alpha^2) && \text{meqënëse } \alpha \text{ është minimal.}
\end{aligned}$$

Pra treguam se $(\alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{R}}$. Ngjashmërisht kemi që $(\alpha, \alpha^2) \in \overline{\mathcal{L}}$ dhe rrjedhimisht që $\alpha^2 \in \overline{H}_\alpha$. Nga pohimi 6.2.9 marim që $\overline{H}$ është gjysmëgrup. ■

Literatura

- [1] Almeida, J., Bordalo, G., Dwinger, P., *Laticces, Semigroups and Universal Algebras*, Springer Science+Business Media, New York, 1990
- [2] Baader, F., Nopkow, T., *Term Rewriting and all That*, Cambridge University Press, 1998
- [3] Birkhoff, G., *Lattice Theory*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. XXV, Providence, 1948.
- [4] Cano, A., and Pin, J.E., *Upper set monoids and length preserving morphisms*, Journal of Pure and Applied Algebra 216, (2012), 1178–1183.
- [5] Cohn, P. M., *Universal Algebra*, Harper and Row, 1965
- [6] Coudrain M., M.P. Schutzenberger, Une condition de finitude des monoides finiment engendres, C.R. Acad. Sc. Paris, Ser. A, 262, 1149-1151 (1966)
- [7] De Luca, A., A Finiteness Condition for Semigroups Generalizing a Theorem of Hotzel, J. of Algebra, 136, 60-72, (1991)
- [8] De Luca, A., Varricchio, S., Finiteness and Regularity in Semigroups and Formal Languages, Springer-Verlag 1999
- [9] Howie, J. M., *Fundamentals of Semigroup Theory*, Clarendon Press Oxford, 1995
- [10] Kapp, K.M., *On bi-ideals and quasi-ideals in semigroups*, Publ. Math. Debrecen 15 (1969), 179–185.
- [11] Kehayopulu N. *A characterization of semiregular and regular m -lattices*. In: Panayotopoulos A, editor. C. Caratheodory Inter. Sym.; 3-7 September 1973; The Greek Math. Soc., pp. 282-295.
- [12] Kehayopulu, N., *A characterization of some regular duo le -semigroups*, Contributions to General Algebra, Proc.Klagenfurt Conf., Verlag Johannes Heyen, Klagenfurt, 1979, 137–143.
- [13] Kehayopulu, N., *On intra-regular $\vee e$ -semigroups*. Semigroup Forum 1980; 19: 111–121.
- [14] Kehayopulu, N., *Generalized ideal elements in poe -semigroups*, Semigroup Forum 25 (1982), 213-222.
- [15] Kehayopulu, N., *A characterization of regular le -semigroups*, Semigroup Forum 23 (1981), 85-86.
- [16] Kehayopulu, N., *On regular poe -semigroups*. In: *Contributions to General Algebra 2* Proc. of the Klagenfurt Conf., Edited by G. Eigenthaler, H. K. Kaiser,

- W. Miller, W. Nbauer. Hlder-Pichler-Tempsky, Wien; B. G. Teubner, Stuttgart, 1983, pp. 191-196.
- [17] Kehayopulu, N., *On regular le-semigroups*, Semigroup Forum 28 (1984), 371-372.
 - [18] Kehayopulu, N., *On regular and intra-regular poe-semigroups*, Semigroup Forum 29 (1984), 255-257.
 - [19] Kehayopulu, N., *On left (resp. right) duo regular poe-semigroups*, Semigroup Forum 31 (1985), 123-125.
 - [20] Kehayopulu, N., *On minimal quasi-ideal elements in poe-semigroups*, Mathematica Japonica 34 (1989), 767–774.
 - [21] Kehayopulu, N., *On Filters generated in poe-semigroups*, Mathematica Japonica 35 (1990), 789–796.
 - [22] Kehayopulu, N., *On intra-regular ordered semigroups*. Semigroup Forum 1993; 46: 271–278.
 - [23] Kehayopulu, N., Lajos, S., Tsingelis, M., *On intra-regular ordered semigroups*. Pu.M.A 1993; 4(3): 317–327.
 - [24] Kehayopulu, N., *On regular, intra-regular ordered semigroups*, Pu.M.A 1993; 4(4): 447–461.
 - [25] Kehayopulu, N., *Remarks on ordered semigroups*, Abstracts AMS, 15 (No. 4) (1994), *94 T-06-74
 - [26] Kehayopulu, N., *On regular le-semigroups*, Semigroup Forum 49 (1994), 267–269.
 - [27] Kehayopulu. N, *Note on bi-ideals in ordered semigroups*, Pu.M.A. 6 (1995), 333–344.
 - [28] Kehayopulu. N, Tsingelis. M, *On subdirectly irreducible ordered semigroups*, Semigroup Forum 50, no. 2 (1995), 161-177
 - [29] Kehayopulu. N, Tsingelis. M, *Pseudoorder in Ordered Semigroups*, Semigroup Forum 50 (1995), 389-392
 - [30] Kehayopulu, N., *On Completely Regular Ordered Semigroups*, Scinetiae Mathematicae Vol. 1, No. 1(1998), 27–32
 - [31] Kehayopulu, N., Tsingelis, M., *The Embedding of an Ordered Semigroup Into an le -Groupoid*, Lobachevskii J. Math. Vol. 13, 2003, 45-50

- [32] Kehayopulu, N., Pasku, E., Tsingelis, M., *An Embedding of an Ordered Groupoid Into an le -Groupoid*, S. Forum, Vol. 73, (2006), 55-60.
- [33] Kehayopulu, N., Tsingelis, M., *On Free Ordered Semigroups*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, e-2010, 97-103
- [34] Kehayopulu, N., Tsingelis, M., *On Ordered Semigroups which are Semilattices of Left Simple Semigroups*. Mathematica Slovaca 2013; 63(3): 411–416
- [35] Kehayopulu N., *Remark on quasi-ideals of ordered semigroups*, Pu. M. A. Vol. 25 (2015), No.2, pp. 144–150
- [36] Kehayopulu, N., *On le -semigroups*, Turk. J. Math. (2016) 40: 310–316
- [37] Kobayashi, Y., *Note on compatible well orders on a free monoid*, S. Forum, Vol. 45, (1992), 23-25
- [38] Lajos, S., *On the Bi-ideals in Semigroups. II*, Proc. Japan Acad., 47 (1971), 837–839
- [39] Lyndon, R.C., *Length functions in groups*, Math. Scand., Vol. 12 (1963), 209–234.
- [40] Mac Lane, S., *Categories for the Working Mathematician*, Springer Verlag, 1997
- [41] Manes, E., *A triple miscellany : some aspects of the theory of algebras over a triple*, Thesis (Ph. D.)–Wesleyan University, 1967
- [42] Petro P, Pasku E. *The Green-Kehayopulu relation $\mathcal{H}$ in le -semigroups*. Semigroup Forum 2002; 65: 33–42.
- [43] Pasku. E, *Notes on finitely generated semigroups*, Internat. J. Algebra Comput. Vol. 16, No. 3, 2006
- [44] Pasku, E., *Finiteness Conditions for Monoids and Small Categories*, PhD Thesis, Glasgow, 2006
- [45] Pasku, E., Petro, P., *The relation $\mathcal{B}$ in le -semigroups*, Semigroup Forum 2007; 75: 427-437.
- [46] Pin, J.E., *Syntactic semigroups*, Chap. 10 in Handbook of language theory, Vol. I, G. Rozenberg and A. Salomaa (ed.), Springer Verlag, (1997), 679–746.
- [47] Pin, J.E., Weil, P., *The wreath product principle for ordered semigroups*, Comm. Algebra 30, no. 12 (2002), 5677-5713.
- [48] Saitô, T., *On semigroups which are semilattices of left simple semigroups*. Math. Japonica 1973; 18: 95–97.

- [49] Shasivari, A., Pasku, E., *A note on the relation $\mathcal{J}$ in le -semigroups*, arXiv 1510.00927v1 [math.RA], 04 Oct. 2015
- [50] Shasivari, A., Pasku, E., *Elementët $\mathcal{L}$ (përk. $\mathcal{R}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$)-idempotentë në le -semigrupe*, BSHN, 22/2016, 121-127
- [51] Shasivari, A., Pasku, E., *Note on free ordered semigroups*, Far East J. of Math. Sciences, Vol.101, No.4, 2017, Pages 825-837.,
- [52] A. Shasivari, *Ordered semigroups with commuting bi-ideals*, J. of Natural and Technical Sciences, XXII (44), 2017 (1)
- [53] Shasivari, A., Pasku, E. *Green type theorems for le -semigroups satisfying certain commutativity conditions*, First International Conference on Professional Sciences (ISCPS-2016), ISBN 978-9928-4381-5-7
- [54] Shasivari, A., Pasku, E. *From le -semigroups to po -semigroups*, Conference proceedings, Fifth International Conference on Interdisciplinary Studies, V-2016, ISBN 978-9928-214-44-7
- [55] Shasivari, A., Pasku, E. *Theory of ordered semigroups from a categorical prospect*, First International Conference in Computing, Information Technolog and Business Applications (ICCITBA-2017), ISBN 978-9928-4387-5-1
- [56] Steinfeld, O., *Quasi Ideals in Rings and Semigroups*, Akademiai Kiado, Budapest, 1978
- [57] Szasz, G., *Eine Charakteristik der Primidealhalbgruppen*. Publ Math Debrecen 1970; 17: 209–213 (in German).
- [58] Xie Xiang-Yun, *On Regular, Strongly Regular Congruences in Ordered Semigroups*, Semigroup Forum 61, (2000), 159-178
- [59] Xie Xiang-Yun, *On Strongly Ordered Congruences and Decompositions of Ordered Semigroups*, Algebra Colloquium 15 : 4 (2008) 589-598