



**REPUBLIKA E SHQIPËRISË  
UNIVERSITETI POLITEKNIK, TIRANË  
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË  
FIZIKE  
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

**DISERTACION**

**PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE  
DOKTOR**

**KLASAT E OPERATORËVE  $M$  –KLASË  $Q$  DHE  $k$  –KUASI KLASË  $Q$  NË  
HAPËSIRAT E HILBERTIT**

**Paraqitur nga:**

**M.Sc. Valdete Rexhëbeqaj Hamiti**

**Udhëheqës shkencor:**

**Prof. Dr. Muhib Lohaj  
Prof. Asoc. Luigj Gjoka**

**Tiranë, 2017**

**UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS**  
**FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË**  
**FIZIKE**  
**DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE**

Disertacion  
i  
paraqitur nga

**M.Sc. Valdete Rexhëbeqaj Hamiti**

Për marrjen e gradës shkencore  
**DOKTOR**

**Programi i studimit : Analizë Numerike dhe Ekuacione Diferenciale**

**Tema: KLASAT E OPERATORËVE  $M$  –KLASË  $Q$  DHE  $k$  –KUASI  
KLASË  $Q$  NË HAPËSIRAT E HILBERTIT**

**Udhëheqës shkencor:**  
**Prof. Dr. Muhib Lohaj**  
**Prof. Asoc. Luigj Gjoka**

**Mbrohet më datën: 07/11/2017, para jurisë:**

- |                                     |                         |
|-------------------------------------|-------------------------|
| <b>1. Prof. Asoc. Akli Fundo</b>    | <b>Kryetar</b>          |
| <b>2. Prof. Dr. Viktor Kabili</b>   | <b>Anëtar</b>           |
| <b>3. Prof. Dr. Shpëtim Shehu</b>   | <b>Anëtar</b>           |
| <b>4. Prof. Asoc. Kristaq Gjino</b> | <b>Anëtar (oponent)</b> |
| <b>5. Prof. Dr. Lulëzim Hanelli</b> | <b>Anëtar (oponent)</b> |

**Tiranë, 2017**

# FALËNDERIME

Në fillim dëshiroj të shpreh përzemërsisht mirënjohjen dhe falënderimet e mia të veçanta për udhëheqësit shkencor, Prof. Dr. Muhib Lohaj dhe Prof. Asoc. Luigj Gjoka, për përkushtimin, përkrahjen dhe ndihmën e pakursyer të dhënë gjatë gjithë kohës së realizimit të këtij disertacioni.

Gjithashtu, falënderoj familjen time, e në veçanti bashkëshortin tim Armendin dhe dy vajzat e mia Jonën dhe Bunën, për mirëkuptimin, përkrahjen, mbështetjen dhe durimin që treguan gjatë kësaj kohe.

Dëshiroj të falënderoj të gjithë profesorët e Departamentit të Inxhinierisë Matematike në Fakultetin e Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike në Universitetin Politeknik të Tiranës, për mbështetjen e vazhdueshme dhe të pakursyer që më kanë ofruar.

Në fund, një falënderim të posaçëm ua dedikoj edhe te gjithë kolegëve të mijë të Departamentit të Matematikës në Fakultetin e Inxhinierisë Elektrike dhe Kompjuterike në Universitetin e Prishtinës, për bashkëpunimin e shkëlqyeshëm që kemi pasë.

# PËRMBAJTJA

|                                                                                         |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| ABSTRAKTI.....                                                                          | v   |
| ABSTRACT.....                                                                           | vii |
| HYRJE.....                                                                              | ix  |
| KAPITULLI 1: OPERATORËT $N$ –KUASINORMALË                                               |     |
| 1.1. Disa koncepte bazike nga teoria e operatorëve në hapësirat e Hilbertit.....        | 12  |
| 1.2. Operatorët normalë dhe kuasinormalë.....                                           | 16  |
| 1.3. Operatorët $N$ –kuasinormalë.....                                                  | 17  |
| KAPITULLI 2: $M$ –KLASA $Q$ DHE $M$ –KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE                          |     |
| 2.1. $M$ –klasa $Q$ e operatorëve .....                                                 | 22  |
| 2.2. $M$ –klasa $Q^*$ e operatorëve.....                                                | 29  |
| 2.3. Prodhimi tensorial për $M$ –klasën $Q$ dhe $M$ –klasën $Q^*$ të operatorëve.....   | 35  |
| 2.4. Transformimi Aluthge për $M$ –klasën $Q$ dhe $M$ –klasën $Q^*$ të operatorëve..... | 41  |
| KAPITULLI 3: $k$ –KUASI KLASA $Q$ DHE $k$ –KUASI KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE              |     |
| 3.1. $k$ –kuasi klasa $Q$ e operatorëve.....                                            | 44  |
| 3.2. $k$ –kuasi klasa $Q^*$ e operatorëve.....                                          | 62  |
| REKOMANDIME.....                                                                        | 74  |
| PËRFUNDIMI.....                                                                         | 75  |
| SUMMARY.....                                                                            | 76  |
| BIBLOGRAFIA.....                                                                        | 77  |
| LITERATURA.....                                                                         | 78  |

# ABSTRAKTI

Në këtë disertacion do të tregojmë disa veti të operatorëve të cilët kanë qenë të përkufizuar më parë, si për klasën e operatorëve  $N$  –kuasinormalë e  $M$  –klasë  $Q$ .

Po ashtu, do të përkufizojmë klasë të reja të operatorëve. Klasat e reja të cilat do t'i përkufizojmë janë:  $M$  –klasë  $Q^*$ ,  $k$  –kuasi klasë  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasë  $Q^*$ . Për këto klasë të operatorëve do t'i studiojmë shumë veti të tyre.

Për klasën e operatorëve  $N$  –kuasinormalë ndër të tjera, do të japim kushtet që duhet t'i plotësojnë dy operatorë nga kjo klasë ashtu që edhe shuma e tyre të jetë nga kjo klasë, si dhe kushtet që duhet të plotësoj një operator  $N$  –kuasinormal dhe një operator kuasinormal ashtu që edhe produkti i tyre të jetë operator  $N$  –kuasinormal.

Do të studiojmë shumë veti për operatorët e  $M$  –klasës  $Q$  si dhe  $M$  –klasës  $Q^*$ . Do të shqyrtojmë raportin e këtyre klasave me klasë të tjera të përkufizuar më parë. Do të tregojmë se çdo operator  $M$  –paranormal, përkatësisht  $M^*$  –paranormal, është edhe operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , përkatësisht  $M$  –klasa  $Q^*$ , mirëpo e anasjellta nuk vlen gjithmonë.

Më pas, do të vërtetojmë se transformimi Aluthge  $\tilde{T}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë kur  $*$  –transformimi Aluthge  $\tilde{T}^{(*)}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$ , respektivisht.

Do të vërtetojmë se prodhimi tensorial i operatorit nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  dhe operatorit identik  $I$  është poashtu operator nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$ , respektivisht. Ndërsa me shembull do të tregojmë se prodhimi tensorial i dy operatorëve nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  nuk është medoemos i tillë, respektivisht.

Po ashtu edhe për operatorët e  $k$  –kuasi klasës  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  do të studiojmë shumë veti të tyre. Për operatorët e  $k$  –kuasi klasës  $Q$  do të tregojmë se vlen implikacioni

$$klasa\ Q \subseteq kuasi\ klasën\ Q \subseteq k - kuasi\ klasën\ Q \subseteq (k + 1) - kuasi\ klasën\ Q.$$

Po ashtu do të tregojmë raportin e kësaj klase të operatorëve në krahasim me klasë të tjera, si me  $k$  –kuasi klasën  $A$  si dhe klasën e operatorëve  $k$  –kuasi paranormalë.

Ndërsa, për operatorët e  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  do të tregojmë se vlen po ashtu implikacioni

$$klasa\ Q^* \subseteq kuasi\ klasën\ Q^* \subseteq k - kuasi\ klasën\ Q^* \subseteq (k + 1) - kuasi\ klasën\ Q^*.$$

Po ashtu do të tregojmë raportin e kësaj klase në krahasim me klasë të tjera të operatorëve si me  $k$ -kuasi- $*$ -klasën  $A$  si dhe me klasën e operatorëve  $k$ -kuasi- $*$ -paranormalë.

Me shembull do të tregojmë se ekziston operatori që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q^*$ , e që është kuasinilpotent mirëpo nuk është operator kuasi-hipernormal.

# ABSTRACT

In this dissertation we will show some properties of the operators who have previously been defined, as the  $N$  –quasinormal operators and  $M$  –class  $Q$  operators.

We will also define new class of operators. The new class of operators are:  $M$  –class  $Q^*$ ,  $k$  –quasi class  $Q$  and  $k$  –quasi class  $Q^*$ . For these classes of operators we will study many of their properties.

For the class of the  $N$  –quasinormal operators among others, we will obtain conditions under which the sum of two  $N$  –quasinormal operators is also  $N$  –quasinormal operator, and conditions under which the product of  $N$  –quasinormal operator and quasinormal operator is  $N$  –quasinormal operator.

Many properties we will study for  $M$  –class  $Q$  and  $M$  –class  $Q^*$  operators. We will give the relation of these two new classes with the other classes of operators that have been introduced before. We will show that every  $M$  –paranormal operator, respectively, every  $M^*$  –paranormal, is the operator of  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$ , respectively, but the reverse of this is not always valid.

Moreover we will prove that Aluthge transformation  $\tilde{T}$  is  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$  if and only if

\* –Aluthge transformation  $\tilde{T}^{(*)}$  is  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$ , respectively.

We will prove that the tensor product of the  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$  operator and the identical operator  $I$  is also the operator of  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$ , respectively. While with the example we will show that the tensor product of two operators of  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$  is not necessarily to be  $M$  –class  $Q$ ,  $M$  –class  $Q^*$ , respectively.

Furthermore, for  $k$  –quasi class  $Q$  and  $k$  –quasi class  $Q^*$  we will study many properties. For  $k$  –quasi class  $Q$  operators we will prove that the following implication is true

$$\text{class } Q \subseteq \text{quasi class } Q \subseteq k - \text{quasi class } Q \subseteq (k + 1) - \text{quasi class } Q.$$

Also we will give the relation of  $k$  –quasi class  $Q$  operators with other classes of operators such as,  $k$  –quasi class  $A$  and  $k$  –quasi paranormal operators.

For  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators we will prove that the following implication is true

*class*  $Q^* \subseteq$  *quasi class*  $Q^* \subseteq k$  – *quasi class*  $Q^* \subseteq (k + 1)$  – *quasi class*  $Q^*$ .

Also we will give the relation of  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators with other classes of operators such as,  $k$  –quasi – \* –class  $A$  and  $k$  –quasi – \* – paranormal operators.

With the example we will show that there is an operator that belongs to the  $k$  –quasi class  $Q^*$ , which is quasinilpotent operator but it is not quasi –hyponormal.

# HYRJE

Teoria e operatorëve është një teori relativisht e re në kuadër të analizës funksionale. Mund të themi se si disiplinë e veçantë u zhvillua nga fundi i shekullit XIX dhe fillimi i shekullit XX. Në fillim të shekullit XX paraqiten një numër i madh punimesh nga matematikanë të shquar të asaj kohe, të cilat i japin një dinamikë të jashtëzakonshme zhvillimit të kësaj lëmie.

Një rol të veçantë në teorinë e operatorëve në hapësirat e Hilbertit padyshim zënë disa klasa të operatorëve siç janë edhe klasa e operatorëve  $M$  –paranormalë,  $M^*$  –paranormalë, klasa  $Q$ , kuasi klasa  $Q$ , klasa  $Q^*$  si dhe kuasi klasa  $Q^*$ . Me studimin e këtyre klasave të operatorëve janë marrë shumë matematikanë si Arora, Thukral, Duggal, Radharamani, Yamazaki, Ando e shumë të tjerë. Ata kanë shqyrtuar shumë veti të këtyre klasave si dhe raportin e këtyre klasave me klasa të tjera të operatorëve të përkufizuar më parë.

Po ashtu, një prej klasave të operatorëve me një rol të jashtëzakonshëm është edhe klasa e operatorëve kuasinormalë, klasë kjo e përkufizuar diku në vitet e shtatëdhjeta. Deri më tani janë shqyrtuar shumë veti të kësaj klase me rëndësi të posaçme. Më vonë Lohaj (shih [18]) ka përkufizuar klasën e operatorëve  $N$  –kuasinormalë dhe ka vërtetuar shumë veti të kësaj klase. Në këtë punim (shih [41]) janë paraqitur disa veti të tjera të kësaj klase të re të operatorëve.

Në këtë disertacion qëllimi kryesor është përkufizimi dhe studimi i klasave të reja të operatorëve dhe studimi i vetive të disa klasave të operatorëve të përkufizuara më herët nga autorë të tjerë. Klasa të reja të operatorëve të përkufizuar në këtë disertacion janë: klasa e operatorëve  $M$  –klasë  $Q^*$ ,  $k$  –kuasi klasë  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasë  $Q^*$ . Pra, këtu qëllimi është të tregohen veti të ndryshme të klasave të lartpërmendura, si dhe të shikohen lidhshmëritë ndërmjet këtyre klasave dhe klasave të tjera të operatorëve. Qëllimi i punimit është edhe studimi i disa klasave të operatorëve të përkufizuara më herët, p.sh. në këtë drejtim është punuar mjaft në klasat e operatorëve  $N$  –kuasinormalë si dhe  $M$  –klasë  $Q$ .

Punimi i disertacionit përbëhet nga tre kapituj.

Kapitulli i parë është “*Operatorët  $N$  –kuasinormalë*”.

Kapitulli i parë do të shërbejë si kapitull ndihmës. Në pjesën e parë janë dhënë disa koncepte bazë dhe do përmbledhen pohime nga teoria e operatorëve, koncepte dhe pohime këto të rëndësishme për pjesën tjetër të doktoratës. Ndër të tjera janë dhënë përkufizimi i spektrit, rrezes spektrale, përkufizimi i operatorit të zhvendosjes me peshë si dhe përkufizimi i nënhapësirës invariante.

Në pjesën e dytë janë shqyrtuar disa veti të operatorëve normalë dhe kuasinormalë.

Në pjesën e tretë janë shqyrtuar disa veti të klasës së operatorëve  $N$  –kuasinormalë në hapësirat e Hilbertit. Më saktë, janë studiuar disa kushte që duhet të plotësoj një operator që t’i takon kësaj klase. Po ashtu, janë dhënë kushtet që duhet t’i plotësojnë dy operatorë nga kjo klasë ashtu që edhe shuma e tyre të jetë nga kjo klasë (Teorema 1.3.1). Si dhe janë dhënë kushtet që duhet të plotësoj një operator nga klasa  $N$  –kuasinormal dhe një operator nga klasa kuasinormal ashtu që produkti i tyre të jetë operator  $N$  –kuasinormal (Teorema 1.3.2).

Kapitulli i dytë është “ $M$  –klasa  $Q$  dhe  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve” .

Në pjesën e parë janë dhënë shumë veti të operatorëve nga  $M$  –klasa  $Q$ . Kjo klasë është përkufizuar më herët nga Senthilkumar dhe Prasad (shih [38]). Ata kanë shqyrtuar disa veti të kësaj klase. Tani këtu ndër të tjerat është treguar se nëse  $T$  është një operator invertibil dhe  $N$  një operator i tillë që  $N$  komuton me operatorin  $T^*T$  atëherë operatori  $N$  është nga  $M$  –klasa  $Q$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $TNT^{-1}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$  (Teorema 2.1.1).

Ndërsa, në pjesën e dytë duke u bazuar në përkufizimin e  $M$  –klasën  $Q$  të operatorëve është përkufizuar  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve. Janë vërtetuar disa pohime lidhur me këtë klasë të operatorëve. Ndër të tjerat është paraqitur edhe lidhshmëria e kësaj klase me klasën e përkufizuar shumë më parë, klasën e operatorëve  $M^*$  –paranormalë (Pohim 2.2.2). Më pas, me shembull është vërtetuar se klasat e operatorëve,  $M$  –klasa  $Q$  dhe  $M$  –klasa  $Q^*$  janë të ndryshme dhe të pavarura në mes veti, mirëpo meqë teknikat e vërtetimit të rezultateve për të dy këto klasa janë pothuajse të njëjta andaj pohimet për klasën e operatorëve  $M$  –klasës  $Q^*$  do t’i marrim pa vërtetimet meqë vërtetohen ngjashëm si në rastin e  $M$  –klasën  $Q$ .

Në pjesën e tretë është shqyrtuar prodhimi tensorial i këtyre dy klasave të operatorëve. Më saktë, është vërtetuar se prodhimi tensorial i operatorit nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  dhe operatorit identik  $I$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$ , respektivisht (Pohim 2.3.1 & Pohim 2.3.2). Ndërsa me shembull është treguar se prodhimi tensorial i dy operatorëve nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  nuk është medoemos i tillë, respektivisht (Shembull 2.3.1).

Në pjesën e katërt është dhënë përkufizimi i transformimit Aluthge dhe  $*$  –transformimit Aluthge, si dhe është vërtetuar se transformimi Aluthge  $\tilde{T}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë kur  $*$  –transformimi Aluthge  $\tilde{T}^{(*)}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$ , respektivisht (Teorema 2.4.2 & Teorema 2.4.3.).

Kapitulli i tretë është “ $k$  –kuasi klasa  $Q$  dhe  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  e operatorëve” .

Në pjesën e parë është përkufizuar  $k$  –kuasi klasa  $Q$  e operatorëve. Kjo klasë në fakt është një zgjerim i kuasi klasës  $Q$  të përkufizuar nga Devika (shih [51]). Këtu është shqyrtuar raporti i kësaj klase të operatorëve në krahasim me klasë të tjera të operatorëve, si me klasën  $Q$ ,  $k$  –kuasi klasën  $A$  si dhe klasën e operatorëve  $k$  –kuasi paranormalë (Pohim 3.1.2, Pohim 3.1.3, Pohim 3.1.4, Pohim 3.1.5). Pohim me rëndësi të posaçme është Pohimi 3.1.11. ku është shqyrtuar spektri aproksimativ i kësaj klase. Për spektrin aproksimativ të operatorëve nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  është vërtetuar se vlen

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

E tani nga ky pohim është shqyrtuar edhe spektri aproksimativ i klasës së operatorëve  $k$  –kuasi paranormalë, i cili ka qenë si problem i hapur deri më tani.

Ndërsa në pjesën e dytë është përkufizuar  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  e operatorëve. Kjo klasë është një zgjerim i kuasi klasës  $Q^*$ . Ndër shumë veti të tjera është shqyrtuar edhe raporti i kësaj klase të operatorëve në krahasim me klasë të tjera të operatorëve, si me klasën  $Q^*$ ,  $k$  –kuasi –  $*$  –klasën  $A$  si dhe me klasën e operatorëve  $k$  –kuasi –  $*$  – paranormalë (Pohim 3.2.2, Pohim 3.2.3, Pohim 3.2.4, Pohim 3.2.5). Po ashtu, është vërtetuar se çdo operator kuasi hipernormal është edhe operator nga kuasi klasa  $Q^*$  (Pohim 3.2.14.). Me shembull është treguar se ekziston operatori  $T$  nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  i cili nuk është kuasi hipernormal (Shembull 3.2.4). Edhe këtu pohim me rëndësi të posaçme është Pohimi 3.2.11. ku është shqyrtuar spektri aproksimativ i kësaj klase. Për spektrin aproksimativ të operatorëve nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  është vërtetuar se vlen

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

Edhe këtu ngjashëm si më parë, nga ku pohim është shqyrtuar edhe spektri aproksimativ i klasës së operatorëve  $k$  –kuasi –  $*$  – paranormalë, i cili ka qenë si problem i hapur deri më tani.

# Kapitulli 1

## OPERATORËT $N$ –KUASINORMALË

Në këtë kapitull së pari do t'i japim kuptimet bazike si dhe disa pohime themelore nga teoria e operatorëve në hapësirat e Hilbertit. Do të japim po ashtu disa veti të rëndësishme të operatorëve normalë si dhe atyre kuasinormalë. Tutje, do të flasim për operatorët  $N$  –kuasinormalë, operatorë të cilët janë përkufizuar nga Lohaj (shih [18]). Këtu do të paraqesim disa veti të tjera të kësaj klase të operatorëve, rezultate këto të publikuara në punimin [41].

### 1.1 DISA KONCEPTE BAZIKE NGA TEORIA E OPERATORËVE NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

Le të jetë  $H$  hapësirë komplekse e Hilbertit, le të jetë  $L(H)$  bashkësia e të gjithë operatorëve linear të kufizuar në hapësirën  $H$  dhe le të jetë  $T \in L(H)$ .

Me  $R(T)$  kemi shënuar *rangun e operatorit*  $T$  i cili është përkufizuar me  $R(T) = \{Tx : x \in H\}$ , kurse me  $N(T)$  kemi shënuar *bërthamën e operatorit*  $T$  e cila është përkufizuar me  $N(T) = \{x \in H : Tx = 0\}$ .

Çdo operatori  $T \in L(H)$  i përgjigjet operatori i vetëm  $T^* \in L(H)$  i tillë që  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle, \forall x, y \in H$ , dhe quhet *operatori i adjuguar* i operatorit  $T$ .

**Teoremë 1.1.1. ([19])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  atëherë për operatorin e adjuguar të tij vlejné këto veti:*

1.  $\|T^*\| = \|T\|;$
2.  $(T^*)^* = T;$

3.  $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$ ,
4.  $(T_1 T_2)^* = T_2^* T_1^*$ ;
5.  $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*, \alpha \in \mathbb{C}$ ;
6.  $\|T^* T\| = \|T T^*\| = \|T\|^2$ ;
7.  $N(T) = R(T^*)^\perp$ ;
8.  $N(T^*) = R(T)^\perp$ .

Operatori  $T$  është pozitiv nëse  $\langle Tx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$  dhe shënohet  $T \geq 0$ .

**Teoremë 1.1.2. ([19])** Le të jenë  $T, S \in L(H)$  dy operatorë pozitiv. Nëse operatorët  $T, S$  janë komutativ, atëherë prodhimi  $TS$  po ashtu është operator pozitiv.

Është e qartë se operatorët  $T^*T$  dhe  $TT^*$  janë operatorë pozitiv.

**Teoremë 1.1.3. ([19])** Për çdo operator pozitiv  $T \in L(H)$ , ekziston rrënja katrore unike  $T^{\frac{1}{2}} \in L(H)$ , e cila gjithashtu është operator pozitiv, që komuton me çdo operator me të cilin komuton operatori  $T$ .

Vëmë  $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$ , i cili është operator pozitiv dhe vlen  $|T|^2 = T^*T$ . Nga këtu kemi se  $|T^*|^2 = TT^*$ .

**Përkufizim 1.1.1. ([7])** Për operatorin  $T$  themi se është unitarisht ekuivalent me operatorin  $S$  nëse ekziston operatori unitar  $U$  ashtu që  $S = U^* T U$ .

**Përkufizim 1.1.2. ([7])** Kur operatori  $T$  komuton me operatorin  $S$  dhe  $S^*$ , atëherë themi se operatori  $T$  komuton dyfish me operatorin  $S$ .

Në vazhdim do të japim përkufizimin për spektrin e operatorit si dhe rrezen spektrale të tij.

**Përkufizim 1.1.3. ([11])** Spektër të operatorit  $T$  quajmë bashkësinë e të gjithë numrave kompleksë  $\lambda$  për të cilët  $T - \lambda I$  nuk është operator invertibil në  $L(H)$  dhe e shënojmë me  $\sigma(T)$ . Pra,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I) \notin L(H)^{-1}\}.$$

Komplementi i bashkësisë  $\sigma(T)$  shenohet me  $\rho(T)$  dhe paraqet bashkësinë rezolvente të operatorit  $T$ . Pra,

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I) \in L(H)^{-1}\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

Spektri pikësor dhe spektri aproksimativ për operatorin  $T$  përkatësisht janë:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}: (T - \lambda I) \text{ nuk është injektiv}\},$$

$$\sigma_{ap}(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C}: \inf_{\|x\|=1} \|(T - \lambda I)x\| = 0 \right\}.$$

Vërtetohet se nëse  $\lambda \in \sigma_{ap}$ , atëherë ekziston vargu  $(x_n)$  i tillë që  $\|x_n\| = 1$  dhe  $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

**Përkufizim 1.1.4. ([11])** Rrezja spektrale e operatorit  $T$  shenohet me  $r(T)$  dhe përkufizohet me :

$$r(T) = \sup\{|\lambda|: \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Vërejmë se  $0 \leq r(T) \leq \|T\|$ .

**Teoremë 1.1.4. ([11])** Për çdo operator të kufizuar  $T$  vlen:

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \|T\|.$$

**Përkufizim 1.1.5. ([11])** Operatori  $T$  quhet *operator nilpotent* nëse  $T^n = 0$  për ndonjë  $n \in \mathbb{N}$ . Ndërsa operatori  $T$  quhet *kuazinilpotent* nëse  $\sigma(T) = \{0\}$ .

**Përkufizim 1.1.6. ([11])** Operatori  $T$  quhet *normaloid*, në qoftë se  $r(T) = \|T\|$ .

Tani në vazhdim do të japim përkufizimin e operatorit të zhvendosjes me peshë.

**Përkufizim 1.1.7. ([11])** Le të jetë  $(e_n)$  bazë e ortonormuar në  $H$  dhe  $(\alpha_n)$  një varg i fiksuar i numrave kompleksë. Operatori  $T \in L(H)$ , quhet *operator i zhvendosjes me peshë* në hapësirën komplekse të Hilbertit nëse  $T(e_n) = \alpha_n e_{n+1}$ , për çdo  $n$ .

Vargu  $(\alpha_n)$  quhet *vargu i peshave*.

Operatori  $T$  quhet *operator i zhvendosjes së njëanshme me peshë* përkatësisht *i zhvendosjes së dyanshme me peshë* nëse  $n$  i takon bashkësisë së numrave të plotë jo negativ, përkatësisht bashkësisë së numrave të plotë.

**Pohim 1.1.1. ([47])** Nëse  $T$  është operator i zhvendosjes së dyanëshme me peshë, atëherë

$$T^* e_n = \overline{\alpha_{n-1}} e_{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Nëse  $T$  është operator i zhvendosjes së njëanëshme me peshë, atëherë:

$$T^* e_n = \overline{\alpha_{n-1}} e_{n-1}, \forall n \geq 1 \text{ dhe } T^* e_0 = 0.$$

Tani marrim rastin e operatorëve të zhvendosjes me peshë në rastin kur termat e vargut të peshave  $(\alpha_n)$  janë të barabarta me 1, për çdo  $n$ .

**Përkufizim 1.1.8. ([11])** Le të jetë  $(e_n)$  bazë e ortonormuar në  $H$ . Operatori  $T \in L(H)$  quhet *operator i zhvendosjes* në hapësirën komplekse të Hilbertit nëse  $T(e_n) = e_{n+1}$ , për çdo  $n$ .

Operatori  $T$  quhet *operator i zhvendosjes së njëanshme* përkatësisht i *zhvendosjes së dyanshme* nëse  $n$  i takon bashkësisë së numrave të plotë jo negativ, përkatësisht bashkësisë së numrave të plotë.

**Teoremë 1.1.5. ([11])** Operatori i zhvendosjes së njëanshme paraqet një izometri. Pra,

$$\|Tx\| = \|x\|, \forall x \in X.$$

**Teoremë 1.1.6. ([11])** Për operatorin e adjunguar  $T^*$  të operatorit të zhvendosjes së njëanshme  $T$  vlenë:

$$T^*(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_{n+1} \rangle e_n.$$

Shohim tani përkufizimin e nënhapësirës invariante.

**Përkufizim 1.1.9. ([46])** Le të jetë  $M$  nënhapësirë e mbyllur e hapësirës  $H$ . Për nënhapësirën  $M$  themi se është  $T$  –invariante në qoftë se  $T(M) \subseteq M$ . Pra, në qoftë se për çdo  $x \in M$ , rrjedh  $Tx \in M$ . Nënhapësira invariante  $M$  është jotriviale, në qoftë se  $M \neq \{0\}$  dhe  $M \neq H$ .

**Pohim 1.1.2. ([46])** Le të jetë  $M$  nënhapësirë e hapësirës  $H$ . Nënhapësira  $M$  e hapësirës  $H$  është  $T$  –invariante, atëherë dhe vetëm atëherë, kur  $M^\perp$  është invariante për  $T^*$ .

Në qoftë se  $T \in L(H)$  dhe  $M$  nënhapësirë e mbyllur e hapësirës  $H$ , atëherë  $H = M \oplus M^\perp$  dhe  $T$  mund të shprehet përmes matricës të tipit  $2 \times 2$ :

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

ku

$A: M \rightarrow M$ , pra  $A \in L(M)$ ;

$B: M^\perp \rightarrow M$ , pra  $B \in L(M^\perp, M)$ ;

$C: M^\perp \rightarrow M^\perp$ , pra  $C \in L(M^\perp)$ ;

dhe

$D: M \rightarrow M^\perp$ , pra  $D \in L(M, M^\perp)$ .

Nëse  $T \in L(H)$  dhe  $M$  është nënhapësirë invariante për operatorin  $T$ , atëherë me  $T|_M$  shënojmë ngushtimin e operatorit  $T$  në  $M$ . Është e qartë se

$$T|_M \in L(M), (T|_M)^* = T^*|_M \text{ dhe } \|T|_M\| \leq \|T\|.$$

## 1.2 OPERATORËT NORMALË DHE KUASINORMALË

**Përkufizim 1.2.1. ([19])** Operatori  $T$  quhet *operator normal* nëse plotësohet kushti

$$TT^* = T^*T.$$

**Teoremë 1.2.1. ([19])** Operatori  $T$  është *operator normal* atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$\|Tx\| = \|T^*x\|, \forall x \in X.$$

**Teoremë 1.2.2. ([7])** Operatori  $T$  është *operator normal* atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $T^*S = ST^*$  për çdo operator të kufizuar  $S$  i tillë që  $TS = ST$ .

**Përkufizim 1.2.2.** Operatori  $T$  quhet *operator kuasinormal* nëse

$$T(T^*T) = (T^*T)T.$$

**Pohim 1.2.1. ([7])** Nëse  $T$  është *operator normal* atëherë  $T$  është *operator kuasinormal*.

Mirëpo e anasjellta e këtij pohimi nuk vlen gjithmonë, andaj në vazhdim japim teoremën.

**Teoremë 1.2.3. ([18])** Nëse  $T$  është *operator kuasinormal invertibil* atëherë  $T$  është *operator normal*.

**Pohim 1.2.2. ([18])** Nëse  $T$  është *operator kuasinormal invertibil* dhe nëse plotësohet kushti

$$T(T^*T) = \lambda I + Q, \text{ ku } \lambda \in \mathbb{C} \dots \dots (1)$$

Atëherë, operatori  $Q$  është *operator normal*.

**Lemë 1.2.1. ([19])** Nëse  $T$  është operator i kufizuar atëherë ekziston izometria e pjesshme  $U$  dhe operatori pozitiv  $|T| = \sqrt{T^*T}$  në  $H$  të tillë që  $T = U|T|$  dhe  $N(U) = N(|T|)$ , dhe kjo paraqet zbërthimin polar të operatorit  $T$ .

**Pohim 1.2.3. ([22])** Çdo operator  $T^*$  mund të shenohet si  $T^* = U^*|T^*|$  ku  $U$  është izometri e pjesshme dhe  $|T^*| = \sqrt{TT^*}$  dhe kjo paraqet zbërthimin polar të operatorit  $T^*$  dhe  $N(U^*) = N(|T^*|)$ .

**Lemë 1.2.2. ([7])** Nëse  $T$  është operator i kufizuar me zbërthimin polar  $T = U|T|$  atëherë  $T$  është *operator kuasinormal* atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $U|T| = |T|U$ .

### 1.3 OPERATORËT $N$ –KUASINORMALË

**Përkufizim 1.3.1. ([18])** Operatori  $T \in L(H)$  quhet operator  $N$  –kuasinormal nëse

$$T(T^*T) = N(T^*T)T, (N \in \mathbb{R}).$$

E qartë se për  $N = 1$ , fitohet klasa e operatorëve kuasinormalë.

**Lemë 1.3.1. ([18])** Nëse  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal regular atëherë:

$$a) T^*(T^*T) = \frac{1}{N}(T^*T)T^*, (N \in \mathbb{R}),$$

$$b) T^{-1}(T^*T) = \frac{1}{N}(T^*T)T^{-1}, (N \in \mathbb{R})$$

$$c) T^{*-1}(T^*T) = N(T^*T)T^{*-1}, (N \in \mathbb{R}).$$

**Lemë 1.3.2. ([18])** Nëse  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal dhe invertibil atëherë  $T$  është operator kuasinormal.

**Lemë 1.3.3. ([18])** Nëse  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal dhe i zhvendosjes së njëanshme atëherë

$$|\alpha_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{N^n}} |\alpha_1|$$

Për  $N > 1$ , operatori  $T$  është kuasinilpotent kompakt dhe për  $N < 1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\alpha_{n+1}| = \infty$ .

**Përkufizim 1.3.2. ([19])** Le të jetë  $T \in L(H)$  atëherë

$$U = \operatorname{Re}T = \frac{T + T^*}{2}, V = \operatorname{Im}T = \frac{T - T^*}{2i}$$

janë pjesa reale dhe imagjinare, përkatësisht e operatorit  $T$ , atëherë  $T = U + iV$ .

Le të jenë  $B^2 = TT^*$  dhe  $C^2 = T^*T$  dhe ku  $B$  e  $C$  janë operatorë jo negativ.

**Pohim 1.3.1. ([41])** Nëse  $T$  është operator i tillë që

(i) operatori  $B$  komuton me  $U$  dhe  $V$ ,

(ii)  $TB^2 = N(C^2T)$ .

Atëherë operatori  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal.

**Vërtetim:** Meqë  $BU = UB, BV = VB$ , atëherë kemi

$$B^2U = UB^2, B^2V = VB^2,$$

prej nga

$$B^2T + B^2T^* = TB^2 + T^*B^2$$

$$B^2T - B^2T^* = TB^2 - T^*B^2$$

Kjo na sjell në faktin që

$$B^2T = TB^2 = N(C^2T) \Rightarrow TT^*T = N(T^*TT).$$

Pra, operatori  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal.

■

**Pohim1.3.2. ([41])** *Le të jetë  $T$  një operator  $N$  –kuasinormal dhe  $TB^2 = N(C^2T)$ . Atëherë operatori  $B$  komuton me  $U$  dhe  $V$ .*

**Vërtetim:** Meqë  $TB^2 = N(C^2T)$  kemi  $T(TT^*) = N((T^*T)T)$ .

Atëherë vlen

$$(TT^*)T^* = N(T^*(T^*T)).$$

Meqë  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal kemi:

$$\begin{aligned} B^2U &= TT^* \frac{T + T^*}{2} \\ &= \frac{TT^*T + TT^*T^*}{2} \\ &= \frac{N(T^*T)T + NT^*(T^*T)}{2} \\ &= \frac{N((T^*T)T + T^*(T^*T))}{2} \\ &= \frac{N\left(\frac{1}{N}T(TT^*) + \frac{1}{N}(T^*T)T^*\right)}{2} \\ &= \frac{T^2T^* + T^*TT^*}{2} \\ &= \frac{T + T^*}{2} TT^* = UB^2. \end{aligned}$$

Meqë operatori  $B$  është jonegativ, atëherë  $BU = UB$ .

Ngjashëm vërtetohet se  $BV = VB$ . ■

**Pohim 1.3.3. ([41])** Nëse  $T$  është një operator i tillë që  $C^2U = \frac{1}{N}UC^2$ ,  $C^2V = \frac{1}{N}VC^2$ . Atëherë  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal.

**Vërtetim:** Meqë

$$C^2U = \frac{1}{N}UC^2, C^2V = \frac{1}{N}VC^2,$$

atëherë kemi

$$C^2(U + iV) = \frac{1}{N}(U + iV)C^2, C^2T = \frac{1}{N}TC^2$$

nga rrjedh se

$$(T^*T)T = \frac{1}{N}T(T^*T) \Rightarrow T(T^*T) = N(T^*T)T.$$
■

**Pohim 1.3.4. ([41])** Le të jetë  $T$  një operator  $N$  –kuasinormal dhe  $B^2T = \frac{1}{N}C^2T$ . Atëherë:

$$(i) \quad C^2U = \frac{1}{N}UC^2$$

$$(ii) \quad C^2V = \frac{1}{N}VC^2.$$

**Vërtetim:** (i) Meqë

$$B^2T = \frac{1}{N}C^2T$$

$$\Rightarrow (TT^*)T = \frac{1}{N}(T^*T)T$$

$$\Rightarrow T^*(TT^*) = \frac{1}{N}T^*(T^*T).$$

Meqë  $T$  është operator  $N$  –kuasinormal atëherë kemi

$$\begin{aligned} C^2U &= T^*T \frac{T + T^*}{2} \\ &= \frac{T^*T^2 + T^*TT^*}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\frac{1}{N}TT^*T + \frac{1}{N}T^{*2}T}{2} \\
 &= \frac{1}{N} \frac{T + T^*}{2} T^*T \\
 &= \frac{1}{N} UC^2.
 \end{aligned}$$

(ii) Ngjashëm vërtetohet se vlen edhe

$$C^2V = \frac{1}{N}VC^2.$$

■

Në teoremat në vijim do të japim kushtet që duhet plotësuar dy operatorë  $N$  –kuasinormalë ashtu që edhe shuma e tyre të jetë po ashtu operator i kësaj klase. Gjithashtu do të japim kushtet që duhet plotësuar një operator  $N$  –kuasinormal dhe një operator kuasinormal ashtu që produkti i tyre të jetë operator  $N$  –kuasinormal.

**Teoremë 1.3.1. ([41])** *Le të jenë  $T_1$  dhe  $T_2$  dy operatorë  $N$  –kuasinormalë të tillë që  $T_1T_2 = T_2T_1 = T_1^*T_2 = T_2^*T_1 = 0$ . Atëherë shuma e tyre  $T_1 + T_2$  është po ashtu operator  $N$  –kuasinormal.*

**Vërtetim:** Le të jenë  $T_1$  dhe  $T_2$  dy operatorë  $N$  –kuasinormalë dhe le të vlejnjë kushtet

$$T_1T_2 = T_2T_1 = T_1^*T_2 = T_2^*T_1 = 0$$

atëherë kemi:

$$\begin{aligned}
 &(T_1 + T_2)[(T_1 + T_2)^*(T_1 + T_2)] \\
 &= (T_1 + T_2)[(T_1^* + T_2^*)(T_1 + T_2)] \\
 &= (T_1 + T_2)(T_1^*T_1 + T_1^*T_2 + T_2^*T_1 + T_2^*T_2) \\
 &= (T_1 + T_2)(T_1^*T_1 + T_2^*T_2) \\
 &= T_1T_1^*T_1 + T_1T_2^*T_2 + T_2T_1^*T_1 + T_2T_2^*T_2 \\
 &= T_1T_1^*T_1 + T_2T_2^*T_2 \\
 &= N(T_1^*T_1)T_1 + N(T_2^*T_2)T_2 \\
 &= N((T_1^*T_1)T_1 + (T_2^*T_2)T_2) \\
 &= N((T_1 + T_2)^*(T_1 + T_2)^2).
 \end{aligned}$$

Pra,  $T_1 + T_2$  është operator  $N$  –kuasinormal.

■

**Teoremë 1.3.2. ([41])** Le të jenë,  $T_1$  një operator  $N$  –kuasinormal dhe  $T_2$  një operator kuasinormal. Atëherë produkti i tyre  $T_1T_2$  është operator  $N$  –kuasinormal nëse plotësohen kushtet e mëposhtme:

$$(i) T_1T_2 = T_2T_1$$

$$(ii) T_1T_2^* = T_2^*T_1.$$

**Vërtetim:** Le të jenë  $T_1$  një operator  $N$  –kuasinormal dhe  $T_2$  një operator kuasinormal që i plotësojnë kushtet e teoremës atëherë kemi:

$$\begin{aligned} & (T_1T_2)(T_1T_2)^*(T_1T_2) \\ &= (T_1T_2)(T_2^*T_1^*)(T_1T_2) \\ &= (T_1T_2)(T_1^*T_2^*)(T_1T_2) \\ &= T_1(T_2T_1^*)(T_2^*T_1)T_2 \\ &= T_1(T_1^*T_2)(T_1T_2^*)T_2 \\ &= T_1T_1^*(T_2T_1)(T_2^*T_2) \\ &= T_1T_1^*(T_1T_2)(T_2^*T_2) \\ &= N(T_1^*T_1^2)(T_2^*T_2^2) \\ &= NT_1^*(T_1^2T_2^*)T_2^2 \\ &= N(T_1^*T_2^*)(T_1^2T_2^2) \\ &= N(T_1^*T_2^*)(T_1T_2)^2 \\ &= N(T_2^*T_1^*)(T_1T_2)^2 \\ &= N(T_1T_2)^*(T_1T_2)^2. \end{aligned}$$

Pra, produkti  $T_1T_2$  është operator  $N$  –kuasinormal.

■

## Kapitulli 2

# $M$ –KLASA $Q$ DHE $M$ –KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE

Në këtë kapitull do të shqyrtojmë shumë veti të  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve, klasë kjo e përkufizuar nga Senthilkumar dhe Prasad (shih [38]). Duke u bazuar në përkufizimin e  $M$  –klasën  $Q$  të operatorëve do të përkufizojmë  $M$  –klasën  $Q^*$  të operatorëve (shih [40]). Do të vërtetojmë disa pohime lidhur me këtë klasë të operatorëve. Me shembull, do tregojmë se këto dy klasa të operatorëve,  $M$  –klasa  $Q$  dhe  $M$  –klasa  $Q^*$  janë të ndryshme dhe të pavarura në mes veti. Po ashtu, do të vërtetojmë se prodhimi tensorial i operatorit nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  dhe operatorit identik  $I$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$ , respektivisht. Ndërsa me shembull do të tregojmë se prodhimi tensorial i dy operatorëve nga  $M$  –klasa  $Q$ ,  $M$  –klasa  $Q^*$  nuk është medoemos i tillë, respektivisht.

### 2.1 $M$ –KLASA $Q$ E OPERATORËVE

Në fillim do të japim përkufizimet e disa klasave të operatorëve që do të na nevojiten gjatë shqyrtimit të kësaj klase të operatorëve.

**Përkufizim 2.1.1. ([2])** Operatori  $T \in L(H)$  quhet *operator paranormal* nëse:

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi  $x \in H$ ,

ose

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\| \cdot \|x\|,$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Operatorët paranormalë janë përkufizuar nga Furuta, në fund të viteve 60 të shekullit të kaluar (shih [2]) dhe me studimin e kësaj klase të operatorëve janë marrë shumë matematikanë.

Është vërtetuar se  $T$  është operator paranormal nëse plotësohet kushti:

$$T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geq 0, \forall \lambda > 0.$$

**Përkufizim 2.1.2. ([33])** Operatori  $T \in L(H)$  quhet operator  $M$  –paranormal nëse:

$$\|Tx\|^2 \leq M\|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real të fiksuar ku  $M \geq 1$ ,

ose

$$\|Tx\|^2 \leq M\|T^2x\| \cdot \|x\|,$$

për çdo vektor  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real të fiksuar ku  $M \geq 1$ .

Me këtë klasë të operatorëve kanë punuar shumë matematikanë të njohur si Arora, Thukral, Kumar, etj. Është vërtetuar se  $T$  është operator  $M$  –paranormal nëse plotësohet kushti:

$$M^2T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2 \geq 0, \forall \lambda > 0.$$

Shihet qartë se për  $M = 1$ , operatori 1 –paranormal në fakt paraqet operatorin paranormal.

Duggal, Kubrusly, Levan (shih [35]) më pas kanë përkufizuar klasën  $Q$  të operatorëve.

**Përkufizim 2.1.3. ([35])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon klasës  $Q$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|Tx\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^2x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  i takon klasës  $Q$  nëse plotësohet kushti:

$$T^{*2}T^2 - 2T^*T + I \geq 0.$$

Senthilkumar dhe Prasad (shih [38]) kanë përkufizuar  $M$  –klasën  $Q$  të operatorëve dhe kanë vërtetuar disa veti bazike të kësaj klase të operatorëve. Disa vetitë tjera të kësaj klase janë studiuar të cilat do t'i paraqesim në vazhdim e në fakt ato janë të publikuara në punimin [40].

**Përkufizim 2.1.4. ([38])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|Tx\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2\|T^2x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real e të fiksuar ku  $M \geq 1$ .

Shihet qartë se për  $M = 1$  operatori 1 –klasë  $Q$  në fakt paraqet operatorin e klasës  $Q$ .

**Pohim 2.1.1. ([38])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti:

$$M^2 T^{*2} T^2 - 2T^* T + I \geq 0,$$

ku  $M$  është një numër real i fiksuar i tillë që  $M \geq 1$ .

Nga përkufizimi i klasës së operatorëve  $M$  –paranormalë dhe pohimi i mësipërm shohim se çdo operator  $M$  –paranormal është edhe operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , mirëpo e anasjellta e kësaj nuk vlen gjithmonë. Pohimi në vijim na jep kushtin që duhet plotësuar një operator nga  $M$  –klasa  $Q$  që të jetë operator  $M$  –paranormal.

**Pohim 2.1.2. ([38])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , atëherë operatori  $T$  është  $M$  –paranormal, për çdo  $\lambda > 0$ .

**Pohim 2.1.3. ([38])** Le të jetë  $T$  një operator i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$ . Atëherë  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$M^2 |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 - 2|\alpha_n|^2 + 1 \geq 0$$

për çdo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Pohim 2.1.4.** Le të jetë  $T$  një operator regular i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$ . Atëherë  $T^{-1}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$M^2 - 2|\alpha_{n-2}|^2 + |\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2 \geq 0$$

për çdo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Vërtetim:** Supozojmë se operatori  $T^{-1}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ , atëherë kemi

$$\|T^{-1}x\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2 \|T^{-2}x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Le të jetë  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  bazë e ortonormuar në hapësirën e Hilbertit  $H$ , atëherë meqë

$$\|T^{-1}e_n\|^2 = \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2},$$

$$\|T^{-2}e_n\|^2 = \|T^{-1}T^{-1}e_n\|^2 = \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2 \cdot |\alpha_{n-2}|^2},$$

$$\|e_n\|^2 = 1,$$

përfundimisht kemi:

$$\begin{aligned}
 \|T^{-1}e_n\|^2 &\leq \frac{1}{2}(M^2\|T^{-2}e_n\|^2 + \|e_n\|^2) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2} &\leq \frac{1}{2}\left(M^2 \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2 \cdot |\alpha_{n-2}|^2} + 1\right) \\
 \Leftrightarrow \frac{M^2}{|\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2} - \frac{2}{|\alpha_{n-1}|^2} + 1 &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow M^2 - 2|\alpha_{n-2}|^2 + |\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2 &\geq 0.
 \end{aligned}$$

Në vazhdim do të marrim një shembull që tregon se inversi i një operatori nga  $M$  –klasa  $Q$  mund të mos jetë operator nga  $M$  –klasa  $Q$ .

**Shembull 2.1.1.** *Le të jetë  $T$  një operator regular i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  të përkufizuar si vijon:*

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & n \leq -2 \\ 3, & n = -1 \\ 1, & n = 0 \\ \frac{n+1}{n}, & n \geq 1 \end{cases}$$

Atëherë, operatori  $T$  është operator nga  $2$  –klasa  $Q$ , gjë që provohet lehtë duke pasur parasysh pohimi 2.1.3, ndërsa duke u bazuar në pohimin 2.1.4, shohim se operatori  $T^{-1}$  nuk është nga  $2$  –klasa  $Q$ , meqë p.sh. për  $n = 1$ , kemi:

$$\begin{aligned}
 M^2 - 2|\alpha_{-1}|^2 + |\alpha_0|^2 |\alpha_{-1}|^2 &\not\geq 0 \\
 \Rightarrow 4 - 2 \cdot 9 + 1 \cdot 9 &\not\geq 0.
 \end{aligned}$$

■

**Pohim 2.1.5. ([38])** *Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve dhe  $N$  nënhapësirë e mbyllur invariante e operatorit  $T$  atëherë ngushtimi  $T|_N$  është poashtu operator nga  $M$  –klasa  $Q$  e operatorëve.*

**Pohim 2.1.6. ([40])** *Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve dhe nëse operatori  $T$  komuton dyfish me operatorin izometrik  $S$ , atëherë operatori  $TS$  poashtu i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve.*

**Vërtetim:** Le të jetë  $A = TS$ .

Dimë se  $TS = ST, S^*T = TS^*, S^*S = I$ .

Atëherë

$$\begin{aligned}
 & M^2 A^{*2} A^2 - 2A^* A + I \\
 &= M^2 (TS)^{*2} (TS)^2 - 2(TS)^*(TS) + I \\
 &= M^2 S^* T^* S^* T^* T S T S - 2S^* T^* T S + I \\
 &= M^2 T^* T^* S^* S^* S S T T - 2T^* S^* S T + I \\
 &= M^2 T^{*2} T^2 - 2T^* T + I \geq 0,
 \end{aligned}$$

prej nga  $TS$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$  e operatorëve.

■

**Pohim 2.1.7. ([40])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , atëherë operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  të operatorëve.

**Vërtetim:** Nga  $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , kemi se  $\|Tx\|^2 \leq \frac{1}{2}$ .

Atëherë,

$$\begin{aligned}
 & \langle Tx, Tx \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H \\
 & \Rightarrow \langle T^* Tx, x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H \\
 & \Rightarrow \langle (I - 2T^* T)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H \\
 & \Rightarrow I - 2T^* T \geq 0 \\
 & \Rightarrow M^2 T^{*2} T^2 - 2T^* T + I \geq 0,
 \end{aligned}$$

prej nga shihet se  $T$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ .

■

**Pohim 2.1.8. ([40])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$  dhe  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$ , atëherë operatori  $S$  është operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$  atëherë ekziston operatori unitar  $U$  i tillë që  $S = U^* T U$ .

Meqë  $T$  është operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$ , atëherë vlen

$$M^2 T^{*2} T^2 - 2T^* T + I \geq 0.$$

Prej këtu kemi se

$$M^2 S^{*2} S^2 - 2S^* S + I$$

$$\begin{aligned}
 &= M^2(U^*TU)^{*2}(U^*TU)^2 - 2(U^*TU)^*(U^*TU) + I \\
 &= M^2U^*T^*UU^*T^*UU^*TUU^*TU - 2U^*T^*UU^*TU + I \\
 &= U^*(M^2T^*{}^2T^2 - 2T^*T + I)U \geq 0.
 \end{aligned}$$

Pra,  $S$  është operator që i takon  $M$  –klasës  $Q$ .

■

**Teoremë 2.1.1. ([48])** Le të jetë  $T$  një operator invertibil dhe  $N$  një operator i tillë që  $N$  komuton me operatorin  $T^*T$ . Atëherë operatori  $N$  është nga  $M$  –klasa  $Q$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $TNT^{-1}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $N$  një operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , atëherë:

$$M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I \geq 0.$$

Prej nga kemi se,

$$T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^* \geq 0$$

Duke konsideruar,

$$\begin{aligned}
 &T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*[TT^*] \\
 &= T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I][T^*T]T^* \\
 &= T[T^*T][M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^* \\
 &= [TT^*]T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*.
 \end{aligned}$$

Pra, shohim se operatori  $TT^*$  komuton me operatorin  $T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*$ . Atëherë edhe operatori  $[TT^*]^{-1}$  gjithashtu komuton me operatorin  $T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*$ .

Duke pasur parasysh faktin se nëse dy operatorë janë pozitiv dhe nëse janë operatorë komutativ atëherë edhe produkti i tyre është operator pozitiv konkludojmë se produkti i operatorëve  $[TT^*]^{-1}$  dhe  $T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*$  është pozitiv, pra:

$$T[M^2N^*{}^2N^2 - 2N^*N + I]T^*[TT^*]^{-1} \geq 0 \dots \dots \dots (*)$$

Tani meqë operatori  $N$  komuton me  $T^*T$  kemi,

$$NT^*T = T^*TN, \quad T^*TN^* = N^*T^*T,$$

$$(TNT^{-1})^*{}^2(TNT^{-1})^2 = (TNT^{-1})^*(TNT^{-1})^*(TNT^{-1})(TNT^{-1}) = TN^*{}^2N^2T^{-1} \dots \dots \dots (1)$$

dhe

$$(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) = TN^*NT^{-1} \dots \dots \dots (2)$$

Për të vërtetuar se  $TNT^{-1}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$  ekuacionet (1) dhe (2) i zëvendësojmë në shprehjen

$$M^2(TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 - 2(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) + I$$

dhe kemi:

$$\begin{aligned} & M^2TN^{*2}N^2T^{-1} - 2TN^*NT^{-1} + I \\ &= T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^{-1}. \end{aligned}$$

Pra, tani duhet vërtetuar se shprehja e fundit është pozitive. Nga jobarazimi (\*) i fituar gjejmë:

$$\begin{aligned} & T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^*[TT^*]^{-1} \geq 0 \\ \Rightarrow & T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^*T^{*-1}T^{-1} \geq 0 \\ \Rightarrow & T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^{-1} \geq 0 \end{aligned}$$

Pra, operatori  $TNT^{-1}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ .

Anasjelltas, le të jetë operatori  $TNT^{-1}$  nga  $M$  –klasa  $Q$ , pra:

$$M^2(TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 - 2(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) + I \geq 0.$$

Atëherë, ngjashëm si më parë pas zëvendësimit të ekuacioneve (1) dhe (2) kemi:

$$\begin{aligned} & M^2TN^{*2}N^2T^{-1} - 2TN^*NT^{-1} + I \geq 0 \\ \Rightarrow & T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^{-1} \geq 0 \\ \Rightarrow & T^*T[M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^{-1}T \geq 0 \\ \Rightarrow & [T^*T][M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I] \geq 0. \end{aligned}$$

Meqë, operatori  $[T^*T]$  komuton me operatorin  $N$  atëherë ai komuton edhe me operatorin e fituar  $[T^*T][M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]$ .

Ngjashëm si më parë vërejmë se edhe operatori  $[T^*T]^{-1}$  komuton me operatorin  $[T^*T][M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]$ . Dhe meqë këta dy operatorë janë pozitiv dhe komutojnë në mes veti atëherë edhe produkti i tyre është pozitiv, andaj gjejmë:

$$\begin{aligned} & [T^*T]^{-1}[T^*T][M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I] \geq 0. \\ \Rightarrow & M^2N^{*2}N^2 - 2N^*N + I \geq 0. \end{aligned}$$

Pra, operatori  $N$  është nga  $M$  –klasa  $Q$ .

■

## 2.2 $M$ –KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE

Në fillim edhe këtu japim përkufizimin e disa klasave të operatorëve që janë përkufizuar më herët e që janë me rëndësi në shqyrtim e kësaj klase të re.

**Përkufizim 2.2.1. ([8])** Operatori  $T \in L(H)$  quhet *operator  $*$  –paranormal* nëse:

$$\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi  $x \in H$ ,

ose

$$\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\| \cdot \|x\|,$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Kjo klasë e operatorëve është përkufizuar në disertacionin e doktoratës së S. M. Patel, ndërsa disa nga vetitë e kësaj klase janë treguar nga Arora dhe Thukral (shih [8]). Është vërtetuar se  $T$  është operator  $*$  –paranormal nëse plotësohet kushti:

$$T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2 \geq 0, \forall \lambda > 0.$$

**Përkufizim 2.2.2. ([37])** Operatori  $T \in L(H)$  quhet *operator  $M^*$  –paranormal* nëse:

$$\|T^*x\|^2 \leq M\|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real të fiksuar ku  $M \geq 1$ ,

ose

$$\|T^*x\|^2 \leq M\|T^2x\| \cdot \|x\|,$$

për çdo vektor  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real të fiksuar ku  $M \geq 1$ .

Shihet qartë se për  $M = 1$ , operatori  $1^*$  –paranormal paraqet operatori  $*$  –paranormal.

Është vërtetuar se  $T$  është operator  $M^*$  –paranormal nëse plotësohet kushti:

$$M^2T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2 \geq 0, \forall \lambda > 0.$$

Yang dhe Kim (shih [39]) kanë përkufizuar klasën  $Q^*$  të operatorëve.

**Përkufizim 2.2.3. ([39])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon klasës  $Q^*$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^*x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^2x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  i takon klasës  $Q^*$  nëse plotësohet kushti:

$$T^{*2}T^2 - 2TT^* + I \geq 0.$$

Tani duke u bazuar në përkufizimin e  $M$  –klasës  $Q$  japim përkufizimin e  $M$  –klasës  $Q^*$ .

**Përkufizim 2.2.4. ([40])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^*x\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2\|T^2x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$  dhe  $M$  një numër real të fiksuar ku  $M \geq 1$ .

Shihet qartë se për  $M = 1$ , operatori 1 –klasë  $Q^*$  paraqet operatorin e klasës  $Q^*$ .

**Pohim 2.2.1. ([40])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti:

$$M^2T^{*2}T^2 - 2TT^* + I \geq 0,$$

ku  $M$  është një numër real i fiksuar i tillë që  $M \geq 1$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve, atëherë vlen

$$\|T^*x\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2\|T^2x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$  dhe  $M$  është një numër real të fiksuar,  $M \geq 1$ .

Nga këtu për  $x \in H$  dhe numrin real të fiksuar  $M \geq 1$ , kemi:

$$\begin{aligned} M^2\langle T^2x, T^2x \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle T^*x, T^*x \rangle &\geq 0, \forall x \in H \\ \Leftrightarrow \langle M^2T^{*2}T^2x, x \rangle + \langle x, x \rangle - 2\langle TT^*x, x \rangle &\geq 0, \forall x \in H \\ \Leftrightarrow \langle (M^2T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)x, x \rangle &\geq 0, \forall x \in H. \end{aligned}$$

Ekuacioni i fundit është ekuivalent me

$$M^2T^{*2}T^2 - 2TT^* + I \geq 0.$$

Gjë që u deshtë dhe të vërtetohej. ■

Nga përkufizimi i klasës së operatorëve  $M^*$  –paranormalë dhe pohimi i mësipërm shohim se çdo operator  $M^*$  –paranormal është edhe operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ , mirëpo e anasjellta e kësaj nuk vlen gjithmonë. Pohimi në vijim na jep kushtin që duhet plotësuar një operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$  që të jetë operator  $M^*$  –paranormal.

**Pohim 2.2.2. ([40])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ , atëherë operatori  $T$  është  $M^*$  –paranormal, për çdo  $\lambda > 0$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ , për  $\lambda > 0$ , atëherë:

$$M^2 \left( \lambda^{-\frac{1}{2}}T \right)^{*2} \left( \lambda^{-\frac{1}{2}}T \right)^2 - 2 \left( \lambda^{-\frac{1}{2}}T \right) \left( \lambda^{-\frac{1}{2}}T \right)^* + I \geq 0$$

$$\Rightarrow M^2 \lambda^{-2} T^{*2} T^2 - 2 \lambda^{-1} T T^* + I \geq 0$$

$$\Rightarrow \lambda^{-2} (M^2 T^{*2} T^2 - 2 \lambda T T^* + \lambda^2) \geq 0$$

$$\Rightarrow M^2 T^{*2} T^2 - 2 \lambda T T^* + \lambda^2 \geq 0.$$

Që tregon se operatori  $T$  është  $M^*$  –paranormal.

■

**Pohim 2.2.3. ([40])** Le të jetë  $T$  një operator i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$ . Atëherë  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$M^2 |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 - 2 |\alpha_{n-1}|^2 + 1 \geq 0$$

për çdo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve, atëherë vlen

$$M^2 T^{*2} T^2 - 2 T T^* + I \geq 0.$$

Si dhe le të jetë  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  një bazë e ortonormuar në hapësirën e Hilbertit  $H$ , atëherë meqë,

$$T(e_n) = \alpha_n e_{n+1},$$

$$T^* e_n = \overline{\alpha_{n-1}} e_{n-1},$$

$$(T^{*2} T^2) e_n = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 e_n,$$

$$(T T^*) e_n = |\alpha_{n-1}|^2 e_n.$$

Kemi:

$$M^2 T^{*2} T^2 - 2 T T^* + I \geq 0$$

$$\Leftrightarrow M^2 |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 - 2 |\alpha_{n-1}|^2 + 1 \geq 0.$$

■

Në vazhdim me shembull tregojmë se këto dy klasa të operatorëve,  $M$  –klasa  $Q$  dhe  $M$  –klasa  $Q^*$  janë të ndryshme dhe të pavarura në mes veti.

**Shembull 2.2.1.** Le të jetë  $T$  një operator i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  të përkufizuar si vijon:

$$\alpha_n = \begin{cases} 0, & n \leq 0 \\ 1, & n = 1 \\ \frac{1}{2}, & n = 2 \\ 2, & n \geq 3 \end{cases}$$

Nga pohimi 2.2.3 operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  nëse plotësohet kushti

$$M^2|\alpha_n|^2|\alpha_{n+1}|^2 - 2|\alpha_{n-1}|^2 + 1 \geq 0, \text{ për çdo } n \in \mathbb{Z}.$$

Pra, që në rastin tonë shihet se jobarazimi i mësipërm vlen për çdo numër real e të fiksuar  $M \geq 1$ , andaj operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$ , për çdo numër real e të fiksuar  $M \geq 1$ .

Ndërsa, nga pohimi 2.1.3, kemi se operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q$  nëse plotësohet kushti

$$M^2|\alpha_n|^2|\alpha_{n+1}|^2 - 2|\alpha_n|^2 + 1 \geq 0, \text{ për çdo } n \in \mathbb{Z}.$$

Pra, në rastin tonë nga jobarazimi i mësipërm shihet se vlen vetëm për numër real e të fiksuar  $M \geq 2$ , andaj operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ , për çdo numër real e të fiksuar  $M \geq 2$ , mirëpo nuk i takon  $1$  –klasës  $Q$ , meqë p.sh. për  $n = 1$ , kemi:

$$M^2|\alpha_1|^2|\alpha_2|^2 - 2|\alpha_1|^2 + 1 \not\geq 0$$

$$\Rightarrow 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 + 1 \not\geq 0.$$

■

**Pohim 2.2.4.** Le të jetë  $T$  një operator regular i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$ . Atëherë  $T^{-1}$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$M^2|\alpha_n|^2 - 2|\alpha_{n-1}|^2|\alpha_{n-2}|^2 + |\alpha_n|^2|\alpha_{n-1}|^2|\alpha_{n-2}|^2 \geq 0$$

për çdo  $n \in \mathbb{Z}$ .

**Vërtetim:** Supozojmë se operatori  $T^{-1}$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  atëherë kemi

$$\|T^{*-1}x\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2\|T^{-2}x\|^2 + \|x\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Le të jetë  $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  bazë e ortonormuar në hapësirën e Hilbertit  $H$ , atëherë meqë

$$\|T^{-1}e_n\|^2 = \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2},$$

$$\|T^{-2}e_n\|^2 = \|T^{-1}T^{-1}e_n\|^2 = \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2 \cdot |\alpha_{n-2}|^2},$$

$$\|T^{*-1}e_n\|^2 = \frac{1}{|\alpha_n|^2},$$

$$\|e_n\|^2 = 1,$$

përfundimisht kemi:

$$\|T^{*-1}e_n\|^2 \leq \frac{1}{2}(M^2\|T^{-2}e_n\|^2 + \|e_n\|^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{|\alpha_n|^2} \leq \frac{1}{2}\left(M^2 \frac{1}{|\alpha_{n-1}|^2 \cdot |\alpha_{n-2}|^2} + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{M^2}{|\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2} - \frac{2}{|\alpha_n|^2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow M^2|\alpha_n|^2 - 2|\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2 + |\alpha_n|^2 |\alpha_{n-1}|^2 |\alpha_{n-2}|^2 \geq 0.$$

Në vazhdim do të marrim një shembull që tregon se inversi i një operatori nga  $M$  –klasa  $Q^*$  mund të mos jetë operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ .

**Shembull 2.2.2.** *Le të jetë  $T$  një operator regular i zhvendosjes së dyanshme me peshë me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  të përkufizuar si vijon:*

$$\alpha_n = \begin{cases} 1, & n \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & n = 0 \\ 2, & n \geq 1 \end{cases}$$

Atëherë operatori  $T$  është operator nga  $2$  –klasa  $Q^*$ , gjë që provohet lehtë duke pasur parasysh pohimi 2.2.3, ndërsa duke u bazuar në pohimin 2.2.4, shohim se operatori  $T^{-1}$  nuk është nga  $2$  –klasa  $Q^*$ , meqë p.sh. për  $n = 0$ , kemi:

$$M^2|\alpha_0|^2 - 2|\alpha_{-1}|^2 |\alpha_{-2}|^2 + |\alpha_0|^2 |\alpha_{-1}|^2 |\alpha_{-2}|^2 \not\geq 0$$

$$\Rightarrow 4 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot 1 \not\geq 0.$$

■

**Pohim 2.2.5. ([40])** *Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve dhe  $N$  nënhapësirë e mbyllur invariante e operatorit  $T$  atëherë ngushtimi  $T|_N$  është poashtu operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve.*

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve dhe le të jetë  $x \in N$ . Atëherë

$$\|T|_N^* x\|^2 = \|T^* x\|^2$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{2}(M^2\|T^2x\|^2 + \|x\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(M^2\|(T|_N)^2x\|^2 + \|x\|^2\right). \end{aligned}$$

që tregon se ngushtimi  $T|_N$  është poashtu nga  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve. ■

**Pohim 2.2.6. ([40])** *Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve dhe nëse operatori  $T$  komuton dyfish me operatorin izometrik  $S$ , atëherë operatori  $TS$  poashtu i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve.*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 2.1.6.

**Pohim 2.2.7. ([40])** *Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\|T^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , atëherë operatori  $T$  i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve.*

**Vërtetim:** Nga  $\|T^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  kemi se  $\|T^*x\|^2 \leq \frac{1}{2}, \forall x \in H$ .

Atëherë,

$$\begin{aligned} &\langle T^*x, T^*x \rangle - \frac{1}{2}\langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H \\ \Rightarrow &\langle TT^*x, x \rangle - \frac{1}{2}\langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H \\ \Rightarrow &\langle (I - 2TT^*)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H \\ \Rightarrow &I - 2TT^* \geq 0 \\ \Rightarrow &M^2T^{*2}T^2 - 2TT^* + I \geq 0, \end{aligned}$$

prej nga shihet se  $T$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ . ■

**Pohim 2.2.8. ([40])** *Le të jetë  $T$  operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$  dhe  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$ , atëherë operatori  $S$  është operator që i takon  $M$  –klasës  $Q^*$ .*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 2.1.8.

**Teoremë 2.2.1. ([48])** *Le të jetë  $T$  një operator invertibil dhe  $N$  një operator i tillë që  $N$  komuton me operatorin  $T^*T$ . Atëherë operatori  $N$  është nga  $M$  –klasa  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $TNT^{-1}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$ .*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në teoremën 2.1.1.

## 2.3 PRODHIMI TENSORIAL PËR $M$ –KLASËN $Q$ DHE $M$ –KLASËN $Q^*$ TË OPERATORËVE

Në fillim japim disa njohuri themelore për prodhimin tensorial.

Le të jetë  $H$  një hapësirë komplekse jo zero me prodhimin e brendshëm  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , si dhe le të jetë  $H \times H$  prodhimi i drejtpërdrejtë i hapësirës vektoriale  $H$  me vetveten.

**Përkufizim 2.3.1. ([43])** *Prodhim tensorial* të vektorëve  $x, y \in H$  e quajmë pasqyrimin bilinear

$$x \otimes y: H \times H \rightarrow \mathbb{C},$$

të dhënë me

$$(x \otimes y)(u, v) = \langle x, u \rangle \langle y, v \rangle$$

për çdo  $(u, v) \in H \times H$ .

Për prodhimin tensorial të përkufizuar si mësipër vlejné vetitë:

1.  $\alpha\beta(x \otimes y) = \alpha x \otimes \beta y = \beta x \otimes \alpha y$ , për çdo  $(x, y) \in H \times H$ .
2.  $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ , për çdo  $x, y, z \in H$ .
3.  $(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$ , për çdo  $x, y, z \in H$ .
4.  $(x + y) \otimes (z + w) = x \otimes z + x \otimes w + y \otimes z + y \otimes w$ , për çdo  $x, y, z, w \in H$ .

Tregohet se shuma e dy prodhimeve tensoriale nuk është domosdo prodhim tensorial, prandaj shënojmë me

$$H \otimes H = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \otimes y_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, (x_i, y_i) \in H \otimes H, n \in \mathbb{N} \right\}$$

bashkësinë e të gjitha kombinimeve të fundme të prodhimeve tensoriale në  $H \times H$ .

Ndërtojmë pasqyrimin:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: (H \otimes H) \times (H \otimes H) \rightarrow \mathbb{C}$$

të dhënë me

$$\left\langle \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \otimes y_i, \sum_{j=0}^n \beta_j z_j \otimes w_j \right\rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \alpha_i \bar{\beta}_j \langle x_i, z_j \rangle \langle y_i, w_j \rangle$$

për çdo

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \otimes y_i, \sum_{j=0}^n \beta_j z_j \otimes w_j, \text{ nga } (H \otimes H).$$

Në veçanti kemi

$$\langle x \otimes y, z \otimes w \rangle = \langle x, z \rangle \langle y, w \rangle$$

për çdo  $x, y, z, w \in H$ , që është prodhimi i brendshëm në  $H \otimes H$ .

Hapësira lineare  $H$  me prodhimin e brendshëm të dhënë mësipërm nuk është domosdo complete, për këtë arsye marrim hapësirën  $H \widehat{\otimes} H$  që është kompletim i hapësirës  $H \otimes H$ , që për arsye praktike po e shënojmë përsëri me  $H \otimes H$ . Po ashtu, pasi që

$$\alpha_i x_i \otimes y_i = x_i \otimes \alpha_i y_i = \alpha_i^{\frac{1}{2}} x_i \otimes \alpha_i^{\frac{1}{2}} y_i,$$

atëherë shpesh në vend të

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \otimes y_i,$$

marrim

$$\sum_{i=0}^n x_i \otimes y_i.$$

**Përkufizim 2.3.2. ([43])** Le të jenë  $T, S \in L(H)$ . *Prodhim tensorial* të operatorëve  $T$  dhe  $S$  në hapësirën me prodhim të brendshëm  $H \otimes H$  e quajmë operatorin

$$T \otimes S: H \otimes H \rightarrow H \otimes H$$

të dhënë me

$$T \otimes S \sum_{i=0}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=0}^n T x_i \otimes S y_i$$

për çdo

$$\sum_{i=0}^n x_i \otimes y_i \in H \otimes H.$$

Pra, kemi:

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = T x \otimes S y,$$

për çdo  $x, y \in H$ .

**Teoremë 2.3.1. ([43])** *Le të jenë  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, T, T_1, T_2, S, S_1, S_2 \in L(H)$ . Atëherë, vlejnë:*

1.  $T \otimes S \in L(H)$  dhe  $\|T \otimes S\| = \|T\|\|S\|$ ,
2.  $\alpha\beta T \otimes S = \alpha T \otimes \beta S$ ,
3.  $T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2$ ,
4.  $(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S$ ,
5.  $(T_1 + T_2) \otimes (S_1 + S_2) = T_1 \otimes S_1 + T_2 \otimes S_1 + T_1 \otimes S_2 + T_2 \otimes S_2$ ,
6.  $(T_1 \otimes S_1)(T_2 \otimes S_2) = T_1 T_2 \otimes S_1 S_2$ ,
7. Nëse  $T$  dhe  $S$  janë operatorë invertibil, atëherë i tillë është edhe operatori  $TS$  dhe vlen  $(T \otimes S)^{-1} = T^{-1} \otimes S^{-1}$ ,
8.  $(T \otimes S)^* = T^* \otimes S^*$ ,
9.  $(T^* \otimes S^*)(T \otimes S) = T^* T \otimes S^* S = |T|^2 \otimes |S|^2$ .
10.  $T \otimes S = (T \otimes I)(I \otimes S) = (I \otimes S)(T \otimes I)$

Është e qartë se vlen

$$I \otimes I = \alpha I \otimes \alpha^{-1} I$$

për çdo skalar  $\alpha \neq 0$ .

Gjithashtu

$$0 \otimes 0 = A \otimes 0 = 0 \otimes A.$$

Pra,  $A \otimes B$ , është operator zero, atëherë dhe vetëm atëherë, kur njëri nga operatorët  $A$  ose  $B$  është operator zero.

Le të jenë dhënë operatorët  $A \in L(\mathbb{C}^n)$  dhe  $B \in L(\mathbb{C}^m)$  dy operatorë me atë të formës matricore  $(n \times n$  dhe  $m \times m)$  si vijon:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mm} \end{pmatrix}.$$

Atëherë produkti  $A \otimes B$  i matricave  $A \in L(\mathbb{C}^n)$  dhe  $B \in L(\mathbb{C}^m)$  ipet me

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \alpha_{11}B & \dots & \alpha_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1}B & \dots & \alpha_{nn}B \end{pmatrix} \text{ në } L(\oplus_{i=1}^n \mathbb{C}^m) = L(\mathbb{C}^{mn}).$$

Në vazhdim shohim se prodhimi tensorial i një operatorit nga M –klasa Q, M –klasa Q\* dhe operatorit identik I është operator nga M –klasa Q, M –klasa Q\*, respektivisht. Ndërsa me shembull do të tregojmë se prodhimi tensorial i dy operatorëve nga M –klasa Q, M –klasa Q\* nuk është medoemos i tillë, respektivisht.

**Pohim 2.3.1. ([61])** *Le të jetë T operator që i takon M –klasës Q, atëherë  $T \otimes I$  si dhe  $I \otimes T$  janë poashtu operatorë nga M –klasa Q.*

**Vërtetim:** Le të jetë T operator nga M –klasa Q atëherë,

$$\begin{aligned} & M^2(T \otimes I)^{*2}(T \otimes I)^2 - 2(T \otimes I)^*(T \otimes I) + I \otimes I \\ &= (M^2T^{*2}T^2 - 2T^*T + I) \otimes I \geq 0. \end{aligned}$$

Pra,  $T \otimes I$  është operator nga M –klasa Q.

Ngjashëm, vërtetohet edhe për rastin  $I \otimes T$ .

■

**Pohim 2.3.2. ([61])** *Le të jetë T operator që i takon M –klasës Q\*, atëherë  $T \otimes I$  si dhe  $I \otimes T$  janë poashtu operatorë nga M –klasa Q\*.*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 2.3.1.

Tani me shembull vërtetojmë se prodhimi tensorial i dy operatorëve nga M –klasa Q, M –klasa Q\* nuk është medoemos operator nga M –klasa Q, M –klasa Q\*, respektivisht.

**Shembull 2.3.1. ([61])** *Le të jetë H hapësirë dy dimensionale e Hilbertit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  dhe le të jenë A dhe B dy operatorë pozitiv në  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Le të jetë n një numër i plotë pozitiv i fiksuar. Po e përkufizojmë operatorin  $T = T_{A,B,n}$  në vijim:*

$$T\langle x_1, x_2, x_3, \dots \rangle = \langle 0, Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n, Bx_{n+1}, Bx_{n+2}, \dots \rangle.$$

Operatori T i takon M –klasës Q, nëse

$$M^2AB^2A - 2A^2 + I \geq 0,$$

Le të jenë operatorët C dhe D operatorë në hapësirën H të përkufizuara me

$$C = \begin{pmatrix} M & M \\ M & 2M \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Atëherë,

$$\langle Cx, x \rangle \geq 0 \text{ dhe } \langle Dx, x \rangle \geq 0, \forall x \in H.$$

Le të jenë operatorët A dhe B të tillë që

$$A = C^{\frac{1}{2}}, \quad B = \left( C^{-\frac{1}{2}} D C^{-\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Atëherë,

$$\begin{aligned} M^2 AB^2 A - 2A^2 + I &= M^2 C^{\frac{1}{2}} \left( C^{-\frac{1}{2}} D C^{-\frac{1}{2}} \right) C^{\frac{1}{2}} - 2 \left( C^{\frac{1}{2}} \right)^2 + I = M^2 D - 2C + I \\ &= M^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} M & M \\ M & 2M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M-1)^2 & 2M(M-1) \\ 2M(M-1) & (2M-1)^2 + 4M^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

që është shprehje pozitive për  $M \geq 1$ , atëherë operatori  $i$  takon  $M$ -klasës  $Q$ .

Tregojmë tani se  $T \otimes T$  nuk i takon  $M$ -klasës  $Q$ .

Që operatori  $T \otimes T$  t'i takon  $M$ -klasës  $Q$  duhet që:

$$\begin{aligned} M^2 (T \otimes T)^{*2} (T \otimes T)^2 - 2(T \otimes T)^* (T \otimes T) + I \otimes I \\ &= M^2 (T^{*2} \otimes T^{*2}) (T^2 \otimes T^2) - 2(T^* \otimes T^*) (T \otimes T) + I \otimes I \\ &= M^2 T^{*2} T^2 \otimes T^{*2} T^2 - 2T^* T \otimes T^* T + I \otimes I \geq 0. \end{aligned}$$

Në rastin tonë duhet që

$$\begin{aligned} M^2 AB^2 A \otimes AB^2 A - 2A^2 \otimes A^2 + I \otimes I \\ &= M^2 D \otimes D - 2C \otimes C + I \otimes I \geq 0. \end{aligned}$$

Atëherë,

$$\begin{aligned} M^2 D \otimes D - 2C \otimes C + I \otimes I \\ &= M^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} M & M \\ M & 2M \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} M & M \\ M & 2M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= M^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 8 & 4 & 16 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 4 & 16 & 16 & 64 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} M^2 & M^2 & M^2 & M^2 \\ M^2 & 2M^2 & M^2 & 2M^2 \\ M^2 & M^2 & 2M^2 & 2M^2 \\ M^2 & 2M^2 & 2M^2 & 4M^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-M^2 & 0 & 0 & 2M^2 \\ 0 & 4M^2+1 & 2M^2 & 12M^2 \\ 0 & 2M^2 & 4M^2+1 & 12M^2 \\ 2M^2 & 12M^2 & 12M^2 & 56M^2+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

që nuk është pozitive, që d.m.th. se operatori  $T \otimes T$  nuk i takon  $M$ -klasës  $Q$ .

Ngjashëm, sikur në rastin për operatorin e M –klasës Q shqyrtojmë tani rastin për operatorin e M –klasës Q\*. Marrim të njëjtin operator T sikurse më parë.

Operatori T i takon takon M –klasa Q\*, nëse

$$M^2 B^4 - 2A^2 + I \geq 0.$$

Mirëpo le të jenë tani, operatorët A dhe B të tillë që

$$A = C^{\frac{1}{2}}, \quad B = D^{\frac{1}{4}},$$

për të njëjtit operatorë C e D të dhënë si më parë.

Atëherë, shohim se

$$\begin{aligned} M^2 B^4 - 2A^2 + I &= M^2 \left( D^{\frac{1}{4}} \right)^4 - 2 \left( C^{\frac{1}{2}} \right)^2 + I = M^2 D - 2C + I \\ &= M^2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} M & M \\ M & 2M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (M-1)^2 & 2M(M-1) \\ 2M(M-1) & (2M-1)^2 + 4M^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

që është pozitive për  $M \geq 1$ , atëherë operatori i takon M –klasës Q\*.

Tregojmë tani se  $T \otimes T$  nuk i takon M –klasës Q\*.

Që operatori  $T \otimes T$  t'i takon M –klasës Q\* duhet që:

$$\begin{aligned} &M^2 (T \otimes T)^{*2} (T \otimes T)^2 - 2(T \otimes T)(T \otimes T)^* + I \otimes I \\ &= M^2 (T^{*2} \otimes T^{*2})(T^2 \otimes T^2) - 2(T \otimes T)(T^* \otimes T^*) + I \otimes I \\ &= M^2 T^{*2} T^2 \otimes T^{*2} T^2 - 2TT^* \otimes TT^* + I \otimes I \geq 0. \end{aligned}$$

Në rastin tonë duhet që

$$M^2 D \otimes D - 2C \otimes C + I \otimes I \geq 0.$$

Atëherë, ngjashëm si më parë vërehet se fitohet një operator jo pozitiv, që d.m.th. se operatori  $T \otimes T$  nuk i takon M –klasës Q\*.

■

## 2.4 TRANSFORMIMI ALUTHGE PËR $M$ –KLASËN $Q$ DHE $M$ –KLASËN $Q^*$ TË OPERATORËVE

Në fillim japim përkufizimin për transformimin Aluthge dhe  $*$  –transformimin Aluthge.

**Përkufizim 2.4.1. ([44])** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator ku dekompozimi polar i tij është  $T = U|T|$ , ku  $|T| = (T^*T)^{1/2}$ . Atëherë operatori

$$\tilde{T} = |T|^{1/2}U|T|^{1/2}$$

quhet *transformimi Aluthge* i operatorit  $T$ .

**Përkufizim 2.4.2. ([45])** Le të jetë  $T = U|T|$  dekompozimi polar i operatorit  $T$ . Atëherë  $*$  –transformimi Aluthge është përkufizuar me

$$\tilde{T}^{(*)} = (\tilde{T}^*)^* = |T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2}.$$

Deri më tani janë shqyrtuar shumë veti të këtyre transformimeve, ndër të tjera vlejné pohimet:

**Teoremë 2.4.1. ([45])** Le të jetë  $T \in L(H)$ . Atëherë vlejné pohimet e mëposhtme:

- i)  $\sigma(\tilde{T}) = \sigma(\tilde{T}^*) = \sigma(T)$ ,
- ii)  $\|\tilde{T}\| = \|\tilde{T}^*\|$ .
- iii)  $U^*|T^*|^{1/2} = |T|^{1/2}U^*$ ,
- iv)  $U^*|T^*| = |T|U^*$
- v)  $U|T|^{1/2} = |T^*|^{1/2}U$ ,
- vi)  $U|T| = |T^*|U$ .

Tani në vijim do të marrim teoremën për ekuivalencën ndërmjet transformimin Aluthge dhe  $*$  –transformin Aluthge për  $M$  –klasën  $Q$  si dhe  $M$  –klasën  $Q^*$  të operatorëve, respektivisht.

**Teoremë 2.4.2. ([48])** Le të jetë  $T \in L(H)$ . Atëherë  $\tilde{T}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $\tilde{T}^{(*)}$  është nga  $M$  –klasa  $Q$  e operatorëve.

**Vërtetim:** Supozojmë se  $\tilde{T}$ , pra transformimi Aluthge është nga  $M$  –klasa  $Q$  e operatorëve atëherë

$$M^2\tilde{T}^{*2}\tilde{T}^2 - 2\tilde{T}^*\tilde{T} + I \geq 0.$$

Duhet vërtetuar se  $\tilde{T}^{(*)}$ , pra se  $*$  –transformin Aluthge është nga  $M$  –klasa  $Q$  e operatorëve, pra se

$$M^2\tilde{T}^{(*)*2}\tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*}\tilde{T}^{(*)} + I \geq 0.$$

Llogarisim

$$\begin{aligned}
 & M^2 \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2 \tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I \\
 &= M^2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^{*2} (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^2 - 2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I \\
 &= M^2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad - 2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I \\
 &= M^2 (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad - 2 (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I \\
 &= U U^* [M^2 |T^*|^{1/2} U^* |T^*| U^* |T^*| U |T^*| U |T^*|^{1/2} - 2 |T^*|^{1/2} U^* |T^*| U |T^*|^{1/2} + I] U U^* \\
 &= U [M^2 U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*| U^* |T^*| U |T^*| U |T^*|^{1/2} U - 2 U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*| U |T^*|^{1/2} U + I] U^* \\
 &= U [M^2 |T|^{1/2} U^* |T| U^* U^* U |T| U |T| U |T|^{1/2} - 2 |T|^{1/2} U^* U^* U |T| U |T|^{1/2} + I] U^* \\
 &= U [M^2 (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) \\
 &\quad - 2 (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) + I] U^* \\
 &= U (M^2 \tilde{T}^{*2} \tilde{T}^2 - 2 \tilde{T}^* \tilde{T} + I) U^* \geq 0.
 \end{aligned}$$

Atëherë,  $\tilde{T}^{(*)}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ .

Anasjelltas, supozojmë se  $\tilde{T}^{(*)}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$  atëherë vlen

$$M^2 \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2 \tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I \geq 0.$$

Duhet vërtetuar se  $\tilde{T}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , pra që vlen

$$M^2 \tilde{T}^{*2} \tilde{T}^2 - 2 \tilde{T}^* \tilde{T} + I \geq 0.$$

Atëherë,

$$\begin{aligned}
 & M^2 \tilde{T}^{*2} \tilde{T}^2 - 2 \tilde{T}^* \tilde{T} + I \\
 &= U^* U [M^2 (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) \\
 &\quad - 2 (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) + I] U^* U \\
 &= U^* [U M^2 |T|^{1/2} U^* |T| U^* |T| U |T| U |T|^{1/2} U^* - 2 U |T|^{1/2} U^* |T| U |T|^{1/2} U^* + I] U \\
 &= U^* [M^2 |T^*|^{1/2} U^* |T^*| U^* U^* U |T^*| U |T^*| U |T^*|^{1/2} - 2 |T^*|^{1/2} U^* U^* U |T^*| U |T^*|^{1/2} + I] U \\
 &= U^* [M^2 (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad - 2 (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I] U \\
 &= U^* [M^2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^{*2} (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^2 - 2 (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad + I] U \\
 &= U^* (M^2 \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2 \tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I) U
 \end{aligned}$$

Meqë,

$$M^2 \tilde{T}^{(*)^2} \tilde{T}^{(*)^2} - 2 \tilde{T}^{(*)^*} \tilde{T}^{(*)} + I \geq 0$$

atëherë kemi se,

$$M^2 \tilde{T}^{*2} \tilde{T}^2 - 2 \tilde{T}^* \tilde{T} + I \geq 0.$$

Pra, operatori  $\tilde{T}$  është nga  $M$  –klasa  $Q$ .

■

**Teoremë 2.4.3. ([48])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  . Atëherë  $\tilde{T}$  është operator nga  $M$  –klasa  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $\tilde{T}^{(*)}$  është nga  $M$  –klasa  $Q^*$  e operatorëve.*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në teoremën 2.4.2.

## Kapitulli 3

# $k$ –KUASI KLASA $Q$ DHE $k$ –KUASI KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE

Në këtë kapitull do të përkufizojmë dy klasa të reja të operatorëve  $k$  –kuasi klasën  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasën  $Q^*$  të operatorëve. Në fakt, këto klasa janë zgjerim i kuasi klasës  $Q$ , si dhe kuasi klasës  $Q^*$ , përkatësisht. Do të shqyrtojmë shumë veti të këtyre dy klasave si dhe lidhshmërinë e tyre me klasat tjera të përkufizuara më herët, veti këto të publikuara në punimet [49], [50], [52].

### 3.1 $k$ –KUASI KLASA $Q$ E OPERATORËVE

Në fillim do të japim përkufizimin e kuasi klasës  $Q$  të operatorëve të përkufizuar nga Devika e Suresh (shih [51]).

**Përkufizim 3.1.1. ([51])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon *kuasi klasës*  $Q$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^2x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^3x\|^2 + \|Tx\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  i takon kuasi klasës  $Q$  nëse plotësohet kushti:

$$T^{*3}T^3 - 2T^{*2}T^2 + T^*T \geq 0.$$

Duke u mbështetur në këtë, kemi përkufizuar  $k$  –kuasi klasën  $Q$  të operatorëve, që në fakt është përgjithësim i kuasi klasës  $Q$ , si dhe kemi vërtetuar disa veti në lidhje me këtë klasë të re të operatorëve, rezultate këto të publikuara në punimet [49], [52].

**Përkufizim 3.1.2. ([49])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  *$k$  –kuasi klasës*  $Q$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^{k+1}x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

Shihet qartë se për  $k = 1$ , operatori  $1$  –kuasi klasë  $Q$  në fakt paraqet operatorin e kuasi klasës  $Q$ .

**Pohim 3.1.1. ([49])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$  të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti:

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k \geq 0,$$

ku  $k$  është një numër natyror.

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$  të operatorëve, atëherë vlen:

$$\|T^{k+1}x\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

$$\langle T^{k+2}x, T^{k+2}x \rangle - 2\langle T^{k+1}x, T^{k+1}x \rangle + \langle T^kx, T^kx \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle T^{*(k+2)}T^{k+2}x, x \rangle - 2\langle T^{*(k+1)}T^{k+1}x, x \rangle + \langle T^{*k}T^kx, x \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^kx, x \rangle \geq 0,$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

Atëherë, ekuacioni i fundit është ekuivalent me

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k \geq 0,$$

çka u deshtë të vërtetohej. ■

Nga përkufizimi i klasës  $Q$ , kuasi klasës  $Q$  dhe ky pohim vërehet se vlen implikacioni:

$$klasa\ Q \subseteq kuasi\ klasën\ Q \subseteq k - kuasi\ klasën\ Q \subseteq (k + 1) - kuasi\ klasën\ Q.$$

Mirëpo e anasjellta e këtij implikacioni nuk vlen gjithmonë, për këtë arsye kemi kërkuar kushte shtesë. Andaj, për këtë qëllim në vazhdim japim pohimin 3.1.2 që jep raportin ndërmjet kësaj klase si dhe klasës  $Q$ .

**Pohim 3.1.2. ([49])** Le të jetë  $T \in L(H)$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$  të operatorëve. Nëse  $T^k$  ka rang të dendur, atëherë operatori  $T$  i takon klasës  $Q$  të operatorëve.

**Vërtetim:** Meqë  $T^k$  është operator me rang të dendur, atëherë  $\overline{T^k(H)} = H$ . Le të jetë  $y \in H$ . Atëherë, ekziston vargu  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  në  $H$  i tillë që  $T^kx_n \rightarrow y, n \rightarrow \infty$ . Meqë operatori  $T$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$ , atëherë:

$$\begin{aligned} \langle T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k x_n, x_n \rangle &\geq 0 \\ \Rightarrow \langle (T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k x_n, T^k x_n \rangle &\geq 0, \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Nga vazhdueshmëria e produktit skalar, kemi se:

$$\langle (T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)y, y \rangle \geq 0, y \in H.$$

Pra, vlen

$$T^{*2}T^2 - 2T^*T + I \geq 0$$

që d.m.th. se  $T$  është operator nga klasa  $Q$ .

■

Mesheri në [53] ka përkufizuar klasën e operatorëve  $k$  –kuasi paranormal. Operatori  $T$  quhet  $k$  –kuasi paranormal nëse:

$$\|T^{k+1}x\|^2 \leq \|T^{k+2}x\| \cdot \|T^k x\|,$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

Për  $k = 1$ , operatori quhet kuasi paranormal.

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  është  $k$  –kuasi paranormal nëse plotësohet kushti:

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda T^*T + \lambda^2)T^k \geq 0, \forall \lambda > 0.$$

Nga kjo si dhe pohimi i mësipërm shohim se çdo operator  $k$  –kuasi paranormal është edhe operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ , mirëpo e anasjellta e kësaj nuk vlen gjithmonë. Pohimi në vijim na jep kushtin që duhet plotësuar një operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  që të jetë operator  $k$  –kuasi paranormal.

**Pohim 3.1.3. ([49])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ , atëherë operatori  $T$  është  $k$  –kuasi paranormal, për çdo  $\lambda > 0$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ , për  $\lambda > 0$ , atëherë:

$$\begin{aligned} &\left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right)^{*k} \left( \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right)^{*2} \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right)^2 - 2 \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right)^* \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right) + I \right) \left(\lambda^{-\frac{1}{2}}T\right)^k \geq 0 \\ \Rightarrow &\lambda^{-\frac{k}{2}} T^{*k} (\lambda^{-2} T^{*2} T^2 - 2\lambda^{-1} T^* T + I) \lambda^{-\frac{k}{2}} T^k \geq 0 \\ \Rightarrow &\frac{1}{\lambda^{k+2}} T^{*k} (T^{*2} T^2 - 2\lambda T^* T + \lambda^2) T^k \geq 0 \\ \Rightarrow &T^{*k} (T^{*2} T^2 - 2\lambda T^* T + \lambda^2) T^k \geq 0, \forall \lambda > 0. \end{aligned}$$

Që tregon se operatori  $T$  është  $k$  –kuasi paranormal.

■

**Pohim 3.1.4. ([49])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$  të operatorëve dhe nëse  $T^2$  është izometri, atëherë edhe  $T$  është operator  $k$  –kuasi paranormal.*

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ , atëherë:

$$\begin{aligned} 2\|T^{k+1}x\|^2 &\leq \|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2 \\ &= (\|T^{k+2}x\| - \|T^kx\|)^2 + 2\|T^{k+2}x\|\|T^kx\|. \end{aligned}$$

Meqë operatori  $T^2$  është izometri, atëherë vlen

$$\|T^2x\| = \|x\|,$$

për çdo  $x \in H$ .

Atëherë, nga këtu kemi se:

$$\begin{aligned} \|T^2x\| &= \|x\| \\ \Rightarrow \|T^4x\| &= \|T^2x\| \\ \Rightarrow \dots \Rightarrow \|T^{k+2}x\| &= \|T^kx\|, \end{aligned}$$

pra,

$$\|T^{k+1}x\|^2 \leq \|T^{k+2}x\|\|T^kx\|, \text{ për çdo } x \in H.$$

Pra,  $T$  është operator  $k$  –kuasi paranormal.

■

Gao dhe Fang (shih [54]) kanë përkufizuar klasën e operatorëve  $k$  –kuasi klasë  $A$ . Operatori  $T$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $A$  nëse:

$$T^{*k}|T^2|T^k \geq T^{*k}|T|^2T^k,$$

ku  $k$  është një numër natyror.

Për  $k = 1$ , operatori quhet kuasi klasë  $A$ .

Në vijim do të japim lidhjen mes klasës së operatorëve të  $k$  –kuasi klasës  $A$  dhe  $k$  –kuasi klasës  $Q$ .

**Pohim 3.1.5. ([49])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  operator nga  $k$  –kuasi klasa  $A$ , për  $k$  një numër natyror atëherë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ .*

**Vërtetim:** Meqë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $A$ , atëherë:

$$T^{*k}|T^2|T^k \geq T^{*k}|T|^2T^k,$$

ku  $k$  është një numër natyror.

Le të jetë  $x \in H$ . Atëherë,

$$\begin{aligned}
 & 2\|T^{k+1}x\|^2 \\
 &= 2\langle T^{k+1}x, T^{k+1}x \rangle \\
 &= 2\langle T^{*(k+1)}T^{k+1}x, x \rangle \\
 &= 2\langle T^{*k}|T|^2T^kx, x \rangle \\
 &\leq 2\langle T^{*k}|T^2|T^kx, x \rangle \\
 &= 2\||T^2|T^kx\| \cdot \|T^kx\| \\
 &= 2\|T^{k+2}x\| \cdot \|T^kx\| \\
 &\leq \|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2.
 \end{aligned}$$

Pra,

$$\|T^{k+1}x\| \leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2),$$

që d.m.th. se  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ .

■

Me shembull do të tregojmë se e anasjellta e këtij pohimi nuk vlen. Pra, jo çdo operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  është edhe operator nga  $k$  –kuasi klasa  $A$ .

**Shembull 3.1.1. ([49])** Le të jetë  $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in L(l_2 \oplus l_2)$ . Atëherë operatori  $T$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q$ , mirëpo nuk i takon  $k$  –kuasi klasës  $A$ .

Pas ca llogaritjeve të thjeshta shohim se:

$$T^* = T^{*2} = \dots = T^{*k} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = T^2 = \dots = T^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|T^2| = (T^{*2}T^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|T^2| = (T^{*2}T^2)^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$|T|^2 = T^*T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pra,

$$T^{*k}|T^2|T^k = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dhe

$$T^{*k}|T|^2T^k = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pra,

$$T^{*k}|T^2|T^k \not\geq T^{*k}|T|^2T^k,$$

atëherë operatori  $T$  nuk i takon  $k$ -kuasi klasës  $A$ .

Në anën tjetër,

$$T^{*2}T^2 - 2T^*T + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si dhe

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pra, operatori  $T$  i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$ .

■

**Pohim 3.1.6. ([49])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$  të operatorëve dhe  $N$  nënhapësirë e mbyllur invariante e operatorit  $T$  atëherë ngushtimi  $T|_N$  është poashtu operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve.

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve dhe le të jetë  $x \in N$ . Atëherë

$$\begin{aligned} \|(T|_N)^{k+1}x\|^2 &= \|T^{k+1}x\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2) \\ &= \frac{1}{2}\left(\|(T|_N)^{k+2}x\|^2 + \|(T|_N)^kx\|^2\right). \end{aligned}$$

që tregon se ngushtimi  $T|_N$  është poashtu nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve.

■

**Pohim 3.1.7. ([49])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$  të operatorëve dhe nëse operatori  $T$  komuton dyfish me operatorin izometrik  $S$ , atëherë operatori  $TS$  poashtu i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$  të operatorëve.

**Vërtetim:** Le të jetë  $A = TS$ .

Dimë se  $TS = ST, S^*T = TS^*, S^*S = I$ .

Atëherë

$$\begin{aligned}
 & A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^k \\
 &= (TS)^{*k}((TS)^{*2}(TS)^2 - 2(TS)^*(TS) + I)(TS)^k \\
 &= (TS)^*(TS)^* \dots (TS)^*((TS)^*(TS)^*(TS)(TS) - 2(TS)^*(TS) + I)(TS)(TS) \dots (TS) \\
 &= S^*T^*S^*T^* \dots S^*T^*(S^*T^*S^*T^*TSTS - 2S^*T^*TS + I)TSTS \dots TS \\
 &= S^{*k}T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^kS^k \geq 0,
 \end{aligned}$$

Prej nga fitohet se  $TS$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve.

■

**Pohim 3.1.8. ([49])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , atëherë operatori  $T$  i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$  të operatorëve.

**Vërtetim:** Nga  $\|T\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ , kemi se  $\|Tx\|^2 \leq \frac{1}{2}, \forall x \in H$ .

Atëherë,

$$\begin{aligned}
 & \langle Tx, Tx \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H \\
 & \Rightarrow \langle (I - 2T^*T)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H \\
 & \Rightarrow I - 2T^*T \geq 0 \\
 & \Rightarrow T^{*2}T^2 - 2T^*T + I \geq 0 \\
 & \Rightarrow T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k \geq 0.
 \end{aligned}$$

Pra, shihet se  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ .

■

**Pohim 3.1.9. ([49])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$  dhe  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$ , atëherë operatori  $S$  është operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$  atëherë ekziston operatori unitar  $U$  i tillë që  $S = U^*TU$ .

Meqë  $T$  është operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$ , atëherë vlen

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k \geq 0.$$

Prej këtu kemi se

$$\begin{aligned} & S^{*k}(S^{*2}S^2 - 2S^*S + I)S^k \\ &= (U^*TU)^{*k}((U^*TU)^{*2}(U^*TU)^2 - 2(U^*TU)^*(U^*TU) + I)(U^*TU)^k \\ &= U^*T^*UU^*T^*U \dots U^*T^*U(U^*T^*UU^*T^*UU^*TUU^*TU - 2U^*T^*UU^*TU + I)U^*TUU^*TU \dots U^*TU \\ &= U^*T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^kU \geq 0. \end{aligned}$$

Pra,  $S$  është operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q$ .

■

**Lemë 3.1.1. ([55])** Për çdo çift të operatorëve  $(A, C)$  vlen

$$\sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(T) \cup \vartheta$$

ku  $\vartheta$  është unioni i vrimave në  $\sigma(T)$ , që janë nënbashkësi të  $\sigma(A) \cap \sigma(C)$ .

**Pohim 3.1.10. ([49])** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ . Nëse rangi i operatorit  $T^k$  nuk është i dendur dhe

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ në } H = \overline{R(T^k)} \oplus N(T^{*k}).$$

Atëherë,  $A$  është operator nga klasa  $Q$  në  $\overline{R(T^k)}$ ,  $C^k = 0$  dhe  $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$ .

**Vërtetim:** Supozojmë se  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ . Meqë  $T^k$  nuk e ka rangun e dendur atëherë operatori  $T$  mund të paraqitet në formën matricore:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ në } H = \overline{R(T^k)} \oplus N(T^{*k}).$$

Meqë  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  kemi:

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k \geq 0.$$

Atëherë,

$$\langle (T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)x, x \rangle = \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in \overline{R(T^k)}.$$

Prandaj,

$$A^{*2}A^2 - 2A^*A + I \geq 0.$$

Pra, operatori  $A$  i takon klasës  $Q$  në  $\overline{R(T^k)}$ .

Tregojmë tani se  $C^k = 0$ .

Le të jetë  $P$  projekcioni ortogonal i  $H$  në  $\overline{R(T^k)}$ .

Për ndonjë  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H = \overline{R(T^k)} \oplus N(T^{*k})$ ,

kemi

$$\begin{aligned} \langle C^k x_2, x_2 \rangle &= \langle T^k(I - P)x, (I - P)x \rangle \\ &= \langle (I - P)x, T^{*k}(I - P)x \rangle = 0. \end{aligned}$$

Atëherë

$$T^{*k} = 0$$

rrjedhimisht

$$C^k = 0.$$

Tregojmë tani se  $C^k = 0$ .

Meqë,

$$\sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(T) \cup \vartheta,$$

ku  $\vartheta$  është unioni i vrimave në  $\sigma(T)$ , që janë nënbashkësi të  $\sigma(A) \cap \sigma(C)$  nga lema 3.1.1.

Meqë,  $\sigma(A) \cap \sigma(C)$  nuk ka pika të brendshme, atëherë

$$\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(A) \cup \{0\}.$$

■

**Pohim 3.1.11.** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator regular nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  atëherë për spektrin aproksimativ të tij vlen:

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  një operator regular nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ , atëherë për çdo vektor njësi  $x$  nga hapësira e Hilbertit  $H$  kemi:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|(T^{k+1})^{-1} \cdot (T^{k+1})x\|^2 \\ &\leq \|(T^{k+1})^{-1}\|^2 \cdot \|T^{k+1}x\|^2 \\ &\leq \|(T^{k+1})^{-1}\|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2) \end{aligned}$$

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \|(T^{k+1})^{-1}\|^2 \cdot (\|T^{k+1}\|^2 \|Tx\|^2 + \|T^{k-1}\|^2 \|Tx\|^2)$$

Pra,

$$2 \leq \|Tx\|^2 \cdot \|(T^{k+1})^{-1}\|^2 \cdot (\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2)$$

respektivisht, fitohet jobarazimi:

$$\|Tx\| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}}$$

Tani supozojmë se  $\lambda \in \sigma_{ap}$ , atëherë ekziston vargu  $(x_n)$ ,  $\|x_n\| = 1$ ,  $\|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ , nga jobarazimi i fundit kemi:

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \geq \|Tx_n\| - |\lambda| \cdot \|x_n\| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} - |\lambda|$$

Tani në jobarazimin e fundit të fituar, kur  $n \rightarrow \infty$ , fitohet:

$$|\lambda| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}}$$

Pra, kemi:

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}$$

gjë që u deshtë edhe të vërtetohej. ■

**Pohimi 3.1.12.** *Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator regular  $k$ -kuasi paranormal atëherë për spektrin aproksimativ të tij vlen:*

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{\|T^{-k-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\| \cdot \|T^{k-1}\|}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.11.

**Teoremë 3.1.1. ([52])** *Le të jetë  $T$  një operator invertibil dhe  $N$  një operator i tillë që  $N$  komuton me operatorin  $T^*T$ . Atëherë operatori  $N$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $TNT^{-1}$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ .*

**Vërtetim:** Le të jetë  $N$  një operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ .

Atëherë,

$$N^{*k}(N^{*2}N^2 - 2N^*N + I)N^k \geq 0.$$

Prej nga kemi se:

$$TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^* \geq 0.$$

Konsiderojmë,

$$\begin{aligned} & TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*[TT^*] \\ &= TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k[T^*T]T^* \\ &= T[TT^*]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^* \\ &= [TT^*]TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^* \end{aligned}$$

Pra, vërejmë se operatori  $TT^*$  komuton me operatorin  $TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*$ .

Atëherë edhe operatori  $[TT^*]^{-1}$  gjithashtu komuton me  $TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*$

Duke pasur parasysh faktin se nëse dy operatorë janë pozitiv dhe nëse janë operatorë komutativ atëherë edhe produkti i tyre është operator pozitiv, atëherë konkludojmë se produkti i operatorëve  $[TT^*]^{-1}$  dhe  $TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*$  është pozitiv, pra:

$$TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*[TT^*]^{-1} \geq 0 \dots \dots \dots (*)$$

Meqë operatori  $N$  komuton me  $T^*T$  kemi,

$$\begin{aligned} (1) \dots (TNT^{-1})^{*k} &= (TNT^{-1})^*(TNT^{-1})^* \dots (TNT^{-1})^* \\ &= T^{*-1}N^*T^*T^{*-1}N^*T^* \dots T^{*-1}N^*T^* = \dots = T^{*-1}N^{*k}T^* \\ (2) \dots (TNT^{-1})^k &= TNT^{-1}TNT^{-1}TNT^{-1} \dots TNT^{-1} = TN^kT^{-1} \\ (3) \dots (TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 &= (TNT^{-1})^*(TNT^{-1})^*(TNT^{-1})(TNT^{-1}) \\ &= TN^{*2}N^2T^{-1} \end{aligned}$$

dhe

$$(4) \dots (TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) = TN^*NT^{-1}.$$

Për të vërtetuar se  $TNT^{-1}$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ , ekuacionet (1), (2), (3) e (4) i zëvendësojmë në shprehjen në vijim:

$$(TNT^{-1})^{*k}[(TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 - 2(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) + I](TNT^{-1})^k$$

dhe kemi:

$$\begin{aligned} & (TNT^{-1})^{*k}[(TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 - 2(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) + I](TNT^{-1})^k \\ &= T^{*-1}N^{*k}T^*[TN^{*2}N^2T^{-1} - 2TN^*NT^{-1} + I]TN^kT^{-1} \\ &= T^{*-1}N^{*k}T^*T[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]T^{-1}TN^kT^{-1} \\ &= T^{*-1}N^{*k}T^*T[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1} \\ &= T^{*-1}N^{*k}T^*T[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1} \\ &= TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1}. \end{aligned}$$

Pra, tani duhet vërtetuar se shprehja e fundit është pozitive. Nga jobarazimi (\*) i fituar gjejmë se:

$$\begin{aligned} TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*[TT^*]^{-1} &\geq 0 \\ \Rightarrow TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^*T^{*-1}T^{-1} &\geq 0 \\ \Rightarrow TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1} &\geq 0 \end{aligned}$$

Pra, operatori  $TNT^{-1}$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ .

Anasjelltas, le të jetë  $TNT^{-1}$  një operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ . Atëherë, vlen:

$$(TNT^{-1})^{*k}[(TNT^{-1})^{*2}(TNT^{-1})^2 - 2(TNT^{-1})^*(TNT^{-1}) + I](TNT^{-1})^k \geq 0$$

Atëherë, ngjashëm si më parë, pas zëvendësimit të ekuacioneve (1), (2), (3) e (4) kemi:

$$\begin{aligned} TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1} &\geq 0 \\ \Rightarrow T^*TN^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^kT^{-1}T &\geq 0 \\ \Rightarrow [T^*T]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k &\geq 0. \end{aligned}$$

Tani meqë operatori  $[T^*T]$  komuton me  $N$  atëherë ai komuton edhe me operatorin  $[T^*T]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k$ .

Atëherë edhe operatori  $[T^*T]^{-1}$  komuton me  $[T^*T]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k$ .

Meqë, operatorët  $[T^*T]^{-1}$  dhe  $[T^*T]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k$  janë pozitiv dhe komutojnë në mes veti atëherë edhe produkti i tyre është operator pozitiv dhe kemi:

$$[T^*T]^{-1}[T^*T]N^{*k}[N^{*2}N^2 - 2N^*N + I]N^k \geq 0$$

Kështu fitohet

$$N^{*k}(N^{*2}N^2 - 2N^*N + I)N^k \geq 0,$$

pra,  $N$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ . ■

**Teoremë 3.1.2. ([52])** Le të jetë  $T \in L(H)$ . Atëherë  $\widetilde{T}$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $\widetilde{T}^{(*)}$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve.

**Vërtetim:** Supozojmë se  $\widetilde{T}$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve atëherë

$$\widetilde{T}^{*k}(\widetilde{T}^{*2}\widetilde{T}^2 - 2\widetilde{T}^*\widetilde{T} + I)\widetilde{T}^k \geq 0.$$

Duhet vërtetuar se  $\widetilde{T}^{(*)}$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve, pra se vlen:

$$\widetilde{T}^{(*)*k}(\widetilde{T}^{(*)*2}\widetilde{T}^{(*)2} - 2\widetilde{T}^{(*)*}\widetilde{T}^{(*)} + I)\widetilde{T}^{(*)k} \geq 0.$$

Atëherë gjejmë:

$$\begin{aligned}
 & \tilde{T}^{(*)*k} \left( \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I \right) \tilde{T}^{(*)^k} \\
 &= (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^{*k} \left[ (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^{*2} (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^2 \right. \\
 &\quad \left. - 2(|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I \right] (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^k \\
 &= (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* \dots (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* \\
 &\quad [(|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad - 2(|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I] \\
 &\quad (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \dots (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &= (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) \dots (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad [(|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad - 2(|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) + I] \\
 &\quad (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \dots (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2}) \\
 &= U U^* (|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} \dots U^* |T^*|^{1/2}) \\
 &\quad U U^* [|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} - 2|T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} + I] \\
 &\quad U U^* (|T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} \dots U |T^*|^{1/2}) U U^* \\
 &= U (U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} \dots U^* |T^*|^{1/2} U) \\
 &\quad [U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} U - 2U^* |T^*|^{1/2} U^* |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} U + I] \\
 &\quad (U^* |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} U |T^*|^{1/2} \dots U |T^*|^{1/2} U) U^* \\
 &= U (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2} U^* |T|^{1/2} \dots U^* |T|^{1/2}) [ [|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2} U^* |T|^{1/2} U |T|^{1/2} - 2|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2} U |T|^{1/2} \\
 &\quad + I] (|T|^{1/2} U |T|^{1/2} \dots U |T|^{1/2}) U^* \\
 &= U (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) \dots (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) \\
 &\quad [(|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) \\
 &\quad - 2(|T|^{1/2} U^* |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) + I] \\
 &\quad (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) \dots (|T|^{1/2} U |T|^{1/2}) U^* \\
 &= U (\tilde{T}^{*k} (\tilde{T}^{*2} \tilde{T}^2 - 2\tilde{T}^* \tilde{T} + I) \tilde{T}^k) U^* \geq 0.
 \end{aligned}$$

Pra, vlen

$$\tilde{T}^{(*)*k} \left( \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I \right) \tilde{T}^{(*)^k} \geq 0$$

që d.m.th. se  $\tilde{T}^{(*)}$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ .

Anasjelltas, supozojmë se  $\tilde{T}^{(*)}$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ , atëherë,

$$\tilde{T}^{(*)*k} \left( \tilde{T}^{(*)*2} \tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*} \tilde{T}^{(*)} + I \right) \tilde{T}^{(*)^k} \geq 0.$$

Duhet vërtetuar se  $\tilde{T}$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ , pra se vlen:

$$\tilde{T}^{*k}(\tilde{T}^{*2}\tilde{T}^2 - 2\tilde{T}^*\tilde{T} + I)\tilde{T}^k \geq 0.$$

Andaj, gjejmë:

$$\begin{aligned} & \tilde{T}^{*k}(\tilde{T}^{*2}\tilde{T}^2 - 2\tilde{T}^*\tilde{T} + I)\tilde{T}^k \\ &= U^*U(|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2}) \dots (|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2}) U^*U \\ & [ (|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U|T|^{1/2}) - \\ & 2(|T|^{1/2}U^*|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U|T|^{1/2}) + I ] U^*U \\ & (|T|^{1/2}U|T|^{1/2})(|T|^{1/2}U|T|^{1/2}) \dots (|T|^{1/2}U|T|^{1/2}) U^*U \\ &= U^*(U|T|^{1/2}U^*|T|U^*|T| \dots U^*|T|^{1/2}U^*) [U|T|^{1/2}U^*|T|U^*|T|U|T|U|T|^{1/2}U^* \\ & - 2U|T|^{1/2}U^*|T|U|T|^{1/2}U^* + I] (U|T|^{1/2}U|T|U|T| \dots U|T|^{1/2}U^*)U \\ &= U^*(|T^*|^{1/2}U^*|T^*|U^*|T^*| \dots U^*|T^*|^{1/2}) [ |T^*|^{1/2}U^*|T^*|U^*|T^*|U|T^*|U|T^*|^{1/2} \\ & - 2|T^*|^{1/2}U^*|T^*|U|T^*|^{1/2} + I ] (|T^*|^{1/2}U|T^*|U|T^*| \dots U|T^*|^{1/2})U \\ &= U^*(|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2}) \dots (|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2}) \\ & [ (|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2}) \\ & - 2(|T^*|^{1/2}U^*|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2}) + I ] \\ & (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2}) \dots (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})U \\ &= U^*(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})^{*k} ( (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})^{*2} (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})^2 \\ & - 2(|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})^* (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2}) + I ) (|T^*|^{1/2}U|T^*|^{1/2})^k U \\ &= U^*\tilde{T}^{(*)*k} \left( \tilde{T}^{(*)*2}\tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*}\tilde{T}^{(*)} + I \right) \tilde{T}^{(*)k}U \end{aligned}$$

$$\text{Meqë, } \tilde{T}^{(*)*k} \left( \tilde{T}^{(*)*2}\tilde{T}^{(*)2} - 2\tilde{T}^{(*)*}\tilde{T}^{(*)} + I \right) \tilde{T}^{(*)k} \geq 0.$$

Atëherë,

$$\tilde{T}^{*k}(\tilde{T}^{*2}\tilde{T}^2 - 2\tilde{T}^*\tilde{T} + I)\tilde{T}^k \geq 0$$

Pra,  $\tilde{T}$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ .

■

**Pohim 3.1.13. ([52])** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator i përkufizur si vijon

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nëse  $A$  është operator nga klasa  $Q$ , atëherë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ .

**Vërtetim:** Pas disa kalkulimeve kemi:

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{*(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{*(k+2)} & 0 \\ B^* A^{*(k+1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{(k+2)} & A^{(k+1)}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{*(k+2)}T^{(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{*(k+2)}A^{(k+2)} & A^{*(k+2)}A^{(k+1)}B \\ B^*A^{*(k+1)}A^{(k+2)} & B^*A^{*(k+1)}A^{(k+1)}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k &= T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*(k+1)}T^{(k+1)} + T^{*k}T^k \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^k & A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}B \\ B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^k & B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le të jetë  $u = x \oplus y \in H \oplus H$ . Atëherë,

$$\begin{aligned} &\langle (T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*(k+1)}T^{(k+1)} + T^{*k}T^k)u, u \rangle \\ &= \langle A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^kx, x \rangle + \langle A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}By, x \rangle \\ &+ \langle B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^kx, y \rangle + \langle B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}By, y \rangle \\ &= \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^kx, A^kx \rangle + \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}By, A^kx \rangle \\ &+ \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^kx, A^{(k-1)}By \rangle + \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)A^{(k-1)}By, A^{(k-1)}By \rangle \\ &= \langle (A^{*2}A^2 - 2A^*A + I)(A^kx + A^{(k-1)}By), (A^kx + A^{(k-1)}By) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

Meqë,  $A$  është operator nga klasa  $Q$  atëherë,

$$A^{*2}A^2 - 2A^*A + I \geq 0,$$

pra,

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k = T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*(k+1)}T^{(k+1)} + T^{*k}T^k \geq 0$$

që d.m.th. se  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$ . ■

**Pohim 3.1.14. ([52])** Operatori i zhvendosjes së njëanshme me peshë  $T$  me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q$  e operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse:

$$|\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k}|^2 + 1 \geq 0,$$

për çdo  $n$ .

**Vërtetim.** Meqë  $T$  është operator i zhvendosjes me peshë, atëherë i tillë është edhe operator  $T^*$  dhe kemi:

$$T(e_n) = \alpha_n e_{n+1},$$

$$T^* e_n = \overline{\alpha_{n-1}} e_{n-1},$$

$$(T^* T)(e_n) = |\alpha_n|^2 e_n,$$

$$(T^{*2} T^2)(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 e_n,$$

$$(T^{*k} T^k)(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^2 e_n,$$

$$(T^{*(k+1)} T^{k+1})(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k}|^2 e_n,$$

$$(T^{*(k+2)} T^{k+2})(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k+1}|^2 e_n.$$

Meqë  $T$  është nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  atëherë

$$T^{*k} (T^{*2} T^2 - 2T^* T + I) T^k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T^{*(k+2)} T^{k+2} - 2T^{*(k+1)} T^{k+1} + T^{*k} T^k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k}|^2 + |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^2 (|\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k}|^2 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k}|^2 + 1 \geq 0.$$

■

Në vazhdim do të marrim një shembull i cili tregon se ekziston operatori nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  i cili është edhe operator kuasinilpotent mirëpo nuk është operator  $k$  –kuasi paranormal.

**Shembull 3.1.2. ([52])** Konsiderojmë operatorin  $T: l^2 \rightarrow l^2$  të përkufizuar me

$$T(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots) \text{ ku } \alpha_n = \frac{n}{2^n}, \text{ për } n \geq 1.$$

Atëherë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$  si dhe operator kuasinilpotent mirëpo për  $n \geq 2$  nuk është operator  $k$  –kuasi paranormal.

$$\text{Nga } T(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots),$$

kemi:

$$T^*(x) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \alpha_3 x_4, \dots),$$

$$T^2(x) = (0, 0, \alpha_1 \alpha_2 x_1, \alpha_2 \alpha_3 x_2, \alpha_3 \alpha_4 x_3, \dots),$$

$$T^k(x) = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-\text{herë}}, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k x_1, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{k+1} x_2, \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{k+2} x_3, \dots \right),$$

$$T^* T^k(x) = \left( \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(k-1)-\text{herë}}, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k^2 x_1, \alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{k+1}^2 x_2, \alpha_3 \alpha_4 \dots \alpha_{k+2}^2 x_3, \dots \right),$$

$$T^{*k} T^k(x) = (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 x_3, \dots),$$

$$T^{*k} T^{k+1}(x) = (0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1} x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2} x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3} x_3, \dots),$$

$$T^{*(k+1)} T^{k+1}(x) = (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k+1}^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+2}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+3}^2 x_3, \dots),$$

$$T^{*(k+1)} T^{k+2}(x) = (0, \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2} x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3} x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+3}^2 \alpha_{k+4} x_3, \dots),$$

$$T^{*(k+2)} T^{k+2}(x) = (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k+2}^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+3}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+4}^2 x_3, \dots).$$

Atëherë,

$$\begin{aligned} \langle T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k x, x \rangle &= \langle (T^{*(k+2)}T^{k+2} - 2T^{*(k+1)}T^{k+1} + T^{*k}T^k)x, x \rangle \\ &= \langle (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 \alpha_{k+4}^2 x_3, \dots) \\ &\quad - 2(\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 x_3, \dots) \\ &\quad + (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 x_1, \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 x_2, \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 x_3, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots) \rangle \\ &= \langle (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 - 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2) x_1, x_1 \rangle \\ &\quad + \langle (\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 - 2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2) x_2, x_2 \rangle \\ &\quad + \langle (\alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 \alpha_{k+4}^2 - 2\alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 + \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2) x_3, x_3 \rangle + \dots \\ &= (\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 - 2\alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 + \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_k^2) \|x_1\|^2 \\ &\quad + (\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 - 2\alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_{k+1}^2) \|x_2\|^2 \\ &\quad + (\alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 \alpha_{k+4}^2 - 2\alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 + \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+2}^2) \|x_3\|^2 + \dots \\ &= \alpha_1^2 \alpha_2^2 \dots \alpha_{k-1}^2 \alpha_k^2 (\alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 - 2\alpha_{k+1}^2 + 1) \|x_1\|^2 \\ &\quad + \alpha_2^2 \alpha_3^2 \dots \alpha_k^2 \alpha_{k+1}^2 (\alpha_{k+2}^2 \alpha_{k+3}^2 - 2\alpha_{k+2}^2 + 1) \|x_2\|^2 \\ &\quad + \alpha_3^2 \alpha_4^2 \dots \alpha_{k+1}^2 \alpha_{k+2}^2 (\alpha_{k+3}^2 \alpha_{k+4}^2 - 2\alpha_{k+3}^2 + 1) \|x_3\|^2 + \dots \geq 0. \end{aligned}$$

Meqë,

$$\alpha_{n+k}^2 \alpha_{n+k+1}^2 - 2\alpha_{n+k}^2 + 1 = \left( \frac{n+k}{2(n+k)} \right)^2 \left( \frac{n+k+1}{2(n+k+1)} \right)^2 - 2 \left( \frac{n+k}{2(n+k)} \right)^2 + 1 \geq 0,$$

$$k \geq 1, n \geq 1.$$

Atëherë,  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q$ .

Nga,

$$T(e_k) = \frac{k}{2^k} e_{k+1}$$

kemi

$$T^2(e_k) = \frac{k}{2^k} \cdot \frac{k+1}{2^{k+1}} e_{k+2}, \dots,$$

$$T^n(e_k) = \frac{k}{2^k} \cdot \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{k+n-1}{2^{k+n-1}} e_{k+n}$$

Meqë,

$$\|T^n\| = \sup \left\| \frac{k}{2^k} \cdot \frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{k+n-1}{2^{k+n-1}} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{n}{2^n},$$

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{2^{\frac{n+1}{2}}}$$

$$< \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2}\right)^n}}{2^{\frac{n+1}{2}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n+1}{2}}{2^{\frac{n+1}{2}}} = 0.$$

Pra, operatori  $T$  është kuasinilpotent.

Është vërtetuar se operatori  $T$  që të jetë operator  $k$  –kuasi paranormal, duhet plotësuar kushti që

$$|\alpha_{n+k}| \leq |\alpha_{n+k+1}|.$$

Andaj në këtë rast vërehet se ky kusht nuk plotësohet për  $n \geq 2$ , meqë vargu  $\alpha_n = \frac{n}{2^n}$  është varg monotono zvogëlues për  $n \geq 2$ .

■

### 3.2 $k$ –KUASI KLASA $Q^*$ E OPERATORËVE

Në fillim do të japim përkufizimin e kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve (shih [56]).

**Përkufizim 3.2.1. ([56])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^*Tx\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^3x\|^2 + \|Tx\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ .

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  i takon kuasi klasës  $Q^*$  nëse plotësohet kushti:

$$T^*T^3 - 2(T^*T)^2 + T^*T \geq 0.$$

Duke u mbështetur në këtë kemi përkufizuar  $k$  –kuasi klasën  $Q^*$  të operatorëve, që në fakt është përgjithësim i kuasi klasës  $Q^*$ , si dhe kemi vërtetuar disa veti në lidhje me këtë klasë të re të operatorëve, rezultate këto të publikuara në punimet [50] dhe [63].

**Përkufizim 3.2.2. ([50])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve nëse plotësohet kushti:

$$\|T^*T^kx\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2),$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

Shihet qartë se për  $k = 1$ , operatori 1 –kuasi klasë  $Q^*$  në fakt paraqet operatorin e kuasi klasës  $Q^*$ .

**Pohim 3.2.1. ([50])** Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$ , të operatorëve atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti:

$$T^*k(T^*T^2 - 2TT^* + I)T^k \geq 0,$$

ku  $k$  është një numër natyror.

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$ , të operatorëve, atëherë vlen:

$$2\|T^*T^kx\|^2 \leq \|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2,$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

$$\langle T^{k+2}x, T^{k+2}x \rangle - 2\langle T^*T^kx, T^*T^kx \rangle + \langle T^kx, T^kx \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle T^{*(k+2)}T^{k+2}x, x \rangle - 2\langle (T^*T^k)^*T^*T^kx, x \rangle + \langle T^{*k}T^kx, x \rangle \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle T^{*(k+2)}T^{k+2}x, x \rangle - 2\langle T^{*k}TT^*T^kx, x \rangle + \langle T^{*k}T^kx, x \rangle \geq 0$$

për çdo vektor  $x \in H$ , ku  $k$  është një numër natyror.

Atëherë, ekuacioni i fundit është ekuivalent me

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T^k \geq 0,$$

çka u deshtë të vërtetohej. ■

Nga përkufizimi i klasës  $Q^*$ , kuasi klasës  $Q^*$  dhe ky pohim vërehet se vlen implikacioni:

$$\text{klasa } Q^* \subseteq \text{kuasi klasën } Q^* \subseteq k - \text{kuasi klasën } Q^* \subseteq (k+1) - \text{kuasi klasën } Q^*.$$

E qartë se e anasjellta e këtij implikacioni nuk vlen gjithmonë, për këtë arsye kemi kërkuar kushte shtesë. Në vazhdim së pari do të japim rrjedhimin 3.2.1 e më pas japim një shembull që tregon se ekziston operatori që është 2 –kuasi klasë  $Q^*$  e i cili nuk është 1 –kuasi klasë  $Q^*$ . E më pas do të japim pohimin 3.2.2 që jep raportin ndërmjet kësaj klase si dhe klasës  $Q^*$ .

**Rrjedhim 3.2.1. ([50])** *Operatori i zhvendosjes së njëanshme me peshë  $T$  me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti*

$$|\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k-1}|^2 + 1 \geq 0,$$

për çdo  $n$ .

**Vërtetim:** Meqë operatori  $T$  është operator i zhvendosjes me peshë atëherë i tillë është edhe operatori i adjuguari i tij  $T^*$  atëherë kemi:

$$T(e_n) = \alpha_n e_{n+1},$$

$$T^* e_n = \overline{\alpha_{n-1}} e_{n-1},$$

$$TT^* e_n = |\alpha_{n-1}|^2 e_n,$$

$$(T^{*2}T^2)e_n = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 e_n,$$

$$(T^{*k}T^k)(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^2 e_n,$$

$$(T^{*k}TT^*T^k)(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^4 e_n,$$

$$(T^{*(k+2)}T^{k+2})(e_n) = |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k+1}|^2 e_n$$

Meqë,  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ , atëherë pas disa kalkulimeve të thjeshta kemi se:

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T^k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow T^{*(k+2)}T^{k+2} - 2T^{*k}TT^*T^k + T^{*k}T^k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \langle T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T^k x, x \rangle \geq 0,$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^4 + |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k-1}|^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_n|^2 |\alpha_{n+1}|^2 \dots |\alpha_{n+k+1}|^2 (|\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k-1}|^2 - 2|\alpha_{n+k-1}|^2 + 1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k-1}|^2 + 1 \geq 0.$$

■

**Shembull 3.2.1. ([50])** Konsiderojmë operatorin  $T$  në  $l_2$  të përkufizuar me

$$T(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots), \text{ ku, } \alpha_1 = 2, \alpha_n = 1, n \geq 2.$$

Atëherë operatori  $T$  është 2 –kuasi klasë  $Q^*$  e nuk është 1 –kuasi klasë  $Q^*$ .

Kemi:

$$T(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots),$$

$$T^*(x) = (\alpha_1 x_2, \alpha_2 x_3, \alpha_3 x_4, \dots).$$

Tani nga pohimi 3.2.1 dhe rrjedhimi 3.2.1, për 2 –kuasi klasë  $Q^*$  fitohet:

$$\begin{aligned} & \langle T^{*2}(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T^2x, x \rangle \\ &= \alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_3^2 \alpha_4^2 - 2\alpha_2^2 + 1) \|x_1\|^2 + \alpha_2^2 \alpha_3^2 (\alpha_4^2 \alpha_5^2 - 2\alpha_3^2 + 1) \|x_2\|^2 + \dots = 0. \end{aligned}$$

Ndërsa për 1 –kuasi klasë  $Q^*$  kemi:

$$\begin{aligned} & \langle T^*(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)Tx, x \rangle \\ &= \alpha_1^2 (\alpha_2^2 \alpha_3^2 - 2\alpha_1^2 + 1) \|x_1\|^2 + \alpha_2^2 (\alpha_3^2 \alpha_4^2 - 2\alpha_2^2 + 1) \|x_2\|^2 + \dots < 0. \end{aligned}$$

■

**Pohim 3.2.2. ([50])** Le të jetë  $T \in L(H)$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve. Nëse  $T^k$  ka rang të dendur, atëherë operatori  $T$  i takon klasës  $Q^*$  të operatorëve.

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.2.

Në vazhdim do të japim lidhshmërinë ndërmjet  $k$  –kuasi klasë  $Q^*$  dhe klasës së operatorëve  $k$  –kuasi – \* –paranormalë.

Operatori  $T$  është  $k$  –kuasi– \* –paranormal nëse plotësohet kushti

$$\|T^*T^kx\|^2 \leq \|T^{k+2}x\| \|T^kx\|,$$

për çdo  $x \in H$ , ku  $k$  është numër natyror, (shih [57]).

Është treguar se operatori  $T \in L(H)$  i cili është operator i zhvendosjes së njëanshme me peshë, me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  është operator  $k$  –kuasi – \* –paranormal atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$|\alpha_{n+k}| \cdot |\alpha_{n+k+1}| \geq |\alpha_{n+k-1}|^2,$$

për çdo  $n$  (shih [62]).

Është vërtetuar se operatori  $T \in L(H)$  është  $k$ -kuasi  $-*$ -paranormal atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k \geq 0, \text{ për çdo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Për  $k = 1$ , operatori quhet kuasi- $*$ -paranormal.

Nga kjo kemi se çdo operator që është  $k$ -kuasi  $-*$ -paranormal është edhe operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q^*$ . Mirëpo, e anasjellta nuk vlen gjithmonë. Për të treguar se këto dy klasa janë të ndryshme dhe lidhshmërinë mes tyre, kemi dhënë pohimet 3.2.3 dhe 3.2.4, si dhe kemi dhënë shembullin 3.2.2.

**Pohim 3.2.3. ([50])** *Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\lambda^{-\frac{1}{2}}T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q^*$ , atëherë operatori  $T$  është  $k$ -kuasi- $*$ -paranormal, për çdo  $\lambda > 0$ .*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.3.

**Pohim 3.2.4. ([50])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  operator që i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q^*$ , të operatorëve dhe nëse  $T^2$  është izometri, atëherë edhe  $T$  është operator  $k$ -kuasi- $*$ -paranormal.*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.4.

**Shembulli 3.2.2. ([63])** *Le të jetë  $T_x$  një operator i zhvendosjes së njëanshme me peshë, me vargun e peshave jozero të dhëne si më poshtë:*

$$\alpha_0 = x, \alpha_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \alpha_2 = \sqrt{\frac{3}{4}}, \dots, \alpha_n = \sqrt{\frac{n+1}{n+2}}, \dots, \alpha_{n+k} = \sqrt{\frac{n+k+1}{n+k+2}}, \dots, n \geq 1, k \geq 1.$$

Atëherë vlejné rezultatet e mëposhtme:

1. Nga rrjedhimi 3.2.1, operatori  $T_x$  i takon  $k$ -kuasi klasës  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$|\alpha_{n+k}|^2 |\alpha_{n+k+1}|^2 - 2|\alpha_{n+k-1}|^2 + 1 \geq 0$$

Pas disa llogaritjeve vërejmë se kjo është e saktë atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$0 < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2. Operatori  $T_x$  është  $k$ -kuasi  $-*$ -paranormal atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$|\alpha_{n+k}| \cdot |\alpha_{n+k+1}| \geq |\alpha_{n+k-1}|^2$$

Pas disa llogaritjeve vërejmë se kjo është e saktë atëherë dhe vetëm atëherë nëse

$$0 < x \leq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

3. Në fund vërejmë se për

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}} < x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

operatori  $T_x$  është nga  $k$ -kuasi klasa  $Q^*$  mirëpo nuk është operator  $k$ -kuasi- $*$ - $\text{paranormal}$ .

Në vazhdim do të japim raportin ndërmjet  $k$ -kuasi klasës  $Q^*$  dhe  $k$ -kuasi- $*$ -klasës  $A$  të operatorëve.

Mesheri në [58] ka përkufizuar klasën e operatorëve  $k$ -kuasi- $*$ -klasë  $A$ . Operatori  $T \in L(H)$  i takon  $k$ -kuasi- $*$ -klasës  $A$ , nëse plotëson kushtin

$$T^{*k}|T^2|T^k \geq T^{*k}|T^*|^2T^k,$$

ku  $k$  është numër natyror.

Qartë për  $k = 1$ , operatori quhet kuasi- $*$ -klasë  $A$  (shih [59]).

**Pohim 3.2.5. ([50])** Le të jetë  $T \in L(H)$  operator nga  $k$ -kuasi- $*$ -klasë  $A$ , për  $k$  një numër natyror atëherë  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q^*$ .

**Vërtetim:** Meqë  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi- $*$ -klasë  $A$ , atëherë:

$$T^{*k}|T^2|T^k \geq T^{*k}|T^*|^2T^k,$$

ku  $k$  është një numër natyror.

Le të jetë  $x \in H$ . Atëherë,

$$\begin{aligned} & 2\|T^*T^kx\|^2 \\ &= 2\langle T^*T^kx, T^*T^kx \rangle \\ &= 2\langle T^{*k}TT^*T^kx, x \rangle \\ &= 2\langle T^{*k}|T^*|^2T^kx, x \rangle \\ &\leq 2\langle T^{*k}|T^2|T^kx, x \rangle \\ &= 2\langle |T^2|T^kx, T^kx \rangle \\ &\leq 2\||T^2|T^kx\| \cdot \|T^kx\| \\ &= 2\|T^{k+2}x\| \cdot \|T^kx\| \\ &\leq \|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2. \end{aligned}$$

Pra,

$$\|T^*T^kx\|^2 \leq \frac{1}{2}(\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2)$$

që d.m.th. se  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ .

■

E qartë se çdo operator  $T \in L(H)$  që i takon kuasi- $*$  –klasës  $A$ , i takon edhe kuasi klasës  $Q^*$ .

Me shembull do të tregojmë se e anasjellta e këtij pohimi nuk vlen. Pra, jo çdo operator nga kuasi klasa  $Q^*$  është edhe operator nga kuasi- $*$  – klasa  $A$ .

**Shembull 3.2.3. ([50])** Le të jetë  $K = \bigoplus_{n=1}^{+\infty} H_n$ , ku  $H_n \cong H$ . Le të jenë operatorët  $A, B \in L(H)$ , përkufizojmë operatorin  $T_{A,B}$  në  $K$  si në vijim:

$$T_{A,B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ A & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & B & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & B & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & B & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Operatori  $T_{A,B}$  është kuasi- $*$  –klasë  $A$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$AB^2A \geq A^4.$$

Le të jenë  $A$  dhe  $B$  dy operatorë të përkufizuar si vijon:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{\frac{1}{4}}$$

Atëherë,

$$A(B^2 - A^2)A = \begin{pmatrix} -0.3359 \dots & -0.2265 \dots \\ -0.2265 \dots & 0.8244 \dots \end{pmatrix} \not\geq 0.$$

Pra, që tregon se operatori  $T$  nuk është kuasi- $*$  –klasë  $A$ .

Operatori i dhënë  $T_{A,B}$  i takon kuasi klasës  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse:

$$T^*(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T = A(B^4 - 2A^2 + I)A \geq 0.$$

Pra,

$$A(B^4 - 2A^2 + I)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \geq 0.$$

Që tregon se operatori  $T$  është kuasi klasë  $Q^*$ .

■

**Pohim 3.2.6. ([50])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve dhe  $N$  nënhapësirë e mbyllur invariante e operatorit  $T$  atëherë ngushtimi  $T|_N$  është poashtu operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  e operatorëve.

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.6

**Pohim 3.2.7. ([50])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve dhe nëse operatori  $T$  komuton dyfish me operatorin izometrik  $S$ , atëherë operatori  $TS$  poashtu i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve.

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.7.

**Pohim 3.2.8. ([50])** Le të jetë operatori  $T \in L(H)$ . Nëse  $\|T^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  atëherë operatori  $T$  i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve.

**Vërtetim:** Nga  $\|T^*\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  kemi se  $\|T^*x\|^2 \leq \frac{1}{2}, \forall x \in H$ ,

Atëherë,

$$\langle T^*x, T^*x \rangle - \frac{1}{2} \langle x, x \rangle \leq 0, \forall x \in H$$

$$\Rightarrow \langle (I - 2TT^*)x, x \rangle \geq 0, \forall x \in H$$

$$\Rightarrow I - 2TT^* \geq 0$$

$$\Rightarrow T^{*2}T^2 - 2TT^* + I \geq 0$$

$$\Rightarrow T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2TT^* + I)T^k \geq 0,$$

Prej nga shihet se  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ .

■

**Pohim 3.2.9. ([50])** Le të jetë  $T$  operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  dhe  $S$  një operator unitarisht ekuivalent me operatorin  $T$ , atëherë operatori  $S$  është operator që i takon  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$ .

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.9.

**Pohim 3.2.10. ([50])** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ . Nëse rangi i operatorit  $T^k$  nuk është i dendur dhe

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ në } H = \overline{R(T^k)} \oplus N(T^{*k}).$$

Atëherë,  $A$  është operator nga klasa  $Q^*$  në  $\overline{R(T^k)}$ ,  $C^k = 0$  dhe  $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$ .

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.1.10.

**Pohim 3.2.11.** Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator regular nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  atëherë për spektrin aproksimativ të tij vlen:

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  një operator regular nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ , atëherë për çdo vektor njësi  $x$  nga hapësira e Hilbertit  $H$  kemi:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|(T^*T^k)^{-1} \cdot (T^*T^k)x\|^2 \\ &\leq \|(T^*T^k)^{-1}\|^2 \cdot \|T^*T^kx\|^2 \\ &\leq \|(T^*T^k)^{-1}\|^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (\|T^{k+2}x\|^2 + \|T^kx\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2} \cdot \|(T^*T^k)^{-1}\|^2 \cdot (\|T^{k+1}\|^2 \|Tx\|^2 + \|T^{k-1}\|^2 \|Tx\|^2) \end{aligned}$$

Pra,

$$2 \leq \|Tx\|^2 \cdot \|(T^*T^k)^{-1}\|^2 \cdot (\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2)$$

respektivisht, fitohet jobarazimi:

$$\|Tx\| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}}$$

Tani supozojmë se  $\lambda \in \sigma_{ap}$ , atëherë ekziston vargu

$$(x_n), \|x_n\| = 1, \|(T - \lambda)x_n\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

nga jobarazimi i fundit kemi:

$$\|Tx_n - \lambda x_n\| \geq \|Tx_n\| - |\lambda| \cdot \|x_n\| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} - |\lambda|$$

Tani në jobarazimin e fundit të fituar, kur  $n \rightarrow \infty$ , fitohet:

$$|\lambda| \geq \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}}$$

Pra, kemi:

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{\sqrt{2}}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\|^2 + \|T^{k-1}\|^2}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}$$

gjë që u deshtë edhe të vërtetohej. ■

**Pohim 3.2.12.** *Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator regular  $k$  –kuasi–  $*$  –paranormal atëherë për spektrin aproksimativ të tij vlen:*

$$\sigma_{ap}(T) \subseteq \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \frac{1}{\|(T^*T^k)^{-1}\| \cdot \sqrt{\|T^{k+1}\| \cdot \|T^{k-1}\|}} \leq \lambda \leq \|T\| \right\}.$$

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në pohimin 3.2.11.

**Teoremë 3.2.1. ([63])** *Le të jetë  $T$  një operator invertibil dhe  $N$  një operator i tillë që  $N$  komuton me operatorin  $T^*T$ . Atëherë operatori  $N$  është nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $TNT^{-1}$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ .*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në teoremën 3.1.1.

**Teoremë 3.2.2. ([63])** *Le të jetë  $T \in L(H)$ . Atëherë  $\widetilde{T}$  është operator nga  $k$ –kuasi klasa  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë nëse  $\widetilde{T}^{(*)}$  është nga  $k$ –kuasi klasa  $Q^*$  e operatorëve.*

Vërtetimi bëhet ngjashëm sikur në teoremën 3.1.2.

**Pohim 3.2.13. ([63])** *Le të jetë  $T \in L(H)$  një operator i përkufizur si vijon*

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

*Nëse  $A$  është operator nga klasa  $Q^*$  dhe nëse  $BB^* = 0$ , atëherë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ .*

**Vërtetim:** Pas disa kalkulimeve kemi:

$$T^* = \begin{pmatrix} A^* & 0 \\ B^* & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{*k} = \begin{pmatrix} A^{*k} & 0 \\ B^* A^{*(k-1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^k = \begin{pmatrix} A^k & A^{(k-1)}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{*k}T^*T^k = \begin{pmatrix} A^{*k}(AA^* + BB^*)A^k & A^{*k}(AA^* + BB^*)A^{(k-1)}B \\ B^*A^{*(k-1)}(AA^* + BB^*)A^k & B^*A^{*(k-1)}(AA^* + BB^*)A^{(k-1)}B \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A^{*k}AA^*A^k & A^{*k}AA^*A^{(k-1)}B \\ B^*A^{*(k-1)}AA^*A^k & B^*A^{*(k-1)}AA^*A^{(k-1)}B \end{pmatrix}$$

$$T^{*(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{*(k+2)} & 0 \\ B^*A^{*(k+1)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{(k+2)} & A^{(k+1)}B \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$T^{*(k+2)}T^{(k+2)} = \begin{pmatrix} A^{*(k+2)}A^{(k+2)} & A^{*(k+2)}A^{(k+1)}B \\ B^*A^{*(k+1)}A^{(k+2)} & B^*A^{*(k+1)}A^{(k+1)}B \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k &= T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*k}TT^*T^k + T^{*k}T^k \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^k & A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}B \\ B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^k & B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Le të jetë  $u = x \oplus y \in H \oplus H$ . Atëherë,

$$\begin{aligned} &\langle (T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*k}TT^*T^k + T^{*k}T^k)u, u \rangle \\ &= \langle A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^kx, x \rangle + \langle A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}By, x \rangle \\ &+ \langle B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^kx, y \rangle + \langle B^*A^{*(k-1)}(A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}By, y \rangle \\ &= \langle (A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^kx, A^kx \rangle + \langle (A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}By, A^kx \rangle \\ &+ \langle (A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^kx, A^{(k-1)}By \rangle + \langle (A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)A^{(k-1)}By, A^{(k-1)}By \rangle \\ &= \langle (A^{*2}A^2 - 2AA^* + I)(A^kx + A^{(k-1)}By), (A^kx + A^{(k-1)}By) \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

Meqë,  $A$  është operator nga klasa  $Q^*$  atëherë,

$$A^{*2}A^2 - 2AA^* + I \geq 0,$$

pra,

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2T^*T + I)T^k = T^{*(k+2)}T^{(k+2)} - 2T^{*k}TT^*T^k + T^{*k}T^k \geq 0$$

që d.m.th. se  $T$  është operator nga  $k$ -kuasi klasa  $Q^*$ . ■

Në vazhdim do të japim raportin ndërmjet kuasi klasës  $Q^*$  dhe operatorëve kuasi—hipernormalë.

Operatori  $T \in L(H)$  quhet operator *kuasi—hipernormal*, nëse plotëson kushtin

$$\|T^*Tx\| \leq \|Tx^2\|,$$

për çdo vektor njësi  $x$  në  $H$ .

Është treguar se operatori  $T \in L(H)$  i cili është operator i zhvendosjen me peshë, me vargun e peshave  $(\alpha_n)$  është operator kuasi—hipernormal atëherë dhe vetëm atëherë nëse plotësohet kushti

$$|\alpha_n| \leq |\alpha_{n+1}|,$$

për çdo  $n$  (shih [34]).

**Pohim 3.2.14. ([63])** Çdo operator kuasi–hipernormal është edhe operator nga kuasi klasa  $Q^*$ .

**Vërtetim:** Le të jetë  $T$  një operator kuasi –hipernormal atëherë vlen

$$\|T^*Tx\| \leq \|Tx^2\|.$$

Meqë çdo operator kuasi–hipernormal është edhe operator paranormal [34, Rrjedhimi 3.15] atëherë kemi:

$$\begin{aligned} \|T^*Tx\| &\leq \|Tx^2\| = \left\| T \left( \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) \right\|^2 \cdot \|Tx\|^2 \\ &\leq \left\| T^2 \left( \frac{Tx}{\|Tx\|} \right) \right\| \cdot \|Tx\|^2 = \|T^3x\| \cdot \|Tx\| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|T^3x\|^2 + \|Tx\|^2), \end{aligned}$$

pra,  $T$  është operator nga kuasi klasa  $Q^*$ .

■

Në vazhdim do të marrim një shembull i cili tregon se ekziston operatori nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  i cili është edhe operator kuasinilpotent mirëpo nuk është operator kuasi–hipernormal.

**Shembull 3.2.4. ([63])** Konsiderojmë operatorin  $T: l^2 \rightarrow l^2$  të përkufizuar me

$$T(x) = (0, \alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots) \text{ ku } \alpha_n = \frac{1}{2^n}, \text{ për } n \geq 1.$$

Atëherë  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$  dhe kuasinilpotent mirëpo nuk është kuasi–hipernormal.

Ngjashëm sikur në shembullin 3.1.2 fitojmë

$$\alpha_{n+k}^2 \alpha_{n+k+1}^2 - 2\alpha_{n+k-1}^2 + 1 = \left( \frac{1}{2^{(n+k)}} \right)^2 \left( \frac{1}{2^{(n+k+1)}} \right)^2 - 2 \left( \frac{1}{2^{(n+k-1)}} \right)^2 + 1 \geq 0,$$

$$k \geq 1, n \geq 1.$$

Atëherë,  $T$  është operator nga  $k$  –kuasi klasa  $Q^*$ .

Nga,

$$T(e_k) = \frac{1}{2^k} e_{k+1}$$

kemi

$$T^2(e_k) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} e_{k+2}, \dots,$$

$$T^n(e_k) = \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^{k+n-1}} e_{k+n}$$

.

*Meqë,*

$$\|T^n\| = \sup \left\| \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^{k+n-1}} \right\| = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2^n},$$

$$r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} = 0.$$

*Pra, operatori  $T$  është kuasi nilpotent.*

*Mirëpo, operatori  $T$  nuk është kuasi –hipernormal meqë në këtë rast*

$$|\alpha_n| \not\leq |\alpha_{n+1}|.$$

## REKOMANDIME

Për klasën e operatorëve  $N$  –kuasinormalë, rekomandojmë që më tutje të bëhet shqyrtimi i transformimi Aluthge, dmth të gjenden kushtet kur transformimi Aluthge i një operatori i takon klasës së operatorëve  $N$  –kuasinormalë.

Për klasat e operatorëve  $M$  –klasë  $Q$ ,  $M$  –klasë  $Q^*$ , rekomandojmë që në vazhdim të studiohet spektri aproksimativ si dhe llojet e spektrave të tjerë meqë deri tani nuk është bërë një gjë e tillë.

Si dhe në përgjithësi për të gjitha këto klasa të reja të operatorëve rekomandojmë të studiohet vetia e kontraksionit, kontraksionit të vërtetë dhe kontraksionit të saktë, veti këto në përgjithësi të reja të shqyrtuara vetëm në një numër relativisht të vogël të klasave të operatorëve.

# PËRFUNDIMI

Në këtë disertacion përveç se janë treguar disa veti të operatorëve të cilët kanë qenë të përkufizuar më parë, janë përkufizuar edhe klasë të reja të operatorëve dhe janë treguar disa veti të tyre. Klasë të reja të përkufizuara në këtë punim janë  $M$  –klasë  $Q^*$ ,  $k$  –kuasi klasë  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasë  $Q^*$ .

Në kapitullin e parë, janë dhënë konceptet bazike nga teoria e operatorëve të nevojshme për zhvillimin e mëtejshëm të disertacionit. Po ashtu, janë dhënë disa rezultate për klasat e operatorëve kuasinormalë dhe  $N$  –kuasinormalë. Në vazhdim, janë dhënë kushtet që duhet t'i plotësojnë dy operatorë  $N$  –kuasinormalë ashtu që edhe shuma e tyre të jetë nga kjo klasë (Teorema 1.3.1). Si dhe janë dhënë kushtet që duhet të plotësoj një operator nga klasa  $N$  –kuasinormal dhe një operator nga klasa kuasinormal ashtu që produkti i tyre të jetë operator  $N$  –kuasinormal (Teorema 1.3.2).

Në kapitullin e dytë, janë studiuar klasat e operatorëve  $M$  –klasës  $Q$  si dhe  $M$  –klasës  $Q^*$ . Është vërtetuar se çdo operator  $M$  –paranormal, përkatësisht  $M^*$  –paranormal, është edhe operator nga  $M$  –klasa  $Q$ , përkatësisht  $M$  –klasa  $Q^*$ , mirëpo e anasjellta nuk vlen gjithmonë (Pohim 2.1.2, Pohimi 2.2.2). Po ashtu, është vërtetuar se transformimi Aluthge  $\tilde{T}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$  atëherë dhe vetëm atëherë kur  $*$  –transformimi Aluthge  $\tilde{T}^{(*)}$  i takon  $M$  –klasës  $Q$ ,  $M$  –klasës  $Q^*$ , respektivisht (Teorema 2.4.2, Teorema 2.4.3).

Në kapitullin e tretë, janë treguar disa veti të klasave të operatorëve  $k$  –kuasi klasës  $Q$  si dhe  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$ . Në këtë kapitull kemi shqyrtuar raportin e  $k$  –kuasi klasës  $Q$  të operatorëve në krahasim me klasë të tjera të operatorëve, si me klasën  $Q$ ,  $k$  –kuasi klasën  $A$  si dhe klasën e operatorëve  $k$  –kuasi paranormalë (Pohim 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5). Po ashtu, kemi shqyrtuar raportin e  $k$  –kuasi klasës  $Q^*$  të operatorëve në krahasim me klasë të tjera të operatorëve, si me klasën  $Q^*$ ,  $k$  –kuasi –  $*$  –klasën  $A$  si dhe me klasën e operatorëve  $k$  –kuasi –  $*$  – paranormalë (Pohim 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5).

# SUMMARY

In this dissertation are shown several properties of some operators that have been introduced by other authors, also are defined new class of operators and are shown some of their properties. The new classes of operators that are defined are  $M$ -class  $Q^*$ ,  $k$ -quasi class  $Q$  and  $k$ -quasi class  $Q^*$ .

In the first chapter, are given basic definitions from theory of operators which are necessary to accomplish the dissertation. Also, there are shown some results for the classes of operators such as quasinormal operators and  $N$ -quasinormal operators. In following there are given conditions under which the sum of two  $N$ -quasinormal operators is also  $N$ -quasinormal operator (Theorem 1.3.1), and conditions under which the product of  $N$ -quasinormal operator and quasinormal operator is  $N$ -quasinormal operator (Theorem 1.3.2).

In the second chapter of this dissertation classes of operators such as  $M$ -class  $Q$  and  $M$ -class  $Q^*$  are studied. It is proved that every  $M$ -paranormal operator, respectively, every  $M^*$ -paranormal, is the operator of  $M$ -class  $Q$ ,  $M$ -class  $Q^*$ , respectively, but the reverse of this is not always valid (Proposition 2.1.2, Proposition 2.2.2). Also, it is proved that Aluthge transformation  $\tilde{T}$  is  $M$ -class  $Q$ ,  $M$ -class  $Q^*$  if and only if  $*$ -Aluthge transformation  $\tilde{T}^{(*)}$  is  $M$ -class  $Q$ ,  $M$ -class  $Q^*$ , respectively (Theorem 2.4.3, Theorem 2.4.4).

In the third chapter there are shown some properties of the operators of  $k$ -quasi class  $Q$  and  $k$ -quasi class  $Q^*$ . In this chapter the relation of  $k$ -quasi class  $Q$  operators with other classes of operators such as: class  $Q$ ,  $k$ -quasi class  $A$  and  $k$ -quasi paranormal operators was reviewed (Proposition 3.1.2, 3.1.3, 3.1.4, 3.1.5). Also, it is shown the relation of  $k$ -quasi class  $Q^*$  operators with other classes of operators such as: class  $Q^*$ ,  $k$ -quasi- $*$ -class  $A$  and  $k$ -quasi- $*$ -paranormal operators (Proposition 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 3.2.5).

# BIBLOGRAFIA

Deri më tani artikujt e botuar shkencor në revista shkencore ndërkombëtare me Bord Editorial janë:

- [1] V. R. Hamiti, *Some properties of  $N$  –quasinormal operators*, Gen. Math. Notes, Vol. 18, No. 1, September, 2013, pp. 94-98.
- [2] V. R. Hamiti, *On  $k$  –quasi class  $Q$  operators*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 6 Issue 3 (2014), 31-37.
- [3] V. R. Hamiti, *Some Properties of  $M$  –Class  $Q$  and  $M$  –Class  $Q^*$  Operators*, Gen. Math. Notes, Vol. 26, No. 1, January 2015, pp. 46-52.
- [4] V. R. Hamiti, Sh. Lohaj, Q. Gjonbalaj, *On  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators*, Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2016, Vol. 4, No. 4, 87-91.
- [5] Sh. Lohaj, V. R. Hamiti, *Some properties of  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 14, Issue 2, Article 1, pp. 1-10, 2017

Deri më tani punën time e kam prezantuar në këto konferenca shkencore:

- [1] V. R. Hamiti, *Disa veti të operatorëve nga kuasi klasa  $Q$* , Takimi i Nëntë vjetor ndërkombëtar i Institutit Alb-Shkenca Prishtinë, 29 -31 gusht 2014, Seksioni i Shkencave të Natyrës. [http://iash-takimet.org/tv2014/programi/programi\\_natyra\\_2014.pdf](http://iash-takimet.org/tv2014/programi/programi_natyra_2014.pdf)
- [2] V. R. Hamiti, Sh. Lohaj, Q. Gjonbalaj, *On  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators*, 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE on RECENT ADVANCES in PURE and APPLIED MATHEMATICS (ICRAPAM 2016) May19-23, 2016, Bodrum-Mugla, TURKEY.  
<http://icrapam.org/2016/>  
Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2016, Vol. 4, No. 4, 87-91 ,  
<http://pubs.sciepub.com/tjant/4/4/1>.
- [3] Sh. Lohaj, V. R. Hamiti, *Some properties of  $k$  –quasi class  $Q$  operators*, 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE on RECENT ADVANCES in PURE and APPLIED MATHEMATICS (ICRAPAM 2016) May19-23, 2016, Bodrum-Mugla, TURKEY.  
<http://icrapam.org/2016/>
- [4] V. R. Hamiti, Q. Gjonbalaj, *Transformimi Aluthge dhe disa veti të  $M$  –klasës  $Q$  dhe  $M$  –klasës  $Q^*$  të operatorëve*, Takimi i Njëmbëdhjetë vjetor ndërkombëtar i Institutit Alb Shkenca, Tiranë, 01-03 shtator, 2016, Seksioni i Shkencave të Natyrës.  
[http://iash-takimet.org/tv2016/programi/programi\\_natyra\\_2016.pdf](http://iash-takimet.org/tv2016/programi/programi_natyra_2016.pdf)

# LITERATURA

- [1] Ch. S. Ryoo, *Some class of operators*, Math. J. Toyama Univ. Vol.21 (1998), 147-152.
- [2] T. Furuta, *On the class of paranormal operators*, Proc. Japan Acad., 43 (1967), 594-598.
- [3] T. Furuta, M. Horie, *A remark on a class of operators*, Proc. Japan Acad., 43 (1967), 607-609.
- [4] S. H. Lee, Ch. S. Ryoo, *Some properties of certain non hyponormal operators*, Bull. Korean Math. Soc. 31 (1994), No.1. pp. 133-141.
- [5] S. K. Berberian, *A note on hyponormal operators*, Pacific J. Math. 12 (1962); 1171-1175.
- [6] J. G. Stampfli, *Hyponormal operators*, Pacific J. Math 12 (1962), 1453-1458.
- [7] P. Halmos, *A Hilbert space problem book*, Moskë, (1970).
- [8] S. C. Arora, J. K. Thukral, *On a class of operators*, Glasnik Matematicki, 21 (1986), 381-386.
- [9] Gi Hae Park, *Some notes on  $*$ -paranormal operators*, (2000).
- [10] N. Chennappan, S. Karthikeyan,  *$*$ -Paranormal composition operators*, Indian J. pure appl. Math (2000), 591-600.
- [11] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza, Elementi teorije operatora*, Zagreb, (1981).
- [12] T. Furuta, M.Ito, T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several related classes*, (1999), 41-55.
- [13] S. Panayappan, A. Radharamani, *On a class of quasiparahyponormal operators*, Int. Journal of math. Analysis, Vol. 2, (2008), no.15, 741-745.
- [14] M. Young Lee, S. Hung Lee, *On a class of operators related to paranormal operators*, J. Korean Math. Soc, 44 (2007), No. 1, pp. 25-35.
- [15] S. Panayappan, A. Radharamani, *A note on  $p$ - $*$ paranormal operators and absolute  $k$ - $*$ paranormal operators*, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 2 (2008), 1257-1261.
- [16] T. Veluchamy, A. Devika, *Some properties of quasi  $*$ -paranormal operators*, Journal of modern mathematics and statistics 1 (1-4) 35-38, (2007).
- [17] A. Bala, *A note on quasi-normal operators*, (1976), 463-465.
- [18] Sh. Lohaj, *Quasinormal operators*, Int. Journal of Math. Analysis, 4(47) (2010), 2311-2320.
- [19] R. Zejnullahu, *Analiza funksionale*, (1998), Prishtinë.
- [20] Embry M. R., *A connection between commutativity and separation of spectra of operators*, Acta Sci. Math 32 (1971), 235-237.

- [21] C. A. McCarthy,  $c_p$ , Israel J. Math., 5 (1967), 249-271.
- [22] T. Furuta, *Applications of the polar decomposition of an operator*, Yokohama Mathematical Journal, Vol. 32, 1984, 245 -253.
- [23] T. Furuta, *Extension of the Furuta inequality and Ando-Hiai log-majorization*, Linear Algebra Appl., 219 (1995), 139-155.
- [24] T. Furuta, T. Yamazaki, M. Yanagida, *Order preserving operators function via Furuta inequality* "  $A \geq B \geq 0$  ensures  $\left(A^{\frac{r}{2}} A^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}} \geq \left(A^{\frac{r}{2}} B^p A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$  for  $p \geq 1$  and  $r \geq 1$ ", to appear in Proc. 96-IWOTA.
- [25] M. Kutkut, *On the classes of parahyponormal operator*, Jour. Math. Sci., 4(2) (1993), 73-88.
- [26] T. Ando, *Operator with a norma condition*, Acta Sci. Math. (Szeged) 133, (1972), 169-178.
- [27] S. Panayappanand, N. Sivamani, *A quasi normal operators in semi Hilbertian spaces*, Gen. Math. Notes, 10 (2), 2012, 30-35.
- [28] I. Hoxha, *Teorema e Weyl-it dhe vetitë spektrale në disa klasë të operatorëve*, Disertacion, Tiranë 15.07.2015.
- [29] V. R. Hamiti, *Operatorët paranormalë dhe \*-paranormalë në hapësirat e Hilbertit*, punim magjistrature, Prishtinë, 2010.
- [30] I.H.Kim, B.P.Duggal and I.H.Jeon, *On quasi class A operators*, Korean J. Math. 19 (2011), No.2, pp. 205-209.
- [31] A. Aluthge, D. Wang, *The joint approximate point spectrum of an operator*, Hokkaido Mathematical Journal, Vol. 31 (2002), 187-197.
- [32] F. Gao and X. Li, *On  $k$ -quasi paranormal operators*, Journal of Mathematical Inequalities, (2014), Vol.8, Number 1, 113-122.
- [33] S.C. Arora and R. Kumar,  *$M$ -paranormal operators*, Publications De L'Institut Mathematique, Nouvelle Serie, Tome, 29(43) (1981), 5-13.
- [34] N. L. Braha, M.Lohaj, F.H. Marevci, Sh.Lohaj, *Some properties of paranormal and hyponormal operators*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 1, Issue 2, (2009), Pages 23-35.
- [35] B. P. Duggal, C. S. Kubrusly and N. Levan, *Contractions of class  $Q$  and invariant subspaces*, Bull. Korean Math. Soc., 1(2005), 169-177.
- [36] V. R. Hamiti, *Disa veti të operatorëve nga kuasi klasa  $Q$* , Takimi i Nëntë vjetor ndërkombëtar i Institutit Alb-Shkenca Prishtinë, 29 -31 gusht 2014, Seksioni i Shkencave të Natyrës. [http://iash-takimet.org/tv2014/programi/programi\\_natyra\\_2014.pdf](http://iash-takimet.org/tv2014/programi/programi_natyra_2014.pdf)
- [37] M. M. Kutkut, B. Kashkari, *On the class of  $M$ -paranormal ( $M^*$ -paranormal) operators*, M. Sci. Bull. (Nat. Sci), 20(2), (December) (1993), 129-144.

- [38] D. Senthilkumar and T. Prasad, *M –class Q composition operators*, Scientia Magna, 6(1), (2010), 25 – 30.
- [39] Y. Yang and C.J. Kim, *Contractions of class  $Q^*$* , Far East Journal of Mathematical Sciences, (FJMS), 27(3) (2007), 649-657.
- [40] V. R. Hamiti, *Some Properties of M –Class Q and M –Class  $Q^*$  Operators*, Gen. Math. Notes, Vol. 26, No. 1, January 2015, pp.46-52.
- [41] V. R. Hamiti, *Some properties of N –quasinormal operators*, Gen. Math. Notes, Vol. 18, No. 1, September, 2013, pp. 94-98.
- [42] S. C. Arora and J. K. Thukral,  *$M^*$  –paranormal operators*, Glasnik Matematicki, Vol.22 (42), (1987), 123-129.
- [43] C. S. Kubruslu, *A concise introduction to tensor product*, Far East Journal of Mathematical Science 22(2006), 137-174.
- [44] A. Aluthge, *On  $p$  –hyponormal operators for  $0 < p < 1$* , Integral Equations Operator Theory, 13 (1990), 307- 315.
- [45] T. Yamazaki, *Parallelisms between Aluthge transformation and powers of operators*, Acta Sci. Math. (Szeged)67, (2001), pp. 809-820.
- [46] C. Kubrusly, *The elements of Operator Theory*, Second Edition, Birkhäuser, 2011.
- [47] A. Bourhim, *Bounded Point Evaluations and Local Spectral Theory*, Dissertation presented to ICTP Mathematics section in Candidacy for the Diploma Degree. arXiv:math./0008197v1 [math.FA] 25 Aug 2000.
- [48] V. R. Hamiti, Q. Gjonbalaj, *Transformimi Aluthge dhe disa veti të M –klasës Q dhe M –klasës  $Q^*$  të operatorëve*, Takimi i Njëmbëdhjetë vjetor ndërkombëtar i Institutit Alb Shkenca, Tiranë, 01-03 shtator, 2016, Seksioni i Shkencave të Natyrës.  
[http://iash-takimet.org/tv2016/programi/programi\\_natyra\\_2016.pdf](http://iash-takimet.org/tv2016/programi/programi_natyra_2016.pdf)
- [49] V. R. Hamiti, *On  $k$  –quasi class Q operators*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 6 Issue 3 (2014), 31-37.
- [50] V. R. Hamiti, Sh. Lohaj, Q. Gjonbalaj, *On  $k$  –quasi class  $Q^*$  operators*, 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE on RECENT ADVANCES in PURE and APPLIED MATHEMATICS (ICRAPAM 2016) May19-23, 2016, Bodrum-Mugla, TURKEY.  
<http://icrapam.org/2016/>
- Turkish Journal of Analysis and Number Theory, 2016, Vol. 4, No. 4, 87-91 ,  
<http://pubs.sciepub.com/tjant/4/4/1>.
- [51] A. Devika, G. Suresh, *Some properties of quasi class Q operators*, International Journal of Applied Mathematics and Statistical Sciences (IJAMSS), Vol. 2, Issue 1, Feb 2013, 63-68.
- [52] V. R. Hamiti, Sh. Lohaj, *A note on  $k$  –quasi class Q operators*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Preprint

- [53] S. Mecheri, *Bishops property  $\beta$  and Riesz idempotent for  $k$ -quasi paranormal operators*, Banach J. Math. Anal., 6(2012), No. 1, 147 - 154.
- [54] F. Gao and X. Fang, *On  $k$ -quasi class  $A$  operators*, J. Inequal Appl., (2009), Article ID, 921634, 1-10.
- [55] J. K. Han, H. Y. Lee, and W. Y. Lee, *Invertible completions of  $2 \times 2$  upper triangular operator matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 128(2000), 119-123.
- [56] D. Senthilkumar, P. M. Naik and D. Kiruthika, *Quasi class  $Q^*$  composition operators*, International Journal of Math. Sci. and Engg. Appls.(IJMSEA), Vol. 5, No IV, July, 2011, pp. 1-9.
- [57] I. Hoxha, N. Braha, *A note on  $k$ -quasi- $*$ -paranormal operators*, Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:350.
- [58] S. Mecheri, *Isolated points of spectrum of  $k$ -quasi- $*$ -class  $A$  operators*, Studia Mathematica, 208(2012), 87-96.
- [59] J. L. Shen, F. Zuo and C. S. Yang, *On operators satisfying  $T^*|T^2|T \geq T^*|T^*|^2T$* , Acta Mathematica Sinica, English Series, Nov., Vol. 26(2010), no.11, pp. 2109-2116.
- [60] Sh. Lohaj, V. R. Hamiti, *Some properties of  $k$ -quasi class  $Q$  operators*, 3<sup>rd</sup> INTERNATIONAL CONFERENCE on RECENT ADVANCES in PURE and APPLIED MATHEMATICS (ICRAPAM 2016) May19-23, 2016, Bodrum-Mugla, TURKEY.  
<http://icrapam.org/2016/>
- [61] V. R. Hamiti, Q. Gjonbalaj, Sh. Lohaj, *On  $M$ -Class  $Q$  and  $M$ -Class  $Q^*$  Operators*, Thai Journal of Mathematics, Preprint
- [62] F. Zuo, H. Zuo, *Structural and spectral properties of  $k$ -quasi- $*$ -paranormal operators*, Korean J. Math., 23 (2005), no. 2, pp. 249 - 257.
- [63] Sh. Lohaj, V. R. Hamiti, *Some properties of  $k$ -quasi class  $Q^*$  operators*, The Australian Journal of Mathematical Analysis and Applications, Volume 14, Issue 2, Article 1, pp. 1-10, 2017
- [64] F. Marevci, M. Lohaj, *Some properties of operator classes  $(M, k)^*$ ,  $A^*[k]$  and  $k$ - $*$ -paranormal operator*, Int. Math. Forum, Vol. 7, 2012, no. 45, 2239-2252.