

**UNIVERSITETI POLITEKNIK TIRANË
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE
DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**

**NJË TRANSFORMIM THYESOR LOKAL
 α –INTEGRAL DHE APLIKIME TË TIJ**

PUNIM PËR GRADËN SHKENCORE

“Doktor”

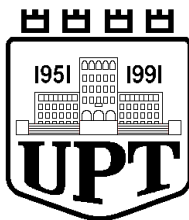
Kandidatja

Msc. Matilda KREKU(Gjata)

Udhëheqës Shkencor

Prof. Asoc. Akli FUNDO

TIRANË, 2017



**UNIVERSITETI POLITEKNIK TIRANË
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE
DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I MATEMATIKËS**

**NJË TRANSFORMIM THYESOR LOKAL
 α –INTEGRAL DHE APLIKIME TË TIJ**

PUNIM PËR GRADËN SHKENCORE

”Doktor”

Kandidati

Matilda KREKU(Gjata)

Udhëheqës Shkencor

Prof Asoc Akli FUNDO

Mbrojtur para jurisë më datë -----/-----/ 2017

KOMISIONI I MBROJTJES

(Kryetar)-----

(Oponent)-----

(Oponent)-----

(Anëtar)-----

(Anëtar)-----

TIRANË 2017

ABSTRAKTI

Ky punim është fokusuar fillimisht në përkufizimet dhe vetitë e disa transformimeve të njohura, si transformimi Furie, transformimi Elzaki, transformimi Sumudu, transformimi i Laplasit, transformimi Yang – Laplasit dhe transformimi Fundo-Kashuri, transformime të cilat i dhanë një shtysë dhe ndihmesë shumë të madhe krijimit të transformimit të ri thyesor lokal α – integral.

Më pas, punimi përqëndrohet në përkufizimin, vetitë dhe vërtetime të disa pohimeve të transformimit të ri thyesor lokal α - integral. Vëmendja fokusohet në aplikimin e këtij transformimi për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme, ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme te rendit $k\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$, si ekuacionet dinamike të gazeve, ekuacionet e valëve, ekuacionet e difuzionit, ekuacioni i Laplasit. Aplikimi i këtij transformimi trajtohet me anë të metodës së iteracionit variacional, metodës së përmirësuar të iteracionit variacional, metodës së dekompozimit adomian, metodës së perturbacionit homotopik dhe metodës së dekompozimit të funksionit.

Fjalë kyçe: Transformim thyesor lokal α – integral, transformim i Laplasit, transformim i Yang – Laplasit, metoda e iteracionit variacional, metoda e dekompozimit adomian, metoda e perturbacionit homotopik, metoda e dekompozimit të funksionit.

ABSTRACT

Thesis is focused firstly in knowleges of definition and properties of some known integral transform such as Furie transform, Elzaki transform, Sumudu transform, Laplas transform, Yang-Laplas transform and Fundo-Kashuri integral transform. These transforms helps creating the new local fractional α – integral transform. Than thesis focused in definition properties and proof of some basic theorems of this transform. Firstly is seen the application of this new transform on solving ordinary differential equations and partial differential equations of order $k\alpha$ were $0 < \alpha \leq 1$, such as dinamic equation of gas, equation of wave, equation of diffusion, equation of Laplas. Handled the application of this transformation with variational iteration method, improved variational iteration method, the method of decomposition adomian, homotopy perturbation method and function decomposition method.

Key words: Local fractional α – integral transform, Laplas transform, Yang – Laplas transform, variational iterational method, decomposition adomian method, homotopy perturbation method, function decomposition method.

FALENDERIME DHE MIRËNJOHJE

Shpreh një mirënjohje të veçantë për profesorin udhëheqës së këtij disertacioni pa ndihmesën e të cilit gjithçka do të ishte shumë më e vështirë dhe ndoshta jo në nivelet e një disertacioni bashkëkohor.

Një falenderim për të gjithë ata familjarë apo kolegë që me mbështetjen e tyre morale dhe fizike i dhanë një shtysë përfundimit me sukses të kësaj detyre të rëndësishme.

Një falenderim të veçantë për familjen time që me praninë e tyre bëjnë që gjithshka që është e mundur të realizohet.

Fëmijëve të mi

” Në ditën më të vështirë, atëherë kur gjithshka duket e pamundur, atëherë kur gjithshka duket e errët, ngrijeni kokën lart me krenari, sepse me një buzëqeshje dhe me pak më shumë punë do të jeni në gjëndje të nisni gjithshka nga e para. “

“ Ska gjëra të pamundura, ka vetëm gjëra të veshtira ! “

M.Kreku

TABELA PËRMBLEDHËSE

ABSTRAKTI.....	2
PARATHËNIE.....	7
 KAPITULLI I.....	 10
1.1 Transformimi i Laplasit.....	10
1.1 _a Përkufizimi i transformimit të Laplasit.....	10
1.1 _b Vetë të transformimit të Laplasit	11
1.2 Transformimi Furie.....	14
1.2 _a Përkufizimi i transformimit Furie.....	14
1.2 _b Disa teorema dhe vetë bazë të transformimit Furie.....	16
1.3 Transformimi Sumudu.....	19
1.3 _a Përkufizimi i transformimit Sumudu.....	19
1.3 _b Disa teorema dhe vetë bazë të transformimit Sumudu.....	19
1.4 Transformimi Elzaki.....	22
1.4 _a Përkufizimi i transformimit Elzaki.....	22
1.4 _b Disa teorema dhe vetë bazë të transformimit Elzaki.....	22
1.5 Transformimi Fundo-Kashuri	24
1.5 _a Përkufizimi i transformimit Fundo-Kashuri.....	24
1.5 _b Disa teorema dhe vetë bazë të transformimit Fundo-Kashuri.....	25
1.6 Transformimi Yang – Laplas.....	27
1.6 _a Përkufizimi i transformimit Yang – Laplas.....	27
1.6 _b Disa teorema dhe vetë të transformimit të Yang – Laplasit.....	28
 KAPITULLI II.....	 30
2.1Hyrje.....	30
2.2 Një transformim i ri thyesor lokal α -integral	30
2.2 _a Përkufizimi i transformimit të ri thyesor lokal α -integral.....	30

2.2 _b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit të ri thyesor lokal α -integral.....	33
2.3 Zgjidhja e ekuacioneve diferenciale me anë të transformimit të ri thyesor lokal α – integral.....	48
2.4 Tabela e shëmbëllimve α -integrale të disa funksioneve kryesore	53
KAPITULLI III.....	55
3.1 Metoda e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral.....	55
2.3 Aplikimi i metodës së iteracionit variacional thyesor lokal α – integral.....	57
3.3 Metoda e përmirësuar e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral.....	64
3.4 Aplikimi i metodës së përmirësuar së iteracionit variacional thyesor lokal α -integral në ekuacionet e difuzionit dhe të valëve në bashkësinë e Kantorit	67
KAPITULLI IV.....	76
4.1 Metoda e dekompozimit thyesor lokal α – integral të funksionit.....	76
4.2 Aplikimi i Metodës së dekompozimit thyesor lokal α – integral të funksionit për zgjidhjen e ekuacioneve thyesore lokale të Laplasit në bashkësinë e Kantorit.....	80
4.3 Metoda e dekompozimit Adomian thyesor lokal α – integral.....	85
4. 4 Aplikimi i Metodës së dekompozimit Adomian thyesor lokal α – integral për zgjidhjen e ekuacioneve lokale thyesore të Laplasit ne hapësirën kohore	87
4.5 Metoda e Perturbacionit Homotopik thyesor lokal.....	94
4.6 Aplikimi i Metodës së Perturbacionit Homotopik në ekuacionet e Gazeve.....	97
KONKLUZIONE	101
REKOMANDIME	103
BIBLIOGRAFIA.....	104
BOTIME DHE KONFERENCA.....	109

PARATHËNIE

Transformimet integrale janë përdorur me mjaft sukses në zgjidhjen e shumë problemeve në matematikën e aplikuar, në fizikën matematike dhe shkencat inxhinierike. Historikisht, prejardhja e transformimeve integrale, arrin kulmin me punën e Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) në “*Teoria Analitike e Probabilitetit*” të botuar në 1780 dhe të Joseph Fourier (1768 – 1830) “*Teoria Analitike e Nxehtësisë*” të botuar në 1822. Transformimi i Laplasit është përdorur me mjaft efektivitet në gjetjen e zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale lineare dhe ekuacioneve integrale. Teoria e transformimit të Laplasit është një pjesë mjaft e rëndësishme e aparatit matematik në inxhinieri dhe fizikë. Ky transformim është veçanërisht i dobishëm në zgjidhjen e problemeve me terma johomogjene me natyrë jo të vazhdueshëm ose me natyrë impulsive. Metoda e këtij transformimi mundëson një teknikë të thjeshtë dhe mjaft efikase për zgjidhjen e mjaft problemeve që shfaqen në fusha të ndryshme të shkencës dhe inxhinierisë, në veçanti për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale. Transformimi i Laplasit është i fuqishëm në trajtimin e problemeve me kushte fillestare dhe gjerësisht i pasqyruar në tabela.

Nga ana tjetër, Furie me anë të serive Furie dhe integralit Furie krijoi teorinë moderne matematikore të përcjellshmërisë së nxehtësisë si dhe disa aplikime të ndryshme. Në përpjekje për të zgjeruar idetë e tij të reja për funksionet e përcaktuar në intervalet e pafundëm, ai gjeti një transformim integral dhe formulën e tij inverse të cilat njihen si transformimi Furie dhe transformimi invers Furie. Që nga prezantimi i tij në fillim të shekullit të XIX, transformimi Furie ka gjetur përdorime të pafundme dhe ka çuar në zhvillimin e transformimeve të tjerë. Sot, transformimi Furie, është aparati bazë në shkencën inxhinierike.

Metodat e transformimit të Furies dhe të Laplasit janë në thelb të njëjtlshme me njehsimin operacional modern.

Sumudu W. Watugala krijoi një transformim të ri integral i cili e ka prejardhjen nga integrali Furie. *Transformimi Sumudu* shërben për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme apo ekuacioneve me derivate të pjesshme, ka mjaft veti interesante dhe është shumë efikas në përdorim për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale që mund të modelohen në fusha të ndryshme të shkencës.

Tarig Elzaki në mënyrë të ngjashme krijoi një transformim të ri integral të quajtur *transformimi Elzaki* duke u nisur nga transformimi Sumudu.

Transformimi Fundo-Kashuri është krijuar për të thjeshtuar procesin e zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale të zakonshme dhe ekuacioneve me derivate të pjesshme. Ai mund të përdoret për njehsimin e integraleve të caktuar të cilët përmbajnë një parametër. Kjo metodë njehsimi është e lehtë në përdorim dhe e drejtpërdrejtë. Metoda bazohet në mënyrë thelbësore në lejimin e ndryshimit të rendit të integritit.

Analiza thyesore është një fushë e matematikës së aplikuar që merret me derivate dhe integrale të një rendi arbitrar. Ekuacionet diferenciale thyesore janë përdorur gjithmonë e më shumë për të modeluar problemet e mekanikës fluide, akustikës, biologjisë, elektromagnetizmit, difuzionit, përpunimit të sinjaleve, dhe shumë problemeve të tjera fizike. Teknika të ndryshme analitike dhe numerike janë aplikuar me sukses në ekuacionet diferenciale, ekuacionet diferenciale thyesore dhe

ekuacionet thyesore lokale. Mund të përmendim transformimin thyesor Furie, transformimin thyesor të Laplasit .

Në 10 vitet e fundit analiza komplekse thyesore lokale është zhvilluar me ritëm shumë të shpejtë. Janë studjuar edhe më parë metoda të drejtpërdrejta dhe të përafërta për llogaritjen e ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme thyesore lokale.

Një transformim i rëndësishëm thyesor lokal është transformimi Yang-Laplas i cili është përdorur shumë në dekadën e fundit për llogaritjen e ekuacioneve diferenciale thyesore lokale me derivate të pjesshme . Ky transformim dhe teoria e tij arrin kulmin në 2011 me botimin e librave “*Local Fractional Functional Analysis and Its Applications*”, Asian Academic Publisher, Hong Kong, 2011 dhe “*Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications*” World Science Publisher, New York, NY, USA, 2012.

Transformimi i ri thyesor lokal α -integral është një hibridizim i transformimit Fundo-Kashuri dhe transformimit integral të Yang – Laplasit. Ai mund të përdoret si një aparat mjaft efikas për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale sepse është në gjëndje të shkurtojë punën llogaritëse të tyre. Për të përfutur zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale me anë të kësaj metode, nevojiten dy hapat e mëposhtëm:

- a) Së pari, transformojmë ekuacionet diferenciale në ekuacione algjebrike duke përdorur metodën e transformimit të ri thyesor lokal α -integral.
- b) Së dyti, duke përdorur transformimin e ri invers thyesor lokal α -integral përftojme zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale.

Vlen të përmendet që *metoda e iteracionit variacional* e kombinuar me metodën e transformimit të ri thyesor lokal α -integral tek ekuacionet diferenciale thyesore lokale me derivate të pjesshme është në gjëndje të reduktojë vëllimin e punës llogaritëse krahasuar me metodat klasike, duke mbajtur një saktësi të lartë të rezultatit numerik dhe nuk kërkon llogaritje të vështira. Reduktimi i vëllimit të punës rrit përmirësimin e performancës të metodës.

Gjithashtu, edhe kombinimi i *metodës së perturbacionit homotopik* me metodën e transformimit të ri thyesor lokal α -integral është në gjëndje të reduktojë vëllimin e punës llogaritëse. Avantazhi i kësaj metode është aftësia e saj për të kombinuar dy metoda të rëndësishme për të përfutur zgjidhje analitike të sakta ose të përafërta për ekuacionet jolineare.

Një tjetër metodë shumë interesante është kombinimi i këtij transformimi të ri thyesor lokal α -integral me metodën e dekompozimit adomian.

Gjithashtu është trajtuar kombinimi i këtij transformimi me metodën e dekompozimit funksional. Kjo metodë është aplikuar me sukses në zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale.

Disertacioni është i ndarë në 4 kapituj:

- Në kapitullin e parë trajtohen njohuritë bazë për transformimet integrale, Laplas, Furie, Sumudu, Elzaki, transformimi i ri integral dhe transformimi i Yang – Laplasit. Përmenden disa nga vetitë kryesore si dhe disa teorema qendrore të tyre.

- Në kapitullin e dytë trajtohet transformimi i ri thyesor lokal α -integral, disa nga vetitë kryesore të tij, si dhe disa teorema qendrore të cilat shërbejnë për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale thyesore lokale të zakonshëm dhe ekuacioneve thyesore lokale me derivate të pjesshme me kushte fillestare dhe kufitare. Vlen të theksohet që, në qoftë se ekziston transformimi i ri thyesor lokal α -integral atëherë ekziston transformimi i Yang-Laplasit, ndërsa e anasjellta e këtij pohimi jo domosdoshmërisht është e vërtetë.

- Në kapitullin e tretë jepet trajta analitike dhe shembuj të zgjidhur të metodave:

Metoda e iteracionit variacional thyesor lokal α -integral në ekuacionet diferenciale thyesore lokale të Laplasit.

Metoda e përmirësuar e iteracionit variacional thyesor lokal α -integral në ekuacionet diferenciale thyesore lokale të difuzionit dhe të valëve.

- Në kapitullin e katërt jepet trajta analitike dhe shembuj të zgjidhur të metodave:

Metoda e dekompozimit adomian thyesor lokal α -integral dhe metoda e dekompozimit funksional thyesor lokal α -integral për ekuacionet diferenciale me derivate të pjesshme thyesore lokale të Laplasit, metoda e perturbacionit homotopik thyesor lokal α -integral për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale thyesore lokale të gazeve.

KAPITULLI I

1.1 Transformimi i Laplasit

1.1a Përkufizimi i transformimit të Laplasit

Libri klasik i Laplasit “*Teoria Analitike e Probabilitetit*” përfshin disa rezultate themelore të transformimit të Laplasit i cili u bë një nga transformimet më të përdorur në literaturën matematike. Ai është përdorur me mjaft efektivitet në gjetjen e zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale lineare dhe jolineare .

Teoria e transformimit të Laplasit është një pjesë mjaft e rëndësishme për aparatin matematik në inxhinieri dhe fizikë [2,3,7]. Transformimi i Laplasit është veçanërisht i dobishëm në zgjidhjen e problemeve me terma johomogjene me natyrë jo të vazhdueshëm ose me natyrë impulsive. Metoda e transformimit të Laplasit mundëson një teknikë të thjeshtë dhe mjaft efikase për zgjidhjen e mjaft problemeve që shfaqen në fusha të ndryshme të shkencës dhe inxhinierisë, në veçanti për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale. Ideja është, përdorimi i një integrali për të transformuar një ekuacion diferencial në një ekuacion algjebrik dhe nga zgjidhja e këtij ekuacioni algjebrik merret funksioni i kërkuar me anë të transformimit invers. Transformimi i Laplasit është i fuqishëm në trajtimin e problemeve me kushte fillestare dhe gjerësisht i hedhur në tabela.

Megjithëse transformimi i Laplasit është zbuluar në shekullin e nëntëmbëdhjetë, ishte inxhinieri elektrik anglez Oliver Heaviside (1850 – 1925) që e bëri shumë të njohur këtë transformimin duke e përdorur atë për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshëm në qarqet dhe sistemet elektrike dhe më pas për të zhvilluar kalkulusin operacional modern. Duhet patur parasysh se jo të gjithë funksionet $f(t)$, ku t është një variabël i çfarëdoshëm janë të transformueshëm sipas Laplasit. Që një funksion $f(t)$ të jetë i transformueshëm sipas Laplasit duhet të plotësojë kushtet :

1. $f(t)$ duhet të jetë pjesë-pjesë i vazhdueshëm, domethënë ka një numër të fundëm pikash këputjeje të izoluar për $t > 0$.

2. $f(t)$ duhet të jetë me rend eksponencial, domethënë $f(t)$ duhet të jetë më i vogël ose i barabartë me $Me^{-a_0 t}$ për $t \rightarrow +\infty$, ku M është një konstante pozitive dhe a_0 një numër real pozitiv.

Transformimi i Laplasit aplikohet veçanërisht në problemet me kushte fillestare për uljen e rendit të derivatit të funksionit $f(t)$ në formën algjebrike. Një nga cilësitë e transformimit të Laplasit për problemet me kushte fillestare është mënyra sistematike për të cilën vlerat fillestare $f(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ janë të përfshira në njehsim. Transformimi i Laplasit gëzon mjaft veti interesante dhe këto janë disa nga arsyet që ai është një aparat mjaft i fuqishëm i analizës matematike.

Përkufizim 1.1.1 [1,3]

Transformimi i njëanshëm i Laplasit i funksionit $f(t)$ të përcaktuar në $[0, +\infty[$, i cili shënohet me $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} \exp(-st) \cdot f(t) dt, \quad \operatorname{Re}(s) > a \quad (1.1.1)$$

ku $\exp(-st)$ është bërthama e transformimit dhe s është variabël i transformimit i cili është një numër kompleks.

Në kushte të caktuara të $f(t)$, transformimi i tij $F(s)$ është analitik sipas s në gjysëmplanin, ku $\operatorname{Re}(s) > a$.

Përkufizim 1.1.2 [1,3]

Transformimi invers i Laplasit i cili shënohet me $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(st) \cdot F(s) ds, \quad c > 0 \quad (1.1.2)$$

ku $\mathcal{L}^{-1}$ quhet *operatori invers i transformimit të Laplasit*, c është një konstante reale e përshtatshme dhe $F(s)$ është funksion analitik i variablit kompleks s në gjysëmplanin e djathtë $\operatorname{Re}(s) > a$.

Të dy operatorët $\mathcal{L}$ dhe $\mathcal{L}^{-1}$ janë operator linear integral.

1.1b Vetitë e transformimit të Laplasit

Do të shqyrtojmë tani disa vetitë të shndërrimit të Laplasit të cilat formojnë aparatit e njehsimit operacional.

Teoremë 1.1.1 [1,3] (vetia e Linearitetit)

Në qoftë se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, $\mathcal{L}\{g(t)\} = G(s)$,

$$\text{atëherë: } \mathcal{L}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(s) + \beta G(s), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (1.1.3)$$

Teoremë 1.1.2 [1,3] (vetia e ngjashmërisë)

$$\text{Në qoftë se } \mathcal{L}\{f(t)\} = F(s), \text{ atëherë: } \mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0. \quad (1.1.4)$$

Teoremë 1. 1. 3 [1,3] (teorema e parë e zhvendosjes)

Në qoftë se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, atëherë : $\mathcal{L}\{\exp(-at) \cdot f(t)\} = F(s + a)$. (1.1.5)

Teoremë 1. 1. 4[1,3](teorema e dytë e zhvendosjes)

Në qoftë se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, atëherë: $\mathcal{L}\{f(t - a) \cdot H(t - a)\} = \exp(-as) \cdot F(s)$, $a > 0$
(1.1.6)

ose, në trajtë ekuivalente :

Në qoftë se $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, atëherë: $\mathcal{L}\{f(t) \cdot H(t - a)\} = \exp(-as) \cdot \mathcal{L}\{f(t + a)\}$ (1.1.7)

ku $H(t - a)$ është funksioni me hap njësi i Hevisajdit dhe $\mathcal{L}\{f(at + b)\} = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{bs}{a}\right) \cdot F\left(\frac{s}{a}\right)$, $a > 0$. (1.1.8)

Teoremë 1. 1. 4 [1,3] (ekzistenca e transformimit të Laplasit)

Në qoftë se $f(t)$ është pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe me rend eksponencial α , atëherë $\mathcal{L}\{f(t)\}$ ekziston, për $s > \alpha$.

Teoremë 1. 1. 5 [1]

Në qoftë se $f(t) = O(\exp(at))$ për $t \rightarrow +\infty$, atëherë:

transformimi i Laplasit $\int_0^{+\infty} \exp(-st) \cdot f(t) dt$ (1.1.9)

konvergjon uniformisht në lidhje me variablin t për $s \geq a_1$, ku $a_1 > a$.

Teoremë 1. 1. 6 [1,3] (teorema e derivimit të shëmbëllimit)

Le të jetë $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dhe $f(t)$ një funksion pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe me rend eksponencial α , atëherë:

për $s > \alpha$ $\mathcal{L}\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{d^n F}{ds^n}$ (1.1.10)

Teoremë 1. 1. 7 [1,3] *(teorema e derivimit të origjinalit)*

Në qoftë se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atëherë: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)\}. \quad (1.1.11)$

Teoremë 1. 1. 8 [1] *(teorema e integrimi të shëmbëllimit)*

Në qoftë se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atëherë:

a)

$$\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{+\infty} F(s) ds \quad (1.1.12)$$

b)

$$\int_0^{+\infty} F(s) ds = \int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt \quad (1.1.13)$$

Teoremë 1. 5. 6[1,3] *(teorema e integrimit të origjinalit)*

Në qoftë se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, atëherë: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s} \quad (1.1.14)$

Teoremë 1. 5. 7 [1] *(teorema e konvolucionit)*

Në qoftë se $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ dhe $G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\}$, atëherë: $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s) \cdot G(s) \quad (1.1.15)$

ose, në mënyrë ekuivalente

$$(f * g)(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} \quad (1.1.16)$$

ku

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau. \quad (1.1.17)$$

1.2 Transformimi Furie

1.2a Përkufizimi i transformimit Furie

Duke përdorur transformimin Furie mund të zgjidhen në mënyrë efektive shumë probleme lineare me kushte fillestare dhe kufitare në matematikën e aplikuar dhe shkencat inxhinierike, [1,7]. Këto transformime janë mjaft të përshtatshme për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale ose integrale për disa arsye.

Së pari, ekuacionet shndërrohen në ekuacione të thjeshtë algjebrike, gjë që mundëson gjetjen e zgjidhjes së funksionit të transformuar. Zgjidhja e ekuacionit të dhënë përftohet sipas variablit fillestar nga transformimi invers i tij.

Së dyti, transformimi Furie i funksioneve elementare përdoret për përcaktimin e zgjidhjes themelore që ilustron idenë bazë pas ndërtimit dhe implementimit të funksioneve të Grinit.

Së treti, zgjidhja e transformuar e kombinuar me teoremën e konvolucionit mundëson një paraqitje elegante të zgjidhjes për problemet me kushte fillestare dhe kufitare.

Përkufizim 1.2.1 [1,7]

Një funksion $f(t)$ plotëson kushtet Dirikle në intervalin $]-a, a[$ në qoftë se:

1. $f(t)$ ka një numër të fundëm pikash këputjeje në $]-a, a[$
2. $f(t)$ ka një numër të fundëm pikash minimum ose maksimum në $]-a, a[$

Nga teoria e serive Furie dihet se, në qoftë se $f(t)$ plotëson kushtet Dirikle në $]-a, a[$, ai mund të paraqitet në trajtën e serisë komplekse Furie të mëposhtme:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \cdot \exp\left(\frac{i n \pi t}{a}\right) \quad (1.2.1)$$

ku koeficientët janë

$$a_n = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a f(\xi) \cdot \exp\left(-\frac{i n \pi \xi}{a}\right) d\xi. \quad (1.2.2)$$

Formula integrale Furie e mëposhtme vlen për funksionet me funksione derivat pjesë-pjesë të vazhdueshëm në çdo interval të fundëm dhe absolutisht të integrueshëm në gjithë drejtëzën reale [1].

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \exp(-ik\xi) d\xi \right] \exp(ikt) dk. \quad (1.2.3)$$

Përkufizim 1.2.2 [1,7]

Funksioni $f(t)$ quhet *absolutisht i integrueshëm* në $]-\infty, +\infty[$ në qoftë se ekziston

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty. \quad (1.2.4)$$

Teoremë 1.1.1 [1,7] (Teorema Integrale Furie)

Në qoftë se $f(t)$ plotëson kushtet Dirikle në $]-\infty, +\infty[$ dhe është absolutisht i integrueshëm në $]-\infty, +\infty[$, atëherë integrali Furie (1.2.3) konvergjon tek funksioni $\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)]$ në një numër të fundëm pikash këputjeje. Me fjalë të tjera,

$$\frac{1}{2}[f(t+0) + f(t-0)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikt) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \exp(-ik\xi) d\xi \right] dk. \quad (1.2.5)$$

Teorema integrale Furie është trajtuar për herë të parë në librin “Teoria Analitike e Nxehtësisë” të botuar në 1822 dhe kjo teoremë është një nga rezultatet më të mëdha të analizës matematike moderne dhe ka aplikime të shumta fizike dhe inxhinierike.

Formula integrale Furie ka edhe një trajtë tjetër të dhënë si mëposhtë:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \cos[k(t - \xi)] d\xi. \quad (1.2.6)$$

Në mjaft probleme fizike, funksioni $f(t)$ anulohet mjaft shpejt për $|t| \rightarrow \infty$, gjë që siguron ekzistencën e integralit të përsëritur të shprehur nga formula (1.2.6). Nëse funksioni $f(t)$ është çift , përftojme *formulën integrale kosinus Furie* :

$$f(t) = f(-t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos(kt) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \cos(k\xi) d\xi. \quad (1.2.7)$$

Në mënyrë të ngjashme, për funksionin tek $f(t)$, përftojme *formulën integrale sinus Furie* :

$$f(t) = -f(-t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin(kt) dk \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot \sin(k\xi) d\xi. \quad (1.2.8)$$

Përkufizim 1.2.3 [1,7]

Transformimi Furie i funksionit $f(t)$, i cili shënohet me $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, $k \in \mathbb{R}$ përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ikt) \cdot f(t) dt \quad (1.2.9)$$

ku $\mathcal{F}$ quhet *operatori i transformimit Furie* ose transformimi Furie . Shpesh formula (1.2.9) njihet si transformimi kompleks Furie.

Përkufizim 1.2.4 [1,7]

Transformimi invers Furie përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(ikt) \cdot F(k) dk \quad (1.2.10)$$

dhe shënohet $\mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = f(t)$,

ku $\mathcal{F}^{-1}$ quhet *operatori invers i transformimit Furie*.

Të dy operatorët $\mathcal{F}$ dhe $\mathcal{F}^{-1}$ janë operator linear integral.

1.2b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit Furie

Do të shqyrtojmë tani disa veti të shndërrimit Furie të cilat formojnë aparatën e njehsimit operacional.

Teoremë 1.2.1 [1,3,7] (*vetia e linearitetit*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(k)$, atëherë:

$$\mathcal{F}\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(k) + \beta G(k), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \quad (1.2.11)$$

Teoremë 1.2.2 [1,3,7] (*teorema e zhvendosjes*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, atëherë: $\mathcal{F}\{f(t-a)\} = \exp(-ika) \cdot F(k)$. (1.2.12)

Teoremë 1.2.3 [1,3,7] (*teorema e translacionit*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, atëherë: $\mathcal{F}\{\exp(iat) \cdot f(t)\} = F(k-a)$. (1.2.13)

Teoremë 1.2.4 [1,3,7] (*Teorema e Dualitetit*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, atëherë: $\mathcal{F}\{F(t)\} = f(-k)$. (1.2.14)

Teoremë 1.2.5 [1,3,7] (*Kompozimi*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$ dhe $\mathcal{F}\{g(t)\} = G(k)$, atëherë:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (F(k) \cdot g(k)) \cdot \exp(ikt) dk = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cdot G(\xi - t) d\xi. \quad (1.2.15)$$

Teoremë 1.2.5 [1,3,7] (*Modulimi*)

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, atëherë:

$$\mathcal{F}\{f(t) \cdot \cos(at)\} = \frac{1}{2} [F(k - a) + F(k + a)], \quad (1.2.16)$$

$$\mathcal{F}\{f(t) \cdot \sin(at)\} = \frac{1}{2i} [F(k - a) - F(k + a)]. \quad (1.2.17)$$

Teoremë 1.2.6 [1,7]

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, $f(t)$ është funksion me funksion derivat pjesë-pjesë të vazhdueshëm dhe absolutisht i integrueshëm, atëherë:

- i. $F(k)$ është i kufizuar për $k \in]-\infty, +\infty[$
- ii. $F(k)$ është i vazhdueshëm për $k \in]-\infty, +\infty[$.

Teoremë 1.2.7 [1,3,7] (*Lema Riman-Lebeg*)

Në qoftë se $F(k) = \mathcal{F}\{f(t)\}$, atëherë: $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |F(k)| = 0$.

Teoremë 1.2.8 [1,3,7]

Në qoftë se $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(k)$, $f(t)$ është funksion n -herë i derivueshëm, derivati i rendit n është i vazhdueshëm dhe $f^{(k)}(t) \rightarrow 0$ për $|t| \rightarrow \infty$ dhe $k = 1, 2, \dots, (n - 1)$, atëherë:

transformimi Furie i derivatit të n -të është

$$\mathcal{F}\{f^{(n)}(t)\} = (ik)^n \cdot \mathcal{F}\{f(t)\} = (ik)^n \cdot F(k). \quad (1.2.18)$$

Përkufizim 1.2.5 [1,3,7]

Konvolucion të dy funksioneve të integrueshëm $f(t)$ dhe $g(t)$, i cili shënohet $(f * g)(t)$, përcaktohet në trajtën:

$$(f * g)(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - \xi) \cdot g(\xi) d\xi. \quad (1.2.19)$$

Zakonisht faktori $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ mund të hiqet nga formula (1.2.19) pasi nuk ndikon në vetitë e konvolucionit.

Teoremë 1.2.9 [1,7] (*Teorema e konvolucionit*)

Në qoftë se $F(k) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ dhe $G(k) = \mathcal{F}\{g(t)\}$, atëherë:

$$\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = F(k) \cdot G(k) \quad (1.2.20)$$

ose,

$$(f * g)(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k) \cdot G(k)\}. \quad (1.2.21)$$

1.3 Transformimi Sumudu

1.3a Përkufizimi i transformimit Sumudu

Transformimi Sumudu shërben për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshëm dhe ekuacioneve me derivate të pjesshme [4,7]. Ai ka mjaft veti interesante dhe është i thjeshtë dhe efikas në përdorim.

Përkufizim 1.3.1 [4,7]

Transformimi i njëanshëm Sumudu i funksionit $f(t)$ të përcaktuar në $[0, +\infty[$, i cili shënohet me $S\{f(t)\} = G(u)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$S\{f(t)\} = G(u) = \frac{1}{u} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{u}\right) \cdot f(t) dt, \quad u \in]-\tau_1, \tau_2[\quad (1.3.1)$$

ku $\frac{1}{u} \cdot \exp\left(-\frac{t}{u}\right)$ është *bërthama e transformimit* dhe u është *variabli i transformimit* i cili është një numër kompleks. Në kushte të caktuara të $f(t)$, transformimi i tij $G(u)$ është analitik sipas u , për $u \in]-\tau_1, \tau_2[$, ku $-\tau_1$ dhe τ_2 janë kufijtë e u .

Përkufizim 1.3.2 [4,7]

Transformimi invers Sumudu i cili shënohet me $S^{-1}\{G(u)\} = f(t)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$S^{-1}\{G(u)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(ut) \cdot G\left(\frac{1}{u}\right) \frac{du}{u}, \quad \operatorname{Re}(u) < \gamma \quad (1.3.2)$$

ku S^{-1} quhet *operatori invers i transformimit Sumudu*, γ është një konstante reale e përshtatshme dhe $G(u)$ është funksion analitik i variablilit kompleks u , për $\operatorname{Re}(u) < \gamma$.

Të dy operatorët S dhe S^{-1} janë operatorë linearë integralë.

1.3b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit Sumudu

Le të përmendim disa nga vetitë e transformimit Sumudu.

Teoremë 1.3. (vetia e Linearitetit) [4,7]

Në qoftë se $S\{f(t)\} = F(u)$, $S\{g(t)\} = G(u)$, atëherë:

$$S\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(u) + \beta G(u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.3.3)$$

Teoremë 1.3.2 (*Teorema e parë e zhvendosjes*) [4,7]

Në qoftë se $S\{f(t)\} = F(u)$, atëherë : $S\{\exp(at) \cdot f(t)\} = \left(\frac{1}{1-au}\right) \cdot F\left(\frac{u}{1-au}\right).$ (1.3.4)

Teoremë 1.3.3 (*Teorema e dytë e zhvendosjes*) [4,7]

Në qoftë se $S\{f(t)\} = F(u)$, atëherë:

$$S\{f(t-a) \cdot H(t-a)\} = \exp\left(-\frac{a}{u}\right) \cdot F(u), \text{ ku } a > 0 \quad (1.3.5)$$

ose, në trajtë ekuivalente

$$S\{f(t) \cdot H(t-a)\} = \exp\left(-\frac{a}{u}\right) \cdot S\{f(t+a)\} \quad (1.3.6)$$

ku $H(t-a)$ është funksioni me hap njësi i Hevisajdit.

Teoremë 1.3.4 (*Shkallëzimi*) [4,7]

Në qoftë se $S\{f(t)\} = F(u)$, atëherë : $S\{f(at)\} = F(au).$ (1.3.7)

Teoremë 1.3.5 [4,7] (*Ekzistenca e transformimit Sumudu*)

Në qoftë se $f(t)$ është pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe me rend eksponencial $\frac{1}{k}$, atëherë $S\{f(t)\}$ ekziston, për $u < k$.

Shënojmë:

$$A = \left\{ \begin{array}{l} f(t) | \exists M, \tau_1, \tau_2 > 0, \text{ të tillë që } |f(t)| \leq M \cdot \exp\left(\frac{|t|}{\tau_j}\right), \text{ në qoftë se } \\ t \in (-1)^j \times [0, +\infty[\end{array} \right\}$$

Teoremë 1.3.6 [4,7] (*Teorema e derivimit të origjinalit*)

Le të jetë $f(t) \in A$ dhe shënojmë me $G_n(u)$ transformimin Sumudu për $f^{(n)}(t)$, për $n \geq 1$ ka vend formula e mëposhtme:

$$S\{f^{(n)}(t)\} = G_n(u) = \frac{G(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{u^{n-k}}. \quad (1.3.8)$$

Teoremë 1.3.7 [4,7]

Le të jetë $G(u)$ transformimi Sumudu i funksionit $f(t) \in A$ dhe $G_k(u)$ derivati i rendit k i funksionit $G(u)$ në lidhje me variablin u . Atëherë, transformimi Sumudu i funksionit $t^n \cdot f(t)$ jepet nga formula e mëposhtme:

$$S\{t^n \cdot f(t)\} = u^n \left[\sum_{k=0}^n a_k^n \cdot u^k \cdot G_k(u) \right] \quad (1.3.9)$$

ku $a_0^n = n!$, $a_n^n = 1$, $a_1^n = n!n$, $a_{n-1}^n = n^2$ dhe për $k = 2, 3, \dots, n-2$,

$$a_k^n = a_{k-1}^{n-1} + (n+k) \cdot a_k^{n-1}. \quad (1.3.10)$$

Teoremë 1.3.8 [4,7] (*Teorema e konvolucionit*)

Le të jenë $f(t)$ dhe $g(t)$ dy funksione të përcaktuar në bashkësinë A të cilët kanë përkatësisht transformime të Laplasit $F(s)$ dhe $G(s)$ dhe transformime Sumudu $F(u)$ dhe $G(u)$. Atëherë, transformimi Sumudu për konvolucionin $(f * g)(t)$, jepet nga formula e mëposhtme:

$$S\{(f * g)(t)\} = u(F(u) \cdot G(u)) \quad (1.3.11)$$

ose, në mënyrë ekuivalente

$$(f * g)(t) = S^{-1}\{u(F(u) \cdot G(u))\} \quad (1.3.12)$$

ku

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t - \tau) \cdot g(\tau) d\tau. \quad (1.3.13)$$

1.4 Transformimi Elzaki

1.4a Përkufizimi i transformimit Elzaki

Transformimi Elzaki[5,6,7] është transformim linear dhe është i përdorshëm për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshëm dhe ekuacioneve me derivate të pjesshme. Ky transformim i ruan vetitë e transformimit Sumudu.

Përkufizim 1.4.1 [5,6,7] *Transformimi i njëanshëm Elzaki* i funksionit $f(t)$ të përcaktuar në $[0, +\infty[$, i cili shënohet me $E\{f(t)\} = T(u)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$E\{f(t)\} = T(u) = u \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{u}\right) \cdot f(t) dt, \quad u \in]-\tau_1, \tau_2[, \quad (1.4.1)$$

ku $u \cdot \exp\left(-\frac{t}{u}\right)$ është bërthama e transformimit dhe u është variabli i transformimit. Në kushte të caktuara të $f(t)$, transformimi i tij $T(u)$ është analitik sipas u , për $u \in]-\tau_1, \tau_2[$.

Përkufizim 1.4.2 [5,6,7] *Transformimi invers Elzaki* i cili shënohet me $E^{-1}\{T(u)\} = f(t)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$E^{-1}\{T(u)\} = f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \exp(ut) \cdot u \cdot T\left(\frac{1}{u}\right) du, \quad \operatorname{Re}(u) < \alpha \quad (1.4.2)$$

ku E^{-1} quhet *operatori invers i transformimit Elzaki*, α është një konstante reale e përshtatshme dhe $T(u)$ është funksion analitik i variablit kompleks u , për $\operatorname{Re}(u) < \alpha$.

1.4b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit Elzaki

Teoremë 1.4.1 [5,6,7] *(vetia e linearitetit)*

Në qoftë se $E\{f(t)\} = F(u)$, $E\{g(t)\} = G(u)$,

atëherë:

$$E\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F(u) + \beta G(u), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (1.4.3)$$

Teoremë 1.4.2 [5,6,7] *(Teorema e parë e zhvendosjes)*

$$\text{Në qoftë se } E\{f(t)\} = F(u), \text{ atëherë: } E\{\exp(-at) \cdot f(t)\} = (1 + au) \cdot F\left(\frac{u}{1+au}\right). \quad (1.4.4)$$

Teoremë 1.4.3 [5,6,7] (*Teorema e dytë e zhvendosjes*)

Në qoftë se $E\{f(t)\} = F(u)$, atëherë:

$$E\{f(t-a) \cdot H(t-a)\} = \exp\left(-\frac{a}{u}\right) \cdot F(u), \quad a > 0 \quad (1.4.5)$$

ose, në trajtë ekuivalente

$$E\{f(t) \cdot H(t-a)\} = \exp\left(-\frac{a}{u}\right) \cdot E\{f(t+a)\} \quad (1.4.6)$$

ku $H(t-a)$ është funksioni me hap njësi i Hevisajdit.

Teoremë 1.4.4 [5,6,7] (*Ekzistenca e transformimit Elzaki*)

Në qoftë se $f(t)$ është pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe me rend eksponencial $\frac{1}{k}$, atëherë $E\{f(t)\}$ ekziston, për $u < k$.

Teoremë 1.4.5 [5,6,7] (*Transformimi Elzaki për derivatet*)

Le të jetë $f(t) \in A$ dhe shënojmë me $T_n(u)$ transformimin Elzaki për $f^{(n)}(t)$. Atëherë, për $n \geq 1$ ka vend formula e mëposhtme:

$$E\{f^{(n)}(t)\} = T_n(u) = \frac{T(u)}{u^n} - \sum_{k=0}^{n-1} u^{2-n+k} \cdot f^{(k)}(0). \quad (1.4.7)$$

Teoremë 1.4.6 [5,6,7] (*Teorema e konvolucionit*)

Le të jenë $f(t)$ dhe $g(t)$ dy funksione të përcaktuar në bashkësinë A të cilët kanë përkatësisht transformime Elzaki $M(u)$ dhe $N(u)$. Atëherë, transformimi Elzaki për konvolucionin $(f * g)(t)$, jepet nga formula e mëposhtme:

$$E\{(f * g)(t)\} = \frac{1}{u} (M(u) \cdot N(u)) \quad (1.4.8)$$

ose, në mënyrë ekuivalente

$$(f * g)(t) = E^{-1} \left\{ \frac{1}{u} (M(u) \cdot N(u)) \right\} \quad (1.4.9)$$

ku

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau) \cdot g(\tau) d\tau \quad (1.4.10)$$

1.5 Transformimi Fundo-Kashuri

1.5a Përkufizimi i transformimit Fundo-Kashuri

Transformimi Fundo-Kashuri e ka prejardhjen nga integrali Furie, por ka një lidhje të ngushtë edhe me integralin e Laplasit. Transformimi i ri integral është krijuar për të thjeshtuar procesin e zgjidhjes së ekuacioneve diferenciale të zakonshëm dhe ekuacioneve me derivate të pjesshme në një fushë kohore [7] dhe është prezantuar në punimin e doktoraturës së A.Kashurit me udhëheqje të Prof.Asoc. Akli Fundo në Universitetin e Vlorës në vitin 2016.

Transformimi i ri integral përcaktohet për funksionet me rend eksponencial $\frac{1}{k^2}$. Konsiderojmë funksionet e përcaktuar në bashkësinë e mëposhtme D.

$$D = \left\{ f(t) \mid \exists M, k_1, k_2 > 0 \text{ të tillë që } |f(t)| \leq M \exp\left(\frac{|t|}{k_i^2}\right), \text{ nqs } t \in (-1)^i x [0, +\infty[\right\}$$

Për një funksion të dhënë në bashkësinë D, konstantja M duhet të jetë një numër i fundëm, k_1 dhe k_2 mund të jenë të fundëm ose të pafundëm.

Përkufizim 1.5.1 [7] Një funksion $f(t)$ quhet pjesë-pjesë i vazhdueshëm në segmentin $[a, b]$ në qoftë se $f(t)$ është i vazhdueshëm në çdo pikë të $[a, b]$, me përjashtim ndoshta të një numri të fundëm pikash këputjeje të $f(t)$. Një funksion $f(t)$ quhet pjesë-pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ në qoftë se $f(t)$ është pjesë-pjesë i vazhdueshëm në çdo pikë të $[0, N]$, për çdo $N > 0$.

Përkufizim 1.5.2 [7] Një funksion $f(t)$ quhet me rend eksponencial $\frac{1}{k^2}$, në qoftë se ekzistojnë konstantet pozitive T dhe M, të tilla që:

$$|f(t)| \leq M \cdot \exp\left(\frac{t}{k^2}\right), \quad \forall t \geq T. \quad (1.5.1)$$

Përkufizim 1.5.3 [7] Transformimi i ri i njëanshëm integral i cili shënohet me $K(\cdot)$, përcaktohet nga ekuacioni integral i mëposhtëm:

$$K\{f(t)\} = A(v) = \frac{1}{v} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t}{v^2}\right) \cdot f(t) dt, \quad t \geq 0, \quad v \in]-k_1, k_2[\quad (1.5.2)$$

ku $\frac{1}{v} \exp\left(-\frac{t}{v^2}\right)$ është bërthama e transformimit dhe v është variabli i transformimit i cili është një numër kompleks.

Përkufizim 1.5.4 [7,8] Për funksionin e dhënë $A(v)$ në qoftë se gjendet një funksion $f(t)$ i cili është i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe plotëson kushtin $K\{f(t)\} = A(v)$, atëherë $f(t)$ quhet transformimi i ri invers integral i $A(v)$ dhe shënohet,

$$f(t) = K^{-1}\{A(v)\} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \exp(vt) \cdot A\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) \frac{dv}{\sqrt{v}} \quad (1.5.3)$$

ku K^{-1} quhet *operatori invers i transformimit të ri* dhe c është një konstante reale e përshtatshme. Të dy operatorët K dhe K^{-1} janë operatorë linearë integralë .

1.5b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit Fundo-Kashuri

Teoremë 1. 5. 1 [7] (*Kushti i mjaftueshëm për ekzistencën e transformimit*)

Në qoftë se funksioni $f(t)$ është pjesë–pjesë i vazhdueshëm në $[0, +\infty[$ dhe me rend eksponencial $\frac{1}{k^2}$, atëherë egziston $K\{f(t)\}$ për $|v| < k$.

Teoremë 1. 5. 2 [7] (*vetia e linearitetit*)

Le të jenë $f(t)$, $f_1(t)$ dhe $f_2(t)$ funksione për të cilët egzistojnë transformimet e tyre integrale, për $|v| < k$ dhe le të jetë c një konstante. Atëherë, për $|v| < k$ kanë vend këto veti:

$$\begin{aligned} 1. \quad & K\{(f_1 + f_2)(t)\} = K\{f_1(t)\} + K\{f_2(t)\} \\ 2. \quad & K\{(cf)(t)\} = cK\{f(t)\} \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Teoremë 1. 5. 3 [7] (*Teorema e unicitetit*)

Në qoftë se $F(v)$ dhe $G(v)$ janë transformimet integrale të funksioneve $f(t)$ dhe $g(t)$ respektivisht, atëherë:

$$F(v) = G(v) \Rightarrow f(t) = g(t)$$

Teoremë 1. 5. 4 [7] (*teorema e derivimit të origjinalit*)

Le të jetë $A(v)$ transformimi i ri integral i funksionit $f(t)$, kanë vend këto veti:

$$1) \quad K\{f'(t)\} = \frac{A(v)}{v^2} - \frac{f(0)}{v} \quad (1.5.5)$$

$$2) \quad K\{f''(t)\} = \frac{A(v)}{v^4} - \frac{f(0)}{v^3} - \frac{f'(0)}{v} \quad (1.5.6)$$

$$3) \quad K\{f^{(n)}(t)\} = \frac{A(v)}{v^{2n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{v^{2(n-k)-1}} \quad (1.5.7)$$

4)

Teoremë 1.5.5 [7] (*Teorema e konvolucionit*)

Le të jenë $f(t)$ dhe $g(t)$ funksione të përcaktuar në bashkësinë D të cilët kanë transformime të Laplasit $F(s)$ dhe $G(s)$ dhe transformime integrale $M(v)$ dhe $N(v)$. Atëherë, transformimi i ri integral i konvolucionit të funksioneve $f(t)$ dhe $g(t)$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot g(t - \tau) d\tau \quad (1.5.8)$$

jepet nga formula e mëposhtme:

$$K\{(f * g)(t)\} = v(M(v) \cdot N(v)) \quad (1.5.9)$$

Teoremë 1.5.6 [7] (*Teorema e parë e translacionit*)

Le të jetë $f(t) \in D$ me transformim integral $A(v)$, atëherë:

$$K\{\exp(at) \cdot f(t)\} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-av^2}}\right) \cdot A\left[\frac{v}{\sqrt{1-av^2}}\right] \quad (1.5.10)$$

Teoremë 1.5.7 [7] (*Teorema e dytë e translacionit*)

Le të jetë $f(t) \in D$ me transformim të ri integral $A(v) = K\{f(t)\}$, atëherë:

transformimi integral i funksionit

$$g(t) = \begin{cases} f(t - \tau) & \text{në qoftë se } t \geq \tau, \\ 0 & \text{në qoftë se } t < \tau \end{cases}$$

jepet nga formula e mëposhtme:

$$K\{g(t)\} = \exp\left(-\frac{\tau}{v^2}\right) \cdot K\{f(t)\} \quad (1.5.11)$$

Teoremë 1.5.8 [7] (*teorema e shkallëzimit*)

Le të jetë $f(t) \in D$ me transformim të ri integral $A(v) = K\{f(t)\}$, atëherë:

$$K\{f(at + b)\} = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(\frac{b}{av^2}\right) \cdot A(\sqrt{a}v), \quad a > 0, b \in \mathbb{R}. \quad (1.5.12)$$

1.6 Transformimi Yang – Laplas

1.6a Përkufizimi i transformimit Yang – Laplas

Në vitet e fundit llogaritjet thyesore kanë gjetur shumë aplikime, në fusha të ndryshme , të shkencës dhe inxhinierisë. Ekuacionet diferenciale thyesore janë përdorur gjithmonë e më shumë për të modeluar problemet e mekanikës fluide, akustikës, biologjisë , elektromagnetizmit, difuzionit , përpunimit të sinjaleve, dhe shumë problemeve të tjera fizike [14 – 24]. Teknika të ndryshme analitike dhe numerike janë aplikuar me sukses në ekuacionet diferenciale , ekuacionet diferenciale thyesore dhe ekuacionet thyesore lokale . Transformime të tjera integrale janë krijuar gjatë dekadës së fundit . Një prej tyre është transformimi Yang-Laplas.

Përkufizim 1.6.1: Funksioni $f(t)$ quhet thyesor lokal i vazhdueshëm në pikën $x = x_0$ në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ egziston $\delta > 0$, ku $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ të tillë që për $|x - x_0| < \delta$ të jetë i vërtetë relacioni $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.
Kjo paraqitet në trajtën $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Përkufizim 1.6.2: Funksioni $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ quhet thyesor lokal i vazhdueshëm në intervalin (a, b) në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ egziston $\delta > 0$, ku $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ që të jetë i vërtetë relacioni $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.

Përkufizim 1.6.3: Derivati thyesor lokal i rendit α i funksionit $f(x)$ në pikën $x=x_0$ jepet nga formula

$$D_x^{(\alpha)} f(x_0) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)|_{x=x_0} = f^{(\alpha)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha} \quad (1.6.1)$$

$$\text{Ku } \Delta^\alpha (f(x) - f(x_0)) \cong \Gamma(\alpha + 1)(f(x) - f(x_0)) . \quad (1.6.2)$$

Përkufizim 1.6.4: Pikë ose element i segmentit $[a, b]$ përkufizohet një çift i renditur (t_j, t_{j+1}) për $j = 0, 1, \dots, N-1$ ku $t_0 = a$, $t_N = b$ dhe $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ dhe $\Delta t = \max\{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots\}$.

Përkufizim 1.6.5: Integrali thyesor lokal i funksionit $f(x)$ ne segmentin $[a, b]$ jepet nga formula

$${}_a I_b^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha. \quad (1.6.3)$$

Përkufizim 1.6.6: [21 – 23] Le të jetë $\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^{+\infty} |f(t)| (dt)^\alpha < K < \infty$

Transformimi i Yang – Laplasit për funksionin $f(x)$ përcaktohet nga integrali i mëposhtëm

$$L_\alpha\{f(t)\} = f_S^{L,\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^\infty E_\alpha(-s^\alpha t^\alpha) f(t) (dt)^\alpha \quad \text{ku } 0 < \alpha \leq 1, \quad (1.6.4)$$

ku $f(x)$ është funksion lokal thyesor i vazhdueshëm , integrali konvergjon dhe $s^\alpha \in R^\alpha$.

Përkufizim 1.6.7: [21 – 23] *Transformimi invers Yang - Laplas* i një funksioni të dhënë $f(x)$ cili shënohet me $L_\alpha^{-1}\{f_S^{L,\alpha}\} = f(t)$, përcaktohet nga integrali i mëposhtëm:

$$L_\alpha^{-1}\{f_S^{L,\alpha}\} = f(t) = \frac{1}{(2\pi)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha(s^\alpha x^\alpha) f_S^{L,\alpha}(s) (ds)^\alpha \quad (1.6.5)$$

Ku $s^\alpha = \beta^\alpha + i^\alpha \omega^\alpha$ dhe i^α është njësia imagjinare e s^α dhe $\text{Re}(s) = \beta > 0$.

Operatorët L_α dhe L_α^{-1} janë të dy transformime linearë.

1.6b Disa teorema dhe veti të transformimit të Yang – Laplasit

Teoremë 1. 6. 1: [21 – 23] (*Vetia e Linearitetit*)

Në qoftë se $L_\alpha\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s)$ dhe $L_\alpha\{g(x)\} = g_S^{L,\alpha}(s)$,

$$\text{atëherë: } L_\alpha\{\alpha f(x) + \beta g(x)\} = \alpha f_S^{L,\alpha}(s) + \beta g_S^{L,\alpha}(s), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \quad (1.6.6)$$

Teoremë 1. 6. 2: [21 – 23] (*Teorema e parë e zhvendosjes*)

$$\text{Në qoftë se } L_\alpha\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s), \text{ atëherë } L_\alpha\{E_\alpha(c^\alpha x^\alpha) f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s - c). \quad (1.6.7)$$

Teoremë 1. 6. 3: [21 – 23] (*Teorema e dytë e zhvendosjes*)

$$\text{Në qoftë se } L_\alpha\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s), \text{ atëherë } L_\alpha\{f(x - c)\} = f_S^{L,\alpha}(s) E_\alpha(-c^\alpha x^\alpha) \quad (1.6.8)$$

Teoremë 1. 6. 4: [21 – 23] (*Teorema e derivimit të origjinalit*)

Në qoftë se $L_\alpha\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s)$, atëherë:

$$L_{\alpha}\{f^{(k\alpha)}(x)\} = s^{k\alpha} f_S^{L,\alpha}(s) - s^{(k-1)\alpha} f(0) - s^{(k-2)\alpha} f^{(\alpha)}(0) - \dots - f^{((k-1)\alpha)}(0) \quad (1.6.9)$$

Teoremë 1.6.5: [21 – 23] (*Teorema e derivimit të shëmbëllimit*)

$$\text{Në qoftë se } L_{\alpha}\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s) \text{ , atëherë: } L_{\alpha}\{x^{k\alpha} f(x)\} = (-1)^k \frac{d^{k\alpha} f_S^{L,\alpha}(s)}{ds^{k\alpha}} \quad (1.6.10)$$

Teoremë 1.6.6 : [21 – 23] (*Teorema e parë e ngjashmërisë*)

$$\text{Në qoftë se } L_{\alpha}\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s) \text{ , atëherë } L_{\alpha}\{f(ax)\} = \frac{1}{a^{\alpha}} f_S^{L,\alpha}\left(\frac{s}{a}\right) \text{ ku } a > 0 . \quad (1.6.11)$$

Teoremë 1.6.7: [21 – 23] (*Teorema e dytë e ngjashmërisë*)

$$\text{Në qoftë se } L_{\alpha}\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s) \text{ , atëherë: } L_{\alpha}\{x^{k\alpha} E_{\alpha}(c^{\alpha} x^{\alpha})\} = \frac{\Gamma(1+k\alpha)}{(s-c)^{(k+1)\alpha}} . \quad (1.6.12)$$

Teoremë 1.6.8 [21 – 23]: (*Teorema e vlerës fillestare dhe përfundimtare*)

Le të jetë $f(x) \in C_{\alpha}(a, b)$ me transformim të Yang- Laplasit $L_{\alpha}\{f(x)\} = f_S^{L,\alpha}(s)$, atëherë:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{s \rightarrow \infty} s^{\alpha} f_S^{L,\alpha}(s) \quad (1.6.13)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{s \rightarrow 0} s^{\alpha} f_S^{L,\alpha}(s). \quad (1.6.14)$$

KAPITULLI II

2.1 Hyrje

Analiza thyesore është një fushë e matematikës së aplikuar që merret me derivate dhe integrale të një rendi arbitrar. Llogaritjet thyesore e kanë origjinën e tyre në vitet 1600 kur Leibnitz shtroi pyetjen: A është e mundur që kuptimi i derivimit të rendit $\frac{d^n y}{dx^n}$ të mund të shtrihet që të ketë kuptim, kur n të jetë një numër i çfarëdoshëm- irracional, thyesor ose kompleks? Në 1695 ai pohon se [9] “Nëse n është thyesë, kjo do të çojë në një paradoks, por, nga ky paradoks i dukshëm, një ditë do të nxirren pasoja të dobishme.”

Në 1697, Leibnitz duke iu referuar përdorimeve të pafundme të numrit $\frac{\pi}{2}$ të Wallis, deklaroi se llogaritjet diferenciale mund të përdoren për të arritur të njëjtin rezultat. Por, për herë të parë një derivat i një rendi arbitrar përmendet në një tekst në vitin 1819 [10]. Ishte matematikani francez S.F.Lacroix, i cili publikoi një tekst prej 700 faqesh për llogaritjet diferenciale dhe integrale, “*Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*”, dhe i kushton më pak se dy faqe kësaj teme. U deshën 279 vjet që nga koha kur L'Hopitali shtroi pyetjen që të shkruhej një tekst i cili ti përkushtohej tërësisht kësaj teme [11]. Euler dhe Furie i kanë përmendur derivatet e rendit arbitrar por ata nuk kanë dhënë shembuj. Aplikimin e parë e ka bërë Niels Henrik Abel [12] në 1823. Ai përdori llogaritjet thyesore në zgjidhjen e një ekuacioni integral e cila lindi në formulimin e problemit të ashtuquajtur “tautochrone”. Zgjidhja që i dha Abeli këtij problemi ishte kaq elegante sa ai tërhoqi vemendjen e Lioville [13], i cili bëri përpjekjen e parë të madhe për të dhënë një përkufizim llogjik të një derivati thyesor. Më pas me këtë temë u morën me seriozitet të tjerë shkencëtarë si Dirichlet, Orin J. Farrel, Bertram Ross, Bernoulli etj.

2.2 Një transformim i ri thyesor lokal α -integral

2.2a Përkufizimi i transformimit të ri thyesor lokal α -integral

Përkufizim 2.2.1: Funkzioni $f(x)$ quhet thyesor lokal i vazhdueshëm në pikën $x = x_0$ në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ egziston $\delta > 0$, ku $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ të tillë që për $|x - x_0| < \delta$ të jetë i vërtetë relacioni $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.

Kjo paraqitet në trajtën $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Përkufizim 2.2.2: Funkzioni $f(x) \in C_\alpha(a, b)$ quhet thyesor lokal i vazhdueshëm në intervalin $[a, b[$ në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ egziston $\delta > 0$, ku $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}$ që të jetë i vërtetë relacioni $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon^\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.

Le të jetë $f(x)$ një funksion i përcaktuar në fushën e funksioneve thyesore të vazhdueshëm në një interval $]a, b[$, $f(x) \in C_\alpha(a, b)$. Bashkësia e funksioneve që plotësojnë këtë kusht quhet bashkësia e Kantorit.

Përkufizim 2.2.3: Derivati thyesor lokal i rendit α i funksionit $f(x)$ në pikën $x=x_0$ jepet nga formula

$$D_x^{(\alpha)} f(x_0) = \frac{d^\alpha}{dx^\alpha} f(x)|_{x=x_0} = f^{(\alpha)}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta^\alpha (f(x) - f(x_0))}{(x - x_0)^\alpha}$$

$$\text{Ku } \Delta^\alpha (f(x) - f(x_0)) \cong \Gamma(\alpha + 1)(f(x) - f(x_0)).$$

Formulat e derivateve thyesore racionale të disa funksioneve speciale janë si më poshtë

Përkufizim 2.2.4: Le të jetë $g(x) \in C_\alpha(a, b)$ atëherë derivati arbitrar i rendit α jepet nga formula

$$D_x^{(\alpha)} a g(x) = a D_x^{(\alpha)} g(x). \quad (2.2.1)$$

Shembull 2.2.1: Derivati arbitrar i rendit α i funksionit $\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)}$ jepet nga formula

$$\frac{d^\alpha}{dx^\alpha} \left(\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right) = \frac{x^{(n-1)\alpha}}{\Gamma(1+(n-1)\alpha)} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.2)$$

Shembull 2.2.2: Derivati arbitrar i rendit α i funksionit $x^{k\alpha}$ jepet nga formula

$$\frac{d^\alpha x^{k\alpha}}{dx^\alpha} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} x^{(k-1)\alpha}. \quad (2.2.3)$$

Shembull 2.2.3: Le të jetë $E_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)}$ funksioni Mittag – Leffler, atëherë

derivati arbitrar i rendit α i funksionit jepet nga formula

$$\frac{d^\alpha E_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = E_\alpha(x^\alpha). \quad (2.2.4)$$

Shembull 2.2.4: Le të jetë $\sin_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2k+1)\alpha)}$ funksioni thyesor lokal sinusoidal, atëherë derivati thyesor lokal i këtij funksioni jepet nga formula

$$\frac{d^\alpha \sin_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = \cos_\alpha(x^\alpha). \quad (2.2.5)$$

Shembull 2.2.5: Le të jetë $\cos_\alpha(x^\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k\alpha}}{\Gamma(1+2k\alpha)}$ funksioni thyesor lokal kosinusoidal,

atëherë derivati thyesor lokal i këtij funksioni jepet nga formula

$$\frac{d^\alpha \cos_\alpha(x^\alpha)}{dx^\alpha} = -\sin_\alpha(x^\alpha). \quad (2.2.6)$$

Përkufizim 2.2.5: Pikë ose element i segmentit $[a, b]$ përkufizohet një çift i renditur (t_j, t_{j+1}) për $j = 0, 1, \dots, N-1$, ku $t_0 = a$, $t_N = b$ dhe $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ dhe $\Delta t = \max\{\Delta t_0, \Delta t_1, \dots\}$.

Përkufizim 2.2.6: Integrali thyesor lokal i funksionit $f(x)$ ne segmentin $[a, b]$ jepet nga formula

$${}_a I_b^{(\alpha)} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b f(t) (dt)^\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) (\Delta t_j)^\alpha. \quad (2.2.7)$$

Më poshtë janë dhënë formulat e integraleve thyesorë lokale të disa funksioneve.

Shembull 2.2.6:

$${}_0 I_x^{(\alpha)} a g(x) = a {}_0 I_x^{(\alpha)} g(x). \quad (2.2.8)$$

Shembull 2.2.7: Integrali thyesor lokal i rendit α për funksionin $\frac{x^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)}$ jepet nga formula

$${}_0 I_t^{(\alpha)} \left(\frac{x^{n\alpha}}{\Gamma(1+n\alpha)} \right) = \frac{x^{(n+1)\alpha}}{\Gamma(1+(n+1)\alpha)} \quad n \in \mathbb{N}. \quad (2.2.9)$$

Përkufizim 2.2.7: Le të jetë $f(x)$ një funksion thyesor lokal periodik me periodë $2l$. Për $k \in \mathbb{Z}$ and $f(x) \in C_\alpha(a, b)$, seria Furie thyesore lokale e $f(x)$ përkufizohet si

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos_\alpha \left(\frac{k\pi x}{l} \right)^\alpha + b_k \sin_\alpha \left(\frac{k\pi x}{l} \right)^\alpha \right) \quad (2.2.10)$$

ku

$$a_k = \frac{2}{l^\alpha} \int_{-1}^1 f(x) \cos_\alpha \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^\alpha (dx)^\alpha \quad (2.2.11)$$

$$b_k = \frac{2}{l^\alpha} \int_{-1}^1 f(x) \sin_\alpha \left(\frac{n\pi x}{l} \right)^\alpha (dx)^\alpha \quad (2.2.12)$$

janë koeficientët thyesorë lokalë Furie.

Përkufizim 2.2.8: Funksioni $f(t) \in C_\alpha(a, b)$ quhet me rritje eksponenciale thyesore lokale $\left(\frac{1}{k^2}\right)^\alpha$ në qoftë se për çdo $t \in (a, b)$, egzistojnë konstantet pozitive M, T , të tilla që :

$$|f(t)| \leq M E_\alpha \left(\frac{t}{k^2} \right)^\alpha, \text{ për çdo } t \geq T. \quad (2.2.13)$$

Transformimi α – integral është një hibridizim i transformimit Yang – Laplas dhe transformimit Fundo-Kashuri. Ky transformim është krijuar për të thjeshtuar punën llogaritëse të ekuacioneve diferenciale të zakonshme dhe ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme të rendit $k\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.

Përkufizim 2.2.9: Le të jetë $f(t)$ një funksion i përcaktuar në fushën e funksioneve të

vazhdueshëm thyesorë lokalë në një interval $]a, b[$, $f(t) \in C_\alpha(a, b)$ që plotëson kushtet:

- a) $f(t)$ është funksion me rritje eksponencialle të rendit $\frac{1}{k^{2\alpha}}$
- b) $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} |f(t)|(dt)^\alpha < K < \infty$.

Transformimi i ri α - integral thyesor lokal për funksionin $f(t)$ ka trajtën

$$K_\alpha \{f(t)\} = A_{\alpha, f}(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (2.2.14)$$

ku E_α është funksioni Mittag-Leffler.

$\frac{1}{v^\alpha} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right)$ është bërthama e këtij transformimi, $f(t)$ quhet funksion origjinal,

$K_\alpha \{f(t)\} = A_{\alpha, f}(v)$ quhet funksion shëmbëllim, kurse integrali quhet transformim α -integral.

2.2b Disa teorema dhe veti bazë të transformimit të ri thyesor lokal α -integral

Teoremë 2.2.1: (Kushti i mjaftueshëm për ekzistencën e transformimit të ri thyesor lokal α -integral)

Le të jetë funksioni $f(t) \in C_\alpha(a, b)$. Në qoftë se funksioni i dhënë ka rend eksponencial $\frac{1}{k^{2\alpha}}$ dhe egziston $\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} |f(t)|(dt)^\alpha < K < \infty$, atëherë egziston

$$K_\alpha \{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha \quad \text{për } |v| < k.$$

Vërtet: Për të treguar ekzistencën e integralit të mësipërm mjafton të tregojmë që ai konvergjon për $|v| < k$.

Nga vetitë e integraleve kemi:

$$K_\alpha \{f(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^T E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_T^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha, \quad (2.2.15)$$

ku K zgjidhet e tillë që të plotësohet barazimi $|f(t)| \leq ME_\alpha \left(\frac{t}{k^2}\right)^\alpha$.

Integrali i parë në formulën (2.3.15) egziston sepse funksionet $f(t)$ dhe $E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right)$ janë funksione thyesore lokale të vazhdueshme në $[0, T[$, për cdo v të fiksuar. Për të treguar që integrali shumë konvergjon, përdorim kriterin e krahasimit për integralet jo të vetë.

Meqënëse funksioni $f(t)$ plotëson barazimin $|f(t)| \leq ME_\alpha \left(\frac{t}{k^2}\right)^\alpha$,

për çdo $t \geq T$ kemi:

$$\begin{aligned} \left| E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) \right| &\leq E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) |f(t)| \leq ME_\alpha \left(\frac{t}{k^2}\right)^\alpha E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) \\ &\leq ME_\alpha\left(-t\left(\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Për $|v| < k$ kemi:

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_T^{+\infty} ME_\alpha\left(-t\left(\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right) (dt)^\alpha \leq \frac{ME_\alpha\left(-T\left(\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right)}{\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{1}{k^{2\alpha}}} < +\infty. \quad (2.2.17)$$

Meqënëse,

$$\left| E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) \right| \leq ME_\alpha\left(-t\left(\frac{1}{v^{2\alpha}} - \frac{1}{k^{2\alpha}}\right)\right)$$

për çdo $t \geq T$ dhe integrali jo i vetë që dominon konvergjon për $|v| < k$, atëherë nga kriteri i krahasimit del që

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_T^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha \text{ konvergjon për } |v| < k.$$

Meqënëse të dy integralet e shumës në formulën (2.2.15) egzistojnë, del që transformimi i ri α -integral $K_\alpha\{f(t)\}$ egziston për $|v| < k$.

Le të gjejmë transformimet e disa funksioneve:

Shembull 2.2.8:

Jepet funksioni $u(t) = \begin{cases} 1 & \text{për } t \geq 0 \\ 0 & \text{për } t < 0 \end{cases}$, atëherë transformimi i tij α -integral është:

$$K_{\alpha}\{u(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) (dt)^{\alpha} = -\frac{1}{v^{\alpha}} (-v^{2\alpha}) = v^{\alpha}. \quad (2.2.18)$$

Shembull 2.2.9: Jepet funksioni $f(t) = E_{\alpha}(a^{\alpha} t^{\alpha})$, atëherë transformimi i tij α -integral është:

$$\begin{aligned} K_{\alpha}\{E_{\alpha}(a^{\alpha} t^{\alpha})\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) E_{\alpha}(a^{\alpha} t^{\alpha}) (dt)^{\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{1}{v^{2\alpha}} - a^{\alpha}\right) t^{\alpha}\right) (dt)^{\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(1 - a^{\alpha} v^{2\alpha}\right) \frac{t^{\alpha}}{v^{2\alpha}}\right) (dt)^{\alpha} \\ &= \frac{1}{v^{\alpha}} \frac{v^{2\alpha}}{1 - a^{\alpha} v^{2\alpha}} \\ &= \frac{v^{\alpha}}{1 - a^{\alpha} v^{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.2.19)$$

Shembull 2.2.10: Jepet funksioni $f(t) = t^{k\alpha}$, atëherë transformimi i tij α -integral është:

$$K_{\alpha}\{t^{k\alpha}\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} \exp_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) t^{k\alpha} (dt)^{\alpha}. \quad (2.2.20)$$

E llogarisim këtë integral me metodën e zëvendësimit.

Zëvendësojmë në formulën (2.2.20)

$$-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha} = -u^{\alpha} \leftrightarrow -t^{\alpha} = -u^{\alpha} v^{2\alpha} \leftrightarrow (dt)^{\alpha} = v^{2\alpha} (du)^{\alpha}$$

dhe kemi:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}(-u^{\alpha}) (u^{\alpha} v^{2\alpha})^k v^{2\alpha} (dt)^{\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} v^{2\alpha k + 2\alpha} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}(-u^{\alpha}) u^{k\alpha} (du)^{\alpha} \\ &= v^{\alpha(2k+1)} \Gamma(\alpha k + 1). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Teoremë 2.2.2: (Vetia e linearitetit)

Le të jenë $K_\alpha\{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v)$ dhe $K_\alpha\{g(t)\} = A_{\alpha,g}(v)$ transformimet thyesore lokale α -integrale të funksioneve $f(t)$ dhe $g(t)$, atëherë është i vërtetë barazimi

$$K_\alpha\{af(t) + bg(t)\} = aK_\alpha\{f(t)\} + bK_\alpha\{g(t)\}. \quad (2.2.22)$$

Vërtet:

$$\begin{aligned} K_\alpha\{af(t) + bg(t)\} &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\frac{t}{v^2}\right) [af(t) + bg(t)] (dt)^\alpha \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) af(t) (dt)^\alpha + \\ &\quad \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) bg(t) (dt)^\alpha \\ &= a \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) f(t) (dt)^\alpha + b \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) g(t) (dt)^\alpha \\ &= aK_\alpha\{f(t)\} + bK_\alpha\{g(t)\}. \end{aligned}$$

Si zbatim të kësaj vetie po gjejmë shembëllimet e disa funksioneve si $\sin_\alpha(t^\alpha)$, $\cos_\alpha(t^\alpha)$, $\sinh_\alpha(t^\alpha)$, $\cosh_\alpha(t^\alpha)$.

Shembull 2.2.10 : Jepet funksioni $\sin_\alpha(t^\alpha)$, dimë që:

$$\sin_\alpha(t^\alpha) = \frac{1}{2i^\alpha} \left(E_\alpha((it)^\alpha) - E_\alpha((-it)^\alpha) \right). \quad (2.2.23)$$

Zbatojmë transformimin e ri α -integral në barazimin (2.2.23) dhe do të kemi:

$$K_\alpha\{\sin_\alpha(x^\alpha)\} = K_\alpha\left\{ \frac{1}{2i^\alpha} \left(E_\alpha((it)^\alpha) - E_\alpha((-it)^\alpha) \right) \right\}. \quad (2.2.24)$$

Nga vetia e linearitetit kemi:

$$= \frac{1}{2i^\alpha} (K_\alpha\{E_\alpha((it)^\alpha)\} - K_\alpha\{E_\alpha((-it)^\alpha)\})$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2i^\alpha} \left(\frac{v^\alpha}{1-i^\alpha v^{2\alpha}} - \frac{v^\alpha}{1+i^\alpha v^{2\alpha}} \right) \\
 &= \frac{1}{2i^\alpha} \left(\frac{v^\alpha + i^\alpha v^{3\alpha} - v^\alpha + i^\alpha v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} \right) \\
 &= \frac{1}{2i^\alpha} \frac{2i^\alpha v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} \\
 &= \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

Shembull 2.3.11: Jepet funksioni $\cos_\alpha(t^\alpha)$, dimë që:

$$\cos_\alpha(t^\alpha) = \frac{1}{2} \left(E_\alpha((it)^\alpha) + E_\alpha((-it)^\alpha) \right). \tag{2.2.26}$$

Zbatojmë transformimin e ri α -integral në barazimin (2.2.26) dhe do të kemi:

$$K_\alpha\{\cos_\alpha(x^\alpha)\} = K_\alpha\left\{\frac{1}{2} \left(E_\alpha((it)^\alpha) + E_\alpha((-it)^\alpha) \right)\right\}.$$

Nga vetia e linearitetit kemi:

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} (K_\alpha\{E_\alpha((it)^\alpha)\} + K_\alpha\{E_\alpha((-it)^\alpha)\}) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{v^\alpha}{1-i^\alpha v^{2\alpha}} + \frac{v^\alpha}{1+i^\alpha v^{2\alpha}} \right) \\
 &= \frac{1}{2i^\alpha} \left(\frac{v^\alpha + i^\alpha v^{3\alpha} + v^\alpha - i^\alpha v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{2v^\alpha}{1+v^{4\alpha}} \\
 &= \frac{v^\alpha}{1+v^{4\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

Shembull 2.2.12: Jepet funksioni $\sinh_\alpha(t^\alpha)$, dimë që:

$$\sinh_\alpha(t^\alpha) = \frac{1}{2} \left(E_\alpha(t^\alpha) - E_\alpha(-t^\alpha) \right). \tag{2.2.28}$$

Zbatojmë transformimin e ri α -integral në barazimin (2.2.28) dhe do të kemi:

$$K_{\alpha}\{sinh_{\alpha}(t^{\alpha})\} = K_{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(E_{\alpha}(t^{\alpha})-E_{\alpha}(-t^{\alpha}))\right\}.$$

Nga vetia e linearitetit kemi:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(K_{\alpha}\{E_{\alpha}(t^{\alpha})\} - K_{\alpha}\{E_{\alpha}(-t^{\alpha})\}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} - \frac{v^{\alpha}}{1+v^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{v^{\alpha}+v^{3\alpha}-v^{\alpha}+v^{3\alpha}}{1-v^{4\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2v^{3\alpha}}{1-v^{4\alpha}} \\ &= \frac{v^{3\alpha}}{1-v^{4\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.2.29}$$

Shembull 2.2.13: Jepet funksioni $cosh_{\alpha}(t^{\alpha})$, përdorim formulën:

$$cosh_{\alpha}(t^{\alpha}) = \frac{1}{2}(E_{\alpha}(t^{\alpha})+E_{\alpha}(-t^{\alpha})). \tag{2.2.30}$$

Zbatojmë transformimin e ri α -integral dhe do të kemi:

$$K_{\alpha}\{cosh_{\alpha}(x^{\alpha})\} = K_{\alpha}\left\{\frac{1}{2}(E_{\alpha}(t^{\alpha})+E_{\alpha}(-t^{\alpha}))\right\}.$$

Nga vetia e linearitetit kemi:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(K_{\alpha}\{E_{\alpha}(t^{\alpha})\} + K_{\alpha}\{E_{\alpha}(-t^{\alpha})\}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} + \frac{v^{\alpha}}{1+v^{2\alpha}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{2v^{\alpha}}{1-v^{4\alpha}} \\ &= \frac{v^{\alpha}}{1-v^{4\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.2.31}$$

Teoremë 2.2.3: (*Teorema e zhvendosjes*)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë:

$$K_{\alpha}\{E_{\alpha}(c^{\alpha}t^{\alpha})f(t)\} = A_{\alpha,f}(1 - v^2 c). \tag{2.2.32}$$

Vërtet:

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha}\{E_{\alpha}(c^{\alpha}t^{\alpha})f(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) E_{\alpha}(c^{\alpha}t^{\alpha})f(t)(dt)^{\alpha} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha} + c^{\alpha}t^{\alpha}\right)f(t)(dt)^{\alpha} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\frac{(1-(v^2c)^{\alpha})}{v^{2\alpha}}t^{\alpha}\right)f(t)(dt)^{\alpha} \\
 &= A_{\alpha,f}(1 - v^2 c) .
 \end{aligned}$$

Teoremë 2.2.4: (*Teorema e ngjashmërisë*)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë transformimi α – integral i funksionit $f(at)$ është: $\frac{1}{a^{\alpha}}A_{\alpha,f}\left(\frac{v}{a}\right)$ ku $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Pra, } K_{\alpha}\{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v), \rightarrow K_{\alpha}\{f(at)\} = \frac{1}{a^{\alpha}}A_{\alpha,f}\left(\frac{v}{a}\right). \quad (2.2.33)$$

Vërtet:

$$K_{\alpha}\{f(at)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(at)(dt)^{\alpha}. \quad (2.2.34)$$

E llogarisim këtë integral me metodën e zëvendësimit.

Zëvendësojmë në formulën (2.2.34)

$$u = at \leftrightarrow u^{\alpha} = a^{\alpha}t^{\alpha} \leftrightarrow (dt)^{\alpha} = \frac{(du)^{\alpha}}{a^{\alpha}}$$

dhe kemi:

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha}\{f(at)\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{u}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(u) \frac{(du)^{\alpha}}{a^{\alpha}} \\
 &= \frac{1}{a^{\alpha}} \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\frac{1}{a^{\alpha}}\left(\frac{u}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(u)(du)^{\alpha} \\
 &= \frac{1}{a^{\alpha}} A_{\alpha,f}\left(\frac{v}{a}\right).
 \end{aligned}$$

Teoremë 2.2.5: (*Teorema e derivueshmërisë së rendit α të origjinalit*)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë transformimi α – integral i $f^{(\alpha)}(t)$ është: $\frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha}} - \frac{f(0)}{v^\alpha}$.

$$\text{Pra, } K_\alpha\{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v) \rightarrow K_\alpha\{f^{(\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha}} - \frac{f(0)}{v^\alpha}. \quad (2.3.35)$$

Vërtet:

$$K_\alpha\{f^{(\alpha)}(t)\} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) f^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha$$

Përdorim metodën e integrit me pjesë dhe kemi:

$$u = \exp_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) \quad dl = f^{(\alpha)}(t) (dt)^\alpha$$

$$du = -\frac{1}{v^{2\alpha}} E_\alpha\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^\alpha\right) (dt)^\alpha \quad l = \int (d(f(t)))^\alpha = f(t)$$

$$\begin{aligned} K_\alpha\{f^{(\alpha)}(t)\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} f(t) E_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) \Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} (-\frac{1}{v^{2\alpha}}) E_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) f(t) (dt)^\alpha \\ &= \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha}} - \frac{f(0)}{v^\alpha}. \end{aligned}$$

Teoremë 2.2.6: (*Teorema e derivueshmërisë së rendit $n\alpha$ të origjinalit*)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë transformimi α – integral

$$\text{i } f^{(n\alpha)}(t) \text{ është } \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2(n-k)-1)\alpha}}.$$

$$K_\alpha\{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v) \rightarrow K_\alpha\{f^{(n\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2(n-k)-1)\alpha}}. \quad (2.2.36)$$

Vërtet:

Le ta vërtetojmë këtë veti me metodën e induksionit matematik.

$$\text{Për } i=1 \text{ është e vërtetë } K_\alpha\{f^{(\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha}} - \frac{f(0)}{v^\alpha}.$$

E supozojmë të vërtetë për $1 < i \leq n-1$, pra supozojmë se është e vërtetë

$$K_\alpha \{f^{(i\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha i}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(i\alpha)}(0)}{v^{(2(i-k)-1)\alpha}} \quad (2.2.37)$$

Ta vërtetojmë për $i=n$.

Përdorim teoremën 2.2.5 dhe kemi:

$$K_\alpha \{f^{(n\alpha)}(t)\} = \frac{K_\alpha \{f^{(n-1)\alpha}(t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{f^{(n-1)\alpha}(0)}{v^\alpha}.$$

Përdorim supozimin e bërë në formulën (2.2.37) dhe kemi :

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{v^{2\alpha}} \left\{ \frac{K_\alpha \{f^{(n\alpha)}(t)\}}{v^{2(n-1)\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2(n-(k+1))-1)\alpha}} \right\} - \frac{f^{(n-1)\alpha}(0)}{v^\alpha} \\ &= \frac{K_\alpha \{f^{(n\alpha)}(t)\}}{v^{2\alpha n}} - \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2n-2k-2-1)\alpha+2\alpha}} + \frac{f^{(n-1)\alpha}(0)}{v^\alpha} \right\} \\ &= \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha n}} - \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2(n-k)-1)\alpha}} + \frac{f^{(n-1)\alpha}(0)}{v^\alpha} \right\} \\ &= \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha n}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{(2(n-k)-1)\alpha}}. \end{aligned}$$

U vërtetua

Teoremë 2.2.7: (Relacioni i dualitetit me transformimin Yang- Laplasit.)

Le të jetë $f(t) \in C_\infty(a, b)$ me transformim të Yang- Laplasit $f_s^{L,\alpha}(s)$, ku

$$L_\alpha \{f(t)\} = f_s^{L,\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} E_\alpha(-(st)^\alpha) f(t) (dt)^\alpha$$

për $0 < \alpha \leq 1$. Ku integrali i vonuar konvergjon dhe $S^\alpha \in \mathbb{R}^\alpha$, atëherë transformimi i ri α -integral

$$K_\alpha \{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) f(t) (dt)^\alpha$$

$$\text{i funksionit } f(t) \text{ jepet nga relacioni i mëposhtëm } A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{v^\alpha} f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right). \quad (2.2.38)$$

Vërtet:

Le të jetë $f(t) \in C_\alpha(a, b)$, atëherë për $v \in]-k_1, k_2[$ kemi këtë transformim ekuivalent

$$A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} v^\alpha \int_0^{+\infty} E_\alpha(-t^\alpha) f(v^{2\alpha} t^\alpha) (dt)^\alpha \quad (2.2.39)$$

zëvendësojmë në formulën (2.2.39) $w^\alpha = v^{2\alpha} t^\alpha$ marrim $t^\alpha = \frac{w^\alpha}{v^{2\alpha}}$ dhe $(dt)^\alpha = \frac{(dw)^\alpha}{v^{2\alpha}}$,

atëherë kemi:

$$\begin{aligned} A_{\alpha,f}(v) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} v^\alpha \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\frac{w^\alpha}{v^{2\alpha}}\right) f(w^\alpha) \frac{(dw)^\alpha}{v^\alpha} \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha\left(-\frac{w^\alpha}{v^{2\alpha}}\right) f(w^\alpha) (dw)^\alpha \\ &= \frac{1}{v^\alpha} f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right). \end{aligned}$$

U vërtetua.

Teoremë 2.2.8 : (*Teorema e unicitetit të shëmbëllimit*)

Në qoftë se $A_{\alpha,f}(v)$ dhe $A_{\alpha,g}(v)$ janë transformimet α - integrale të funksioneve $f(t)$ dhe $g(t)$, atëherë

$$A_{\alpha,f}(v) = A_{\alpha,g}(v) \Rightarrow f(t) = g(t). \quad (2.2.40)$$

Vërtet:

$$\begin{aligned} A_{f,\alpha}(v) &= A_{g,\alpha}(v) \\ K_\alpha\{f(t), v^\alpha\} &= K_\alpha\{g(t), v^\alpha\} \end{aligned}$$

Nga dualiteti me transformimin e Yang-Laplasit $A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{v^\alpha} f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right)$ kemi:

$$\frac{1}{v^\alpha} L_\alpha\left\{f(t), \frac{1}{v^{2\alpha}}\right\} = \frac{1}{v^\alpha} L_\alpha\left\{g(t), \frac{1}{v^{2\alpha}}\right\}$$

$$L_{\alpha}\left\{f(t), \frac{1}{v^{2\alpha}}\right\} = L_{\alpha}\left\{g(t), \frac{1}{v^{2\alpha}}\right\}$$

Nga uniciteti i transformimit të Yang- Laplasit kemi:

$$f(t) = g(t)$$

u vërtetua.

Teoremë 2.2.9 : (Teorema e derivimit të rendit α të shëmbëllimit)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë transformimi α – integral i funksionit $tf(t)$ është $\frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v)$

$$\text{Pra, } K_{\alpha}\{tf(t)\} = \frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v). \quad (2.2.41)$$

Vërtet:

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi i ri thyesor lokal α – integral i funksionit $f(t) \in C_{\alpha}(a, b)$, atëherë edhe funksioni $tf(t) \in C_{\alpha}(a, b)$. Le të marim derivatin e rendit α të funksionit $A_{\alpha,f}(v)$ dhe do të kemi:

$$\begin{aligned} \frac{d^{\alpha} A_{\alpha,f}(v)}{dv^{\alpha}} &= A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) = \frac{d^{\alpha}}{dv^{\alpha}} \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^{\alpha}} \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(t) (dt)^{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \frac{\partial^{\alpha}}{\partial v^{\alpha}} \left[\frac{1}{v^{\alpha}} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(t) (dt)^{\alpha} \right] \\ &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{v^{2\alpha}} \right) E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(t) (dt)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v^{\alpha}} \right) \left(\frac{2t}{v^{3\alpha}} \right) E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(t) (dt)^{\alpha} \\ &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(-\frac{1}{v^{2\alpha}} \right) \int_0^{+\infty} E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) f(t) (dt)^{\alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \left(\frac{2}{v^{3\alpha}} \right) \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{v^{\alpha}} \right) E_{\alpha}\left(-\left(\frac{t}{v^2}\right)^{\alpha}\right) (tf(t)) (dt)^{\alpha} \\ &= \left(-\frac{1}{v^{\alpha}} \right) K_{\alpha}\{f(t)\} + \left(\frac{2}{v^{3\alpha}} \right) K_{\alpha}\{tf(t)\}, \end{aligned}$$

atëherë do të kemi:

$$K_{\alpha}\{tf(t)\} = \frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v) .$$

U vërtetua.

Teoremë 2.2.10 : (Teorema e derivimit të rendit 2α të shëmbëllimit)

Le të jetë $A_{\alpha,f}(v)$ transformimi α – integral i funksionit $f(t)$, atëherë transformimi α – integral i funksionit $t^2 f(t)$ është $\frac{v^{6\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(2\alpha)}(v) + \frac{5v^{5\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{3v^{4\alpha}}{4} A_{\alpha,f}(v)$

$$\text{Pra, } K_{\alpha}\{t^2 f(t)\} = \frac{v^{6\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(2\alpha)}(v) + \frac{5v^{5\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{3v^{4\alpha}}{4} A_{\alpha,f}(v). \quad (2.2.42)$$

Vërtet:

nga teorema 2.2.9 kemi:

$$\begin{aligned} K_{\alpha}\{t^2 f(t)\} &= K_{\alpha}\{t(t f(t))\} = \frac{v^{3\alpha}}{2} \frac{d^{\alpha} K_{\alpha}\{t f(t)\}}{dv^{\alpha}} + \frac{v^{2\alpha}}{2} K_{\alpha}\{t f(t)\} \\ &= \frac{v^{3\alpha}}{2} \frac{d^{\alpha}}{dv^{\alpha}} \left[\frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v) \right] + \frac{v^{2\alpha}}{2} \left[\frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v) \right] \\ &= \frac{v^{3\alpha}}{2} \left[\frac{3v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(2\alpha)}(v) + v^{\alpha} A_{\alpha,f}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) \right] \\ &\quad + \frac{v^{5\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{4\alpha}}{4} A_{\alpha,f}(v) \\ &= \frac{v^{6\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(2\alpha)}(v) + \frac{5v^{5\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{3v^{4\alpha}}{4} A_{\alpha,f}(v). \end{aligned}$$

U vërtetua .

Duke vazhduar në këtë mënyrë mund të gjejmë dhe relacione të tjera.

Teoremë 2.2.11 : (Teorema e konvolucionit)

Le të jenë $f(t) \in C_{\alpha}(a, b)$ dhe $g(t) \in C_{\alpha}(a, b)$ dy funksione thyesorë lokale të vazhdueshëm në intervalin $[a, b]$ me transformime të Yang – Laplasit $f_s^{L,\alpha}$ dhe $g_s^{L,\alpha}$ dhe me transformime thyesorë lokale α – integral përkatësisht $A_{\alpha,f}(v)$ dhe $A_{\alpha,g}(v)$.

Atëherë transformimi thyesor lokal α – integral i konvolucionit të dy funksioneve $f(t)$ dhe $g(t)$

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.2.43)$$

jepet nga formula e mëposhtme:

$$K_\alpha\{(f * g)(t)\} = v^\alpha (A_{\alpha,f}(v) A_{\alpha,g}(v)) \quad (2.2.44)$$

Vërtet :

Transformimi i Yang – Laplasit i konvolucionit $(f * g)(t)$ jepet nga formula

$$L\alpha\{(f * g)(t)\} = L\alpha\{f(t)\} L\alpha\{g(t)\} = f_s^{L,\alpha}(s) g_s^{L,\alpha}(s). \quad (2.2.45)$$

Nga relacioni i dualitetit me transformimin e Yang – Laplasit kemi :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,f}(v) &= \frac{1}{v^\alpha} f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) \text{ kjo sjell që } f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) = v^\alpha A_{\alpha,f}(v) \\ A_{\alpha,g}(v) &= \frac{1}{v^\alpha} g_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) \text{ kjo sjell që } g_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) = v^\alpha A_{\alpha,g}(v) \end{aligned} \quad (2.2.46)$$

Prandaj nga barazimet (2.2.45) dhe (2.2.46) kemi :

$$\begin{aligned} K_\alpha\{(f * g)(t)\} &= \frac{1}{v^\alpha} L\alpha\{(f * g)(t)\} = \frac{1}{v^\alpha} \left(f_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) g_s^{L,\alpha}\left(\frac{1}{v^{2\alpha}}\right) \right) \\ &= \frac{1}{v^\alpha} \left(v^\alpha A_{\alpha,f}(v) v^\alpha A_{\alpha,g}(v) \right) = v^\alpha (A_{\alpha,f}(v) A_{\alpha,g}(v)). \end{aligned}$$

Teoremë 2.2.12 : (Teorema e përgjithësuar e konvolucionit)

Le të jenë $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t) \in C_\alpha(a, b)$ funksione thyesorë lokale të vazhdueshëm në intervalin $[a, b]$ me transformime thyesorë lokale α – integral përkatësisht $A_{\alpha,f_1}(v), A_{\alpha,f_2}(v), \dots, A_{\alpha,f_n}(v)$. Atëherë transformimi thyesor lokal α – integral i konvolucionit të funksioneve $f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t)$ jepet nga formula e mëposhtme:

$$K_\alpha\{(f_1 * f_2 * \dots * f_n)(t)\} = v^{(n-1)\alpha} (A_{\alpha,f_1}(v) A_{\alpha,f_2}(v) \dots A_{\alpha,f_n}(v)). \quad (2.2.47)$$

Vërtet :

Do ta vërtetojmë këtë teoremë me anë të metodës së induksionit matematik .

Për $n=2$ është e vërtetë $K_\alpha\{(f * g)(t)\} = v^\alpha (A_{\alpha,f}(v) A_{\alpha,g}(v))$ (teorema 2.2.11) .

E supozojmë të vërtetë për $n = k-1$, domethënë supozojmë që

$$K\alpha\{(f_1 * f_2 * \dots * f_{k-1})(t)\} = v^{(k-2)\alpha} \left(A_{\alpha, f_1}(v) A_{\alpha, f_2}(v) \dots A_{\alpha, f_{k-1}}(v) \right). \quad (2.2.48)$$

Ta vërtetojmë për $n = k$, domethënë do të vërtetojmë që:

$$K\alpha\{(f_1 * f_2 * \dots * f_k)(t)\} = v^{(k-1)\alpha} (A_{\alpha, f_1}(v) A_{\alpha, f_2}(v) \dots A_{\alpha, f_k}(v)). \quad (2.2.49)$$

Nga vetitë e konvolucionit të funksioneve kemi që:

$$K\alpha\{(f_1 * f_2 * \dots * f_k)(t)\} = K\alpha\{((f_1 * f_2 * \dots * f_{k-1}) * f_k)(t)\},$$

nga teorema 2.3.11 kemi :

$$= v^\alpha (K\alpha\{(f_1 * f_2 * \dots * f_{k-1})(t)\} K\alpha\{f_k(t)\}) ,$$

nga supozimi duke përdorur formulën (2.2.48) kemi:

$$\begin{aligned} &= v^\alpha \left(v^{(k-2)\alpha} (A_{\alpha, f_1}(v) A_{\alpha, f_2}(v) \dots A_{\alpha, f_{k-1}}(v)) \right) A_{\alpha, f_k}(v), \\ &= v^{(k-1)\alpha} (A_{\alpha, f_1}(v) A_{\alpha, f_2}(v) \dots A_{\alpha, f_k}(v)). \end{aligned}$$

U vërtetua .

Përkufizim 2.2.10 : Për funksionin e dhënë $A_{\alpha, f}(v)$, në qoftë se egziston një funksion $f(t)$ i cili është thyesor lokal i vazhdueshëm dhe plotëson kushtin $K_\alpha\{f(t)\} = A_{\alpha, f}(v)$, atëherë $f(t)$ quhet transformim i ri invers thyesor lokal α – integral i $A_{\alpha, f}(v)$ dhe shënohet $f(t) = K_\alpha^{-1}\{A_{\alpha, f}(v)\}$.

Përkufizim 2.2.11 Formula inverse për transformimin e ri thyesor lokal α - integral është:

$$K_\alpha^{-1}\{A_{\alpha, f}(v)\} = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) A_\alpha\left(\frac{1}{\sqrt{v}}\right) \frac{(dv)^\alpha}{\sqrt{v}^\alpha}, \quad (2.2.50)$$

Ku $v^\alpha = \beta^\alpha + i^\alpha \omega^\alpha$ dhe i^α është njësia imagjinare thyesore e v^α dhe $\text{Re}(v^\alpha) = \beta^\alpha > 0$.

2.3 Zgjidhja e ekuacioneve diferenciale me anë të transformimit të ri thyesor lokal α - integral:

Transformimet thyesore kanë luajtur një rol shumë të rëndësishëm në fusha të ndryshme që kanë kaluar nga shkencat themelore deri tek inxhinieria dhe janë aplikuar në një klasë të gjerë të funksioneve. Ekuacionet diferenciale të zakonshme dhe ekuacionet diferenciale me derivate të pjesshme kanë gjetur aplikim në shumë probleme në matematikë dhe fizikë [25,26], këto

ekuacione janë trajtuar nga disa autorë [27,28,29]. Ka metoda analitike dhe numerike për të zgjidhur ekuacionet diferenciale. Në këtë paragraf do të trajtojmë zgjidhjen e disa ekuacioneve diferenciale homogjene dhe jo homogjene me kushte fillestare me derivate thyesore lokale [30].

Shembull 2.3.1 :

Jepet ekuacioni diferencial homogjen me derivate thyesore lokale në trajtën

$$\frac{d^{4\alpha}y}{d^{4\alpha}x} - y = 0, \quad (2.3.1)$$

me kushte fillestare të dhëna

$$y(0) = 0, \quad y^{(\alpha)}(0) = 0, \quad (2.3.2)$$

$$y^{(2\alpha)}(0) = 0, \quad y^{(3\alpha)}(0) = 1.$$

Zbatojmë transformimin e ri α – integral dhe teoremën e derivimit të originalit dhe kemi:

$$K_{\alpha}\{y^{(4\alpha)}(x)\} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{8\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{7\alpha}} + \frac{y^{(\alpha)}(0)}{v^{5\alpha}} + \frac{y^{(2\alpha)}(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{y^{(3\alpha)}(0)}{v^{\alpha}} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{8\alpha}} + \frac{1}{v^{\alpha}}. \quad (2.3.3)$$

Zbatojmë kushtet fillestare, ekuacioni diferencial (2.3.1) mund të shkruhet në trajtën:

$$\frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{8\alpha}} + \frac{1}{v^{\alpha}} - K_{\alpha}\{y(x)\} = 0. \quad (2.3.4)$$

Kjo sjell që,

$$K_{\alpha}\{y(x)\} \left[\frac{1}{v^{8\alpha}} - 1 \right] = -\frac{1}{v^{\alpha}}. \quad (2.3.5)$$

Kështu që,

$$K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{v^{7\alpha}}{1-v^{8\alpha}}. \quad (2.3.6)$$

Prandaj kemi:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= K_{\alpha}^{-1} \left\{ \frac{1}{4} \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} - \frac{1}{4} \frac{v^{\alpha}}{1+v^{2\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} \right\} \\
 &= \frac{1}{4} E_{\alpha}(-x^{\alpha}) - \frac{1}{4} E_{\alpha}(x^{\alpha}) - \frac{1}{2} \sin_{\alpha}(x^{\alpha}) .
 \end{aligned}
 \tag{2.3.7}$$

Shembull 2.3.2 :

Jepet ekuacioni diferencial homogjen me derivate thyesorë lokale në trajtën:

$$\frac{d^{2\alpha}y}{d^{2\alpha}x} - \frac{d^{\alpha}y}{d^{\alpha}x} + 2y = 0
 \tag{2.3.8}$$

me kushte fillestare të dhëna

$$y(0) = 1, \quad y^{(\alpha)}(0) = 0 .
 \tag{2.3.9}$$

Zbatojmë transformimin e ri α – integral dhe teoremën e derivimit të originalit dhe kemi:

$$K_{\alpha}\{y^{(2\alpha)}(x)\} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{y^{(\alpha)}(0)}{v^{\alpha}},
 \tag{2.3.10}$$

$$K_{\alpha}\{y^{(\alpha)}(x)\} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{2\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{2\alpha}},$$

ekuacioni diferencial (2.4.8) mund të shkruhet në trajtën:

$$\frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{y^{(\alpha)}(0)}{v^{\alpha}} - \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{y(0)}{v^{2\alpha}} - 2K_{\alpha}\{y(x)\} = 0. \quad (2.3.11)$$

Duke përdorur kushtet fillestare kemi:

$$K_{\alpha}\{y(x)\} \left[\frac{1}{v^{4\alpha}} - \frac{1}{v^{2\alpha}} + 2 \right] = \frac{1}{v^{3\alpha}} - \frac{1}{v^{\alpha}}. \quad (2.3.12)$$

Kështu që:

$$K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}}. \quad (2.3.13)$$

Si rrjedhim përfojmë:

$$\begin{aligned} y(x) &= K_{\alpha}^{-1} \left\{ \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} \right\} \\ &= E_{\alpha}(-x^{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

Shembull 2.3.3:

Le të shohim tani ekuacionin diferencial jo homogjen me derivate thyesorë të pjesshme

$$\frac{d^{2\alpha}y}{d^{2\alpha}x} - y = \sin_{\alpha}(x^{\alpha}), \quad (2.3.15)$$

me kushte fillestare

$$y(0) = 0, \quad y^{(\alpha)}(0) = 1. \quad (2.3.16)$$

Zbatojmë transformimin e ri α – integral dhe teoremën e derivimit të origjinalit dhe kemi:

$$K_{\alpha}\{y^{(2\alpha)}(x)\} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{y^{(\alpha)}(0)}{v^{\alpha}}. \quad (2.3.17)$$

Duke përdorur vetitë e transformimit të ri kemi:

$$\frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} - 2K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}}. \quad (2.3.18)$$

Duke përdorur kushtet fillestare përftojme:

$$K_{\alpha}\{y(x)\} \left[\frac{1}{v^{4\alpha}} - 1 \right] = \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} - \frac{1}{v^{\alpha}}. \quad (2.3.19)$$

Kështu që,

$$K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{3}{4} \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} - \frac{3}{4} \frac{v^{\alpha}}{1+v^{2\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}}. \quad (2.3.20)$$

Si rrjedhim përftojme:

$$\begin{aligned} y(x) &= K_{\alpha}^{-1} \left\{ \frac{3}{4} \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} - \frac{3}{4} \frac{v^{\alpha}}{1+v^{2\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} \right\} \\ &= \frac{3}{4} E_{\alpha}(-x^{\alpha}) - \frac{3}{4} E_{\alpha}(x^{\alpha}) - \frac{1}{2} \sin_{\alpha}(x^{\alpha}). \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

Shembull 2.3.4 :

Le të shohim tani ekuacionin diferencial jo homogjen me derivate thyesore të pjesshme

$$\frac{d^{2\alpha}y}{d^{2\alpha}x} + y = E_{\alpha}(x^{\alpha}), \quad (2.4.22)$$

me kushte fillestare

$$y(0) = 0, \quad y^{(\alpha)}(0) = 1. \quad (2.4.23)$$

Zbatojme transformimin e ri α – integral dhe teoremën e derivimit të origjinalit dhe kemi:

$$K_{\alpha}\{y^{(2\alpha)}(x)\} = \frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{y(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{y^{(\alpha)}(0)}{v^{\alpha}}. \quad (2.4.24)$$

Duke përdorur vetitë e transformimit të ri kemi:

$$\frac{K_{\alpha}\{y(x)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{1}{v^{\alpha}} + K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}}. \quad (2.4.25)$$

Duke përdorur kushtet fillestare përftojmë:

$$K_{\alpha}\{y(x)\} \left[\frac{1}{v^{4\alpha}} + 1 \right] = \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} + \frac{1}{v^{\alpha}}. \quad (2.4.26)$$

Kështu që,

$$K_{\alpha}\{y(x)\} = \frac{1}{2} \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{v^{\alpha}}{1+v^{4\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}}. \quad (2.4.27)$$

Si rrjedhim kemi:

$$y(x) = K_{\alpha}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}} - \frac{1}{2} \frac{v^{\alpha}}{1+v^{4\alpha}} + \frac{1}{2} \frac{v^{\alpha}}{1-v^{2\alpha}} \right\} \quad (2.4.28)$$

$$= \frac{1}{2} \sin_{\alpha}(x^{\alpha}) - \frac{1}{2} \cos_{\alpha}(x^{\alpha}) + \frac{1}{2} E_{\alpha}(x^{\alpha}).$$

Në këtë paragraf ne kemi përdorur transformimin thyesor lokal α -integral për të zgjidhur ekuacionet diferenciale homogjene dhe jo homogjene me derivate thyesore lokale me kushte fillestare. Shembujt e trajtuar dhe rezultatet e përfutuara tregojnë që transformimi thyesor lokal α -integral është një mjet matematikor efikas për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale homogjene dhe jo homogjene me derivate thyesore lokale me kushte fillestare.

2.4 TABELA E SHEMBELLIMEVE

 Tabela 1 e shëmbëllimeve α -integrale të disa funksioneve kryesorë

Nr	$f(t)$	$A_{\alpha,f}(v) = K_{\alpha}\{f(t)\}$
1.	1	v^{α}
2.	t^{α}	$v^{3\alpha}$
3.	$t^{(n-1)\alpha}$	$(n-1)! v^{(2n-1)\alpha}$
4.	$E_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{v^{\alpha}}{1-a^{\alpha}v^{2\alpha}}$
5.	$t^{\alpha}E_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{v^{3\alpha}}{(1-a^{\alpha}v^{2\alpha})^2}$
6.	$t^{(n-1)\alpha}E_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{(n-1)!v^{(2n-1)\alpha}}{(1-a^{\alpha}v^{2\alpha})^2}$
7.	$t^{k\alpha}$	$v^{(2k+1)\alpha} \Gamma(\alpha k + 1)$
8.	$\sin_{\alpha}(t^{\alpha})$	$\frac{v^{3\alpha}}{1+v^{4\alpha}}$
9.	$\sin_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{a^{\alpha}v^{3\alpha}}{1+a^{\alpha}v^{4\alpha}}$
10.	$\cos_{\alpha}(t^{\alpha})$	$\frac{v^{\alpha}}{1+v^{4\alpha}}$
11.	$\cos_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{v^{\alpha}}{1+a^{\alpha}v^{4\alpha}}$
12.	$\sinh_{\alpha}(t^{\alpha})$	$\frac{v^{3\alpha}}{1-v^{4\alpha}}$
13.	$\sinh_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{a^{\alpha}v^{3\alpha}}{1-a^{\alpha}v^{4\alpha}}$
14.	$\cosh_{\alpha}(t^{\alpha})$	$\frac{v^{\alpha}}{1-v^{4\alpha}}$
15.	$\cosh_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{v^{\alpha}}{1-a^{\alpha}v^{4\alpha}}$
16.	$E_{\alpha}(c^{\alpha}t^{\alpha})\sin_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{a^{\alpha}v^{3\alpha}}{(1-c^{\alpha}v^{2\alpha})+v^{2\alpha}v^{4\alpha}}$
17.	$E_{\alpha}(c^{\alpha}t^{\alpha})\cos_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})$	$\frac{(1-c^{\alpha}v^{2\alpha})v^{\alpha}}{(1-c^{\alpha}v^{2\alpha})+v^{2\alpha}v^{4\alpha}}$
18.	$H(t^{\alpha}-a^{\alpha})$	$v^{\alpha} \cdot E_{\alpha}\left(-\frac{a^{\alpha}}{v^{2\alpha}}\right)$
19.	$\delta(t^{\alpha}-a^{\alpha})$	$\frac{1}{v^{\alpha}} \cdot E_{\alpha}\left(-\frac{a^{\alpha}}{v^{2\alpha}}\right)$
20.	$[E_{\alpha}(a^{\alpha}t^{\alpha})-E_{\alpha}(b^{\alpha}t^{\alpha})], a^{\alpha} \neq b^{\alpha}$	$\frac{(a^{\alpha}-b^{\alpha})v^{2\alpha}}{(1-a^{\alpha}v^{2\alpha})(1-b^{\alpha}v^{2\alpha})}$

23.	$\frac{1}{t^\alpha} [E_\alpha(b^\alpha t^\alpha) - E_\alpha(a^\alpha t^\alpha)]$	$\frac{1}{v^\alpha} \cdot \ln\left(\frac{1-a^\alpha v^{2\alpha}}{1-b^\alpha v^{2\alpha}}\right)$
24.	$\frac{2}{t^\alpha} (1 - \cos_\alpha(a^\alpha t^\alpha))$	$\frac{1}{v^\alpha} \cdot \ln(1 + a^\alpha v^{4\alpha})$
25.	$\frac{2}{t^\alpha} (1 - \cosh_\alpha(a^\alpha t^\alpha))$	$\frac{1}{v^\alpha} \cdot \ln(1 - a^\alpha v^{4\alpha})$

 Tabela 2 e vetive të transformimit të ri thyesor lokal α -integral

Nr	formula	komenti
1.	$K_\alpha \{f(t)\} = A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{1}{v^\alpha} \int_0^{+\infty} E_\alpha(-(\frac{t}{v^2})^\alpha) f(t) (dt)^\alpha$	përkufizimi i transformimit të ri thyesor lokal α -integral
2.	$K_\alpha \{af(t) + bg(t)\} = aK_\alpha \{f(t)\} + bK_\alpha \{g(t)\}$	vetia e linearitetit
3.	$K_\alpha \{E_\alpha(c^\alpha t^\alpha) f(t)\} = A_{\alpha,f}(1 - v^2 c)$	teorema e zhvendosjes
4.	$K_\alpha \{f(at)\} = \frac{1}{a^\alpha} A_{\alpha,f}(\frac{v}{a})$	teorema e ngjashmërisë
5.	$K_\alpha \{f^{(\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2\alpha}} - \frac{f(0)}{v^\alpha}$	derivimi i rendit α të origjinalit
6.	$K_\alpha \{f^{(n\alpha)}(t)\} = \frac{A_{\alpha,f}(v)}{v^{2n\alpha}} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k\alpha)}(0)}{v^{2(n-k)-1\alpha}}$	derivimi i rendit $n\alpha$ të origjinalit
7.	$A_{\alpha,f}(v) = \frac{1}{v^\alpha} f_s^{L,\alpha}(\frac{1}{v^{2\alpha}})$	relacioni i dualitetit me transformimin Yang-Laplas
8.	$A_{\alpha,f}(v) = A_{\alpha,g}(v) \Rightarrow f(t) = g(t)$	teorema e unicitetit të shëmbëllimit
9.	$K_\alpha \{tf(t)\} = \frac{v^{3\alpha}}{2} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{v^{2\alpha}}{2} A_{\alpha,f}(v)$	teorema e derivimit të rendit α të shëmbëllimit
10.	$K_\alpha \{t^2 f(t)\} = \frac{v^{6\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(2\alpha)}(v) + \frac{5v^{5\alpha}}{4} A_{\alpha,f}^{(\alpha)}(v) + \frac{3v^{4\alpha}}{4} A_{\alpha,f}(v)$	teorema e derivimit të rendit 2α të shëmbëllimit
11.	$K_\alpha \{(f * g)(t)\} = v^\alpha (A_{\alpha,f}(v) A_{\alpha,g}(v))$ ku $(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau$	teorema e konvolucionit
12.	$K_\alpha^{-1} \{A_{\alpha,f}(v)\} = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta - i\omega}^{\beta + i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) A_\alpha(\frac{1}{\sqrt{v}^\alpha}) \frac{(dv)^\alpha}{\sqrt{v}^\alpha}$	formula inverse e transformimit të ri thyesor lokal α -integral

KAPITULLI III

Analiza thyesore është një fushë e matematikës së aplikuar që merret me derivate dhe integrale të një rendi arbitrar. Në vitet e fundit llogaritjet thyesore kanë gjetur aplikime të ndryshme. Ekuacionet diferenciale thyesore janë përdorur gjithmonë e më shumë për të modeluar problemet e mekanikës fluide, akustikës, biologjisë, elektromagnetizmit, difuzionit, përpunimit të sinjaleve dhe shumë problemeve të tjera fizike. Teknika të ndryshme analitike dhe numerike janë aplikuar me sukses në ekuacionet diferenciale, ekuacionet diferenciale thyesore dhe ekuacionet thyesore lokale. Mund të përmendim transformimin thyesor Furie, transformimin thyesor të Laplasit, metoda e iteracionit variacional thyesor lokal, metoda e difuzionit adomian lokal. Në 10 vitet e fundit analiza komplekse thyesore lokale është zhvilluar me ritëm shumë të shpejtë. Janë studjuar edhe më parë metoda të drejtpërdrejta dhe të përafërta për llogaritjen e ekuacioneve diferenciale me derivate të pjesshme thyesore lokale. Në këtë punim janë propozuar disa algoritme të reja bazuar në metoda të njohura dhe në integralin e ri thyesor lokal α – inequal.

3.1 Metoda e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral

Metoda e iteracionit variacional është një metodë e trajtuar edhe më parë nga autorë të ndryshëm [31 – 40]. Në këtë kapitull janë prezantuar metoda e iteracionit variacional thyesor lokal [40] dhe metoda e përmirësuar e iteracionit variacional thyesor lokal [36]. Për të treguar saktësinë e lartë dhe konvergjencën e shpejtë të algoritmeve në paragrafin 3.2 janë prezantuar disa shembuj për të gjetur një zgjidhje të vazhdueshme thyesore lokale të ekuacionit thyesor lokal të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale të rendit 2α , ku $0 < \alpha \leq 1$ [40] dhe në paragrafin 3.4 janë prezantuar disa shembuj për gjetjen e zgjidhjeve të ekuacioneve thyesore lokale të difuzionit dhe të valëve.

Le të konsiderojmë ekuacionin diferencial linear:

$$L_\alpha u(x,t) + R_\alpha u(x,t) + N_\alpha u(x,t) = f(x,t) \quad t > 0, x \in \mathbb{R}, 0 < \alpha \leq 1. \quad (3.1.1)$$

ku ,

$L_\alpha = \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial t^{2\alpha}}$, R_α është operator linear thyesor lokal, N_α përfaqëson operatorin thyesor lokal jo linear të përgjithshëm, dhe $f(x, t)$ është termi kryesor.

Aplikojmë transformimin thyesor lokal α –integral në të dy anët e (3.1.1) përftojmë:

$$K_\alpha\{L_\alpha u(x, t)\} + K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} + K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\} = K_\alpha\{f(x, t)\}. \quad (3.1.2)$$

Përdorim vetitë e transformimit të ri dhe kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u(x,0)}{v^{3\alpha}} - \frac{u^{(\infty)}(x,0)}{v^\alpha} = K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\} \quad (3.1.3)$$

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u(x, t)\} &= v^{4\alpha} \left(K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\} + \frac{u(x, 0)}{v^{3\alpha}} + \frac{u^{(\alpha)}(x, 0)}{v^\alpha} \right) \\
 &= v^\alpha u(x, 0) + v^{3\alpha} u^\alpha(x, 0) + v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\}).
 \end{aligned}
 \tag{3.1.4}$$

Duke mar transformimin invers α -integral në të dy anët e (3.1.4) kemi:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= K_\alpha^{-1}(v^\alpha u(x, 0)) + K_\alpha^{-1}(v^{3\alpha} u^\alpha(x, 0)) \\
 &\quad + K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\})) \\
 &= u(x, 0) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u^{(\alpha)}(x, 0) + K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\}))
 \end{aligned}
 \tag{3.1.5}$$

Duke derivuar me $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, kemi:

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) = u_t^{(\alpha)}(x, 0) + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\}))
 \tag{3.1.6}$$

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) - u_t^{(\alpha)}(x, 0) + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, t)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, t)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, t)\})) = 0
 \tag{3.1.7}$$

Nga funksioni korrigjues i metodës së iteracionit variacional përftojmë:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1}(x, t) &= u_n(x, t) \\
 &\quad - {}_0I_x^{(\alpha)} \left((u_n)_\xi^\alpha(x, \xi) - (u_n)_\xi^\alpha(x, 0) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} (K_\alpha\{f(x, \xi)\} - K_\alpha\{R_\alpha u(x, \xi)\} - K_\alpha\{N_\alpha u(x, \xi)\})) \right)
 \end{aligned}
 \tag{3.1.8}$$

Zgjidhja $u(x, t)$ jepet nga

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t).
 \tag{3.1.9}$$

3.2 Aplikimi i metodës së iteracionit variacional thyesor lokal α - integral

Në këtë paragraf janë prezantuar dy shembuj për të treguar efikasitetin e metodës. Shembujt janë zgjidhur duke aplikuar hap pas hapi metodën e prezantuar në paragrafin 3.1 për të treguar thjeshtësinë e saj.

Shembull 3.2.1 :

Konsiderojmë ekuacionin e Laplasit në bashkësinë e Kantorit me operator thyesor lokal

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (3.2.1)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha), \quad u_t^\alpha(x, 0) = 0. \quad (3.2.2)$$

Aplikojmë transformimin thyesor lokal α - integral në ekuacionin (3.2.2), dhe kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u(x,0)}{v^{3\alpha}} - \frac{u^{(\infty)}(x,0)}{v^\alpha} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (3.2.3)$$

Zëvendësojmë kushtet fillestare (3.2.2) në ekuacionin (3.2.3), kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^{3\alpha}} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \quad (3.2.4)$$

ose

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} = -\frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^{3\alpha}} - K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (3.2.5)$$

Kështu që,

$$K_\alpha\{u(x,t)\} = -v^\alpha E_\alpha(x^\alpha) - v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (3.2.6)$$

Aplikojmë transformimin invers α - integral në ekuacionin (3.2.6), dhe përftojmë:

$$u(x,t) = -E_\alpha(x^\alpha) - K_{\uparrow\alpha}^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right). \quad (3.2.7)$$

Duke derivuar me $\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}$, kemi:

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(-E_\alpha(x^\alpha) - K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \quad (3.2.8)$$

ose

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(-K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \right) = 0. \quad (3.2.9)$$

Përdorim funksionin korrigjues

$$u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_n)_\xi^\alpha(x, \xi) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_n(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \quad (3.2.10)$$

Përdorim kushtet fillestarë (3.2.2) për të marrë përafrimin fillestar

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha). \quad (3.2.11)$$

E zbatojmë në ekuacionin (3.2.10) dhe përftojme përafrimin e parë:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= u_0(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_0)_\xi^\alpha(x, \xi) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_0(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \{-E_\alpha(x^\alpha)\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) + \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(1 - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right). \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Përafrimi i dytë është:

$$u_2(x, t) = u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_1)_\xi^\alpha(x, \xi) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_{\uparrow\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_1(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha$$

$$\begin{aligned}
 &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ -E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\
 &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (v^{4\alpha} (-v^\alpha E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\
 &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (-v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\
 &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) (d\xi) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (-v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\
 &= u_1(x, t) - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - K_\alpha^{-1} (-v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - K_\alpha^{-1} (-v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \\
 &\quad - E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+24\alpha)} \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} - E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(1 - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \right). \tag{3.2.13}
 \end{aligned}$$

.....

Rrjedhimisht zgjidhja e ekuacionit është:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k\alpha}}{\Gamma(1+2k\alpha)}
 \end{aligned}$$

$$= -E_\alpha(x^\alpha) \cos_\alpha(t^\alpha). \quad (3.2.14)$$

Shembull 3. 2.2 :

Konsiderojmë ekuacionin e Laplasit në bashkësinë e Kantorit me operator thyesor lokal

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (3.2.15)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t^\alpha(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha). \quad (3.2.16)$$

Aplikojmë transformimin thyesor lokal α - integral në ekuacionin (3.2.15), dhe kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u(x,0)}{v^{3\alpha}} - \frac{u^{(\infty)}(x,0)}{v^\alpha} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (3.2.17)$$

Zëvendësojmë kushtet fillestare (3.2.16) në ekuacionin (3.2.17), kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^\alpha} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \quad (3.2.18)$$

ose

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} = -\frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^\alpha} - K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (3.2.19)$$

Kështu që,

$$K_\alpha\{u(x,t)\} = -v^{3\alpha} E_\alpha(x^\alpha) - v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \quad (3.2.20)$$

Aplikojmë transformimin invers α – integral në ekuacionin (3.2.20), dhe përftojmë:

$$u(x,t) = -E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right). \quad (3.2.21)$$

derivojmë me $\frac{\partial}{\partial t^\alpha}$, dhe kemi:

$$u_t^{(\alpha)}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t^\alpha} \left(-\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right) \right) \quad (3.2.22)$$

ose,

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) = -E_\alpha(x^\alpha) - \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \right). \quad (3.2.23)$$

Kështu që,

$$u_t^{(\alpha)}(x, t) + E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \right) = 0 \quad (3.2.24)$$

Marrim funksionin korrigjues dhe kemi:

$$\begin{aligned} u_{n+1}(x, t) = u_n(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_n)_\xi^\alpha(x, \xi) + E_\alpha(x^\alpha) + \right. \\ \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_n(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Përdorim kushtet fillestare për të zgjedhur përafrimin fillestar

$$u_0(x, t) = u(x, 0) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u^{(\infty)}(x, 0) = \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha). \quad (3.2.26)$$

Duke përdorur këtë përafrim në funksionalin korrigjues të mësipërm përftojmë përafrimin e pare:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) = u_0(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_0)_\xi^\alpha(x, \xi) + E_\alpha(x^\alpha) + \right. \\ \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_0(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(-E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) + \right. \\ \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (-v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \end{aligned}$$

$$= -E_\alpha(x^\alpha) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right). \quad (3.2.27)$$

Përafrimi i dytë është:

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left((u_1)_\xi^\alpha(x, \xi) + E_\alpha(x^\alpha) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_1(x, \xi)}{\partial \xi^{2\alpha}} \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(-E_\alpha(x^\alpha) \left(1 - \frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right) + E_\alpha(x^\alpha) + \right. \\ &\quad \left. \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ -E_\alpha(x^\alpha) \frac{\xi^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \right\} \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (v^{4\alpha} (-v^{3\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \left(\frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (-v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v^{11\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) (d\xi)^\alpha \\ &= u_1(x, t) - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t \frac{\xi^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) (d\xi) - \int_0^t \left(\frac{\partial^\alpha}{\partial \xi^\alpha} \left(K_\alpha^{-1} (-v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. v^{11\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \right) (d\xi) \\ &= u_1(x, t) - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - K_\alpha^{-1} (-v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + v^{11\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} - K_\alpha^{-1} (-v^{7\alpha} E_\alpha(x^\alpha) + v^{11\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right) - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} - E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} - E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \right). \tag{3.2.28}
 \end{aligned}$$

.....

Rrjedhimisht zgjidhja është:

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x, t) \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2k+1)\alpha)} \\
 &= -E_\alpha(x^\alpha) \sin_\alpha(t^\alpha). \tag{3.2.29}
 \end{aligned}$$

3.3 Metoda e përmirësuar e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral

Metoda e prezantuar në paragrafin 3.1 është efikase dhe konvergjon në iteracionin e dytë por puna është voluminoze, në këtë paragraf po prezantojmë një algoritëm të përmirësuar bazuar në metodën e iteracionit variacional dhe transformimit thyesor lokal α – integral për llogaritjen analitike dhe të përafërt të zgjidhjeve të ekuacioneve të difuzionit dhe të valëve. [36]

Le të konsiderojmë ekuacionin diferencial me derivate të pjesshme lokale:

$$L_\alpha u(x,t) + R_\alpha u(x,t) = f(x,t), \quad (3.3.1)$$

ku L_α është operator linear thyesor lokal, R_α është operator linear thyesor lokal të rendit më të ulët se L_α dhe $f(x,t)$ është pjesa kryesore e një funksioni jo të diferencueshëm. Sipas rregullit të metodës së iteracionit variacional thyesor lokal funksioni korrigjues për (3.3.1) ka trajtën e mëposhtëme:

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + {}_0I_x^{(\alpha)} \left(\frac{\lambda(x-t)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [L_\alpha u_n(t) + R_\alpha \tilde{u}_n(t) - f(t)] \right), \quad (3.3.2)$$

ku $\frac{\lambda(x-t)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ është shumëzuesi thyesor i Lagranzhit dhe L_α në ekuacionin (3.3.1) janë ekuacione diferenciale me derivate të pjesshme ka herë të derivueshme. Si vlerë fillestare e problemit (3.3.1) mund të merret

$$u_0(x) = u(0) + \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u^{(\alpha)}(0) + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} u^{(2\alpha)}(0) + \dots + \frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} u^{((k-1)\alpha)}(0). \quad (3.3.3)$$

Marrim tani transformimin α - integral të barazimit (3.3.2), si më poshtë

$$K_\alpha \{u_{n+1}(x)\} = K_\alpha \{u_n(x)\} + K_\alpha \left\{ {}_0I_x^{(\alpha)} \left(\frac{\lambda(x-t)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} [L_\alpha u_n(t) + R_\alpha \tilde{u}_n(t) - f(t)] \right) \right\} \quad (3.3.4)$$

ose,

$$K_\alpha \{u_{n+1}(x)\} = K_\alpha \{u_n(x)\} + K_\alpha \left\{ \frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right\} K_\alpha \{L_\alpha u_n(x) + R_\alpha \tilde{u}_n(x) - f(x)\}. \quad (3.3.5)$$

Marrim variacionin thyesor lokal në barazimin (3.3.5) i cili jepet nga formula e mëposhtëme:

$$\delta^\alpha(K_\alpha\{u_{n+1}(x)\}) = \delta^\alpha(K_\alpha\{u_n(x)\}) + \delta^\alpha\left(K_\alpha\left\{\frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\}K_\alpha\{L_\alpha u_n(x) + R_\alpha \tilde{u}_n(x) - f(x)\}\right). \quad (3.3.6)$$

Kryejmë veprimet dhe përftojme barazimin,

$$\delta^\alpha(K_\alpha\{u_{n+1}(x)\}) = \delta^\alpha(K_\alpha\{u_n(x)\}) + K_\alpha\left\{\frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} \delta^\alpha(K_\alpha\{L_\alpha u_n(x)\}). \quad (3.3.7)$$

Nga (3.3.7) kemi:

$$1 + \frac{1}{v^{2\alpha k}} K_\alpha\left\{\frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} = 0 \quad (3.3.8)$$

ku

$$\delta^\alpha(K_\alpha\{L_\alpha u_n(x)\}) = \delta^\alpha\left(\frac{K_\alpha\{u_n(x)\}}{v^{2\alpha k}} - \frac{u_n(0)}{v^{2(k-1)\alpha}} - \dots - \frac{u_n^{((k-1)\alpha)}(0)}{v^{(2(n-k)+1)\alpha}}\right) = \frac{\delta^\alpha(K_\alpha\{u_n(x)\})}{v^{2\alpha k}}. \quad (3.3.9)$$

Si rrjedhim kemi:

$$K_\alpha\left\{\frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} = -v^{2\alpha k}. \quad (3.3.10)$$

Marrim transformimin invers të transformimit α -integral, dhe kemi:

$$\frac{\lambda(x)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} = K_\alpha^{-1}\{-v^{2\alpha k}\} = -\frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3.3.11)$$

Duke zëvendësuar (3.11) te barazimi (3.5) përftojme,

$$K_\alpha\{u_{n+1}(x)\} = K_\alpha\{u_n(x)\} - K_\alpha\left\{{}_0I_x^{(\alpha)}\left(\frac{(x-t)^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}[L_\alpha u_n(t) + R_\alpha \tilde{u}_n(t) - f(t)]\right)\right\}. \quad (3.3.12)$$

Si rrjedhim perftojmë algoritmin iteracional,

$$K_\alpha\{u_{n+1}(x)\} = K_\alpha\{u_n(x)\} - K_\alpha\left\{\frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)}\right\} K_\alpha\{L_\alpha u_n(x) + R_\alpha \tilde{u}_n(x) - f(x)\}, \quad (3.3.13)$$

ose,

$$K_\alpha\{u_{n+1}(x)\} = K_\alpha\{u_n(x)\} - v^{2k\alpha} K_\alpha\{L_\alpha u_n(x) + R_\alpha \tilde{u}_n(x) - f(x)\}, \quad (3.3.14)$$

Ku vlerat fillestare ka trajtën e mëposhtëme;

$$\begin{aligned} u_0(x) &= K_\alpha^{-1}\left\{v^{2\alpha k}\left(\frac{u^{(0)}(0)}{v^{2(k-1)\alpha}} - \frac{u^{(\alpha)}(0)}{v^{(2k-3)\alpha}} \cdots - \frac{u^{((k-1)\alpha)}(0)}{v^\alpha}\right)\right\} \\ &= k_\alpha^{-1}\{v^\alpha u(0) + v^{3\alpha} u^{(\alpha)}(0) + \cdots + v^{(2k-1)\alpha} u^{(k-1)\alpha}(0)\} \\ &= u(0) + \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} u^{(\alpha)}(0) + \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} u^{(2\alpha)}(0) + \cdots + \frac{x^{(k-1)\alpha}}{\Gamma(1+(k-1)\alpha)} u^{((k-1)\alpha)}(0). \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Kështu që zgjidhja thyesore lokale e problemit (3.3.1) është:

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1}(K_\alpha\{u_n(x, t)\}). \quad (3.3.16)$$

3.4 Aplikimi i metodës së përmirësuar së iteracionit variacional thyesor lokal α -integral në ekuacionet e difuzionit dhe të valëve në bashkësinë e Kantorit

Ekuacionet thyesore lokale të difuzionit përshkruhen si
$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = a^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u(x,y)}{\partial x^{2\alpha}}, \quad (3.4.1)$$

ku $a^{2\alpha}$ - është konstante thyesore e difuzionit.

Ekuacionet valore thyesore lokale shkruhen në trajtën

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = a^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} u(x,y)}{\partial x^{2\alpha}} \quad (3.4.2)$$

dhe operatori thyesor i Laplasit jepet në trajtën
$$\nabla^{2\alpha} = \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial y^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial z^{2\alpha}}. \quad (3.4.3)$$

Theksojmë se fusha e ekuacioneve thyesore lokale të difuzionit është
$$\nabla^{2\alpha} u = \frac{1}{a^{2\alpha}} \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \quad (3.4.4)$$

dhe ekuacioni thyesor lokal valor jepet me formulën
$$\nabla^{2\alpha} u = \frac{1}{a^{2\alpha}} \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} \quad (3.4.5)$$

ku $\frac{1}{a^{2\alpha}}$ është konstante.

Ky ekuacion përshkruan vibracionet në një thyesë mesatare.

Madhësia $u(x,t)$ interpretohet si derivat thyesor lokal në kohën t nga pozicioni fillestar te pjesa e mbetur e pikës, ku pozicioni i saj jepet nga x,y dhe z .

Derivatet thyesore përkatëse konsiderohen si operator thyesor lokal.

Në këtë paragraf janë trajtuar 4 shembuj për ekuacionet e difuzionit dhe të valëve në bashkësinë e Kantorit për të treguar efikasitetin e metodës së përmirësuar të iteracionit variacional thyesor lokal.

Shembull 3.2.1:

Le të konsiderojmë ekuacionin e difuzionit në bashkësinë e Kantorit të dhënë nga formula:

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4.6)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (3.4.7)$$

Duke përdorur formulën (3.3.14), ndërtojmë formulën iterative të dhënë si më poshtë:

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u_{n+1}(x, t)\} &= K_\alpha\{u_n(x, t)\} - v^{2k\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}}\right\} \\
 &= K_\alpha\{u_n(x, t)\} - v^{2k\alpha} \left(\frac{K_\alpha\{u_n(x, t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{u(x, 0)}{v^\alpha} - \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}}\right) \\
 &= K_\alpha\{u_n(x, t)\} - K_\alpha\{u_n(x, t)\} + v^\alpha u_n(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^\alpha u_n(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Duke përdorur formulën (3.3.15) vlerat fillestare janë si më poshtë:

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{3.4.9}$$

Kështu që përftojmë përafrimin e parë në trajtën;

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u_1(x, t)\} &= v^\alpha u_0(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_0(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} \\
 &= v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.4.10}$$

Kështu që,

$$u_1(x, t) = K_\alpha^{-1}\left\{v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \tag{3.4.11}$$

Përafrimi i dytë ka trajtën:

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u_2(x, t)\} &= v^\alpha u_1(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_1(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + v^{2\alpha} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right\} \\
 &= v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}.
 \end{aligned} \tag{3.4.12}$$

Kështu që përftojmë:

$$u_2(x, t) = K_\alpha^{-1} \left\{ v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right\} = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \quad (3.4.13)$$

.....

Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1} (K_\alpha \{u_n(x, t)\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1} \left(v^\alpha \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \right) = \frac{x^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Rezultati është i njëjtë me atë të përfutur nga metoda të tjera [31,37].

Shembull 3.2.2:

Le të konsiderojmë ekuacionin e difuzionit në bashkësinë e Kantorit të dhënë nga formula:

$$\frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.4.15)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \quad (3.4.16)$$

Duke përdorur formulën (3.1.14), ndërtojmë formulën iterative të dhënë si më poshtë;

$$\begin{aligned} K_\alpha \{u_{n+1}(x, t)\} &= K_\alpha \{u_n(x, t)\} - v^{2k\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^\alpha u(x, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}} \right\} \\ &= K_\alpha \{u_n(x, t)\} - v^{2k\alpha} \left(\frac{K_\alpha \{u_n(x, t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{u(x, 0)}{v^\alpha} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha \{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \right) \\ &= K_\alpha \{u_n(x, t)\} - K_\alpha \{u_n(x, t)\} + v^\alpha u_n(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha \{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\ &= v^\alpha u_n(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha \{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}}. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Duke përdorur formulën (3.3.15) vlerat fillestare janë si më poshtë;

$$u_0(x, t) = u(x, 0) = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \quad (3.4.18)$$

Kështu që përftojme përafrimin e parë në trajtën;

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u_1(x, t)\} &= v^\alpha u_0(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_0(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right\} \\
 &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{3\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
 &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{3\alpha}).
 \end{aligned} \tag{3.4.19}$$

Kështu që,

$$\begin{aligned}
 u_1(x, t) &= K_\alpha^{-1}\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{3\alpha})\right\} \\
 &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right].
 \end{aligned} \tag{3.4.20}$$

Përafrimi i dytë ka trajtën;

$$\begin{aligned}
 K_\alpha\{u_2(x, t)\} &= v^\alpha u_1(x, 0) + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_1(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{2\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}\right]\right\} \\
 &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (v^{3\alpha} + v^{5\alpha}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\
 &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{3\alpha} + v^{5\alpha}).
 \end{aligned} \tag{3.4.21}$$

Kështu që përftojme;

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) &= K_\alpha^{-1}\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{3\alpha} + v^{5\alpha})\right\} \\
 &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right].
 \end{aligned} \tag{3.4.22}$$

.....

Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është;

$$u(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1}(K_\alpha\{u_n(x, t)\})$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\alpha}^{-1} \left(\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n v^{(2k+1)\alpha} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n k_{\alpha}^{-1} \left(v^{(2k+1)\alpha} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{t^{k\alpha}}{\Gamma(1+k\alpha)} = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_{\alpha}(t^{\alpha}),
 \end{aligned} \tag{3.4.23}$$

ku $E_{\alpha}(t^{\alpha})$ është funksioni Mittag – Leffler.

Rezultati është i njëjtë me atë të përftuar nga metoda të tjera [31,37].

Shembull 3.2.3:

Le të konsiderojmë ekuacionin e valëve në bashkësinë e Kantorit të dhënë nga formula:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.4.24}$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}, \quad \frac{\partial^{\alpha} u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} = 0. \tag{3.4.25}$$

Duke përdorur formulën (3.1.14), ndërtojmë formulën iterative të dhënë si më poshtë;

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha}\{u_{n+1}(x,t)\} &= K_{\alpha}\{u_n(x,t)\} - v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \\
 &= K_{\alpha}\{u_n(x,t)\} - v^{4\alpha} \left(\frac{K_{\alpha}\{u_n(x,t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u_n(x,0)}{v^{3\alpha}} - \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t^{\alpha}} \frac{1}{v^{\alpha}} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x,t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \right) \\
 &= K_{\alpha}\{u_n(x,t)\} - K_{\alpha}\{u_n(x,t)\} + v^{\alpha} u_n(x,0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t^{\alpha}} + \\
 &\quad v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x,t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^{\alpha} u_n(x,0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_n(x,0)}{\partial t^{\alpha}} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x,t)\}}{\partial x^{2\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{3.4.26}$$

Duke përdorur formulën (3.1.15) vlerat fillestare janë si më poshtë;

$$u_0(x, t) = u(x, 0) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t^\alpha} = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \quad (3.4.27)$$

Kështu që përftojme përafrimin e parë në trajtën;

$$\begin{aligned} K_\alpha\{u_1(x, t)\} &= v^\alpha u_0(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t^\alpha} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_0(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\ &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right\} \\ &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{5\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{5\alpha}). \end{aligned} \quad (3.4.28)$$

Kështu që,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= K_\alpha^{-1} \left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{5\alpha}) \right\} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

Përafrimi i dytë ka trajtën:

$$\begin{aligned} K_\alpha\{u_2(x, t)\} &= v^\alpha u_1(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t^\alpha} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_1(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\ &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \right] \right\} \\ &= v^\alpha \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (v^{5\alpha} + v^{9\alpha}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{5\alpha} + v^{9\alpha}). \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është:

$$\begin{aligned} u_2(x, t) &= K_\alpha^{-1} \left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{5\alpha} + v^{9\alpha}) \right\} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[1 + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

.....

Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është;

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\alpha}^{-1}(K_{\alpha}\{u_n(x, t)\}) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_{\alpha}^{-1}\left(\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n v^{(4k+1)\alpha}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n k_{\alpha}^{-1}\left(v^{(4k+1)\alpha}\right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{t^{2k\alpha}}{\Gamma(1+2k\alpha)} = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \cosh_{\alpha}(t^{\alpha}).
 \end{aligned} \tag{3.4.32}$$

Rezultati është i njëjtë me atë të përftuar nga metoda të tjera [31,36, 37].

Shembull 3.2.4:

Le të konsiderojmë ekuacionin e valëve në bashkësinë e Kantorit të dhënë nga formula:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad 0 < \alpha \leq 1, \tag{3.4.33}$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}} = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \tag{3.4.34}$$

Duke përdorur formulën (3.3.14), ndërtojmë formulën iterative të dhënë si më poshtë;

$$\begin{aligned}
 K_{\alpha}\{u_{n+1}(x, t)\} &= K_{\alpha}\{u_n(x, t)\} - v^{4\alpha} K_{\alpha}\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}} - \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \\
 &= K_{\alpha}\{u_n(x, t)\} - v^{4\alpha} \left(\frac{K_{\alpha}\{u_n(x, t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u_n(x, 0)}{v^{3\alpha}} - \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t^{\alpha}} \frac{1}{v^{\alpha}} - \right. \\
 &\quad \left. \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}}\right) \\
 &= K_{\alpha}\{u_n(x, t)\} - K_{\alpha}\{u_n(x, t)\} + v^{\alpha} u_n(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t^{\alpha}} + \\
 &\quad v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\
 &= v^{\alpha} u_n(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_n(x, 0)}{\partial t^{\alpha}} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_{\alpha}\{u_n(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}}.
 \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

Duke përdorur formulën (3.3.15) vlerat fillestare janë si më poshtë;

$$u_0(x, t) = u(x, 0) + \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t^\alpha} = \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}. \quad (3.4.36)$$

Kështu që përftojmë përafrimin e parë në trajtën;

$$\begin{aligned} K_\alpha\{u_1(x, t)\} &= v^\alpha u_0(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_0(x, 0)}{\partial t^\alpha} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_0(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\ &= v^{3\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)}\right\} \\ &= v^{3\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{7\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^\alpha + v^{7\alpha}). \end{aligned} \quad (3.4.37)$$

Kështu që,

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= K_\alpha^{-1} \left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^{3\alpha} + v^{7\alpha}) \right\} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right]. \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Përafrimi i dytë ka trajtën:

$$\begin{aligned} K_\alpha\{u_2(x, t)\} &= v^\alpha u_1(x, 0) + v^{3\alpha} \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t^\alpha} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha} K_\alpha\{u_1(x, t)\}}{\partial x^{2\alpha}} \\ &= v^{3\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + v^{4\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \frac{\partial^{2\alpha}}{\partial x^{2\alpha}} K_\alpha\left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} \right] \right\} \\ &= v^{3\alpha} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + (v^{7\alpha} + v^{11\alpha}) \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \\ &= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^{3\alpha} + v^{7\alpha} + v^{11\alpha}). \end{aligned} \quad (3.4.39)$$

Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është;

$$u_2(x, t) = K_\alpha^{-1} \left\{ \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} (v^{3\alpha} + v^{7\alpha} + v^{9\alpha}) \right\}$$

$$= \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \left[\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} \right]. \quad (3.4.40)$$

.....
 Rrjedhimisht zgjidhja thyesore lokale është;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1}(K_\alpha\{u_n(x, t)\}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} K_\alpha^{-1} \left(\frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n v^{(4k+3)\alpha} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n k_\alpha^{-1} (v^{(4k+3)\alpha}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sum_{k=0}^n \frac{t^{(2k+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2k+1)\alpha)} = \frac{x^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} \sinh_\alpha(t^\alpha). \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

Rezultati është i njëjtë me atë të përftuar nga metoda të tjera [37, 38].

Metoda e përmirësuar e iteracionit variacional thyesor lokal është aplikuar në ekuacionet e difuzionit dhe të valëve në bashkësinë e Kantorit. U provua se kjo është një metodë efikase dhe e besueshme për propozime analitike. Më parë të njëjtat probleme janë zgjidhur me metoda të tjera [36, 37]. Rezultatet e përftuara nga të gjitha metodat përputhen, kështu që, kjo teknikë mund të konsiderohet një alternativë efikase për gjetjen e zgjidhjeve të përafërta të ekuacioneve diferenciale lineare dhe jo lineare me derivate të pjesshme thyesore lokale.

KAPITULLI IV

4.1 Metoda e dekompozimit thyesor lokal α – integral të funksionit

Gjatë dekadës së fundit, llogaritjet thyesore kanë gjetur aplikim në një numër të madh fushash të ndryshme të shkencës dhe inxhinierisë. Përdorimi i ekuacioneve diferenciale thyesore është rritur akoma më shumë. Ato janë përdorur për të modeluar probleme të ndryshme fizike dhe inxhinierike. Teknika analitike dhe numerike të ndryshme janë përdorur për të zgjidhur ekuacionet diferenciale thyesore dhe ekuacionet diferenciale thyesore lokale [41-48]. Metoda e dekompozimit të funksionit është trajtuar edhe nga autorë të tjerë [49].

Ne propozojmë në këtë paragraf një algoritëm bazuar në metodën e dekompozimit të funksionit dhe transformimit të ri thyesor lokal α -integral për të gjetur zgjidhjet analitike të ekuacioneve diferenciale të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale në bashkësinë e Kantorit me kushte fillestare të ndryshme [50]. Për të treguar saktësinë e lartë dhe konvergjencën e shpejtë të këtij algoritmi të ri në paragrafin 4.2 janë prezantuar disa shembuj ilustrues.

Le të konsiderojmë ekuacionin thyesor lokal jolinear të rendit 2α , si më poshtë:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + k_1 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + k_2 \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} + k_3 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial x^\alpha} = f(x,t) \quad (4.1.1)$$

me konstante k_1, k_2, k_3 dhe $0 < \alpha \leq 1$,

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = u(l, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x,0)}{\partial x^\alpha} = \psi(x). \quad (4.1.2)$$

Sipas metodës së dekompozimit thyesor lokal të funksionit, në lidhje me sistemin

$\{\sin_\alpha(\frac{n\pi x}{l})^\alpha\}$, koeficientët e funksionit mund të jepen nga formulat;

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(t) \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha})$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t) \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha})$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha})$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha}), \quad (4.1.3)$$

ku

$$f_n(t) = \frac{2}{l^{\alpha}} \int_0^1 f(x, t) \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha} (dx)^{\alpha}$$

$$C_n = \frac{2}{l^{\alpha}} \int_{-1}^1 \varphi(x) \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha} (dx)^{\alpha}$$

$$D_n = \frac{2}{l^{\alpha}} \int_0^1 \psi(x) \sin_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha} (dx)^{\alpha}. \quad (4.1.4)$$

Duke zëvendësuar koeficientët (4.1.4) te ekuacioni del që,

$$\frac{\partial^{2\alpha} V_n(t)}{\partial t^{2\alpha}} + k_1 \frac{\partial^{\alpha} V_n(t)}{\partial t^{\alpha}} + k_2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{2\alpha} V_n(t) + k_3 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^{\alpha} V_n(t) = f_n(t) \quad (4.1.5)$$

$$V_n(0) = C_n, \quad V_n^{\alpha}(0) = D_n. \quad (4.1.6)$$

Supozojmë që transformimet α – integrale të $V_n(t)$ dhe $f_n(t)$ janë respektivisht

$$K_{\alpha}\{V_n(t)\} = A_{\alpha,V}(v) \text{ dhe } K_{\alpha}\{f_n(t)\} = A_{\alpha,f}(v).$$

Aplikojmë transformimin α – integral te ekuacioni (4.1.5) dhe përftojme;

$$\begin{aligned} & \frac{K_\alpha\{V_n(t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{V_n(0)}{v^{3\alpha}} - \frac{V_n^\alpha(t)}{v^\alpha} + k_1 \left(\frac{K_\alpha\{V_n(t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{V_n(0)}{v^\alpha} \right) + k_2 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} V_n(t) \right) + k_3 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha V_n(t) \right) \\ & = K_\alpha\{f_n(t)\} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

Kështu që,

$$\begin{aligned} & \frac{K_\alpha\{V_n(t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{C_n}{v^{3\alpha}} - \frac{D_n}{v^\alpha} + k_1 \left(\frac{K_\alpha\{V_n(t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{C_n}{v^\alpha} \right) + k_2 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} V_n(t) \right) + k_3 \left(\left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha V_n(t) \right) \\ & = K_\alpha\{f_n(t)\} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

Pra,

$$K_\alpha\{V_n(t)\} \left(\frac{1}{v^{4\alpha}} - \frac{k_1}{v^{3\alpha}} + k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right) = K_\alpha\{f_n(t)\} + \frac{C_n}{v^{3\alpha}} + \frac{D_n}{v^\alpha} + \frac{k_1 C_n}{v^\alpha}, \quad (4.1.9)$$

atëherë:

$$K_\alpha\{V_n(t)\} = \frac{C_n v^\alpha + (k_1 C_n + D_n) v^{3\alpha}}{1 + k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right]} + \frac{v^{3\alpha} K_\alpha\{f_n(t)\}}{1 + k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right]} \quad (4.1.10)$$

Kështu që kemi:

$$\begin{aligned} V_n(t) &= K_\alpha^{-1}(K_\alpha\{V_n(t)\}) = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) \frac{v^{3\alpha} A_{\alpha,v} \left(\frac{1}{\sqrt{v}^\alpha} \right)}{1 + k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right]} \frac{(dv)^\alpha}{\sqrt{v}^\alpha} \\ &+ \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) \frac{C_n v^\alpha + (k_1 C_n + D_n) v^{3\alpha}}{1 + k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right]} (dx)^\alpha. \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

Le të jetë

$$V_n(t) = V_{1,n}(t) + V_{2,n}(t) \quad (4.1.12)$$

ku

$$V_{1,n}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) \frac{v^{3\alpha} A_{\alpha,v}(\frac{1}{\sqrt{v}^\alpha})}{1+k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right] v^{4\alpha}} \frac{(dv)^\alpha}{\sqrt{v}^\alpha}$$

dhe

$$V_{2,n}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^\alpha} \int_{\beta-i\omega}^{\beta+i\omega} E_\alpha((vt)^\alpha) \frac{C_n v^\alpha + (k_1 C_n + D_n) v^{3\alpha}}{1+k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right] v^{4\alpha}} (dx)^\alpha. \quad (4.1.12)$$

Duke përdorur formulat e transformimit α – integral dhe inversit të tij dhe duke riorganizuar integralin përftojme $V_{1,n}(t)$ dhe $V_{2,n}(t)$:

$$\begin{aligned} \text{Për } D_n^1 &= -\frac{1}{4} k_1^2 + k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \\ &= 1 + k_1 v^{2\alpha} + \left[k_2 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^{2\alpha} + k_3 \left(\frac{n\pi}{l} \right)^\alpha \right] v^{4\alpha} = (1 + \frac{k_1}{2} v^{2\alpha})^2 + D_n^1 v^{4\alpha} > 0, \end{aligned} \quad (4.1.13)$$

kemi:

$$\begin{aligned} K_\alpha \{V_{2,n}(t)\} &= \frac{C_n v^\alpha + (k_1 C_n + D_n) v^{3\alpha}}{(1 + \frac{k_1}{2} v^{2\alpha})^2 + D_n^1 v^{4\alpha}} = \frac{v^\alpha (C_n + (k_1 C_n + D_n) v^{2\alpha})}{(1 + \frac{k_1}{2} v^{2\alpha})^2 + D_n^1 v^{4\alpha}} \\ K_\alpha \{V_{1,n}(t)\} &= \frac{v^{3\alpha} K_\alpha \{f_n(t)\}}{(1 + \frac{k_1}{2} v^{2\alpha})^2 + D_n^1 v^{4\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

Kështu që,

$$\begin{aligned} V_{1,n}(t) &= \frac{1}{\Gamma(1+\alpha) D_n^1} x \int_0^t E_\alpha \left(\left(-\frac{k_1}{2} \tau \right)^\alpha \right) \sin_\alpha(D_n^1 \tau)^\alpha f_n(t-\tau) (d\tau)^\alpha \\ V_{2,n}(t) &= C_n E_\alpha \left(\left(-\frac{k_1}{2} \tau \right)^\alpha \right) \cos_\alpha(D_n^1 \tau)^\alpha + (k_1 C_n + D_n) E_\alpha \left(\left(-\frac{k_1}{2} \tau \right)^\alpha \right) \sin_\alpha(D_n^1 \tau)^\alpha. \end{aligned} \quad (4.1.15)$$

4.2 Aplikimi i metodës së dekompozimit thyesor lokal α – integral të funksionit për zgjidhjen e ekuacioneve thyesore lokale të Laplasit në bashkësinë e Kantorit

Për të treguar saktësinë e lartë dhe konvergjencën e shpejtë të këtij algoritmi të ri në këtë paragraf janë prezantuar disa shembuj ilustrues për të gjetur zgjidhjet analitike të ekuacioneve diferenciale të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale në bashkësinë e Kantorit me kushte fillestare të ndryshme.

Shembull 4.2.1: Le të koniderojmë ekuacionin e Laplasit

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (4.2.1)$$

me kushte thyesore lokale fillestare

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t^\alpha(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha). \quad (4.2.2)$$

Le të zgjidhim tani shembullin e mësipërm me anë të metodës së dekompozimit thyesor lokal të funksionit.

Supozojmë se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(t) E_\alpha(nx)^\alpha)$$

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t) E_\alpha(nx)^\alpha)$$

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n E_\alpha(\frac{n\pi x}{l})^\alpha)$$

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n E_\alpha(\frac{n\pi x}{l})^\alpha). \quad (4.2.3)$$

Që çon në

$$f_n(t) = 0 \quad \forall n, \quad C_n = 0 \quad \text{for } n \neq 1, \quad C_1 = -1, \quad D_n = 0 \quad \forall n. \quad (4.2.4)$$

Duke zëvendësuar koeficientët (4.2.3) në ekuacionin (4.2.1) del që;

$$\frac{\partial^{2\alpha} V_1(t)}{\partial t^{2\alpha}} + (x)^{2\alpha} V_1(t) = 0$$

$$V_1(0) = -1, \quad V_1^{(\alpha)}(0) = 0. \quad (4.2.5)$$

Duke aplikuar transformimin α – integral përftojme;

$$K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} V_1(t)}{\partial t^{2\alpha}} + (x)^{2\alpha} V_1(t) \right\} = 0. \quad (4.2.6)$$

Kështu që,

$$\frac{K_\alpha\{V_1(t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{V_1(0)}{v^{3\alpha}} - \frac{V_1^{(\alpha)}(0)}{v^\alpha} + (x)^{2\alpha} K_\alpha\{V_1(t)\} = 0, \quad (4.2.7)$$

Rrjedhimisht,

$$K_\alpha\{V_1(t)\} \left(\frac{1}{v^{4\alpha}} + (x)^{2\alpha} \right) = \frac{V_1(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{V_1^{(\alpha)}(0)}{v^\alpha}. \quad (4.2.8)$$

Duke përdorur kushtet fillestare përftojme;

$$K_\alpha\{V_1(t)\} = 0 - \frac{v^\alpha}{(1-(x)^{2\alpha}) + v^{4\alpha}} \quad (4.2.9)$$

prandaj,

$$K_\alpha\{V_{1,1}(t)\} = 0 \quad \text{and} \quad K_\alpha\{V_{2,1}(t)\} = -\frac{v^\alpha}{(1-(x)^{2\alpha}) + v^{4\alpha}}. \quad (4.2.10)$$

Kështu që,

$$V_{1,1}(t) = 0 \quad \text{and} \quad V_{2,1}(t) = -E_\alpha(x^\alpha)\cos_\alpha(t)^\alpha. \quad (4.2.11)$$

Pra përftojme;

$$V_1(t) = V_{1,1}(t) + V_{2,1}(t) = 0 - E_\alpha(x^\alpha)\cos_\alpha(t)^\alpha = -E_\alpha(x^\alpha)\cos_\alpha(t)^\alpha. \quad (4.2.12)$$

Shembull 4.2.2 : Le të konsiderojmë ekuacionin e Laplasit

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (4.2.13)$$

me kushte fillestare thyesore lokale

$$u(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha), \quad u_t^\alpha(x, 0) = 0. \quad (4.2.14)$$

Le të zgjidhim këtë shembull duke zbatuar metodën e dekompozimit thyesor lokal të funksionit hap pas hapi.

Supozojmë se

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (V_n(t) E_{\alpha}(nx)^{\alpha})$$

$$f(x, t) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (f_n(t) E_{\alpha}(nx)^{\alpha})$$

$$\varphi(x) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n E_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha})$$

$$\psi(x) = -E_{\alpha}(x^{\alpha}) = \sum_{n=1}^{\infty} (D_n E_{\alpha}(\frac{n\pi x}{l})^{\alpha}). \quad (4.2.15)$$

Që con në

$$f_n(t) = 0 \quad \forall n, \quad D_n = 0 \quad \text{for} \quad n \neq 1, \quad D_1 = -1, \quad C_n = 0 \quad \forall n. \quad (4.2.16)$$

duke zëvendësuar koeficientët (4.2.15) në ekuacionin (4.2.13) del që;

$$\frac{\partial^{2\alpha} V_1(t)}{\partial t^{2\alpha}} + (x)^{2\alpha} V_1(t) = 0$$

$$V_1(0) = 0, \quad V_1^{(\alpha)}(0) = -1. \quad (4.2.17)$$

Aplikojmë transformimin α – integral dhe kemi:

$$K_{\alpha} \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} V_1(t)}{\partial t^{2\alpha}} + (x)^{2\alpha} V_1(t) \right\} = 0. \quad (4.2.18)$$

Kështu që,

$$\frac{K_\alpha\{V_1(t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{V_1(0)}{v^{3\alpha}} - \frac{V_1^{(\alpha)}(0)}{v^\alpha} + (x)^{2\alpha} K_\alpha\{V_1(t)\} = 0, \quad (4.2.19)$$

prandaj,

$$K_\alpha\{V_1(t)\} \left(\frac{1}{v^{4\alpha}} + (x)^{2\alpha} \right) = \frac{V_1(0)}{v^{3\alpha}} + \frac{V_1^{(\alpha)}(0)}{v^\alpha}. \quad (4.2.20)$$

Duke përdorur kushtet fillestare kemi:

$$K_\alpha\{V_1(t)\} = 0 - \frac{v^{3\alpha}}{(1-(x)^{2\alpha}) + v^{4\alpha}}. \quad (4.2.21)$$

Kështu që

$$K_\alpha\{V_{1,1}(t)\} = 0 \quad \text{dhe} \quad K_\alpha\{V_{2,1}(t)\} = -\frac{v^{3\alpha}}{(1-(x)^{2\alpha}) + v^{4\alpha}}. \quad (4.2.22)$$

Prandaj,

$$V_{1,1}(t) = 0 \quad \text{dhe} \quad V_{2,1}(t) = -E_\alpha(x^\alpha) \sin_\alpha(t)^\alpha. \quad (4.2.23)$$

Prandaj përftojme;

$$V_1(t) = V_{1,1}(t) + V_{2,1}(t) = 0 - \sin_\alpha(t)^\alpha = -E_\alpha(x^\alpha) \sin_\alpha(t)^\alpha \quad (4.2.24)$$

4.3 Metoda e dekompozimit adomian thyesor lokal α – integral.

Metoda e dekompozimit adomian është trajtuar nga autorë të ndryshëm [51 – 54]. Në këtë paragraf do të paraqesim një algoritëm të ri të bazuar në metodën e dekompozimit adomian dhe transformimit thyesor lokal α – integral [55]. Do të shohim aplikimin e tij në zgjidhjen e ekuacionit të Laplasit me kushte fillestare të ndryshme. Të njëjtat probleme janë trajtuar edhe më parë me metoda të tjera.

Për të ilustruar trajtën analitike të metodës, marim në shqyrtim ekuacionin diferencial me derivate thyesore lokale të pjesshme të rendit 2α si më poshtë:

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + k_1 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} + k_2 \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} + k_3 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = f(x,t), \quad (4.3.1)$$

me konstante k_1, k_2, k_3 , $0 < \alpha \leq 1$

dhe kushte fillestare

$$u(0,t) = u(l,t) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \psi(x). \quad (4.3.2)$$

Duke aplikuar operatorin α - integral dhe vetitë e tij ne rishkruajmë formulën (4.1.1) në trajtën e mëposhtme:

$$K_\alpha \left(\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} \right) + K_\alpha \left(k_1 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) + K_\alpha \left(k_2 \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} \right) + K_\alpha \left(k_3 \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} \right) = K_\alpha (f(x,t)), \quad (4.3.3)$$

Aplikojmë transformimin inverse α – integral dhe vetitë e tij dhe kemi:

$$u(x, t) = r(x, t) + K_{\alpha}^{-1}(K_{\alpha}(f(x, t)) + K_{\alpha}^{-1}\left(K_{\alpha}\left(k_1 \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}}\right) + K_{\alpha}\left(k_2 \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}}\right) + K_{\alpha}\left(k_3 \frac{\partial^{\alpha} u(x, t)}{\partial t^{\alpha}}\right)\right) \quad (4.3.4)$$

ku termi $r(x, t)$ do të përcaktohet nga kushtet fillestare.

Tani dekompozojmë funksionin e panjohur $u(x, t)$ si shumë komponentesh të përcaktuara nga seria:

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (4.3.5)$$

Komponentet $u_n(x, t)$ janë përfutur nga formula rekursive

$$u_0(x, t) = r(x, t) + K_{\alpha}^{-1}(K_{\alpha}f(x, t))$$

$$u_{n+1}(x, t) = K_{\alpha}^{-1}\left(K_{\alpha}\left(k_1 \frac{\partial^{\alpha} u_n(x, t)}{\partial t^{\alpha}}\right) + K_{\alpha}\left(k_2 \frac{\partial^{2\alpha} u_n(x, t)}{\partial x^{2\alpha}}\right) + K_{\alpha}\left(k_3 \frac{\partial^{\alpha} u_n(x, t)}{\partial t^{\alpha}}\right)\right) \quad (4.3.6) .$$

4. 4 Aplikimi i metodës së dekompozimit adomian thyesor lokal α – integral për zgjidhjen e ekuacioneve lokale thyesore të Laplasit në hapësirën kohore.

Në këtë paragraf janë prezantuar dy shembuj për të treguar efikasitetin e metodës . Për të treguar thjeshtësinë e saj shembujt janë zgjidhur duke kaluar në çdo hap të metodës.

Ekuacioni diferencial thyesor lokal i Laplasit është një ekuacion diferencial me derivate të pjesshme thyesore lokale shumë i rëndësishëm. Më poshtë do ti konsiderojmë zgjidhjet e ekuacionit në hapësirën thyesore lokale kohore.

Shembull 4.4.1 :

Le të konsiderojmë ekuacionin e mëposhtëm të Laplasit në bashkësinë e Kantorit me operator thyesor lokal .

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \quad (4.2.1)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = -E_\alpha(x^\alpha), \quad u_t^\alpha(x, 0) = 0. \quad (4.2.2)$$

Duke aplikuar operatorin α - integral dhe vetitë e tij ne rishkruajmë formulën (4.2.1) në trajtën e mëposhteme:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u(x,0)}{v^{3\alpha}} - \frac{u^{(\infty)}(x,0)}{v^\alpha} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (4.2.3)$$

Duke përdorur kushtet fillestare në ekuacionin (4.2.3) kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^{3\alpha}} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \quad (4.2.4)$$

ose

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} = -\frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^{3\alpha}} - K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (4.2.5)$$

Kështu që,

$$K_\alpha\{u(x,t)\} = -v^\alpha E_\alpha(x^\alpha) - v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (4.2.6)$$

Aplikojmë transformimin invers α – integral në ekuacionin (4.2.6) dhe marrim

$$u(x,t) = -E_\alpha(x^\alpha) - K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right), \quad (4.2.7)$$

ku

$$u_0(x,t) = -E_\alpha(x^\alpha) \quad (4.2.8)$$

$$u_{n+1}(x,t) = -K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_2(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right). \quad (4.2.9)$$

Iteracioni i parë është;

$$\begin{aligned} u_1(x,t) &= -K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha} K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_0(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right) \\ &= -K_\alpha^{-1}(v^{4\alpha} K_\alpha\{-E_\alpha(x^\alpha)\}) \\ &= -K_\alpha^{-1}(-v^{4\alpha} v^\alpha E_\alpha(x^\alpha)) \\ &= -K_\alpha^{-1}(-v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha)) \\ &= \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha). \end{aligned} \quad (4.2.10)$$

Iteracioni i dytë është;

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_1(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \right\} \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} v^{5\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \\
 &= \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) .
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

Iteracioni i tretë është;

$$\begin{aligned}
 u_3(x, t) &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_2(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \right\} \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{4\alpha} v^{9\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left(v^{13\alpha} E_\alpha(x^\alpha) \right) \\
 &= \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma(1+6\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) .
 \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

.....

Kështu që rrjedhimisht kemi:

$$u_n(x, t) = \frac{(-1)^n t^{2n\alpha}}{\Gamma(1+2n\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) \tag{4.2.13}$$

Si rrjedhim zgjidhja e ekuacionit është;

$$\begin{aligned}
 u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\
 &= -E_{\alpha}(x^{\alpha}) + \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) - \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) + \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma(1+6\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) - \dots \\
 &= -E_{\alpha}(x^{\alpha}) \left(1 - \frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{4\alpha}}{\Gamma(1+4\alpha)} - \frac{t^{6\alpha}}{\Gamma(1+6\alpha)} + \dots \right) \\
 &= -E_{\alpha}(x^{\alpha}) \cos_{\alpha}(t^{\alpha}).
 \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

Zgjidhja është e njëjtë me atë të përfutur nga metoda të tjera

Shembull 4.2.2 :

Le të konsiderojmë ekuacionin e mëposhtëm të Laplasit në bashkësinë e Kantorit me operator thyesor lokal

$$\frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial t^{2\alpha}} + \frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} = 0, \tag{4.2.14}$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t^{\alpha}(x, 0) = -E_{\alpha}(x^{\alpha}). \tag{4.2.15}$$

Duke aplikuar operatorin α - integral dhe vetitë e tij ne rishkruajmë formulën (4.2.14) në trajtën e mëposhtme:

$$\frac{K_{\alpha}\{u(x, t)\}}{v^{4\alpha}} - \frac{u(x, 0)}{v^{3\alpha}} - \frac{u^{(\alpha)}(x, 0)}{v^{\alpha}} = -K_{\alpha}\left\{\frac{\partial^{2\alpha} u(x, t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \tag{4.2.15}$$

Përdorim kushtet fillestare në ekuacionin (4.2.15), dhe kemi:

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} + \frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^\alpha} = -K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\} \quad (4.2.16)$$

ose

$$\frac{K_\alpha\{u(x,t)\}}{v^{4\alpha}} = -\frac{E_\alpha(x^\alpha)}{v^\alpha} - K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (4.2.17)$$

Kështu që

$$K_\alpha\{u(x,t)\} = -v^{3\alpha}E_\alpha(x^\alpha) - v^{4\alpha}K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}. \quad (4.2.18)$$

Aplikojmë transformimin invers α – integral në ekuacionin (4.2.18) dhe marrim:

$$u(x,t) = -E_\alpha(x^\alpha)\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha}K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right), \quad (4.2.19)$$

ku

$$u_0(x,t) = -\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}E_\alpha(x^\alpha) \quad (4.2.20)$$

$$u_{n+1}(x,t) = -K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha}K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_n(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right) \quad (4.2.21)$$

Iteracioni i parë është;

$$u_1(x,t) = -K_\alpha^{-1}\left(v^{4\alpha}K_\alpha\left\{\frac{\partial^{2\alpha}u_0(x,t)}{\partial x^{2\alpha}}\right\}\right)$$

$$\begin{aligned}
 &= -K_{\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ -\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(1+\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) \right\} \right) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (-v^{4\alpha} v^{3\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (-v^{7\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) .
 \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Iteracioni i dytë është;

$$\begin{aligned}
 u_2(x, t) &= -K_{\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_1(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) \right\} \right) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (v^{4\alpha} v^{7\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (v^{11\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= -\frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) .
 \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

Iteracioni i tretë është;

$$\begin{aligned}
 u_3(x, t) &= -K_{\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{\partial^{2\alpha} u_2(x, t)}{\partial x^{2\alpha}} \right\} \right) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} \left(v^{4\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) \right\} \right) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (v^{4\alpha} v^{11\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= -K_{\alpha}^{-1} (v^{15\alpha} E_{\alpha}(x^{\alpha})) \\
 &= \frac{t^{7\alpha}}{\Gamma(1+7\alpha)} E_{\alpha}(x^{\alpha}) .
 \end{aligned} \tag{4.2.24}$$

.....

Kështu që kemi:

$$u_n(x, t) = \frac{(-1)^n t^{(2n+1)\alpha}}{\Gamma(1+(2n+1)\alpha)} E_\alpha(x^\alpha). \quad (4.2.25)$$

Rrjedhimisht zgjidhja është;

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) \frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) + \frac{t^{7\alpha}}{\Gamma(1+7\alpha)} E_\alpha(x^\alpha) - \dots \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) \left(\frac{t^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} - \frac{t^{3\alpha}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \frac{t^{5\alpha}}{\Gamma(1+5\alpha)} - \frac{t^{7\alpha}}{\Gamma(1+7\alpha)} + \dots \right) \\ &= -E_\alpha(x^\alpha) \sin_\alpha(t^\alpha). \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Në këtë paragraf ne investiguam aplikimin e një algoritmi të ri bazuar në operatorin thyesor lokal α -integral dhe metodën e dekompozimit adomian për të zgjidhur ekuacionet e Laplasit me kushte fillestare thyesore lokale të ndryshme. Ky algoritëm i ri është një proces bashkimi i operatorit thyesor lokal α -integral dhe metodës së dekompozimit adomian.

Zgjidhja është e njëjtë me atë të përftuar nga metoda të tjera, si metoda e iteracionit variacional thyesor lokal [39], metoda e dekompozimit të funksionit [50]. Zgjidhjet e përfthuara nga të treja metodat përputhen prandaj kjo metodë mund të konsiderohet një teknikë alternative dhe efikase për llogaritjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme dhe me derivate të pjesshme. Kjo metodë është në gjendje të reduktojë dukshëm punën llogaritëse në krahasim me metoda të tjera klasike.

4.5 Metoda e perturbacionit homotopik thyesor lokal

Egziston një literaturë e gjerë që merret me problemet e gjetjes së zgjidhjeve të përafërta të ekuacioneve diferenciale thyesore lokale e cila quhet metoda e perturbacionit [56 – 66]. Kjo metodë ka disa kufizime, për shembull, zgjidhjet e përafërta përfshijnë një seri parametrash të vegjël gjë që sjell vështirësi, sepse pjesa më e madhe e problemeve jo lineare nuk kanë parametra të vegjël. Megjithatë zgjedhjet e duhura të parametrave të vegjël ndonjëherë sjellin zgjidhje ideale, në shumicën e rasteve zgjedhjet e papërshtatshme çojnë në efekte serioze në zgjidhjet e ekuacioneve. Prandaj, një metodë analitike e cila nuk kërkon një parametër të vogël në ekuacionin e modelimit e fenomenit është e mirëpritur. Së fundi, ekziston një rishikim i plotë i literaturës në disa metoda të reja asimptotike për kërkimin e zgjidhjeve të vetmuara të ekuacioneve diferenciale lineare dhe jolineare. Metoda e perturbacionit homotopik u prezantua për herë të parë nga He [56], por ajo është studjuar gjithashtu nga shumë autorë të tjerë për të trajtuar ekuacionet diferenciale lineare dhe jo lineare që lindin në fusha të ndryshme shkencore dhe teknologjike [57-66].

Për të ilustruar idenë bazë të metodës, konsiderojmë një ekuacion diferencial thyesor lokal jo linear me derivate të pjesshme

$$D_t^\alpha U(x, t) + RU(x, t) + NU(x, t) = g(x, t), \quad (4.5.1)$$

me kushte fillestare

$$U(x, 0) = f(x) \quad (4.5.2),$$

ku $D_t^\alpha U(x, t)$ është derivati thyesor i funksionit $U(x, t)$, R është operatori diferencial linear, N përfaqëson operatorin diferencial jo linear të përgjithshëm dhe $g(x, t)$ është termi bazë.

Aplikojmë transformimin α -integral në të dy anë e ekuacionit dhe përftojmë;

$$K_\alpha\{D_t^\alpha U(x, t)\} + K_\alpha\{RU(x, t)\} + K_\alpha\{NU(x, t)\} = K_\alpha\{g(x, t)\}. \quad (4.5.3)$$

Përdorim vetitë e transformimit dhe kemi:

$$\frac{K_\alpha\{U(x, t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{u(x, 0)}{v^\alpha} + K_\alpha\{RU(x, t)\} + K_\alpha\{NU(x, t)\} = K_\alpha\{g(x, t)\}. \quad (4.5.4)$$

Përdorim kushtet fillestare

$$\frac{K_\alpha\{U(x,t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{f(x)}{v^\alpha} + K_\alpha\{RU(x,t)\} + K_\alpha\{NU(x,t)\} = K_\alpha\{g(x,t)\}. \quad (4.5.5)$$

Kështu që përftojmë;

$$K_\alpha\{U(x,t)\} = v^\alpha f(x) - v^{2\alpha} K_\alpha\{RU(x,t)\} - v^{2\alpha} K_\alpha\{NU(x,t)\} + v^{2\alpha} K_\alpha\{g(x,t)\} \quad (4.5.6)$$

prandaj,

$$K_\alpha\{U(x,t)\} = v^\alpha f(x) + v^{2\alpha} K_\alpha\{g(x,t)\} - v^{2\alpha} K_\alpha\{RU(x,t) + NU(x,t)\}. \quad (4.5.7)$$

Operojmë me transformimin invers të transformimit α – integral në të dy anët e ekuacionit dhe kemi:

$$U(x,t) = G(x,t) - K_\alpha^{-1}\{v^{2\alpha} K_\alpha\{RU(x,t) + NU(x,t)\}\} \quad (4.5.8)$$

ku

$$G(x,t) = v^\alpha f(x) + v^{2\alpha} K_\alpha\{g(x,t)\}, \quad (4.5.9)$$

$G(x,t)$ përfaqëson termin që lind nga termi bazë dhe kushtet fillestare.

Tani aplikojmë metodën e perturbacionit homotopik dhe kemi:

$$U(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x,t). \quad (4.5.10)$$

Termi jolinear mund të dekompozohet në trajtën

$$NU(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(U) \quad (4.5.11)$$

për disa He polinome $H_n(u)$ të dhëna nga formula

$$H_n(U_0, U_1, \dots, U_n) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial p^n} [N(\sum_{i=0}^{\infty} p^i U_i)]_{p=0} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.5.12).$$

Duke zëvendësuar termat e dekompozuar përftojmë trajtën

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) = G(x, t) - p \left(K_{\alpha}^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_{\alpha} \left\{ R \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) + \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(U) \right\} \right\} \right), \quad (4.5.13)$$

e cila është një bashkim i transformimit thyesor lokal α – integral dhe metodës së perturbacionit homotopik duke përdorur He polinomet. Duke krahasuar koeficientët në fuqi të p , përftohen iteracionet e mëposhtme:

$$p^0: u_0(x, t) = G(x, t) \quad (4.5.15)$$

$$p^1: u_1(x, t) = -K_{\alpha}^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_{\alpha} \{ R U_0(x, t) + H_0(U) \} \right\} \quad (4.5.16)$$

$$p^2: u_2(x, t) = -K_{\alpha}^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_{\alpha} \{ R U_1(x, t) + H_1(U) \} \right\} \quad (4.5.17)$$

.
.
.

Duke proceduar në të njëjtën mënyrë përftohet pjesa e mbetur e komponenteve $U_n(x, t)$ dhe zgjidhja është e përcaktuar plotësisht. Si përfundim ne përafrojmë zgjidhjen analitike $u(x, t)$ nga mbetja e serisë

$$U(x, t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N U_n(x, t). \quad (4.5.18)$$

Seria e zgjidhjeve të dhëna në trajtën e mësipërme në përgjithësi konvergjon shumë shpejt.

4.6 Aplikimi i metodës së pertubacionit homotopik në ekuacionet e gazeve

Ekuacionet dinamike të gazit janë të bazuara në ligje fizike, si ligji i masës, ligji i momentit, ligji i energjisë e të tjerë. Në këtë punim ne trajtojmë problemin nga ana matematike jo nga ana fizike e tij. Ekuacioni dinamik thyesor jo linear është studjuar më parë nga Das [68] dhe Kumar [66]. Objektivi i kësaj metode është të zgjerojë fushën e aplikimit të kësaj metode për të përfutur zgjidhje analitike dhe të përafërta të ekuacionit thyesor kohor dinamik të gazeve.

Le të konsiderojmë ekuacionin dinamik jolinear thyesor kohor të gazeve:

$$D_t^\alpha U + \frac{1}{2}(U^2)_x - U(1 - U) = 0 \quad t > 0 \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (4.6.1)$$

me kushte fillestare

$$U(x, 0) = e^{-x}, \quad (4.6.2)$$

ku α është një parameter që përshkruan rendin e derivatit thyesor, funksioni $U(x, t)$ është densiteti i mundshëm, t është kohë, dhe x është koordinatë hapësinore.

Në rastin kur $\alpha = 1$ ekuacioni dinamik thyesor i Gazit reduktohet në ekuacionin klasik dinamik të gazit.

Aplikojmë transformimin thyesor lokal α – integral

$$\frac{K_\alpha\{U(x, t)\}}{v^{2\alpha}} - \frac{u(x, 0)}{v^\alpha} = -K_\alpha \left\{ \frac{1}{2}(U^2)_x - U(1 - U) \right\} \quad (4.6.3)$$

Aplikojmë kushtet fillestare dhe kemi:

$$K_\alpha\{U(x, t)\} = v^\alpha e^{-x} - v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2}(U^2)_x - U(1 - U) \right\} \quad (4.6.4)$$

Operojmë me transformimin invers α – integral në të dy anët e ekuacionit dhe kemi:

$$U(x, t) = K_\alpha^{-1}\{v^\alpha e^{-x}\} - K_\alpha^{-1}\left\{v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2}(U^2)_x - U(1 - U) \right\}\right\} \quad (4.6.5)$$

Aplikojmë metodën e pertubacionit homotopik

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) \\ &= e^x - p \left(K_{\alpha}^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_{\alpha} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(U) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) - \sum_{n=0}^{\infty} p^n H_n(U) \right\} \right\} \right) \end{aligned} \quad (4.6.6)$$

ku $H_n(U)$ and $H'_n(U)$ janë He polinomet që përfaqësojnë termin jolinear. Kështu që, He polinomet janë dhënë nga formula

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^n U_n(x, t) = (U^2)_x \quad (4.6.7)$$

Komponentet e parë të He polynomeve janë dhënë nga formula:

$$\begin{aligned} H_0(U) &= (U_0^2)_x \\ H_1(U) &= (2U_0U_1)_x \end{aligned} \quad (4.6.8)$$

$$\begin{aligned} H_2(U) &= (U_1^2 + 2U_0U_2)_x \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

për $H'_n(U)$ ne gjejmë se

$$\begin{aligned} H_0(U) &= U_0^2 \\ H_1(U) &= 2U_0U_1 \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

$$\begin{aligned} H_2(U) &= U_1^2 + 2U_0U_2 \\ &\vdots \\ &\vdots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Duke krahasuar koeficientët si fuqi të p , kemi:

$$p^0: u_0(x, t) = e^{-x} \quad (4.6.10)$$

$$\begin{aligned}
 p^1: u_1(x, t) &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_0(U) - U_0 + H'_0(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_0(U) - e^{-x} + H'_0(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \{-v^{3\alpha} e^{-x}\} \\
 &= \frac{t^k}{\Gamma(1+\alpha)} e^{-x} .
 \end{aligned} \tag{4.6.11}$$

$$\begin{aligned}
 p^2: u_2(x, t) &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_1(U) - U_1 + H'_1(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_0(U) - \frac{t^k}{\Gamma(1+\alpha)} e^{-x} + H'_0(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \{-v^{5\alpha} e^{-x}\} \\
 &= \frac{t^{2k}}{\Gamma(1+2\alpha)} e^{-x} .
 \end{aligned} \tag{4.6.12}$$

$$\begin{aligned}
 p^3: u_2(x, t) &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_2(U) - U_2 + H'_2(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \left\{ v^{2\alpha} K_\alpha \left\{ \frac{1}{2} H_0(U) - \frac{t^{2k}}{\Gamma(1+2\alpha)} e^{-x} + H'_0(U) \right\} \right\} \\
 &= -K_\alpha^{-1} \{-v^{7\alpha} e^{-x}\} \\
 &= \frac{t^{3k}}{\Gamma(1+3\alpha)} e^{-x} .
 \end{aligned} \tag{4.6.13}$$

.
 .

Si rrjedhim seria e zgjidhjeve është;

$$U(x, t) = e^{-x} \left[1 + \frac{t^k}{\Gamma(1+\alpha)} + \frac{t^{2k}}{\Gamma(1+2\alpha)} + \frac{t^{3k}}{\Gamma(1+3\alpha)} + \dots \right] \quad (4.6.14)$$

Avantazhi i kësaj metode është aftësia e saj për të kombinuar dy metoda të fuqishme për të përfutur zgjidhje analitike dhe të përafërta të sakta për ekuacionet jolineare. Ai siguron zgjidhjet në terma të serive konvergjente me komponente që llogariten lehtë në rrugë direkte pa përdorur linearizimin, perturbacionin ose supozime kufizuese. Vlen të përmendet që kjo metodë është në gjendje të reduktojë volumin llogaritës krahasuar me metoda të tjera klasike duke ruajtur akoma saktësinë e lartë të rezultatit numerik.

KONKLUSIONE

1. Origjina e transformimit të ri thyesor lokal α – integral është nga integrali Furie dhe integrali thyesor lokal i Laplasit. Transformimi i ri integral është një mjet mjaft efikas për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme dhe ekuacioneve diferenciale lineare dhe jo lineare të rendit $k\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$. Vlen të theksohet që, në qoftë se ekziston transformimi i ri thyesor lokal integral α – integral atëherë ekziston transformimi i Yang - Laplasit, ndërsa e anasjellta e këtij pohimi jo domosdoshmërisht është e vërtetë.
2. Aplikimi i transformimit thyesor lokal mund të konsiderohet një mënyrë alternative për zgjidhjen e ekuacioneve diferenciale homogjene dhe jo homogjene të zakonshme të rendit $k\alpha$ ku $0 < \alpha \leq 1$.
3. Metoda e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral është një bashkim i transformimit thyesor lokal α – integral dhe metodës së iteracionit variacional. Kjo metodë është aplikuar me sukses për të gjetur një zgjidhje të vazhdueshme thyesore lokale të ekuacionit thyesor lokal të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale të rendit 2α , ku $0 < \alpha \leq 1$. Shembujt e trajtuar tregojnë saktësinë e lartë dhe konvergjencën e shpejtë të algoritmit të përfutur. Vlen të theksohet që ky algoritëm konvergjon në iteracionin e dytë. Kjo metodë është në gjëndje të reduktojë punën llogaritëse krahasuar me metoda të tjera klasike.
4. Metoda e iteracionit variacional thyesor lokal α – integral ishte një metodë që konvergjon shpejt dhe është në gjëndje të reduktojë punën llogaritëse krahasuar me metodat e tjera klasike, megjithatë puna llogaritëse është përsëri voluminoze. Metoda e përmirësuar iteracionit variacional thyesor lokal α – integral edhe pse konvergjon në iteracionin e tretë, jo në të dytin, është në gjëndje të reduktojë edhe më shumë punën voluminoze të llogaritjeve. Kjo metodë është aplikuar me sukses në ekuacionet e difuzionit dhe të valëve në bashkësinë e Kantorit dhe provua se kjo është një metodë efikase dhe e besueshme për propozime analitike.
5. Metoda e dekompozimit thyesor lokal α – integral të funksionit është një kombinim i metodës së dekompozimit të funksionit dhe transformimit thyesor lokal α – integral. Algoritmi i përfutur është me terma të thjeshtë për tu llogaritur. Kjo metodë u aplikua me sukses për të gjetur zgjidhjet analitike të ekuacioneve diferenciale të Laplasit me derivate të pjesshme thyesore lokale në bashkësinë e Kantorit me kushte fillestare të ndryshme. Shembujt ilustrues tregojnë saktësinë e lartë dhe konvergjencën e shpejtë të këtij algoritmi të ri.
6. Metoda e dekompozimit adomian thyesor lokal α – integral është një proces bashkimi i operatorit thyesor lokal α -integral dhe metodës së dekompozimit adomian. Metoda u

aplikua me sukses për të zgjidhur ekuacionet e Laplasit me kushte fillestare thyesore lokale të ndryshme. Zgjidhja është e njëjtë me atë të përfutur nga metoda e iteracionit variacional thyesor lokal dhe metoda e dekompozimit të funksionit, prandaj kjo metodë mund të konsiderohet një teknikë alternative dhe efikase për llogaritjen e ekuacioneve diferenciale të zakonshme dhe me derivate të pjesshme. Kjo metodë është në gjendje të reduktojë dukshëm punën llogaritëse në krahasim me metoda të tjera klasike.

7. Metoda e perturbacionit homotopik thyesor lokal α -integral e ka zgjidhur problemin e parametrave të vegjël që kufizojnë metodën e perturbacionit homotopik në përgjithësi sepse nuk kërkon një parametër të vogël në ekuacionin e modelimit të fenomenit. Në këtë punim metoda e perturbacionit Homotopik α -integral është aplikuar në mënyrë të suksesshme për zgjidhjen e ekuacioneve dinamike të gazeve. Avantazhi i kësaj metode është aftësia e saj për të kombinuar dy metoda të fuqishme për të përfutur zgjidhje analitike dhe të përafërta të sakta për ekuacionet jolineare. Ai siguron zgjidhjet në terma të serive konvergjente, me komponente që llogariten lehtë në rrugë direkte, pa përdorur linearizimin, perturbacionin ose supozime kufizuese. Vlen të përmendet që kjo metodë është në gjendje të reduktojë volumnin llogaritës krahasuar me metoda të tjera klasike duke ruajtur akoma saktësinë e lartë të rezultatit numerik.

8. Vlen të theksohet që si transformimi thyesor lokal α integral, si metodat e lartpërmendura janë në gjendje të reduktojnë punën voluminoze të llogaritjes së ekuacioneve të zakonshme dhe ekuacioneve lineare me derivate të pjesshme të rendit $k\alpha$ $0 < \alpha \leq 1$. Mendojmë që ky transformim mund të jetë një mjet alternativ dhe efikas që mund të ndihmojë të gjithë kërkuesit që punojnë me ekuacione diferenciale.

9. Ky punim është i rëndësishëm sepse
 - Derivatet dhe integralet e përdorura janë të një rendi arbitrar.
 - Duke u nisur nga një derivat i rendit arbitrar dhe duke e integruar në mënyrë arbitrare do të kemi mundësi të përgjithësojmë fushën e derivateve dhe integraleve të zbuluara deri tani.
 - Kjo do të thotë që mund të përgjithësojmë fushën e sistemeve dinamike që jemi në gjendje të zgjidhim.
 - Ky integral që kemi prezantuar mund të jetë një mjet për të arritur këtë qëllim.

REKOMANDIME

1. Mund të kontrollohet konvergjenca e integralit të ri thyesor lokal për funksionet që nuk kanë rritje eksponenciale të rendit $\frac{1}{k^{2\alpha}}$ në mënyrë që kjo teori të zgjerojë fushën e aplikimeve të saj.
2. Për ekuacionet diferenciale të zgjidhura mund të kontrollohet se ç'ndodh kur kushtet fillestare nuk janë të fundme.
3. Mund të kontrollohet transformimi i ri thyesor lokal α – integral i dyfishtë.
4. Me ndihmën e transformimit të ri thyesor lokal α – integral i mund të zhvillojmë një metodë të drejtpërdrejtë për problemin e shumimit të serive të pafundme në një trajtë kompakte.
5. Mund të aplikojmë transformimin e ri thyesor lokal α – integral në zgjidhjen e sistemeve dinamike.
6. Mund të studiohet shpejtësia e konvergjencës së algoritmeve të përfutuara nga transformimi i ri integral thyesor lokal α – integral dhe gabimet numerike të tyre.

BIBLIOGRAFIA

- [1] “Integral transforms and their applications “, Third Edition, L. Debnath, D. Bhatta, CRC Press, *International Standard Book Number*–13: 978 – 1 – 4822 – 2358 – 3, 2015 by Taylor & Francis Group, LLC.
- [2] “Mathematical methods for engineers and scientists 2 , Vector Analysis, Ordinary Differential Equations and Laplace Transforms “ K. T. Tang, Springer–Verlag Berlin Heidelberg 2007, ISBN–10 3 – 540 – 30268 – 9 *Springer Berlin Heidelberg New York*
- [3] “Analiza Komplekse teori dhe ushtrime “ , Prof.Dr. Jorgo Malita , Tiranë 2009
- [4] F. B. M. Belgacem & A. A. Karaballi, “Sumudu Transform Fundamental Properties Investigations And Applications”, Hindawi Publishing Corporation, *Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis*, Vol. 2006, Article ID 91083, pp. 1 – 23.
- [5] T. M. Elzaki & S. M. Elzaki & E. A. Elnour, “On the New Integral Transform “Elzaki Transform” Fundamental Properties Investigations and Applications”, *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, International Research Publication House, ISSN 0974 – 3200, Vol. 4, No. 1 (2012), pp. 1 – 13.
- [6] T. M. Elzaki & S. M. Elzaki & E. A. Elnour, “On Some Applications of New Integral Transform “Elzaki Transform” ”, *Global Journal of Mathematical Sciences: Theory and Practical*, International Research Publication House, ISSN 0974 – 3200, Vol. 4, No. 1 (2012), pp. 15 – 23.
- [7] A. Kashuri nën udhëheqjen e Prof.Asoc. A. Fundo, “Një transformim i ri integral”, Vlorë 2016
- [8] A. Kashuri & A. Fundo & M. Kreku, “Mixture of a New Integral Transform and Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations”, *Advances in Pure Mathematics*, Vol. 3, No. 3 (2013), pp. 317 – 323.
- [9] Leibnitz, G.W., *Leibnitzen's Mathematische Schriften*, Hildesheim, Germany: Georg Olm, 1962, v. 2, pp. 301–302.
- [10] Lacroix, S.F., *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, Paris: Mme. V^eCourcier, 1819, Tome Troisième, seconde édition, pp. 409–410.[Google Scholar](#)
- [11] Spanier, Jerome and Oldham, Keith B., *The Fractional Calculus*, New York: Academic Press, 1974.
- [12] Abel, Niels Henrik, "Solution de quelques problèmes a`l'aide d'intégrales définies," *Oeuvres Complètes*, Christiania, 1881, tome première, 16–18.
- [13] Liouville, Joseph, "Mémoire sur quelques Quéstions de Géometrie et de Mécanique, et sur un nouveau genre de Calcul pour résoudre ces Quéstions," *Journal de l'École Polytechnique*, 1832, tome XIII, XXI^e cahier, pp. 1–69.
- [14] J.H. He, Some applications of nonlinear fractional differential equations and their approximations, *Bulletin of Science, Technology & Society*, 15(2) (1999), 86-90.
- [15] J.H. He, “Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media”, *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, 167(1) (1998), 57-68.

- [16] R. Hilfer, *Fractional Time Evolution: Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, River Edge, NJ, USA, (2000), 87-130.
- [17] F. Mainardi, Y. Luchko and G. Pagnini, “The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation”, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 4(2) (2001), 153-192.
- [18] A. Yildirim, “He’s homotopy perturbation method for solving the space-time fractional telegraph equations”, *International Journal of Computer Mathematics*, 87(13) (2010), 2998-3006.
- [19] L. Debnath, “Fractional integral and fractional differential equations in fluid mechanics”, *Fractional Calculus & Applied Analysis*, 6(2) (2003), 119-155.
- [20] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava and J.J. Trujillo, “Theory and applications of fractional differential equations”, *North-Holland Mathematics Studies* (Vol. 204), Elsevier Science B.V., Amsterdam, The Netherlands, 2006.
- [21] X.J. Yang, “Advanced Local Fractional Calculus and Its Applications”, *World Science Publisher*, New York, NY, USA, 2012.
- [22] X.J. Yang, “Local fractional integral transforms”, *Progress Nonlinear Science*, 4(2011), 1-25.
- [23] X.J. Yang, “Local Fractional Functional Analysis and Its Applications”, *Asian Academic, Hong Kong*, China, 2011.
- [24] X.J. Yang, “Local fractional partial differential equations with fractal boundary problems”, *Advances in Computational Mathematics and Its Applications*, 1(1) (2012), 60-63.
- [25] N. S. Koshlyakov, M. M. Smirnov, and E. B. Gliner, *Differential Equations of Mathematical Physics*, North-Holland, New York, NY, USA, 1964.
- [26] U. Tyn Myint, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, Elsevier, New York, NY, USA, 1973.
- [27] A. H. Stroud, “Initial value problems for ordinary differential equations,” in *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, pp. 207–303, Springer, New York, NY, USA, 1974
- [28] H. Rutishauser, “Initial value problems for ordinary differential equations,” in *Lectures on Numerical Mathematics*, pp. 208–277, Birkhäuser, Boston, Mass, USA, 1990.
- [29] J. A. Gatica, V. Olierker, and P. Waltman, “Singular nonlinear boundary value problems for second-order ordinary differential equations,” *Journal of Differential Equations*, vol. 79, no. 1, pp.
- [30] M. Kreku, A. Fundo “A new local fractional α -integral transform for solving the initial value problems with local fractional derivative”, *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST)* ISSN: 2458-9403 Vol. 4 Issue 5, May – 2017
- [31] D. Baleanu, J.A.T. Machado, C. Cattani, M.C. Baleanu and X.J. Yang, Local fractional variational iteration and decomposition methods for wave equation on Cantor sets, *Abstract and Applied Analysis*, Article ID 535048(2014), 1-6.

- [32] L. Chen, Y. Zhao, H. Jafari, J. A. T. Machado, and X.-J. Yang, “Local fractional variational iteration method for local fractional Poisson equations in two independent variables,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2014, Article ID 484323, 7 pages, 2014.
- [33] G.-C. Wu and E. W. M. Lee, “Fractional variational iteration method and its application,” *Physics Letters A*, vol. 374, no. 25, pp. 2506–2509, 2010.
- [34] H. Jafari, “A comparison between the variational iteration method and the successive approximations method,” *Applied Mathematics Letters*, vol. 32, pp. 1–5, 2014.
- [35] H. Jafari, H. Tajadodi, and D. Baleanu, “A modified variational iteration method for solving fractional Riccati differential equation by Adomian polynomials,” *Fractional Calculus and Applied Analysis*, vol. 16, no. 1, pp. 109–122, 2013.
- [36] M. Kreku, A. Fundo, “Local Fractional α – integral Variational Iteration Method for solving Diffusion and wave Equations on Cantor Sets” , *International conference ISTI – 2017 ,23-24 June, Tirana Albania*
- [37] Ai-Min Yang, Xiao-Jun Yang, and Zheng-Biao Li , “Local Fractional Series Expansion Method for Solving Wave and Diffusion Equations on Cantor Sets “ , *Abstract and Applied Analysis*, Volume 2013 (2013), Article ID 351057, 5 pages
- [38] W. P. Zhong and F. Gao, “Application of the Yang-Laplace transforms to solution to nonlinear fractional wave equation with fractional derivative,” in *Proceeding of the 3rd International Conference on Computer Technology and Development*, pp. 209–213, 2011.
- [39] S. Momani, Z. Odibat, and A. Alawneh, “Variational iteration method for solving the space- and time-fractional KdV equation,” *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, vol. 24, no. 1, pp. 262–271, 2008.
- [40] Matilda KREKU , Akli FUNDO , “ A Coupling Method of Local Fractional Variational Iteration Method and a new Local Fractional α - integral Transform for Solving Laplace Equation on Cantor Sets “ , *Takimi i dymbëdhjetë vjetor i ndërkombëtar i Institutit Alb-Shkenca Prishtinë* , 01-03 shtator 2017 .
- [41] Z. Zhao and C. Li, “Fractional difference/finite element approximations for the time-space fractional telegraph equation,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 219, no. 6, pp. 2975–2988, 2012.
- [42] Y. Zhou and F. Jiao, “Nonlocal Cauchy problem for fractional evolution equations,” *Nonlinear Analysis. Real World Applications*, vol. 11, no. 5, pp. 4465–4475, 2010.
- [43] V. E. Tarasov, “Fractional heisenberg equation,” *Physics Letters A*, vol. 372, no. 17, pp. 2984–2988, 2008.

- [44] A. K. Golmankhaneh, A. K. Golmankhaneh, and D. Baleanu, “On nonlinear fractional KleinGordon equation,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 3, pp. 446–451, 2011
- [45] A. K. Golmankhaneh, A. K. Golmankhaneh, and D. Baleanu, “On nonlinear fractional KleinGordon equation,” *Signal Processing*, vol. 91, no. 3, pp. 446–451, 2011
- [46] D. Baleanu, K. Diethelm, E. Scalas, and J. J. Trujillo, “,” vol. 3 of *Series on Complexity, Nonlinearity and Chaos*, World Scientific, Boston, Mass, USA, 2
- [47] C. Cattani, “*Harmonic wavelet solution of Poisson’s problem*,” *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, vol. 13, no. 1, pp. 27–37, 2008
- [48] C. Cattani, “*Harmonic wavelets towards the solution of nonlinear PDE*,” *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 50, no. 8-9, pp. 1191–1210, 2005.012
- [49] A. Yang, X. Yang, and Z. Li, “*Local fractional series expansion method for solving wave and diffusion equations on Cantor sets*,” *Abstract and Applied Analysis*, vol. 2013, Article ID 351057, 5 pages, 2013
- [50] M.Kreku , A.Fundo “Function decomposition method for solving Laplas equation using a new local fractional integral transform.” *International Journal of Trend in Research and Development*, (IJTRD) Volume 4(3), ISSN: 2394-9333
- [51] S. Momani and Z. Odibat, “Analytical solution of a timefractional Navier-Stokes equation by Adomian decomposition method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 177, no. 2, pp. 488–494, 2006
- [52] S. Momani and Z. Odibat, “Analytical solution of a timefractional Navier-Stokes equation by Adomian decomposition method,” *Applied Mathematics and Computation*, vol. 177, no. 2, pp. 488–494, 2006.
- [53] S.P. Yan, H. Jafari and H.K. Jassim, Local fractional Adomian decomposition and function decomposition methods for solving Laplace equation within local fractional operators, *Advances in Mathematical Physics*, Article ID 161580(2014), 1-7.
- [54] H. Jafari and H.K. Jassim, Local fractional Adomian decomposition method for solving two dimensional heat conduction equations within local fractional operators, *Journal of Advance in Mathematics*, 9(4) (2014), 2574-2582.
- [55] M.Kreku , “A new algorithm based in Local Fractional Adomian Decomposition Method and the Local Fractional α – integral Operator for solving Laplas equations .” , *The 9th and 10th Conference in Dynamical Systems and its Applications in Engineering and Environmental Sciences .July 12-15 , 2017. Alanya – Antalya – Turkey*
- [56] A. Yildirim, “He’s homotopy perturbation method for solving the space- and time-fractional telegraph equations,” *International Journal of Computer Mathematics*, vol. 87, no. 13, pp. 2998–3006, 2010
- [57] J.-H. He, “Homotopy perturbation technique,” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 178, no. 3-4, pp. 257–262, 1999.

- [58] A Kashuri and A Fundo and M Kreku Mixture of a New Integral Transform and Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations *Advances in Pure Mathematics* vol. 3 No . 3 (2013) , pp. 317-323
- [59] J.-H. He, "Homotopy perturbation method: a new nonlinear analytical technique," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 135, no. 1, pp. 73–79, 2003.
- [60] J.-H. He, "New interpretation of homotopy perturbation method. Addendum: 'some asymptotic methods for strongly nonlinear equations'," *International Journal of Modern Physics B*, vol. 20, no. 18, pp. 2561–2568, 2006.
- [61] D. D. Ganji, "The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer," *Physics Letters A*, vol. 355, no. 4-5, pp. 337–341, 2006.
- [62] A. Yildirim, "An algorithm for solving the fractional nonlinear Schrödinger equation by means of the homotopy perturbation method," *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, vol. 10, no. 4, pp. 445–450, 2009.
- [63] D. D. Ganji and M. Rafei, "Solitary wave solutions for a generalized Hirota-Satsuma coupled KdV equation by homotopy perturbation method," *Physics Letters A*, vol. 356, no. 2, pp. 131–137, 2006.
- [64] Y. M. Qin and D. Q. Zeng, "Homotopy perturbation method for the q-diffusion equation with a source term," *Communications in Fractional Calculus*, vol. 3, no. 1, pp. 34–37, 2012.
- [65] M. Javidi and M. A. Raji, "Combination of Laplace transform and homotopy perturbation method to solve the parabolic partial differential equations," *Communications in Fractional Calculus*, vol. 3, no. 1, pp. 10–19, 2012.
- [66] J. Singh, D. Kumar, and Sushila, "Homotopy perturbation Sumudu transform method for nonlinear equations," *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, vol. 4, pp. 165–175, 2011.
- [67] M. Kreku, "Homotopy Perturbation Method for Fractional Gas Dynamics Equation Using a new local fractional integral Transform", *IJSET VOL.4 Issue 4*, april 2017, ISSN(Online) 2348-7968
- [68] S. Das and R. Kumar, "Approximate analytical solutions of fractional gas dynamic equations," *Applied Mathematics and Computation*, vol. 217, no. 24, pp. 9905–9915, 2011.

BOTIME DHE KONFERENCA

Botime

1. Matilda KREKU , Akli FUNDO , “A new local fractional α -integral transform for solving the initial value problems with local fractional derivativ” , *Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST)* ISSN: 2458-9403 Vol. 4 Issue 5, May - 2017
2. Matilda KREKU “ Homotopy Perturbation Method for Fractional Gas Dynamics Equation Using a new local fractional integral Transform.” , *IJISSET - International Journal of Innovative Science, Engineering & Technology*, Vol. 4 Issue 4, April 2017 ISSN (Online) 2348 – 7968
3. Matilda KREKU , Akli FUNDO , “ Function Decomposition Method for Solving Laplas Equation Using a New Local Fractional Integral Transform “ *International Journal of Trend in Research and Development,(IJTRD)* Volume 4(3), ISSN: 2394-9333
4. Artion KASHURI, Akli FUNDO, Matilda KREKU, “Mixture of a New Integral Transform and Homotopy Perturbation Method for Solving Nonlinear Partial Differential Equations”, *Advances in Pure Mathematics, APM*, ISSN: 2160 – 0368 (Print), ISSN: 2160 – 0384 (Online), Vol. 3, No. 3, pp. 317 – 323.

Konferenca

1. Matilda KREKU, Akli FUNDO , “Local Fractional α – integral Variatonial Iteration Method for solving Diffusion and wave Equations on Cantor Sets “ , *International Conference Proceeding* , ISTI – 2017 , Tirana, June 23 - 24, 2017
2. Matilda Kreku , “A new algorithm based in Local Fractional Adomian Decomposition Method and the Local Fractional α – integral Operator for solving Laplas equations .” *The 9th and 10th Dynamical Systems and its Applications in Engineering and Environmental Scientes .July 12-15 , 2017. Alanya – Antalya – Turkey*
3. Matilda KREKU , Akli FUNDO , “ A Coupling Method of Local Fractional Variational Iteration Method and a new Local Fractional α - integral Transform for Solving Laplace Equation on Cantor Sets “ , Takimi i dymbëdhjetë vjetor i ndërkombëtar i Institutit Alb-Shkenca Prishtinë , 01-03 shtator 2017 .
4. Artion KASHURI, Akli FUNDO, Rozana LIKO, Matilda KREKU, "Fuzzy new integral transform method for solving second–order fuzzy differential equations", *FSHN* 2015, 11 – 12 December Tirana, Albania.