



REPUBLIKA E SHQIPERISE
UNIVERSITETI POLITEKNIK TIRANË
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISE NATEMATIKE

Rr. "Muhamet Gjolllesha", Tiranë

Tel/fax: ++355 4 2257294,

www.upt.al

DISERTACION

i

Paraqitur nga

M.Sc. Adrian Naco

Për marrjen e gradës

DOKTOR

Specialiteti : Analiza Numerike

Tema : Analizë krahasuese e metodave për zgjidhjen e problemit kufitar dhe kontribut në zgjidhjen numerike të disa problemeve speciale të rendeve të larta

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Lulëzim Hanelli

Mbrohet me dt. 31.10.2013 para jurisë

1. Prof. Dr. Shpetim Leka Kryetar
2. Prof. Dr. Xhezair Teliti Anëtar
3. Prof. Dr. Fatmir Hoxha Anëtar
4. Prof. As. Luigj Gjoka Anëtar
5. Dr. Ilir Vardhami Anëtar

...në kujtim të nënës time të dashur, Eleni

Së pari, dua të shpreh mirënjohjen time të sinqertë për Prof. Dr. *Lulzim Hanelli* për mbështetjen e vazhdueshme të tij në procesin e gjatë të studimit, kërkimit dhe finalizimit të disertacionit dhe për më tepër për durimin, motivimin, entuziazmin dhe shkallën e lartë të njohurive të tij. Udhërfimi i tij i pareshtur dhe veçanërisht kontributi i tij esencial më ndihmuan në fazën e kërkimit dhe përgatitjes së disertacionit.

Falenderimet e mia të sinqerta shkojnë gjithashtu për të gjithë stafin akademik të Departamentit të Matematikës dhe më gjerë për ndihmën e tyre të shumëanshme dhe bashkëpunimin e frytshëm në shumë aspekte.

Dua të falenderoj përzemërsisht shokët dhe miqtë e mi për mbështetjen dhe motivimin e pakursyer gjatë gjithë kësaj ndërmarjeje të gjatë dhe intensive.

Në fund, por jo më pak, dua të falenderoj familjen time: prindërit e mi, *Eleni* dhe *Sotir*, motrën time, *Tatjana* dhe familjen e saj, fëmijët e mi, *Sotir-Iasona* dhe *Eleni*, bashkëshorten time, *Matilda*, për durimin dhe mbështetjen e pakursyer shpirtërore gjithë jetën time.

.....edhe një herë FALTEMINDERIT

TABELA PËRMBLEDHËSE

HYRJE	1
Shtrimi dhe trajtimi numerik i problemeve diferenciale dhe objekti i këtij studimi.....	1
KAPITULLI 1	9
Integrimi numerik i sistemeve me vlera të veta pranë boshtit imagjinar	9
KAPITULLI 2	17
Metoda numerike për zgjidhjen e disa problemeve kufitare, periodike e të vlerave të veta	17
2.1 Metoda e goditjes për zgjidhjen e problemeve kufitare me dy pika.....	17
2.2 Metoda e goditjes për kerkimin e zgjidhjeve periodike.....	22
2.3 Zbatim: Studimi matematik i vibracioneve që lindin në transmisionet e dhëmbëzuara	17
2.3.1 Formulimi matematik i problemit	25
2.3.2 Zgjidhja numerike e problemit.....	25
KAPITULLI 3	29
Metoda e diferencave të fundme për zgjidhjen e disa problemeve kufitare dhe të vlerave të veta të rendeve të larta.....	29
3.1 Problemi kufitar i rendit të dytë – rasti linear.	37
3.2 Metoda e diferencave të fundme për problemin linear të vlerave të veta.....	39
3.3 Problemi kufitar i rendit të dytë – rasti jolinear	32
3.4 Metodatat e diferencave të fundme të rendeve të larta.....	35
3.5 MDF për ekuacionet diferenciale të rendeve të larta.....	36
3.6 Shtrirja e disa problemeve speciale të vlerave të veta që lindin në instabilitetin termal	37
3.7 Trajtimi matematik i problemeve kufitare dhe të vlerave të veta të rendeve të larta	37
3.8 Zgjidhja e një problemi të vlerave të veta të rendit 6 me anën e MDF.	39
3.8.1 Një metodë e diferencave të fundme direkte	40
3.8.2 Një metodë indirekte e diferencave të fundme	42
3.9 Zgjidhja e problemeve të shtresës së Benard-it.....	43

3.10 Zgjidhja e problemeve të vlerave të veta të rendit 8 me anën e MDF	46
3.10.1 Metoda direkte	46
3.10.2 Metoda indirekte	48
KAPITULLI I 4.....	51
Metoda numerike alternative për zgjidhjen e problemeve të vlerave të veta të rendit të 6-8 të instabilitetit termal	51
4.1 Zgjidhja e problemit të vlerave të veta rendit të 8.....	51
4.1.1 Përshkrimi i metodës	51
4.1.2 Algoritmi i metodës.....	54
4.1.3 Rezultate numerike	55
4.1.4 Përfundime	58
4.2 Zgjidhja numerike e problemeve të tjerë të instabilitetit termal. Problemet e rendit të 6	58
4.3 Transferimi dhe zgjidhja e një problemi kufitar në një problem të optimizimit numerik. Zgjidhja e ekuacionit Navier – Stokes (Problemi Blassius)	58
KAPITULLI 5	69
Zgjidhje numerike për një ekuacion vale me kushte kufitare	69
5.1 Modeli matematik i lëkundjes së linjës së tensionit të lartë	69
5.2 Korrektësia e problemit të shtruar.....	73
5.3 Zgjidhja numerike për problemin valor (5.4)-(5.8)	73
5.4 Një metodë alternative për zgjidhjen e ekuacionit valor.....	82
5.4.1 Hyrje.....	83
5.4.2. Një projekt-ide për funksionet spline në tension.....	84
PËRFUNDIME-REKOMANDIME	89
BIBLIOGRAFIA.....	93
SHTOJCË A.....	97
1. Metoda e goditjes – Llogaritja e potencialit elektrostatisht	29
2. Zgjidhja e modelit jolinear 3.1 me metodën e diferencave të fundme	30
3. Zgjidhja e problemit II – B (3.41) – (3.42) me metodën e përshkruar në 4.1	100

SHTOJCË B	105
1. Funksionet spline në tension	105
2. Kushte qëndrueshmërie.....	106
3. Metoda e diferencave të fundme bazuar në përafrimin e spline në tension.....	107
4. Nxjerrja e metodës	110

HYRJE

Shtrimi dhe trajtimi numerik i problemeve diferenciale dhe objekti i këtij studimi

Mjaft modele në shkencat natyrore dhe ato teknike paraqiten me ekuacione diferenciale të zakonshme (EDZ) të formës

$$y' = f(x; y), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Rast i veçantë i sistemit (1) është ekuacioni diferencial i rendit n i formës:

$$W^{(n)} = g(x, W, W^{(1)}, \dots, W^{(n-1)}), \quad g: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad (1')$$

Ndër problemet që shtrohen për sistemin (1) apo ekuacionin (1') më të zakonshme janë:

- a) Problemi i vlerës fillestare që për sistemin (1) shkruhet në formën

$$y' = f(x; y), \quad y(x_0) = y_0, \quad (2)$$

- b) Problemet e vlerës kufitare, zakonisht me dy pika, që karakterizohen nga një mori formulimesh. Këtu shquhen një klasë problemesh me rëndësi të posaçme në zbatime praktike që kanë të bëjnë me ekuacionin diferencial të rendit të dytë:

$$W^{(2)} = g(x, W, W^{(1)}), \quad \text{ose} \quad W'' = g(x, W, W'), \quad (3)$$

- c) Problemet e zgjidhjeve periodike që gjithashtu kanë një mori formulimesh e që shpesh reduktohen në probleme kufitare.
- d) Problemet e vlerave të veta që janë një zgjerim apo përgjithësim i problemeve kufitare e periodike.

Çështja e ekzistencës dhe unicitetit të zgjidhjes për problemin a) - (1) - (2) zgjidhet në mënyrë globale nëpërmjet teoremës Pika, ndërsa për problemet e tjera b), c), d) kjo çështje në përgjithësi është e ndërlikuar dhe literatura matematike siç do të shihet më poshtë ofron vetëm zgjidhje të veçanta e të pjesshme të problemit.

Në punimin që po paraqitim trajtohen, ndërmjet të tjerash, disa probleme të vlerave të veta. Një model nga fusha e vibracioneve mekanike, formulohet matematikisht si problem i vlerave të veta i ndërtuar mbi një problem zgjidhesh periodike në një ekuacion të formës (3). Në vazhdim trajtohen disa probleme speciale të përgjithshme, kufitare të vlerave të veta të rendeve 6-8 që kanë zbatime të rëndësishme në fenomenin e instabilitetit termal.

Aparati analitik për trajtimin e problemeve diferenciale, ndërsa paraqitet i fuqishëm dhe i pazëvendësueshëm në studimin e aspekteve cilësore dhe zbulimin e vetive themelore të zgjidhjeve të tyre, në aspektin praktik të kërkimit të këtyre zgjidhjeve ai ka më pak fuqi veprimi. Veçanërisht kur anët e djathta f e g tek (1) e (1') janë jolineare, kërkimi analitik i zgjidhjeve bëhet shumë i ndërlikuar [9]. Aparati matematik i përdorur shpesh bëhet ndërdisiplinor si gjeometri algjebrike, topologji diferenciale etj. Përgjithësisht trajtimet numerike paraqiten të jenë mjaft operative e të suksesshme në zgjidhjen e problemeve diferenciale.

Disa nga parimet kryesore që kanë të bëjnë me një apo një grup metodash numerike për zgjidhjen e një problemi diferencial janë:

1. **Universaliteti**, pra zgjidhja e problemit nuk varet nga forma e f dhe g tek (1) e (1') si dhe nga n .
2. **Rritja** praktikisht pa kufizim e **rendit** r të metodës që presupozon rritjen e shpejtësisë së konvergjencës praktikisht pa kufizim,
3. Sigurimi i **qëndrueshmërisë** numerike të zgjidhjes pavarësisht nga rendi r i

metodës.

Mund të konstatojmë që metoda e variablës diskrete që është metoda kryesore numerike për zgjidhjen e problemit a) – (2), plotëson 3 parimet e mësipërme. Kjo metodë me fillimet e saj të hershme më 1902 ka njohur zhvillime të vrullshme deri në ditët tona dhe karakterizohet nga një shumëllojshmëri tipesh e klasash.

Vetëm një nënklasë e ngushtë dhe e kufizuar problemesh nuk mund të trajtohen dot me metodat e përgjithshme të variablës diskrete. Metodatat për zgjidhjen e tyre në literaturë formulohen me termin “Metoda speciale për probleme speciale” [15]. Shpesh specialiteti i këtyre problemeve lidhet me konfiguracionin tepër të veçantë që krijojnë në planin kompleks vlerat e veta të Jakobianit f_y . Dallohen këtu dy situata:

- 1) Të ashtuquajturit **sisteme stiff** që karakterizohen nga një shpërhapje e madhe e vlerave të veta f_y sipas boshtit ox' (të analizuar në literaturë [5],[10],[15] etj.)
- 2) Sisteme që kanë vlera të veta pranë boshtit imagjinar që numerikisht manifestojnë fenomene të ngjashme me sistemet stiff [19]. **Këtë rast ne do ta ndeshim në punimin tonë.**

Tablloja e trajtimit numerik të problemeve të tjerë diferenciale b) - c) – d) etj ndryshon mjaft nga kjo e mësipërmja. Këtu mund të klasifikojmë dy grupe të mëdha metodash:

1. Në grupin e parë po futim metodat të cilat mundohen ta zgjidhin problemin drejtpërdrejt. Metoda kryesore e këtij grupi është ajo e diferencave të fundme (MDF). Por ndërsa për ekuacionet diferenciale të rendit të ulët gjenerimi i metodave të ndryshme bëhet po me atë lehtësi si në problemin e vlerës fillestare (ndërkaq rritja e rendit të metodave dhe trajtimi i qëndrueshmërisë së tyre ka analogji), për ekuacionet diferenciale të rendeve të larta ($n \geq 4$) dalin vështirësi serioze në gjenerimin e metodave, rritjen e rendit të tyre dhe trajtimin e problemit të qëndrueshmërisë. Skemat e diferencave e humbasin universalitetin e tyre për

problemet e rendeve të larta dhe në literaturën e specialitetit këto probleme kanë trajtime të posaçme. Te tilla janë problemet speciale të rendit 6-8 të instabilitetit termal të trajtuara në [3], [4], [12], [21], [22], [25], [26] që trajtohen në këtë punim.

2. Në grupin e dytë po futim metodat të cilat mundohen ta zgjidhin problemin duke e transformuar atë në një seri problemesh fillestare e duke përdorur pastaj aparatën e fuqishëm numerik që ekziston për këto të fundit. Tipike këtu janë metodat e tipit goditje [16], [20] etj që aplikohen për një klasë të gjerë problemesh kufitare. Avantazhi kryesor i metodave të këtij grupi është aplikimi i tyre në problemet inxhinjerie që shoqërohen me singularitete të ndryshme të problemit që zgjidhet (e që vështirësojnë përdorimin e metodave të tjera).

Metodat që kemi përdorur në kapitullin e dytë dhe të katërt të këtij punimi për zgjidhjen e problemeve të shtrura, mund të klasifikohen në këtë grup metodash.

Ekuacionet diferenciale me derivate të pjesshme (EDP) kanë qenë dhe mbeten një nga mjetet më të fuqishme të matematikës për studimin e proceseve fizike. Metodat numerike për zgjidhjen e përafërt të tyre morën zhvillim të vrullshëm në fillim të viteve '60 dhe ecën paralel me zhvillimin e teknikës llogaritëse. Nga pikëpamja matematike këto metoda u bënë një fushë e përzier e një aparati matematik ndërdisiplinor ku ndërthuren dhe, në një farë mase, shkrihen me njëra-tjetrën, teoria e ekuacioneve diferenciale, teoria e funksioneve të variablit real, analiza funksionale, analiza numerike, informatika, teoria e fushave, teoria e elasticitetit, etj. Nga pikëpamja praktike metodat numerike u bënë një mjet i pazëvendësueshëm për zgjidhjen e shumë problemeve industriale dhe një zonë e hapur takimi e bashkëpunimi midis matematicienëve, informaticienëve, fizikantëve dhe specialistëve të fushave të ndryshme inxhinjerie. Disa qindra monografi, disa dhjetra mijë artikuj dhe një numër i konsiderueshëm programesh informatike u janë kushtuar metodave numerike në

ekuacionet diferenciale me derivate të pjesshme (shkurt EDP). EDP karakterizohen nga një shumëllojshmëri e madhe klasash e formulimesh të ndryshme. Paraprakisht po futim shënimet:

Ω - Zonë e hapur në $R^3(x, y, z)$ ose $R^3(x, y, t)$ sipas rastit.

D - Zonë e hapur në $R^2(x, y)$ ose $R^2(x, t)$ sipas rastit; gjithashtu prerje ose konfiguracion i zonës Ω për $t = t_0$.

S - Kufiri i zonës ose i zonës D sipas rastit.

f, g, h - Funksione të dhënë në Ω , S ose D

A, B, C, M, I - Operatorë diferencialë të rendit r ose $< r$, zakonisht linearë ose kuazilinearë.

Dallohen tre tipe problemesh me formulime matematike përkatëse:

(1) Problemet e ekuilibrit: Të gjendet funksioni $u = u(x, y, z)$ i tillë që

$$\begin{aligned} Au &= f & \text{në} & \Omega \\ Bu &= g & \text{në} & S \end{aligned} \quad (4)$$

(2) Problemet e vlerave të veta: Të gjendet parametri λ (λ quhet vlera e vet) i tillë që problemi diferencial

$$\begin{aligned} Au &= \lambda Mu & \text{në} & \Omega \\ Bu &= \lambda Cu & \text{në} & S \end{aligned} \quad (5)$$

të ketë zgjidhje të ndryshme nga zgjidhja e dukshme $u(x, y, z) \equiv 0$.

(3) Problemet e përhapjes: Të gjendet funksioni $u = u(x, y, t)$ i tillë që

$$\begin{aligned} Au &= f & \text{në} & \Omega, \text{ për } t > t_0 \\ Iu &= h & \text{në} & D, \text{ për } t = t_0 \quad (\Omega \text{ për } t = t_0) \\ Bu &= g & \text{në} & S, \text{ për } t \geq t_0 \end{aligned} \quad (6)$$

Operatorët diferencialë A, B, M , etj., sipas një metode të quajtur metoda e karakteristikave ndahen në eliptikë, parabolikë dhe hiperbolikë.

Metodat numerike për zgjidhjen e problemeve diferenciale në përgjithësi bazohen në paraqitjen e përafërt lokale të zgjidhjes me funksione elementare, zakonisht polinome. Historikisht dhe në varësi të aparatit matematik që përdoret dallohen dy metoda kryesore:

- Metoda e diferencave të fundme, dhe
- metoda e elementeve të fundme.

Për problemet e përhapjes, krahas tyre, zë vënd me peshë metoda Hermitiane. Metodat e mësipërme e reduktojnë një problem diferencial në problem algjebrik, respektivisht linear n.q.s. problemi diferencial është i tillë, dhe zakonisht me matricë të rrallë.

Metoda e diferencave të fundme bazohet në zëvendësimin lokal të diferencialeve me diferenca. Në parim metoda e diferencave të fundme për ekuacionet me derivate të pjesshme është një metodë e thjeshtë dhe universale, por paraqitet relativisht e ngurtë dhe ka vështirësi në trajtimin e kufijve kur këta janë kompleks.

Metoda e elementeve të fundëm përdor një aparat matematik të ndërlikuar, por është më elastike, më e manovrueshme në përdorimin e kufijve dhe fizikisht më afër problemit diferencial që zgjidhet. Sidomos është efektive në disa probleme standarte inxhinierike ku parimet e saj ekstremale marrin kuptime fizike të caktuara.

Zbatime të posaçme, veçanërisht disa që lidhen me mekanikën e trupit të ngurtë, ndeshen me ekuacione diferenciale me derivate të pjesshme të tipit hiperbolik me të dhënat fillestare të tyre diskrete (jo të vazhdueshme). Metodat e diferencave të fundme janë të padobishme për zgjidhjen e këtyre problemeve pasi me anën e tyre nuk mund të trajtohen të dhëna fillestare diskrete. Metoda e karakteristikave është e përshtatshme

pikërisht për problemet më sipër. Ajo mund të përdoret me sukses për rastin më të përgjithshëm të ekuacionit hiperbolik kuazilinear të formës:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a_4 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (7)$$

ku $a_i, i = \overline{1, 4}$, janë funksione të $x, t, u, \frac{\delta u}{\delta t}$ dhe $\frac{\delta u}{\delta x}$.

Kushtet kufitare dhe fillestare janë:

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

$$u'_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l$$

dhe
$$u(0, t) = u(l, t) \equiv 0, \quad t > 0$$

Në këtë punim disertacioni formulohet dhe zgjidhet numerikisht një problem diferencial valor me shuarje kufitare, që ndeshet në studimin e fenomenit fizik të lëkundjeve në linjat e tensionit të lartë dhe në struktura të tjera fleksible. Modeli fizik është ai i një korde njëri skaj i së cilës qëndron i fiksuar, kurse skaji tjetër lidhet me një sistem që gjeneron lëkundje, me koeficient shuarje të vogël. Modeli matematik është një problem i vlerës fillestare-kufitare për një ekuacion diferencial jolinear të dobët me kushte kufitare jo klasike që dallon esencialisht nga formulimi standart (7):

$$u_{tt} - u_{xx} = \varepsilon \left(u_t - \frac{1}{3} u_t^3 \right), \quad 0 < x < \pi, t > 0, \quad (8)$$

me kushte kufitare:

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u_x(\pi, t) = -\alpha u_t(\pi, t), \quad t \geq 0,$$

dhe kushte fillestare:

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 < x < \pi, \quad u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < \pi,$$

Metoda numerike e propozuar dhe algoritmi përkatës i ndërtuar janë tipit të karakteristikave. Ato **shfrytëzojnë rrjetin specifik të nyjeve** që gjenerojnë kurbat

karakteristike të ekuacionit si dhe veçoritë e kushteve fillestare-kufitare të problemit. Del e qartë gjithashtu se metoda e propozuar minimizon vështirësitë e procedimit algjebrik të metodës klasike të karakteristikave si dhe kompleksitetin algjebrik të saj. Në fund të punimit analizohet një metodë numerike që kombinon teknikat e MDF dhe atë të funksioneve spline në tension për zgjidhjen e një ekuacioni quasilinear të rendit të dytë (ku problemi (8) është një rast i veçantë i tij) i formës

$$u_{tt} = A(x, t, u)u_{xx} + f(x, t, u, u_x, u_t) \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (9)$$

me kushte fillestare:

$$u(x, 0) = a(x), \quad u_t(x, 0) = b(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

dhe kushte kufitare:

$$u(0, t) = p_0(t), \quad u(1, t) = p_1(t), \quad t \geq 0$$

Në punimin që paraqitim janë përdorur si pjesë përbërëse e funksionit spline në tension, funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus në vend të funksioneve eksponencialë të përdorur nga Mohanty [38]. Lehtësia në trajtimin e tyre si funksione që derivohen sa herë të jetë e nevojshme dhe fakti që konvertohen tek njëri-tjetri gjatë derivimit përbëjnë një bazë të mirë për studim të mëtejshëm. Qëndrueshmëria e metodës që bazohet tek këto funksione trigonometrike vlen të studiohet në vazhdimësi. Ndërkohë që analiza e konvergencës mund të trajtohet duke u mbështetur tek Mohatny [38].

KAPITULLI 1

Integrimi numerik i sistemeve me vlera të veta pranë boshtit imagjinar

Konsiderojmë sistemin:

$$y' = f(t, y), \quad f: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

dhe variantin linear të tij:

$$y' = Ay + F(t) \quad (1.2)$$

ku $A_{n \times n}$ është matricë me vlera të veta $\lambda_j = u_j + iv_j$, $j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$.

Për analizën që do të bëjmë më poshtë mund të kufizohemi në rastin kur λ_j janë të ndryshme.

Konsiderojmë problemin e vlerës fillestare

$$y' = Ay, \quad y(0) = y_0 \quad (1.3)$$

zgjidhja e të cilit është

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^n k_j e^{\lambda_j t} c_j^T \quad (1.4)$$

ku k_j janë kostante që varen nga kushte fillestare, kurse c_j^T është vektori respektiv i vlerës së vetë λ_j .

Nqs $y_0 \in \mathbb{R}^n$, atëherë me pjesët reale të (1.3) mund të formohet matrica

$$B_{n \times n} = \left(c_{ij} e^{u_j t} \sin(v_j t + \alpha_{ij}) \right)_{n \times n} \quad (1.5)$$

dhe çdo komponent i zgjidhjes (1.4) është shuma e elementëve të rreshtit përkatës të

kësaj matrice. Shqyrtojmë funksionin

$$x = ae^{ut} \sin(vt + \alpha_{ij}), u < 0 \quad (1.6)$$

grafiku i të cilit lëkundet me periodë $T = \frac{2\pi}{|v|}$, amplitudë ae^{ut} dhe fazë α .

Gjatë një hapi integrimi me gjatësi h kemi ndryshimin eksponencial relativ e^{uh} . Për të matur këtë ndryshim me saktësi ne duhet të vendosim një kufizim të formës

$$e^{uh} > 1 - \bar{\varepsilon},$$

ku $\bar{\varepsilon}$ është i vogël ($\bar{\varepsilon} = 0.1$). Që këtëj

$$h < \frac{\bar{\varepsilon}}{-u} \quad (1.7)$$

Për të paraqitur në mënyrë diskrete një sinjal sinusoidal si ai i formës (1.6) duhen treguar të paktën pikat ekstremale. Për saktësi numerike të paktën 10-fishi i kësaj sasie është i nevojshëm. Pra

$$10h < T = \frac{2\pi}{|v|} \quad \Rightarrow \quad h < \frac{0.6}{|v|} \quad (1.8)$$

Ndajmë sektorin $Z = \{z = u + iv / u < 0\}$ në dy pjesë:

$$Z = Z_\varepsilon \cup Z_\beta, \quad \varepsilon + \beta = \frac{\pi}{2}$$

duke përdorur si kufi ndarës vijat me ekuacione

$$\frac{|v|}{u} = -\frac{0.6}{\bar{\varepsilon}} \quad (1.9)$$

Këto vija paraqesin pozicionin e ekuilibrit të kufizimeve (1.7) dhe (1.8). Në sektorin Z_β kufizimi (1.7) është më shtrëngues se kufizimi (1.8), kurse në sektorin Z_ε ndodh e anasjellta. Për konsiderata saktësie, në sektorin Z_β duhet vendosur kufizimi (1.7), kurse në sektorin Z_ε kufizimi (1.8).

Një kufizim tjetër mbi h vendos kërkesa e qëndrueshmërisë absolute. Për shumicën e metodave eksplicite të integrimit numerik ky kufizim shprehet në formën

$$h < \frac{k}{|\lambda|}, \quad \lambda = u + iv \quad (1.10)$$

ku k është kostante e rendit nga 1 deri në 10.

Kufizimi (1.10) vepron në gjithë sektorin Z dhe sikurse duket është më i dobët se kufizimet (1.7) dhe (1.8) në sektorët përkatës.

Analizojmë raportin e kufizimeve (1.7) dhe (1.10) në sektorin Z_β . Kufizimi (1.7) forcohet me zvogëlimin e u , por ndërkaq për $u \ll 0$ madhësia x e (1.6) bëhet e papërfillshme pas një intervali të shkurtër kohe dhe paraqitja me saktësi e saj pas këtij intervali është e panevojshme. Kjo tregon se në sektorin Z_β kërkesa e saktësisë është relative, kalimtare. Shpejt kjo kërkesë zëvendësohet me atë të qëndrueshmërisë absolute. Për rastin e ekuacionit skalar (1.1) ky fakt nuk ka ndonjë vlerë. Problemi ndryshon në rastin e sistemit (1.1). Për një nivel të dhënë saktësie duke ruajtur si kërkesë të përhershme qëndrueshmërinë absolute (kufizimin (1.10)) dhe duke neglizhuar kërkesën e saktësisë (kufizimin (1.17)), për të gjithë komponentët b_{ij} te (1.5), të cilët, duke u zvogëluar eksponencialisht, bien nën nivelin e saktësisë së dhënë, është e mundur të shkurtohet mjaft koha e llogaritjeve.

Në mënyrë më analitike shënojmë me

$$R_j(t) = \max_{i \leq j \leq n} |c_{ij} e^{u_j t}|.$$

Në qoftë se $R_j(t)$ zvogëlohet nën nivelin e saktësisë së llogaritjeve, atëherë që nga momenti t , vlera e vet λ_j përjashtohet nga kufizimi që vendosin mbi h mosbarazimet (1.7) ose (1.8). Raporti qëndrueshmëri-saktësi bëhet kështu esencial për zgjedhjen e hapit të integrimit në sektorin Z_β .

Prania e dy vlerave të veta me pjesë reale shumë të ndryshueshme në Z_β çon në të ashtuquajturin fenomen stiff.

Ndërkaq në sektorin Z_ε kufizimi (1.8), që është përgjithësisht më i fortë se kufizimi (1.10), është i nevojshëm për një interval të gjatë kohë. Kjo tregon se në sektorin Z_ε kërkesa e saktësisë është më e mprehtë se ajo e qëndrueshmërisë absolute.

Zgjidhja e përgjithshme e problemit (1.2) është

$$y = \bar{y} + \psi(t) \quad (1.11)$$

ku $\bar{y}$ është e formës (1.4). Prania e një vlere të vet λ të sistemit (1.2) në sektorin Z_ε bën që për të arritur zgjidhjen e veçantë $\psi(t)$ tek (1.11) të duhet një interval i gjatë kohë (derisa komponentja përgjegjëse e kësaj vlere të (1.4) të “shuhet”), ndërkaq kufizimi (1.9) kërkon një hap relativisht të vogël integrimi. Numri i hapave të integrit, koha e llogaritjeve dhe rreziku i gabimeve të rumbullakimit bëhen kritike, situatë e ngjashme kjo, me atë të sistemeve stiff.

Shënojmë me P madhësinë:

$$P = \left| \frac{v_0}{u_0} \right| = \max_{j \in J} \left| \frac{v_j}{u_j} \right|$$

Ka vend:

Pohimi: Numri minimal i hapave të integrit të sistemit është proporcional me P .

Vërtetim. Në qoftë se do të kërkojmë që komponentja tek (1.6) të zvogëlohet deri në rendin 10^{-m} të vogëlsisë, atëherë nga mosbarazimi

$$ae^{ut} < 10^{-m} \quad \Rightarrow \quad t > -\frac{m \ln 10}{u},$$

pra numri i hapave të integrit do të jetë

$$N > -\frac{m \ln 10}{u} \bigg/ \frac{0.6}{|v|} = C \frac{|v|}{u}, \quad \text{ku} \quad C = -\frac{m \ln 10}{0.6}.$$

Atëherë për komponenten që i përgjigjet vlerës së vet $u_0 + iv_0$ numri minimal i hapave

të integrimit do të jetë proporcional me $\left| \frac{v_0}{u_0} \right| = P$.

Është e kuptueshme që sa më e madhe të jetë P , pra sa më pranë boshtit imagjinar të jetë vlera e vet ekstremale $u_0 + iv_0$, aq më kritik bëhet problemi i integrimit numerik të komponentes përkatëse. Si rrjedhim bëhet kritik problemi i integrimit numerik të sistemit (1.2) në rastin kur vlerat e veta të tij plotësojnë kushtet:

$$u_j < 0, \text{ për } j \in J \quad \text{dhe} \quad P = \max_{j \in J} \left| \frac{v_j}{u_j} \right| = \left| \frac{v_0}{u_0} \right| \gg 1$$

sepse për të fituar numerikisht zgjidhjen e veçantë $\psi(t)$ tek (1.11) (të ashtuquajtur zgjidhje të qëndrueshme) që merret pas “shuarjes” së zgjidhjes të ashtuquajtur kalimtare

$$\bar{y} = \sum_{j=1}^n k_j e^{\lambda_j t} c_j^T$$

do të duhej një interval i gjatë kohor derisa të “shuhej” komponentja më e ngadaltë në zgjidhjen kalimtare. Është e kuptueshme se sistemi i çfarëdoshëm (1.1) paraqet të njëjtën tablo të integrimit numerik në intervalin $I(t)$, në qoftë se vlerat e veta $\lambda(t)$ të

Jakobianit $\frac{\delta f}{\delta y}$ të tij në këtë interval plotësojnë kushtet e mësipërme.

Mund të tregohet se numri maksimal i hapave të integrimit të një sistemi linear që ka vlera të veta pranë boshtit imagjinar është proporcional me madhësinë

$$M = \frac{\max(|v_j|)}{\min(|u_j|)}, j \in J.$$

Në qoftë se madhësitë P e M janë larg njëra-tjetrës (në këtë rast modulet e vlerave të veta kanë shpërndarje të madhe) atëherë përjashtimi nga kufizimi (1.8) i komponentëve që bien nën nivelin e saktësisë së kërkuar e shkurton mjaft kohën e llogaritjeve.

Mund të llogaritet se rënies eksponenciale tek (1.6) gjatë një hapi h , i përgjigjet ndryshimi eksponencial absolut me vlerë të përafërt $ae^{-ut}uh$, kurse lëkundjes sinusoidale me frekuencë v , i përgjigjet ndryshimi frekuencial i përafërt me $\frac{2\pi}{v}ae^{-ut}uh$. Në fazën fillestare të integritit këto ndryshime mund të kërkojnë një kufizim më të fortë mbi h sesa mosbarazimet (1.7) dhe (1.8). Në rastin e sistemeve me vlera të veta pranë boshtit imagjinar, ndryshimi frekuencial ka vlerë të madhe për një interval të gjatë kohë dhe kufizimi mbi h bëhet mjaft shtrëngues. Një alternativë për të dalë nga kjo gjendje është standartizimi (ndryshim i shkallës) i përshtatshëm i sistemit (1.1). Më analitikisht, shënojmë me

$$R = \max \{R_j(0)\}, \quad U = \max |u_j|, \quad V = \max |v_j|, \quad j \in J.$$

Në qoftë se $RU \gg 0$ ose $RV \gg 0$, atëherë pjesëtohet sistemi (1.1) me një kostante të përshtatshme (p.sh. me $\max(RU, RV)$) për të shmangur përdorimin e një hapi h të vogël në fazën fillestare të integritit.

Për integrimin numerik të sistemeve që kanë vlera të veta pranë boshtit imagjinar propozojmë metodat implicite të tipit Gear. Metodatat me qëndrueshmëri $A(\alpha)$ janë të padobishme për këto sisteme sepse për $\alpha = \frac{\pi}{2}$ këto metoda janë me qëndrueshmëri A ,

kështu që gabimi lokal i tyre, për rend $r \geq 3$, rritet pa kufi kur $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$. Në qoftë se madhësia P nuk është shumë e madhe (tipik $P=10$), atëherë mund të përdoren metoda njëhapëshe eksplicite, detyrimisht të implementuara me strategji hapi variabël dhe me parametra të përshtatshëm të kufizimit të gabimit lokal për shkak të lëkundjes së madhe të zgjidhjes. P.sh. përdoret me efektivitet kodi RKF për zgjidhjen e problemeve të vlerës fillestare (me $P \approx 10$), të gjeneruara nga metoda e modifikuar e goditjes. Në

qoftë se vlerat e veta $\lambda(t)$ të Jakobianit $\frac{\delta f}{\delta y}$ qëndrojnë relativisht kostante, atëherë një klasë metodash të mbështetura në polinomet trigonometrike mund të jenë të përshtatshme.

KAPITULLI 2

Metoda numerike për zgjidhjen e disa problemeve kufitare, periodike dhe të vlerave të veta

2.1 Metoda e goditjes për zgjidhjen e problemeve kufitare me dy pika

Konsiderojmë problemin e mëposhtëm kufitar jolinear

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y(b) = \beta \quad (2.1)$$

(rast i veçantë $a = 0, b = 1$ problemi Dirihle). Kushtet e teoremës së formuluar në [16] për ekzistencën dhe unicitetin e zgjidhjes së problemit Dirihle mund të përshtaten për problemin (2.1). Si shembull, problemi që modelon devijimin (shtrembërimin) e një trau drejtkëndor, mbi të cilin aplikohet një ngarkesë uniforme, ndërkaq skajet e traut janë të fiksuara ka formën:

$$\frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{S}{EI} w = \frac{qx}{2EI} (x-l), \quad w(0) = w(1) = 0 \quad (2.2)$$

ku $w = w(x)$ është devijimi vertikal në distancën x nga e skaji i majtë i traut, kurse l , q , E , S dhe I janë respektivisht, gjatësia e traut, intensiteti i ngarkesës uniforme, moduli i elasticitetit, tensioni në skaje, dhe momenti qëndror i inercisë.

Kur trau është me trashësi uniforme, prodhimi EI do të jetë konstant, dhe zgjidhja e saktë do të merrej lehtësisht. Megjithatë, në shumë apikime, trashësia nuk është uniforme, kështu që momenti i inercisë I është një funksion i x , dhe në këtë rast problemi (2.2) është jolinear, rrjedhimisht zgjidhja e tij kërkon teknika përafruese.

Një problem tjetër i vlerës kufitare, që ndeshet në studimin e presioneve në një tra,

formulohet në formën:

$$-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy}{dx}\right)+q(x)y=f(x), \quad x \in [0,1]$$

kushte kufitare $y(0)=y(1)=0$

Problemi modelon përkuljen $y(x)$ të një trau me gjatësi 1 njësi dhe seksion të prerjes tërthore $q(x)$. Trau është objekt i presioneve të jashtme $p(x)$ dhe $f(x)$, që ndikojnë mbi përkuljen $y(x)$.

Kushtet kufitare (2.1), në një rast më të përgjithshëm, mund të jenë në formën:

$$\begin{aligned}\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) &= A \\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) &= B\end{aligned}\tag{2.3}$$

ku $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, A, B$ janë konstante dhe $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$, $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$. Kushtet kufitare më sipër quhen lineare. Për $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ dhe $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, merren kushtet (2.1). Rast më i përgjithshëm janë kushtet jolineare të formës:

$$\begin{aligned}r_1(y(a), y'(a)) &= 0 \\ r_1(y(b), y'(b)) &= 0\end{aligned}$$

Problemi i egzistencës dhe unicitetit të zgjidhjes për problemet kufitare, në përgjithësi, është mjaft i ndërlikuar. Për problemin me kushte lineare ka vend teorema Keller [23]:

Teoremë 2.1 : N.q.s. në bashkësinë $D = \{x \in [a, b], -\infty < y, y' < +\infty\}$ kënaqen kushtet:

- derivatet e pjesshme të f janë funksione të vazhdueshëm.
- $y^2 + y'^2$, është madhësi e kufizuar
- egzistojnë konstantet $0 < L, M < \infty$ të tilla që: $0 < \frac{\partial f}{\partial y} \leq L, \left| \frac{\partial f}{\partial y'} \right| \leq M$
- $\alpha_1 \alpha_2 \leq 0$ dhe $\beta_1 \beta_2 \geq 0$.

atëhere problemi (2.1) - (2.3) ka zgjidhje të vetme.

Kuptohet vështirësia e zbatimit në praktikë të teoremës së mësipërme.

Idea e metodës së goditjes për zgjidhjen e problemit (2.1) qëndron në ndërtimin dhe zgjidhjen numerike të një serie problemesh fillestare të formës:

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

ku t_k është parametër zgjedhja e të cilit do të jetë e tillë që

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta$$

Ne nisemi nga shënjestra fillestare t_0 në pikën (a, α) dhe zgjidhim fillimisht problemin e vlerës fillestare

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t_0$$

Nëse $y(b, t_0)$ nuk është mjaftueshëm afër me β , bëjmë korrigjimin me një tjetër vlerë të zgjedhur t_1 e kështu në vazhdim, derisa $y(x, t_k)$ të jetë mjaftueshëm afër β .

Në mënyrë që të sigurohemi që kjo procedurë do të çojë në rezultate të kënaqshme, ne duhet të vendosim kushte të caktura për $f(x, y, y')$. Në Keller [23] janë formuluar këto kushte

Teoremë 2.2. Problemi me kushte kufitare (2.1) dhe problemi shoqërues me kushte fillestare

$$y'' = f(x, y, y'), \quad a \leq x \leq b, \quad y(a) = \alpha, \quad y'(a) = t \quad (2.5)$$

për një parametër të çfarëdoshëm t , do të ketë zgjidhje të vetme në $[a, b]$, nëq

në zonën $D = \{(x, y, y') : a \leq x \leq b, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty\}$ plotësohen

kushtet

- (i) $f, \partial f / \partial y$ dhe $\partial f / \partial y'$ janë të vazhdueshëm

(ii) egziston një kostante M , që $\left| \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \right| < M$ për çdo $(x, y, y') \in D$,

(iii) egziston një kostante L e tillë që $0 < \frac{\partial f}{\partial y} < L$

Po tregojmë se si ndërtohet vargu t_k në relacionin (2.4). Ne kërkojmë t të tillë që

$$y(b, t) - \beta = 0 \quad (2.6)$$

Ekuacioni (2.6) është jolinear dhe për zgjidhjen e tij mund të përdoret metoda e Njutonit. Fillimisht po shkruajmë variantin sekant të kësaj metode:

$$t_k = t_{k-1} - \frac{[y(b, t_{k-1}) - \beta][t_{k-1} - t_{k-2}]}{y(b, t_{k-1}) - y(b, t_{k-2})}, \quad k = 2, 3, \dots$$

Ndërkaq, iteracioni Njutonian ka formën:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b, t_k) - B}{y'(b, t_k)}, \quad \text{ku} \quad y'_t(b, t_k) = \left. \frac{d[y(b, t)]}{dt} \right|_{t=t_k} \quad (2.7)$$

Iteracioni (2.7) paraqet vështirësi sepse funksioni $y(b, t)$ nuk njihet në mënyrë eksplicite, kështu që edhe derivati i tij në t_k , $y'_t(b, t_k)$ nuk njihet. Rishkruajmë problemin (2.5) në formën,

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)), \quad y(a, t) = \alpha, \quad y'(a, t) = t \quad (2.8)$$

Në ekuacionin e mësipërm derivojmë në lidhje me t dhe ndërrojmë radhën e derivimit.

Pas zëvendësimit $z(x, t) = (\partial y / \partial t)(x, t) = y'_t(x, t)$ në ekuacionin që merret, fitohet ky problem i vlerës fillestare:

$$z'' = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') z', \quad z(a) = 0, \quad z'(a) = 1 \quad (2.9)$$

Pas integrit të (2.9) gjendet $z(b, t) = y'_t(b, t)$, kështu që iteracioni (2.7) bëhet:

$$t_{k+1} = t_k - \frac{y(b, t_k) - B}{z(b, t_k)}, \quad (2.10)$$

Vëmë re se metoda e Njutonit (2.10) kërkon në çdo hap zgjidhjen e dy problemeve të vlerës fillestare (2.8) dhe (2.9). Rezulton se variant Njuton i metodës së goditjes është më i shpejtë se varianti-sekant, megjithëse i pari në çdo hap bën zgjidhjen e problemi shtesë (2.9).

Kemi kryer një algoritëm të përmblodhur të metodës së mësipërme të goditjes - varianti Njuton. Në bazë të tij, duke përdorur utilitetet e duhura Matlab kemi krijuar një paketë kodesh që realizojnë zgjidhjen e një modeli konkret të problemit të vlerës kufitare.

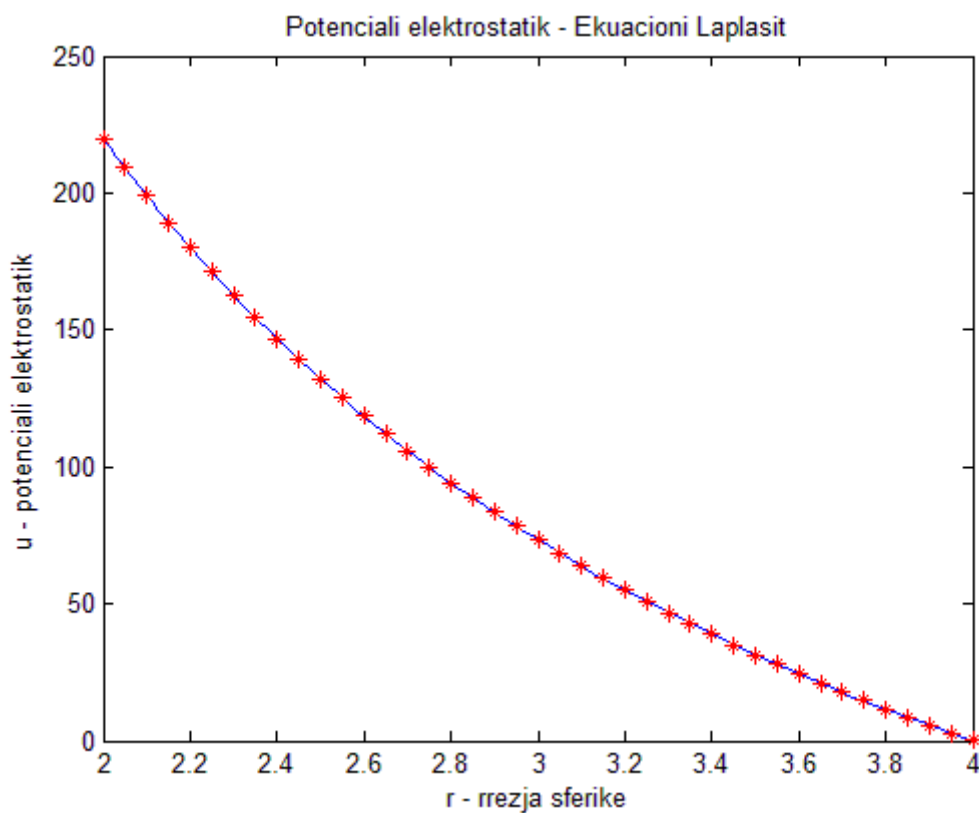


Fig. 2.1: Metoda e goditjes - Llogaritja e potencialit elektrostatik

Model 2.1: Le të jetë u potenciali elektrostatik midis dy sferave metalike koncetrike me rreze R_1 dhe R_2 . Sfera e brendshme me rreze R_1 mbahet në potencilin V_1 , kurse sfera e jashtme me rreze R_2 mbahet në potencial konstant $V_2 = 0$ volt. Sikurse dihet potenciali u në zonën midis dy sferave kënaq ekuacionin e Laplasit që këtu mund të

shkruhet në formën:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0, \quad R_1 < r < R_2, \quad u(R_1) = V, \quad u(R_2) = V_2 = 0.$$

Kërkohet të llogaritet me përafërsi potenciali u si funksion i r dhe të krahasohet rezultati i gjetur me rezultatin teorik të u

$$u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right).$$

Kodet matlab përkatës (SHTOJCA A) realizojnë zgjidhjen e modelit të mësipërm me metodën e goditjes dhe grafikojnë për krahasim rezultatet.

.

2.2. Metoda e goditjes për kërkimin e zgjidhjeve periodike

Supozojmë se problemi (1) ka zgjidhje periodike me periodë T . Mund të formulohet ky problem i vlerës kufitare [20]:

Të gjendet zgjidhja e problemit (1) që plotëson kushtin

$$y(0) - y(T) = 0 \quad (2.11)$$

Problemi (1) – (2.11) mund të zgjidhet me metodën e goditjes. Kështu, futet parametri $t \in \mathbb{R}^n$ si vlerë ndihmëse fillestare për $y(0)$ dhe problemi merr formën

$$y'(x, t) = f(x, y(x, t)), \quad y(0) = y(0, t) \quad (2.12)$$

$$F(t) = y(0, t) - y(T, t) = y_0 - y_T = 0 \quad (2.13)$$

Procedimet e mëtejshme kryhen si më sipër dhe vendin e ekuacionit diferencial (2.9) e zë sistemi diferencial,

$$\left(\frac{\partial y(x, t)}{\partial t} \right)' = \frac{\partial f(x, y(x, t))}{\partial y(x, t)} \cdot \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial y(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial Y_0}{\partial t} \quad (2.14)$$

Metoda e mësipërme është modifikuar në [20] duke futur një pikë C brenda intervalit

të periodës $(0, T)$ dhe duke gjeneruar dy çifte problemesh fillestare respektivisht në $[0, C]$ dhe $[T, C]$. Ekuacioni (2.13) me këtë modifikim merr formën

$$F(t) = y_0(C, t) - y_T(C, t) = 0 \quad (2.15)$$

Kushti (2.15) siguron këtu vazhdueshmërinë e zgjidhjes në C .

Në këtë modifikim dyfishohet numri i problemeve të vlerës fillestare që duhet të zgjidhen, por praktikisht ngelet po ai volum llogaritjesh.

2.3 Zbatim: Studimi matematik i vibracioneve që lindin në transmisionet e

dhëmbëzuara

Në tërësinë e mekanizmave që prodhohen në industrinë mekanike një vend të posaçëm zë projektimi dhe prodhimi i mekanizmave me transmise të dhëmbëzuara. Gjatë punës së këtyre transmiseve ndodh dukuria që njihet si vibracion apo dridhje e mekanizmit. Një nga objektivat e studimit të vibracioneve mekanike është projektimi i atyre mekanizmave që realizojnë vibracion sa më të vogël. Vibracioni në fakt influencohet nga shumë faktorë sekondarë, por vibracioni kryesor dhe shkatëruues është produkt i fenomenit të quajtur rezonancë parametrike. Në rastin e një mekanizmi të thjeshtë të përbërë nga një çift ingranazhesh të dhëmbëzuara parametri i rezonancës është raporti i numrit të rrotullimeve të dy ingranazheve përkatës.

2.3.1 Formulimi matematik i problemit

Në [17] dhe [18] është formuluar problemi i mëposhtëm matematik që modelon lëkundjet e vogla (vibracionet) të një çifti dhëmbësh të ingranuar:

Të gjendet zgjidhja $W(x)$ e ekuacionit

$$W'' + 2n(x)W' + m(x)W = g(x) \quad (2.16)$$

që plotëson kushtet

a) $W(x)$ është funksion i vazhdueshëm dhe periodik me periodë T në intervalin

$$[0, +\infty[$$

b) Derivati i parë i zgjidhjes $W'(x)$ është i vazhdueshëm në $]0, +\infty[$ me perjashtim

të pikave të trajtës λT , $\lambda = 1, 2, \dots, n, \dots$, ku ka kërcime të tipit

$$\Delta W' = A_1 + A_2 W' / \lambda T - 0$$

c) Funksionet $n(x)$, $m(x)$, $g(x)$ janë periodikë me periodë T dhe në çdo

interval $]\lambda T, (\lambda + 1)T[$, në pikën midis, $\lambda T < C < (\lambda + 1)T$, kanë këputje

thelbësore.

Në [20] është kapërcyer çështja e ekzistencës dhe unicitetit të zgjidhjes së problemit (2.16) – a), b), c) duke supozuar se ai ka zgjidhje të vetme dhe është gjetur zgjidhja e tij duke përdorur një modifikim të metodës së goditjes. Për problemin (2.16) – a), b), c) çështja e ekzistencës së zgjidhjes është esenciale sepse mosekzistenca e zgjidhjes së tij interpretohet fizikisht si fenomen i rezonancës parametrike. Parametri i rezonancës është ω , që është raporti $\omega_1 : \omega_2$ dhe që ndërhyr në ekuacionin (2.16) nëpërmjet varësisë së koeficientëve të tij nga ky parametër.

Formulimi i mësipërm nënkupton gjetjen e atyre vlerave diskrete të parametrin ω për të cilat cënohet ekzistenca dhe uniciteti i zgjidhjes së problemit (2.16) – a), b), c), çështje e cila është trajtuar në [17].

Në fakt objektivi kryesor i studimit të lëkundjeve të vogla në transmisionet e dhëmbëzuara është që në tërësinë e ingranazheve dhe mekanizmave të dhëmbëzuar që prodhohen të gjenden ato kombinime ingranimesh, pra ato raporte $\omega_1 : \omega_2$ për të cilat

zhurmat apo vibracionet janë në minimum. Më konkretisht kërkohet gjetja e zonave më të përshtatshme të punës së transmisionit, dhe veçanërisht lokalizimi i atyre brezave të rrotullimit për secilin ingranazh që çojnë në humbjen e periodicitetit të zgjidhjes, d.m.th. në rezonancë. Për këtë arsye është e dobishme që modelin matematik që modelon vibracionet e veta (frekuencat vetjake ω), pra problemin (2.16) – a), b), c) . ta formulojmë në formën :

Të gjenden zonat e lejuara të frekuencave ω të punës së transmisionit të dhëmbëzuar, më konkretisht të gjenden intervalet reale të ω për të cilat amplituda e dridhjes $W(x)$ merr vlera të pranueshme.

2.3.2 Zgjidhja numerike e problemit

Është e nevojshme të nxirret një kriter analitik për përcaktimin e frekuencave të lejuara. Nqs përdorim metodën e përshkruar në paragrafet 2.2 dhe 2.3 më sipër zgjidhjen $W(x)$ mund ta shkruajmë si kombinim linear përkatës të 6 zgjidhjeve të veçanta l.p. (me kushte fillestarë të zgjedhur në mënyrë të përshtatshme si në [20]) të cilat mund të gjenerohen numerikisht. Duke vendosur kushtet (2.16) – a), b), c) pas një algjebre jo të komplikuar fitohet një sistem linear për përcaktimin e konstanteve të panjohura të kombinimit linear që ka përcaktorin:

$$W(\omega) = \begin{vmatrix} W_1^1 - W_1^2 & W_2^1 - W_2^2 \\ \dot{W}_1^1 - \dot{W}_1^2 & \dot{W}_2^1 - \dot{W}_2^2 \end{vmatrix} \quad (2.19)$$

Mund të shkruajmë menjëherë një kriter për përcaktimin e zonave të lejuara të ω , këto janë pikërisht zonat për të cilat plotësohet kriteri

$$W(\omega) > \varepsilon_{TOL} \quad (2.20)$$

ku ε_{TOL} më sipër është parametër i përdoruesit.

Në fakt është e vështirë të përcaktohet parametri ε_{TOL} , për shkak të relativitetit të

theksuar të vlerave të përcaktorit $W(\omega)$ (problemet e vlerës fillestare që gjeneron metoda e goditjes në përgjithësi variojnë vrullshëm). Kështu që në vend të testit numerik (2.20) është shumë më e logjikshme të testohet singulariteti i matricave me përcaktor $W(\omega)$. Në eksperimentet numerike që kemi kryer, ne kemi përdorur si test të singularitetit faktorin e kushtëzimit të matricave respektive, duke përdorur këtu utilitetin matlab COND për llogaritjen e këtij faktori. Kështu që kriteri (2.20) zëvendësohet me kriterin

$$\text{cond}(W(\omega)) > \varepsilon_{TOL1} \quad (2.21)$$

Vetëm me pak eksperimente numerike është e mundur të përcaktohet një vlerë e pranueshme për tolerancën ε_{TOL1} , dhe pastaj të nxirren zonat e lejuara të punës së transmisionit, pra të zgjidhet problemi i shtruar më lart.

Për të llogaritur vlerën e funksionit $W(\omega)$ për vlerën e dhënë ω zëvendësohet kjo e fundit tek problemi (2.16) – a), b), c) dhe zgjidhen 6 probleme të vlerës fillestare me kushtet respektive.

N.q.se supozojmë që funksionet $n(x, \omega)$ dhe $m(x, \omega)$ janë konstantë në $[0, T]$ (në fakt referuar [17] ata janë afërsisht pjesë – pjesë konstantë) atëherë zgjidhja e përgjithshme e homogjenit të (2.16) mund të marrë formën:

$$y = Ae^{-n(\omega)} \sin(\alpha t + \beta) \quad (2.22)$$

ku $\alpha = \sqrt{\theta - n^2}$, ndërsa A dhe β janë konstante që varen nga kushtet fillestare të problemit. Duke patur parasysh rendet e madhësive: $n \approx 10^3$ dhe $m \approx 10^8$ del që $\alpha \approx 10^4$. Vlerat e veta të Jakobianit të sistemit që i përgjigjet (2.16) janë të rendit

$${}_2\lambda_1 = -n \pm \alpha i$$

Por, meqë raporti $\alpha/n \gg 1$, rezulton se ekuacioni (2.16) ka një vlerë të vetë me pjesë

reale negative pranë boshtit imagjinar. Integrimi numerik i problemeve të vlerës fillestare që gjeneron metoda e goditjes, në çdo hap të metodës, nxjerr probleme si ato që u analizuan në kapitullin e parë të këtij punimi. Por po të kemi parasysh se problemi i shtruar kërkon vetëm lokalizimin e frekuencave vetjake, atëherë mund të pohohet se problemi zgjidhet numerikisht me saktësi.

Eksperimentet e kryera në ordinator me të dhëna industriale të marra nga [17] tregojnë se brezi i parë i rezonancës parametrike zbulohet me qartësi. Si përfundim mund të shihni se metoda numerike që propozohet është më afër realitetit të dukurisë fizike të vibracionit.

KAPITULLI 3

Metoda të diferencave të fundme për zgjidhjen e problemeve të vlerës kufitare dhe të vlerave të veta të rendeve të larta

Metodat e këtij kapitulli kanë karakteristika të qëndrueshme të mira, por kanë kosto llogaritëse të lartë dhe përdorimi i tyre në zgjidhjen e një problem konkret kërkon më tepër lodhje e konsum mendor. Ideja qendrore e metodave me diferenca të fundme është zëvendësimi i derivative tek ekuacioni diferencial që zgjidhet, me anën e përafrimeve të përshtatshme. Më tej, problemi diferencial transformohet në një problem algjebrik, më konkretisht, në një sistem ekuacionesh algjebrike, zgjidhja numerike e të cilit është njëkohësisht zgjidhja e përafërt e problemit kufitar të dhënë. Lineariteti apo jolineariteti i problemit diferencial reflektohet me të njëjtën kahe tek problemi algjebrik përkatës. Shtjellimin e mëtejshëm të metodës po e bëjmë duke iu referuar problemit diferencial kufitar përkatës.

3.1 Problemi kufitar i rendit të dytë-rasti linear

Konsiderojmë problemin linear të vlerës kufitare (3.1):

$$w'' = p(x)w' + q(x)w + r(x), \quad w(a) = A, w(b) = B \quad (3.1)$$

Segmenti i integritetit $[a, b]$ ndahet në $(N+1)$ pjesë të barabarta me anën e rrjetit të nyjeve $x_i = a + ih$, $i = \overline{0, N+1}$, $h = (b-a)/(N+1)$. Zgjedhja e hapit h kostant e thjeshton mjaft algjebërën e veprimeve në metodat e diferencave të fundme. Vihet re menjëherë se $w_0 = A$, $w_{N+1} = B$. Në nyjet e brendshme $x_i, i = \overline{1, N}$, ekuacioni diferencial (3.1) mund të shkruhet,

$$w''(x_i) = p(x_i)w'(x_i) + q(x_i)w(x_i) + r(x_i)$$

Pas zëvendësimit në ekuacionin e mësipërm të derivateve $w'(x_i), w''(x_i)$ me diferencat

qëndrore respektive të rendit të dytë

$$w'(x_i) = \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}, \quad w''(x_i) = \frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, N}$$

dhe pas kryerjes së veprimeve përkatëse fitohet sistemi i mëposhtëm i N ekuacioneve lineare për përcaktimin e N të panjohurave $w_1, w_2, \dots, w_n$:

$$a_1 w_1 + b_1 w_2 = d_1$$

$$c_i w_{i-1} + a_i w_i + b_i w_{i+1} = d_i, \quad i = 2, \dots, N-1, \quad (3.2)$$

$$c_N w_{N-1} + a_N w_N = d_N$$

ku koeficientët a_i, b_i, c_i, d_i llogariten si më poshtë:

$$a_i = 2 + h^2 q(x_i), \quad b_i = -1 + (h/2) p(x_i), \quad c_i = -1 - (h/2) p(x_i), \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3)$$

$$d_i = -h^2 r(x_i), \quad i = 2, \dots, N-1, \quad d_1 = -h^2 r(x_1) - c_1 A, \quad d_N = -h^2 r(x_N) - b_N B$$

Sistemi i ekuacioneve lineare algjebrikë (3.3) mund të shkruhet në trajtë matricore:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & . & . & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & . & . & 0 & c_N & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ . \\ . \\ d_{N-1} \\ d_N \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Sikurse shihet matrica (3.4) është tridiagonale dhe për zgjidhjen numerike të tij mund të përdoret metoda Crout.

3.2 Metoda e diferencave të fundme për problemin linear të vlerave të veta

Problemi linear i vlerave të veta në ekuacionet diferenciale të rendit të dytë formulohet:

Të gjenden vlerat e parametrin λ të tilla që problemi i vlerës kufitare

$$w'' = p(x)w' + [q(x) - \lambda]w, \quad w(a) = 0, w(b) = 0 \quad (3.5)$$

të ketë zgjidhje $w(x)$ të ndryshme nga zgjidhja triviale $w(x) = 0$.

Problemi i mësipërm mund të zgjidhet me anën e metodës së diferencave të fundme.

Zëvendësimi i x me x_i , w me w_i dhe i derivateve w'_i e w''_i me anën e formulave të diferencave çon në ekuacionet algjebrikë perkates. Veçse në vend të termit $r(x_i)$ këtu kemi termin $(-\lambda w_i)$, kështu që zëvendësimet (3.3) dhe ekuacionet (3.2) shkruhen:

$$\begin{aligned} a_i &= 2 + h^2 q(x_i), \quad i = 1, \dots, N \\ b_i &= -1 + (h/2) p(x_i), \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} c_i &= -1 - (h/2) p(x_i), \quad i = 2, \dots, N \\ a_1 w_1 + b_1 w_2 &= h^2 \lambda w_1 \\ c_i w_{i-1} + a_i w_i + b_i w_{i+1} &= h^2 \lambda w_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{3.7}$$

$$c_N w_{N-1} + a_N w_N = h^2 \lambda w_N$$

Në trajtë matricore ekuacionet (3.7) shkruhen si

$$\frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & . & . & 0 \\ c_2 & a_2 & b_2 & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & c_{N-1} & a_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & . & . & 0 & c_N & a_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ . \\ . \\ w_{N-1} \\ w_N \end{pmatrix}$$

ose shkurt

$$Aw = \lambda w \tag{3.8}$$

Kështu që përfundimisht problemi linear diferencial i vlerave të veta (3.5) u transformua me anën e metodës së diferencave të fundme në problemin linear algjebrik të vlerave të veta (3.8).

3.3 Problemi kufitar i rendit të dytë-rasti jolinear

Për problemin e përgjithshëm të vlerës kufitare:

$$w''(x) = g(x, w, w'), \quad w(a) = A, \quad w(b) = B \quad (3.9)$$

Metoda e diferencave të fundme e paragrafit të kaluar mund të zhvillohet në mënyrë të ngjashme, veçse këtu sistemi algjebrik rezultat do të jetë jolinear, ashtu si edhe problemi diferencial (3.9). Konkretisht, pas zëvendësimit të derivateve tek ekuacioni (3.9) me diferenca përkatëse dhe manipulimeve algjebrike analoge me rastin linear, fitohet sistemi prej $N \times N$ ekuacionesh algjebrikë jolinearë të formës:

$$\begin{aligned}
& 2w_1 - w_2 + h^2 g\left(x_1, w_1, \frac{w_2 - A}{2h}\right) - A = 0 \\
& -w_1 + 2w_2 - w_3 + h^2 g\left(x_2, w_2, \frac{w_3 - w_1}{2h}\right) = 0 \\
& \dots\dots\dots \\
& \dots\dots\dots \\
& -w_{N-2} + 2w_{N-1} - w_N + h^2 g\left(x_{N-1}, w_{N-1}, \frac{w_N - w_{N-2}}{2h}\right) = 0 \\
& -w_{N-1} + 2w_N + h^2 g\left(x_N, w_N, \frac{B - w_{N-1}}{2h}\right) - B = 0
\end{aligned}
\tag{3.10}$$

Sistemi (3.10) mund të zgjidhet vetëm në mënyrë iterative, p.sh. mund të përdoret metoda e Njutonit. Jakobiani $J(w_1, \dots, w_N)$ i sistemit (3.10) mund të llogaritet lehtë.

Nqs shënojmë si:

$$\begin{aligned} a_i &= 2 + h^2 g_w \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), \quad i = 1, \dots, N \\ b_i &= -1 + \left(\frac{h}{2} \right) g_{w'} \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), \quad i = 1, \dots, N-1 \\ c_i &= -1 + \left(\frac{h}{2} \right) g_{w'} \left(x_i, w_i, \frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h} \right), \quad i = 2, \dots, N \end{aligned} \quad (3.11)$$

ateherë matrica $J(w_1, \dots, w_N)$ ka formë identike me atë të anës së majtë të (3.4).

I gjithë procesi i mësipërm detajohet nga algoritmi i mëposhtëm.

Algoritëm për metodën e diferencave të fundme-rasti jolinear

Të dhëna: Ekuacioni diferencial

$$w''(x) = g(x, w, w'), \quad w(a) = A, \quad w(b) = B$$

N – numri i nyjeve të brendshme,

M – numri maksimal i iteracioneve,

Tol – tolerancë e lejuar

Hapi 1. $h = (b - a) / (N + 1), \quad w_0 = A, \quad w_{N+1} = B$

Hapi 2. Për $i = 1, \dots, N$, kryej $w_i = A + ih \left(\frac{B - A}{b - a} \right)$

Hapi 3. $k = 1$

Hapi 4. Derisa $k \leq M$ kryej hapat 5-18

Hapi 5. $x = a + h$

$$t = (w_2 - A) / (2h)$$

$$a_1 = 2 + h^2 g_w(x, w_1, t)$$

$$b_1 = -1 + (h/2) g_{w'}(x, w_1, t)$$

$$d_1 = -(2w_1 - w_2 - A + h^2 g(x, w_1, t))$$

Hapi 6. Për $i = 1, \dots, N - 1$ kryej

$$x = a + ih, \quad t = (w_{i+1} - w_{i-1}) / (2h)$$

$$a_i = 2 + h^2 g_w(x, w_i, t)$$

$$b_i = -1 + (h/2) g_{w'}(x, w_i, t)$$

$$c_i = -1 - (h/2) g_w(x, w_i, t)$$

$$d_i = -(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1} + h^2 g(x, w_i, t))$$

Hapi 7. $x = b - h, \quad t = (B - w_{N-1}) / (2h)$

$$a_N = 2 + h^2 g_w(x, w_N, t)$$

$$c_N = -1 + (h/2) g_w(x, w_N, t)$$

$$d_N = -(2w_N - w_{N-1} - B + h^2 g(x, w_N, t))$$

Hapi 8. Zgjidhet sistemi tridiagonal, me diagonale a_i, b_i, c_i dhe terma të lirë d_i , me metodën Crout ose çfarëdo metodë tjetër. Merren rezultatet: (x_i, w_i) .

Hapi 9. Për $i = N - 1, \dots, 1$, $v_i = z_i - u_i v_i + 1$, $w_i = w_i + v_i$

Hapi 15. Nqs $\|v\| \leq Tol$ atëherë kryej hapat 16 dhe 17

Hapi 16. Për $i = 1, \dots, N + 1$ kryej

$$x = a + ih, \text{ nxirr } (x_i, w_i)$$

Hapi 17. Fund

Hapi 18. $k := k + 1$

Hapi 19. Shkruaj mesazhin “Është tejkaluar Numri maksimal i iteracioneve të lejuara”

Hapi 20. Fund

Kemi ndërtuar kodin MATLAB të algoritmit të mësipërm (Kodi `mdf.m` ne Shtojce).

Kodi i ndërtuar u kolaudua me problemin e mëposhtëm kufitar.

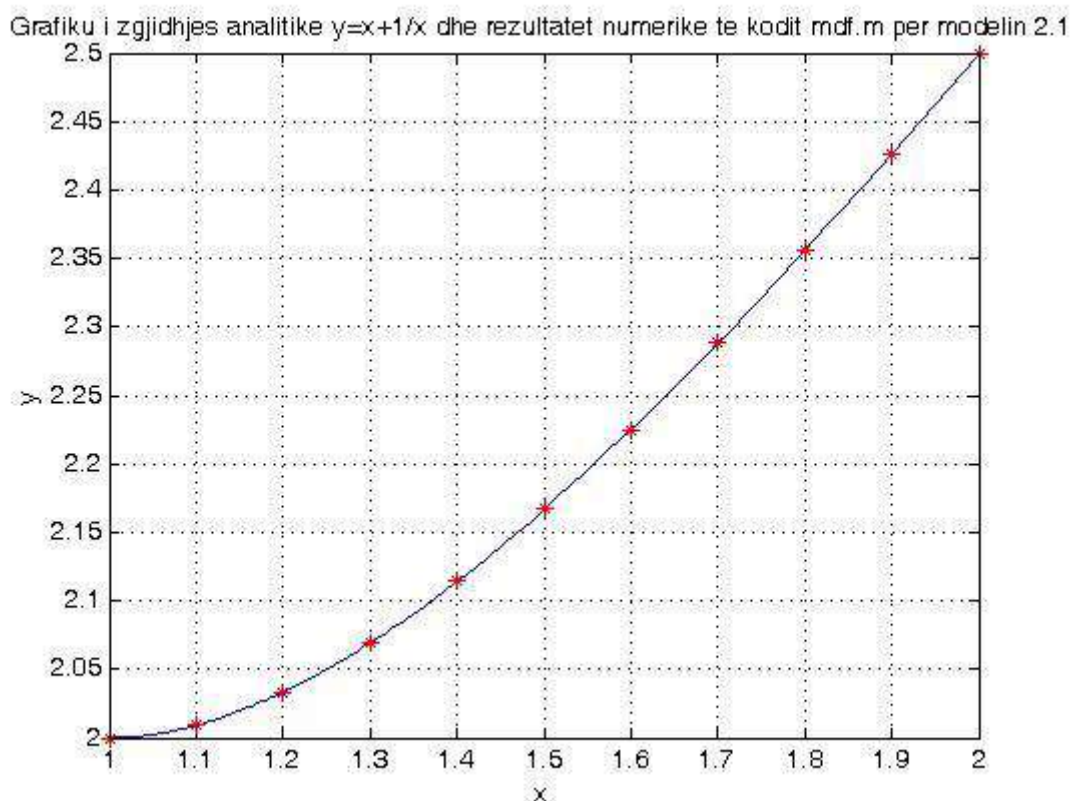
Model 3.1

Duke përdorur metodën e diferencave të fundme (kodin **mdf.m**) të gjendet zgjidhja e përafërt e problemit të vlerës kufitare,

$$w'' = 2w^3 - 6w - 2x^3, \quad 1 < x < 2, \quad w(1) = 2, \quad w(2) = 5/2,$$

duke marrë $h = 0.1$. Të krahasohet rezultati me zgjidhjen teorike $w = x + 1/x$.

Në figurën e mëposhtme janë paraqitur grafikisht zgjidhja teorike e problemit dhe rezultatet numerike të kodit MATLAB mdf.m



3.4 Metodatat e diferencave të fundme të rendeve të larta.

Rritja e saktësisë së metodës së diferencave është e lidhur me saktësinë e llogaritjes së derivateve $w'(x)$ dhe $w''(x)$ sipas formulave të përafërta të diferencave. Zvogëlimi i gabimit lokal të derivateve, që është i formës $O(h^2)$, kërkon zvogëlimin e hapit të integrit h , ndërkaj kjo e fundit sjell drejtpërdrejt rritjen e numrit $N = (b-a)/h$ të ekuacioneve të sistemeve algjebrikë (3.2) apo (3.10).

Një alternativë tjetër për rritjen e saktësisë, pa e rritur numrin e ekuacioneve algjebrikë që duhet të zgjidhen, është rritja e rendit të gabimit lokal të formulave për përafrimin e derivateve $w'(x)$ dhe $w''(x)$ me diferenca qendrore. Konkretisht në vend të formulave

me rend të gabimit lokal të formës $O(h^2)$, mund të përdoren formula të tjera me rend të gabimit lokal më të lartë. Më poshtë jepen dy çifte formulash të tilla me gabime lokale respektivisht të formës $O(h^4)$ dhe $O(h^6)$.

$$w'_i = \frac{1}{12h} (w_{i-2} - 8w_{i-1} + 8w_{i+1} - w_{i+2}) \quad l_i = O(h^4)$$

$$w''_i = \frac{1}{12h^2} (-w_{i-2} + 16w_{i-1} - 30w_i + 16w_{i+1} - w_{i+2}) \quad l_i = O(h^4)$$

$$w'_i = \frac{1}{60h} (-w_{i-3} + 9w_{i-2} - 45w_{i-1} + 45w_{i+1} - 9w_{i+2} + w_{i+3}) \quad l_i = O(h^6)$$

$$w''_i = \frac{1}{180h^2} (2w_{i-3} - 27w_{i-2} + 270w_{i-1} - 490w_i + 270w_{i+1} - 27w_{i+2} + 2w_{i+3}) \quad l_i = O(h^6)$$

Mund të verifikohet se sistemet algjebrike analoge të (3.9) apo (3.17), që do të rezultojnë nga përdorimi i formulave me gabim lokal $O(h^4)$, do të ishin sisteme me matrica bandë 5-diagonale dhe ekuacionet përkatesë të tyre do të formoheshin për çdo $x_i, i = \overline{3, N-3}$. Për 6 nyjet skajore është e nevojshme të shkruhen formula të tjera, tashmë jo qendrore, për shprehjen e përafërt të derivative. Nxjerrja e formulave të tilla në zbatime të posaçme bëhet sipas parimit të metodës së koeficientëve të papërcaktuar, ndërkaq përzgjedhja e koeficientëve motivohet së pari nga ruajtja e saktësisë së procesit të diferencave, në rastin konkret $O(h^4)$, dhe më tej nga uniformiteti dhe komoditeti paraqitës i 6 ekuacioneve shtesë në ansamblin e $(N-6)$ ekuacioneve bazë.

3.5 Metoda e diferencave të fundme për ekuacionet diferenciale të rendeve të larta.

Problemet e vlerës kufitare apo të vlerave të veta për ekuacionet diferenciale të rendeve më të larta se dy trajtohen në mënyrë të ngjashme me ato të rendit të dytë, veçse këtu kompleksiteti algjebrik i problemeve vështirëson në mënyrë të ndjeshme nxjerrjen e metodave të diferencave

dhe implementimin e tyre në zbatime konkrete.

Së pari duhen nxjerrë formula të posaçme diferencash qëndrore dhe të të njëjtit rend, për shprehjen e të gjithë derivateve që figurojnë në ekuacion, me anën e diferencave. Më tej, zëvendësohen në ekuacionin diferencial $x = x_i, i = \overline{1, N}$, dhe të gjitha derivatat që

figurojnë në të me formulat përkatëse të diferencave. Së fundi zgjidhet numerikisht sistemi i ekuacioneve algjebrikë që fitohet. Le të shikojmë më poshtë realizimin konkret të këtyre procedurave për disa probleme speciale të vlerave të veta të rendeve të larta.

3.6 Shtrimi i disa problemeve speciale të vlerave të veta që lindin në instabilitetin termal.

Si rezultat i nxehtësisë së një shtrese horizontale fluidi në fundin e saj lind gradient i temperaturës që shkakton lëvizjen e fluidit dhe paqëndrueshmërinë e shtresës. Dy prej katër gjendjeve themelore të kësaj paqëndrueshmërie përshkruhen matematikisht ([7], [8]) prej ekuacioneve diferenciale të rendeve respektive 6-8 të formës.

$$(D^2 - A^2)^3 W(x) = -RA^2(1 - x^2)W(x) \quad (I)$$

$$(D^2 - A^2 - P_1\sigma) \left[(D^2 - A^2 - \sigma)^2 (D^2 - A^2) + TD^2 \right] W(x) = -RA^2(D^2 - A^2 - \sigma)W(x) \quad (II)$$

Lidhur me ekuacionin diferencial (I) në [3] dhe [8], janë formuluar këto probleme të vlerave të veta (të ashtuquajtura probleme të shtresës së Bénard-it):

Problem A-1: Të gjendet vlera e vet minimale R dhe A korresponduese e ekuacionit

(I) për $x \in [0, 10]$ me kushte kufitare:

$$\begin{cases} W(0) = D^2W(0) = D^4W(0) = 0 \\ W(10) = D^2W(10) = D^4W(10) = 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

Problem A-2: Në problemin e mësipërm x^2 zëvendësohet me x .

Problem A-3: Në problemin A-1 kushtet kufitare (3.12) zëvendësohen me kushtet:

$$\begin{cases} DW(0) = D^3W(0) = D^5W(0) = 0 \\ DW(10) = D^3W(10) = D^5W(10) = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Problem A-4: Në problemin A-2 kushtet kufitare (3.12) zëvendësohen me kushtet:

$$W(0) = DW(0) = W(10) = 0 \quad (3.14)$$

$$(D^2 - A^2)^2 W(0) = (D^2 - A^2)^2 W(10) = 0 \quad (3.15)$$

Lidhur me ekuacionin diferencial (II), në [8] është shtruar ky,

Problem B. Te gjendet autovlera minimale R dhe parametrat shoqërues respektivë A

dhe σ për $x \in [0,1]$, me kushte kufitare të formës:

$$W^{2i}(0) = W^{2i}(1) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (3.16)$$

Në shënimet e mësipërme

- x koordinatë vertikale pa dimensione
- $D = d/dx$,
- R është numri i Rayleigh-it, vlera e vet (autovlera) e panjohur e problemit,
- $W(x)$ funksioni i vet (autofunksion) shoqërues i problemit,
- A (reale) dhe σ (imagjinare) janë autoparametra shoqërues të panjohur të R ,
- T numri I Taylor-it

kurse madhësitë e tjera janë konstante fizike nomenklatura e të cilave këtu nuk na intereson.

Nuk është vërtetuar teorikisht ekzistenca e zgjidhjes së problemeve të mësipërme.

Autorët që janë marrë me to [3], [4], [6], [7], [8], [11], [16], [17], etj. e kanë kapërcyer

këtë çështje dhe nga kuptimi fizik i problemeve është supozuar se secili prej tyre ka një pafundësi vlerash diskrete A që shoqërojnë R . Bile në problemet (II)-B për vlera të çfarëdoshme të A (reale) dhe σ (imagjinare) rezulton që R është komplekse, por nga kuptimi fizik ajo është reale, kështu që bashkë me përcaktimin e saj kërkohet të specifikohet spektri diskret i vlerave A , σ për të cilën R është reale dhe për çdo A, σ nga ky spektër kërkohet minimumi i R .

3.7 Trajtimi matematik i problemeve kufitare dhe të vlerave të veta të rendeve të larta.

Literatura matematike për problemet kufitare dhe ato të vlerave të veta të rendeve të larta është e rrallë. Probleme të tilla janë trajtuar në mënyrë të mirëfilltë tek Argawal [1] i cili jep një seri kriteresh për kushtet e ekzistencës dhe unicitetit të zgjidhjes së këtyre problemeve. Metoda numerike dhe disa eksperimente numerike për problemet e rendeve të larta janë trajtuar nga Ascher [2], Esser [14], etj.

Problemet speciale të rendit 6-8 të instabilitetit termal trajtohen për herë të parë nga Chandrasekhar [11] i cili jep dhe disa rezultate. Problemet e rendit të 6 janë zgjidhur më 1987 nga Baldwin [3], [4] duke përdorur metodat e fazës integrale, me 1990 nga Twizel & Boutayeb [25] duke përdorur metodën e diferencave të fundme (MDF) dhe më 1992 nga Huang & Sloan [21], duke përdorur metodat pseudospektrale. Problemet e rendit 8 janë trajtuar numerikisht vitet e fundit nga Boutayeb e Twizel (1993) [8] duke përdorur MDF.

3.8 Zgjidhja e një problemi të vlerave të veta të rendit 6 me anën e MDF.

Konsiderojmë problemin e mëposhtëm të formuluar në [25]

$$-(D^2 - A^2)^3 W(x) - RA^2(1 - x^2)W(x) + g(x, W(x)) = 0, \quad 0 < x < X \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} W(0) = A_0 & D^2W(0) = A_2 & D^4W(0) = A_4 \\ W(X) = B_0 & D^2W(X) = B_2 & D^4W(X) = B_4 \end{cases} \quad (3.18)$$

Më sipër supozohet se $W(x) \in C^{10}[a, b]$, $g(x, W) \in C^9[a, b]$.

Ndërkaq, $A_0, A_2, A_4, B_0, B_2, B_4$ janë kostante reale. Problemi (3.17) – (3.18) do të shërbejë si bazë, disi e përgjithshme, për të zgjidhur problemet e vlerave të veta A-1, A-2, A-3, A-4 të 3.6.

3.8.1 Një metodë e diferencave të fundme direkte

Copëtojmë segmentin $[0, X]$ në $(N + 1)$ intervale të barabarta, $N \geq 5$, me gjatësi

$h = X/(N + 1)$. Shënojmë me W_n , vlerën e përafërt të zgjidhjes $W(x)$ në pikën x_n të

llogaritur sipas skemës së diferencave që do të propozohet më poshtë. Qartazi

$W_0 = A_0, W_{n+1} = B_0$. Një metodë diferencash simetrike jepet në [25]. Zëvendësojmë

derivatet $W^{(6)}, W^{(4)}, W^{(2)}$ tek (3.17) me anën e diferencave të mëposhtme:

$$\begin{cases} W^{(6)}(x_n) = h^{-6}(W_{n-3} - 6W_{n-2} + 15W_{n-1} - 20W_n + 15W_{n+1} - 6W_{n+2} + W_{n+3}) + O(h^2) \\ W^{(4)}(x_n) = h^{-4}(W_{n-2} - 4W_{n-1} + 6W_n - 4W_{n+1} + W_{n+2}) + O(h^2) \\ W^{(2)}(x_n) = h^{-2}(W_{n-1} - 2W_n + W_{n+1}) + O(h^2) \end{cases} \quad (3.19)$$

Pas zëvendësimit të barazimeve (3.19) tek (3.17) do të fitohet ekuacioni

$$\begin{aligned} & -W_{n-3} + 3(2 + A^2h^2)W_{n-2} - 3(5 + 4A^2h^2 + A^4h^4)W_{n-1} + \\ & + [20 + 18A^2h^2 + 6A^4h^4 + A^6h^6 - RA^2h^6(1 - x_n^2)]W_n - \\ & - 3(5 + 4A^2h^2 + A^4h^4)W_{n+1} + 3(2 + A^2h^2)W_{n+2} - W_{n+3} + h^6g_n = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

me gabim lokal të rendit të formës $O(h^8)$. Ekuacioni (3.20) është i vlefshëm vetëm për

nyjet e brendshme x_n për të cilat $n = \overline{3, N-2}$. Për nyjet skajore x_n , pra $n = 1, 2, N-1, N$

formula të posaçme shkruhen për llogaritjen e $W^{(4)}(x_n)$ dhe $W^{(6)}(x_n)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} -W^{(6)}(x_n) = h^{-6} \sum_{i=1}^5 C_{n,i} W_i - \sum_{i=0}^3 \gamma_{n,i} h^{2i} W_i^{(2i)}, \quad n=1, 2 \\ \\ W^{(4)}(x_n) = h^{-4} \sum_{i=1}^4 d_{n,i} W_i - \sum_{i=0}^3 \delta_{n,i} h^{2i} W_i^{(2i)}, \quad n=1, 2 \\ \\ -W^{(6)}(x_{N+1-n}) = h^{-6} \sum_{i=1}^5 C_{n,i} W_{N+1-i} - \sum_{i=0}^3 \gamma_{n,i} h^{2i} W_{N+1}^{(2i)}, \quad n=1, 2 \\ \\ W^{(4)}(x_{N+1-n}) = h^{-4} \sum_{i=1}^4 d_{n,i} W_{N+1-i} - \sum_{i=0}^3 \delta_{n,i} h^{2i} W_{N+1}^{(2i)}, \quad n=1, 2 \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Siç është e zakonshme në metodat e diferencave të fundme, 34 koeficientët e panjohur

$$(3.48) \quad C_{n,i} (i = \overline{1, 5}; n = 1, 2), \quad d_{n,i} (i = \overline{1, 4}; n = 1, 2), \quad \gamma_{n,i}, \delta_{n,i} (i = 0, 2, 3; n = 1, 2)$$

përcaktohen me metodën e koeficientëve të pacaktuar. Përcaktimi bëhet i tillë që:

- a) gabimi lokal i formulave (3.21) të ketë të njëjtin rend 8 si edhe tek formulat (3.20)
- b) 4 ekuacionet që firtohen nga zëvendësimi i formulave (3.21) tek (3.17), të mund të integrohen së bashku (të mund të përmbledhen së bashku) me ekuacionet (3.20).

Tek [26] është publikuar tabela me vlerat përkatëse të 34 koeficientëve. 4 ekuacionet e

përmendur më sipër së bashku me $(N-4)$ ekuacionet (3.20) formojnë një sistem prej

N ekuacionesh algjebrikë jolinearë në trajtë matricore përfundimtare

$$(J^3 + P + 3A^2 h^2 J^2 + 3A^4 h^4 J + A^6 h^6 I - RA^2 h^6 G)W + h^6 g(X, W) = b \quad (3.22)$$

ku J është matrica tridiagonale $N \times N$, ku elementët e diagonales kryesore janë

$$j_{i,i} = 2, \forall i = \overline{1, N}, \text{ elementët e diagonaleve sekondare janë } j_{i,i+1} = -1, \forall i = \overline{1, N-1} \text{ dhe}$$

$$j_{i,i-1}, \forall i = \overline{2, N}, G = G(x) = \text{diag} \{1 - x_n^2\}, g = [g_1, \dots, g_N]^T \text{ dhe } b = (b_1, b_2, \dots, b_N)^T,$$

$I_{N \times N}$ matrica unitare.

Elementët e b gjenden në funksion të kushteve (3.18) dhe të 34 koeficientëve të (3.21). Vlera e tyre është publikuar gjithashtu tek [26], por për problemet e vlerave të veta A-1, A-2, A-3, A-4 ne kemi $b \equiv 0$. Elementët e matricës $P_{N \times N}$ që varen nga 34 koeficientët, gjithashtu janë publikuar aty. Në themel të gjithë procesit të komplikuar llogaritës qëndron nxjerrja e formës së kondensuar (3.17) ku ndërhyjnë matrica e volitshme J .

3.8.2 Një metodë indirekte e diferencave të fundme

Sikurse u pa më lartë, nxjerrja e metodave të diferencave direkt për problemin (3.17) – (3.18) paraqet një procedurë me një algjebër mjaft të komplikuar. Një rrugë për të zbutur këtë komplikim është transformimi i ekuacionit diferencial (3.12) në një sistem ekuacionesh të rendeve të dytë dhe pastaj trajtimi numerik i këtyre të fundit. Veçanërisht efektive rezulton kjo ide për problemet me rend më të lartë se 6.

Problemi (3.17) ÷ (3.18) shkruhet në formën

$$\left\{ \begin{array}{l} -(D^2 - A^2)V(x) = RA^2(1-x^2)W(x) - g(x, W(x)) \\ (D^2 - A^2)U(x) = V(x) \\ (D^2 - A^2)W(x) = U(x) \end{array} \right. \quad 0 < x < X \quad (3.23)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} V(0) = A_4, & V(X) = B_4 \\ U(0) = A_2, & U(X) = B_2 \\ W(0) = A_0, & W(X) = B_0 \end{array} \right. \quad (3.24)$$

(3.23) përbën një sistem prej 3 problemesh kufitare të rendit të dytë. Duke zëvendësuar tek (3.23) derivatat e dyta me anë të diferencave qendrore të rendit të dytë (si në barazimin e tretë të (3.19)) fitohen tre sisteme ekuacionesh algjebrike jo lineare:

$$\begin{cases} (J + A^2 h^2 I)V - RA^2 h^2 G W + h^2 g - b_4 = 0 \\ (J + A^2 h^2 I)U + h^2 V - b_2 = 0 \\ (J + A^2 h^2 I)W + h^2 U - b_0 = 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

b_0, b_2, b_4 gjenden nga (3.24). Shënimet e tjera janë njëloj si më sipër. Sistemi jolinear (3.25) zgjidhet me një procedurë standarte numerike p.sh si ajo e Newton-it.

3.9 Zgjidhja e problemeve të shtresës së Benard-it.

Metoda numerike e paragrafit 3.8 adoptohet lehtë për zgjidhjen e problemeve **A-1, A-2, A-3, A-4** të formuluar në hyrje të këtij kapitulli:

Problemi A-1. Të gjendet vlera e vet minimale R dhe A korresponduese e ekuacionit

$$(D^2 - A^2)^3 W(x) = -RA^2(1 - x^2)W(x) \quad (3.26)$$

për $x \in [0, 10]$ me kushte kufitare:

$$W(0) = D^2 W(0) = D^4 W(0) = 0 \quad (3.27)$$

$$W(10) = D^2 W(10) = D^4 W(10) = 0 \quad (3.28)$$

Ky problem fitohet nga (3.17) duke zëvendësuar $g(x, W) \equiv 0$, $X = 10$ dhe tek (3.18)

duke marrë $A_0 = A_2 = A_4 = B_0 = B_2 = B_4 = 0$. Për pasojë tek (3.22) do të

kemi $g \equiv 0$, $b \equiv 0$ dhe vlerat e veta të problemit A-1 fitohen nga zgjidhja e problemit

algjebrik të vlerave të veta:

$$A^{-2} h^{-6} G^{-1} (J^3 + P + 3A^2 h^2 J^2 + 3A^4 h^4 J + A^6 h^6 I) W = RW \quad (3.29)$$

Një metodë alternative për zgjidhjen e problemit A1 është zëvendësimi i parametrave të mësipërm tek (3.25) dhe eliminimi tek ky i fundit i U dhe V . Do të kemi problemin

algjebrik të vlerave të veta.

$$A^{-2}h^{-6}G^{-1}\left(J^3 + A^2h^2I\right)^3W = RW \quad (3.30)$$

Problemi A-2: Ne problemin A1 me siper x^2 zevendesohet me x .

Vlerat e veta të këtij problemi merren duke zgjidhur (3.29) ose (3.30) ku matrica

$$G = \text{diag}\{1 - x_n\}.$$

Problemi A-3: Ne problemin A1 kushtet kufitare (3.27) – (3.28) zevendesohen me

$$DW(0) = D^3W(0) = D^5W(0) = 0 \quad (3.31)$$

$$DW(10) = D^3W(10) = D^5W(10) = 0 \quad (3.32)$$

Metoda e paragrafit 3.8.1 kërkon modifikime në zbërthimet (3.21) konkretisht këto zbërthime do të kenë formën:

$$\left\{ \begin{array}{l} -W^{(6)}(x_n) = h^{-6} \sum_{i=1}^6 a_{n,i} W_i - h \sum_{i=0}^2 \alpha_{n,i} h^{2i} W_0^{(2i+1)}, \quad n=1,2,3 \\ W^{(4)}(x_n) = h^{-4} \sum_{i=1}^5 b_{n,i} W_i - \sum_{i=0}^1 \beta_{n,i} h^{2i} W_0^{(2i+1)}, \quad n=1,2 \\ -W^{(2)}(x_1) = h^{-2} \sum_{i=1}^4 C_i W_i - \gamma_0 h W_0' \end{array} \right. \quad (3.33)$$

Për skajet e majta x_1, x_2, x_3 dhe ngjashmërisht për skajet e djathta x_{N-2}, x_{N-1}, x_N , (duke vendosur tek (3.33) në vend të indeksit n indeksin $N+1-n$, në vend të x_1 të vëmë x_N).

Më tej vazhdohet si në problemin A-1. 46 koeficientët e panjohur tek (3.33):

$$a_{n,i} (i = \overline{1,6}; n = 1, 2, 3), \quad b_{n,i} (i = \overline{1,5}; n = 1, 2), \quad C_i (i = \overline{1,4}), \quad \alpha_{n,i} (i = 0, 1, 2; n = 1, 2, 3),$$

$$\beta_{n,i} (i = 0, 1; n = 1, 2) \text{ dhe } \gamma_0 \text{ përcaktohen me metodën e koeficientëve të pacaktuar.}$$

Përcaktimi bëhet i tillë që:

a) gabimi lokal i formulave (3.33) të ketë të njëjtin rend 8 si edhe tek formulat (3.20).

b) 5 ekuacionet që fitohen nga zëvendësimi i formulave (3.33) tek (3.17), të mund të integrohen së bashku me ekuacionet (3.20) në formën:

$$A^{-2}h^{-6}G^{-1}\left(J^3 + P_3 + 3A2h^2(J_2 + P_2) + 3A4h^4(J + P_1) + A^6h^6I\right)W = RW \quad (3.34)$$

Tek [26] është publikuar tabela me vlerat përkatëse të 46 koeficientëve të përshkruar më sipër si dhe matricat P_1, P_2, P_3 që varen prej tyre, ndërkaq si në problemin $A, G = \text{diag}\{1 - x_n^2\}$.

Metoda alternative (3.25) gjithashtu mund të përdoret duke patur parasysh këto kushte:

$$\begin{cases} DV(0) = DV(10) = 0 \\ DU(0) = DU(10) = 0 \\ DW(0) = DW(10) = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Problemi A-4: Në problemin A2 kushtet kufitare (3.27) – (3.28) zëvendësohen me

$$W(0) = DW(0) = W(10) = 0 \quad (3.36)$$

$$(D^2 - A^2)^2 W(0) = (D^2 - A^2)^2 W(10) = 0 \quad (3.37)$$

Metodat e përshkruara më sipër nuk përdoren dot direkt mbi këtë problem për arsye të natyrës së ndryshme të kushteve kufitare. Në qoftë se shënojmë me:

$$V(x) = (D^2 - A^2)^2 W(x) \quad (3.38)$$

atëherë prej (3.37) del që $V(x)$ plotëson kushtet

$$V(0) = V(10) = 0 \quad (3.39)$$

Në qoftë se njihet $V(x)$ atëherë (3.36) ÷ (3.38) është një problem i rendit të katërt për gjetjen e $W(x)$. Gjithashtu ekuacioni (3.26) mund të shkruhet si:

$$(D^2 - A^2)V(x) + RA^2(1-x)W(x) = 0, \quad 0 < x < 10 \quad (3.40)$$

dhe problemet (3.38) e (3.40) trajtohen bashkërisht.

Në një seri eksperimentesh numerikë të krye në [26], duke marrë $h = 1/50.1$ (në këtë mënyrë G^{-1} ekziston), vlera minimale R dhe parametri shoqërues A për problemet A1, A2, A3, A4 janë llogaritur duke zgjidhur problemet e përgjithshme algjebrikë të vlerave të veta (3.24) (problemi A1), (3.29) (problemi A3) apo variante të modifikuara të tyre (për problemet A2 – A3). Programi standart përkatës nga libraria NAG (Numerical Algorithm Group) është përdorur në mënyrë të përsëritur duke lëvizur parametrin A me hap konstant në spektrin e vet, duke llogaritur për çdo A vlerën e vet R dhe pastaj duke gjetur çiftin (A, R) me R minimum. Rezultatet që janë publikuar në [26] do të krahasohen me rezultatet e metodave numerike alternative që nxirren dhe zbatohen në kapitullin e III-të të këtij punimi.

3.10 Zgjidhja e problemeve të vlerave të veta të rendit 8 me anën e MDF

Riformulojmë problemin II-B të paragrafit 3.8:

Problemi II-B. Të gjendet autovlera minimale R dhe parametrat shoqërues respektivë A dhe σ të ekuacionit

$$(D^2 - A^2 P_1 \sigma) \left[(D^2 - A^2 - \sigma)^2 (D^2 - A^2) + TD^2 \right] W(x) = -RA^2 (D^2 - A^2 - \sigma) W(x) \quad (3.41)$$

për $x \in [0, 1]$ me kushte kufitare të formës

$$W^{2i}(0) = W^{2i}(1) = 0, \quad i = \overline{0, 3} \quad (3.42)$$

3.10.1 Metoda direkte

Skema direkte e përdorimit të MDF për problemet (3.41) – (3.42) tani është e qartë.

Derivatet e rendit të 2, 4, 6 tek (3.41) do të zëvendësohen me diferencat përkatëse (3.19), ndërkajë formula analoge me ato të (3.19) mund të shkruhen për derivatin e

rendit 8. Në mënyrë të përgjithshme derivati i rendit $2p$ ($p = \overline{1,4}$) i $W(x)$, në $x = x_n$, do të paraqitet:

$$W_{(x_n)}^{(2p)} = h^{-2p} \sum_{k=0}^{2p} (-1)^k C_{2p}^k W_{n+k-p} + O(h^2), \quad p = \overline{1,4} \quad (3.43)$$

Po kështu, formulat e posaçme (3.21) të paraqitjes së derivateve të rendit 4-6 në skajet si dhe analogët e tyre për derivatet e rendit 8 me koeficientë zbërthimi të përcaktuar sipas metodës së koeficientëve të papërcaktuar, janë të nevojshme të shkruhen. Përmbledhja e tyre së bashku me ekuacionet që rezultojnë pas zëvendësimit të formulave (3.43) në ekuacionin (3.41) e kthen përfundimisht këtë të fundit në problem algjebrik respektiv të vlerave të veta. Matrica J do të jetë e pranishme në fuqi të 4-t. Problemi algjebrik i vlerave të veta që i përgjigjet problemit (3.41) – (3.42) është kompleks përkundër problemeve algjebrikë realë të shtresës së Benard-it që u shqyrtuan në paragrafin 3.9.. Le të shikojmë formën e problemit algjebrik të vlerave të veta që i përgjigjet problemit diferencial (3.41) – (3.42). Ekuacioni (3.41) mund të shkruhet në formën:

$$\begin{aligned} (D^8 + j_1 D^6 + j_2 D^4 + j_3 D^2 + j_4)W + i\mu(j_5 D^6 + j_6 D^4 + j_7 D^2 + j_8)W + \\ + RA^2(D^2 - A^2)W - i\mu RA^2 W = 0 \end{aligned} \quad (3.44)$$

Tek (3.44) $\mu = \sigma/I$, kurse koeficientët e tjerë mund të shprehen nëpërmjet parametrave dhe madhësive fizike që figurojnë tek formulimi (II), i paragrafit 3.6. Duke zëvendësuar tek (3.44) formulat (3.43) për $p = \overline{1,4}$ do të fitohen $(N-6)$ ekuacione algjebrikë që i përgjigjen $(N-6)$ nyjeve: $x_4, x_5, \dots, x_{N-3}$. Duke iu shtuar këtyre ekuacioneve zbërthimet e posaçme në nyjet skajore të fituara sipas skemës (3.21), e plotësuar kjo e fundit dhe me zberthimet e $W^8(x_n)$ dhe $W^8(x_{N+1-n})$ për $n = 1, 2, 3$, fitohen gjithsej N ekuacione algjebrikë të cilët mund të paraqiten në trajtën matricore si:

$$\begin{aligned}
& \left[(J^4 - j_1 h^2 J^3 + j_2 h^4 J^2 - j_3 h^6 J + j_4 h^8 I_N) + i\mu h^2 (-j_5 J^3 + j_6 J^2 - j_7 h^4 J + j_8 h^6 I_N) \right] W = \\
& = RA^2 \left[h^6 (J + h^2 A^2) + i\mu h^8 I_N \right] W
\end{aligned} \tag{3.45}$$

(3.45) është problem i përgjithshëm algjebrik i vlerave të veta që mund të zgjidhet me një procedurë standarte numerike.

3.10.2 Metoda indirekte

Transformimi i problemit diferencial (3.41) – (3.42) në problemin algjebrik (3.45) shoqërohet me një algjebër të veçantë veprimesh që komplikohet më tej për problemet me rend më të lartë se 8. Për të zvogëluar vështirësitë e procedimit algjebrik mund të përdoren metodat indirekte që janë përshkruar në 3.8.2 për problemin e rendit të 6.

Kështu duke shënuar me W vektorin $W = (w_1, w_2, w_3, w_4)^T$ e me $D_{4 \times 4} = \text{diag} \{d/dx\}$

atëhere problemi (3.44) mund të shkruhet në formën:

$$D^2 W = BW + i\mu EW + RA^2 CW + i\mu RA^2 FW \tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}
\text{ku} \quad B_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j_4 & -j_3 & -j_2 & -j_1 \end{pmatrix}, \quad E_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j_8 & -j_7 & -j_6 & -j_5 \end{pmatrix} \\
C_{4 \times 4} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ A^2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

duke aplikuar për problemin (3.46) metodën numerike të rendit të dytë:

$$-W_{n-1} + 2W_n - W_{n+1} + h^2 \theta_n = 0 \tag{3.48}$$

marrim

$$I_4 W_{n-1} - (2I_4 + h^2 B) W_n + I_4 W_{n+1} - i\mu E W_n = RA^2 h^2 C W_n + i\mu RA^2 h^2 F W_n \tag{3.49}$$

Ekuacioni (3.49) është i vlefshëm për $n = \overline{1, N}$. Duke vënë re që $W_0 = W_{n+1} = O_4$,

barazimet (3.49) mund të përmbliidhen në trajtë matricore.

$$(M - i\mu h^2 L)V = RA^2 h^2 (P + i\mu Q)V \quad (3.50)$$

ku $V = (W_1^T, W_2^T, \dots, W_N^T)^T$ është i rendit $4N$, kurse M, L, P, Q janë matrica bllok

tridiagonale të formës:

$$M = \begin{pmatrix} -(2I_4 + h^2 B) & I_4 & & & \\ I_4 & -(2I_4 + h^2 B) & I_4 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & -(2I_4 + h^2 B) & I_4 \\ & & & I_4 & -(2I_4 + h^2 B) \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} E & \dots & & & \\ & E & \dots & O & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & O & \dots & E & \\ & \dots & & & E \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} C & \dots & & & \\ & C & \dots & O & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & O & \dots & C & \\ & \dots & & & C \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} F & \dots & & & \\ & F & \dots & O & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & O & \dots & F & \\ & \dots & & & F \end{pmatrix}$$

Ekuacioni (3.50) është një problem algjebrik i vlerave të veta të përgjithsuara dhe përbën një formulim alternativ të problemit (3.41) – (3.42). Një formë më e përgjithshme mund t'i jepej këtij formulimi n.q.s do të konsideronim në vend të metodes së veçantë (3.48) metodën më të përgjithshme,

$$-W_{n-1} + 2W_n - W_{n+1} + h^2 [\theta W_{n-1}'' + (1-2\theta)W_n'' + \theta W_{n+1}''] = 0 \quad (3.51)$$

Për $\theta = 0$ sikurse dihet është metoda e rendit të dytë (3.48). Për $\theta = 1/12$ do të fitohej metoda Numerov

$$-W_{n-1} + 2W_n - W_{n+1} + 1/12 h^2 [\phi_{n+1} + 10\phi_n + \phi_{n-1}] = 0 \quad (3.52)$$

qe eshte nje metode e rendit te 4-t.

Metoda direkte (3.45) është zbatuar në [26], duke marrë $N = 50$ dhe vlera minimale R dhe parametra shoqërues A dhe μ janë llogaritur për 5 numra të ndryshëm të Taylor-it

T . Edhe këtu programi standart përkatës nga libraria NAG është përdorur sipas teknikës së mëposhtme iterative: Për vlera të dhëna të T, A dhe μ çdo vlerë e vetë R_n në përgjithësi është komplekse, $R_n = U_n + iV_n$. Vlerat e A dhe μ janë cikluar në spektrin e tyre në mënyrë të tillë që $V_n \rightarrow 0$ dhe si rrjedhim $R_n \rightarrow U_n$, $n = \overline{1, N}$. Rezultatet që janë publikuar në [26] do të krahasohen me rezultatet e metodave numerike alternative që nxirren dhe zbatohen në kapitullin III të këtij punimi.

KAPITULLI I 4

Metoda numerike alternative për zgjidhjen e problemeve të vlerave të veta të rendit të 6-8 të instabilitetit termal

Metodat e diferencave të fundme të trajtuara në kapitullin 3 të këtij punimi i transformojnë ekuacionet diferenciale të shtrura me ekuacionet (I) dhe (II) në probleme të përgjithshme algjebrike lineare të vlerave të veta. Metodat numerike që do të trajtohen në këtë kapitull i transformojnë këto probleme në probleme algjebrike në të cilët vlerat e veta janë “zero” sistemesh të ekuacioneve algjebrikë. Në këtë pikëpamje këto janë metoda numerike alternative dhe rivale të MDF. Baza e këtyre metodave është shfrytëzimi i vetive të problemit që zgjidhet dhe përdorimi i mekanizmit të zhvilluar të problemit të vlerës fillestare. Kështu këto metoda futen në grupin e dytë nga pikëpamja e klasifikimit që ne bëmë për metodat numerike të zgjidhjes së problemeve diferenciale b), c), d) në hyrje të këtij punimi.

4.1 Zgjidhja e problemit të vlerave të veta rendit të 8

4.1.1 Përshkrimi i metodës

Le të supozojmë se R është vlerë e vet reale e problemit (3.41) –(3.42). Duke shënuar me $\mu = \sigma/i$ dhe duke veçuar pjesët reale dhe imagjinare në (3.41) ky i fundit mund të shkruhet në formën:

$$(D^8 + BD^6 + CD^4 + ED^2 + F)W(x) + i(D^6 + C_1D^4 + E_1D^2 + F_1)W(x) = 0 \quad (4.1)$$

ku $B, C, E, F, C_1, E_1, F_1$ janë konstante që varen nga A, R, μ dhe nga madhësitë e tjera

fizike që figurojnë në (3.41). Shkruajmë ekuacionin (4.1) në formë më të përmbledhur:

$$D_8 W + iD_6 W = 0 \quad (4.2)$$

ku D_8 dhe D_6 janë operatorët përkatës diferencialë të rendeve 8 e 6 që figurojnë tek

(4.1). Ekuacioni kompleks (4.2) është ekuivalent me sistemin real

$$\begin{cases} a) & D_8 W = 0 \\ b) & D_6 W = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Numrat A, R, μ dhe funksioni shoqërues $W(x)$ janë zgjidhje e problemit (3.41)-(3.42)

atëherë dhe vetëm atëherë kur A, R, μ dhe $W(x)$ janë zgjidhje të sistemit (4.3) me

kushtet (4.4)

$$W^{(2i)}(0) = W^{(2i)}(1) = 0, \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4.4)$$

Konsiderojmë matricën $P_{8 \times 8}$ të tipit (4.5)

$$P_{8 \times 8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & 0 & c_2 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 & 0 & c_4 & 0 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & b_6 & 0 & c_6 & 0 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_8 & 0 & b_8 & 0 & c_8 & 0 & d_8 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

në të cilin minori i rendit të katërt i formuar nga elementët $a_{2i}, b_{2i}, c_{2i}, d_{2i}, i = \overline{1, 4}$

kërkohet të jetë i ndryshëm nga 0. Shënojmë me $\overline{P}_{6 \times 6}$ nënmatricën e formuar nga 6

rreshtat dhe shtyllat e para të matricës P . Shënojmë me $P_i, i = \overline{1, 8}$ shtyllat e matricës P

dhe me $\overline{P}_i, i = \overline{1, 6}$ shtyllat e matricës $\overline{P}$. Le të jetë W_i zgjidhja e problemit (4.3) – (a),

me kushte fillestare $P_i, i = 1, \dots, 8$ dhe njëkohësisht, $\overline{W}_i$ zgjidhja e problemit (4.3) – (b)

me kushte fillestare $\bar{P}_i, i = \overline{1, 6}$. Shënojmë me $W(x)$ dhe $\overline{W}(x)$ zgjidhjet e përgjithshme të problemeve (4.3) – (a) dhe (4.3) – (b). Do të kemi:

$$W = \sum_{i=1}^8 K_i W_i \quad (4.6)$$

$$\overline{W} = \sum_{i=1}^6 \overline{K}_i \overline{W}_i \quad (4.7)$$

Duke vendosur mbi (4.6) dhe (4.7) kushtet e majta (4.4) mund të bindemi që

$$K_1 = K_3 = K_5 = K_7 = \overline{K}_1 = \overline{K}_3 = \overline{K}_5 = 0 \quad (4.8)$$

Me kushtet (4.8) barazimet (4.6) e (4.7) shkruhen në formën

$$W = K_2 W_2 + K_4 W_4 + K_6 W_6 + K_8 W_8 \quad (4.9)$$

$$\overline{W} = \overline{K}_2 \overline{W}_2 + \overline{K}_4 \overline{W}_4 + \overline{K}_6 \overline{W}_6 + \overline{K}_8 \overline{W}_8 \quad (4.10)$$

Duke vendosur mbi (4.9) dhe (4.10) kushtet e djathta (4.4) fitohen dy sisteme ekuacionesh lineare homogjene të rendeve 4 e 3 që mund të shkruhen në formë të përmbledhur:

$$(W_{2i}^{2j}(1))(K_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{0, 3} \quad (4.11)$$

$$(\overline{W}_{2i}^{2j}(1))(\overline{K}_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \quad j = \overline{0, 2} \quad (4.12)$$

Mund të formulohet pohimi :

KMN që problemi (3.41) – (3.42) të ketë zgjidhje të ndryshme nga zgjidhja trivale

$W(x) \equiv 0$ është që përcaktorët e matricave që figurojnë në anët e majta të (4.11)

dhe (4.12) të jenë të barabartë me zero .

Shënojmë me X dhe $\overline{X}$ matricat e sipërpërmendura dhe me Δ dhe $\overline{\Delta}$ respektivisht këta përcaktorë. Në këtë mënyrë problemi i ekzistencës dhe i gjetjes së zgjidhjes së problemit (3.41) – (3.42) reduktohet në ekzistencën dhe gjetjen e zgjidhjes së sistemit të

ekuacioneve algjebrikë,

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta(R, A, \mu) = 0 \\ \bar{\Delta}(R, A, \mu) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial A} = 0 \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Por kuptohet se ne nuk e njohim trajtën analitike të funksioneve Δ dhe $\bar{\Delta}$ tek ekuacionet (4.13) për derisa nuk i njohim analitikisht zgjidhjet $W_{2i}, i = \overline{1, 4}$ dhe $\bar{W}_{2i}, i = \overline{1, 3}$. Supozojmë se zgjidhjet e mësipërme fitohen numerikisht me një procedurë standarte numerike.

Për të zgjidhur numerikisht sistemin (4.13) veprohet si më poshtë:

- për vlera të dhëna të A dhe μ gjendet vlera më e vogël R për të cilën

$$\Delta(R, A, \mu) = 0 \text{ dhe vlera më e vogël } \bar{R} \text{ për të cilën } \bar{\Delta}(R, A, \mu) = 0.$$

- për vlerën e dhënë të A gjendet μ si rrënjë e ekuacionit $R(\mu) - \bar{R}(\mu) = 0$.

- gjendet A si minimum i $R(A)$.

4.1.2 Algoritmi i metodës

Duke u nisur nga shtrimi i hollësishëm i problemit i bërë në paragrafin 3.6 dhe përshkrimi i metodës numerike në paragrafin 4.1.1 është bërë algoritmimi në MATLAB i zgjidhjes së problemit (3.41) – (3.42) të rendit të 8. Për këtë qëllim janë ndërtuar një kod kryesor MATLAB (kodi pr8.m) dhe 6 funksione MATLAB ndihmës. Disa kode standard të MATLAB-it si cond.m, fzero.m përdoren me efektivitet brenda tyre. Në ANEKS II jepen të plota kodi dhe funksionet e ndërtuara. Këtu po përshkruajmë shkurtimisht disa aspekte të tyre.

Kodi pr8.m: Me anën e këtij kodi futen të dhënat kryesore fillestare të problemit, konkretisht 5 të dhënat e para të spektrit për vlerat e përafërta të parametrave T, A, R, μ me kufijtë e tyre minimalë dhe maksimalë dhe konstantet e tjera që janë marrë nga [26]. Nga ky kod thirret dhe funksioni (nënprogrami) kryesor `FIN=fmin('RSA', Amin, Amax)` me anën e të cilit gjendet vlera përfundimtare A për të cilën R merr vlerën minimale (ekuacioni i tretë në sistemin (4.13)). Më tej llogariten dhe afishohen vlerat përfundimtare të R dhe μ .

Funksioni: `function cn1=cond1(R)`

Për vlerën e dhënë të R llogariten koeficientët e E dhe F të (4.1) që varen nga R . Me anën e kodit MATLAB standard `ode45.m` zgjidhet problemi (4.3) - (a) me kushte fillestare respektivisht shtyllat çift të matricës $I_{8 \times 8}$ (në rastin konkret në vend të kushteve të përgjithshme (4.5) kemi marrë $P = I_{8 \times 8}$) dhe me rreshtat çift matricës së rezultateve $y_{8 \times 4}$ të fituara formohet matrica $X_{4 \times 4}$. Ekuacioni i parë i sistemit (4.13): $\Delta(R, A, \mu) = 0$, është në fakt një testim i singularitetit të matricës X . Po sikurse dihet testet $\Delta = 0$ apo $\Delta < \varepsilon_{TOL}$ nuk janë të përshtatshme nga pikpamja numerike për të testuar singularitetin e një matrice sepse në përgjithësi është e vështirë të përcaktohet toleranca ε_{TOL} në mënyrë korrekte. Ndërkaq të ashtuquaturit numra kushtëzimi të matricës (numri Hadamard, rrezja spektrale e matricës, etj.) janë tregues më të qënësishëm për këtë qëllim. Në veçanti numri kushtëzimit $\|X\| \cdot \|X^{-1}\|$ dhe kodi MATLAB `cond(X)` që shërben për llogaritjen e tij, rezulton mjaft efektiv në testimin e singularitetit të matricës X . Sa më i madh të jetë ky numër aq më “singulare” është matrica X . Funksioni ynë MATLAB `cond1.m` implementon pikërisht këtë kod për të llogaritur madhësinë $cn1 = -\text{cond}(X)$ në funksion të R , pra $cn1 = cn1(R)$. Arsyeja e

Ilogaritjes së $cn1$ është e qartë: Ekuacioni $\Delta(R)=0$ zëvendësohet me problemin ekuivalent $\min\{cn1(R)\}$.

Funksioni: `function cn2=cond2(R)`

Njëlloj si më lart llogarit madhësinë $cn2 = -cond(\overline{X})$. Kuptohet që $cn2 = cn2(R)$

Funksioni: `function di=dif(S)`

Për vlerën e dhënë të $\mu = S$ llogariten koeficientët C dhe E_1 që varen drejtpërdrejt prej μ në paraqitjen (4.1). Pastaj me anën e funksionit standard MATLAB `fmin.m` gjenden numrat $R1$ dhe $R2$ që janë pikat ekstremale (minimale) të funksioneve respektivë $cn1(R)$ dhe $cn2(R)$. Më tej llogaritet diferenca $di = R1 - R2$. Kuptohet që $di = di(S)$.

Funksioni: `function RA=RSA(A);`

Për vlerën e dhënë të A llogariten koeficientët B dhe C_1 që varen drejtpërdrejt prej A në paraqitjen (4.1). Pastaj përdoret funksioni MATLAB `fzero.m` për të zgjidhur ekuacionin $di(S)=0$, pra për të gjetur atë vlerë S për të cilën vlera e vet $R1$ (që buron nga ekuacioni (4.3)-a) përputhet me vlerën e vet $R2$ (që buron nga ekuacioni (4.3) – (b))

Funksionet: `function fu8=ek8(T,Z)` dhe `function fu6=ek6(T,Z)`

Kuptohet se këto janë funksionet që regjistrojnë në disk respektivisht ekuacionet diferencialë (4.3) – (a) dhe (4.3) – (b)

4.1.3 Rezultate numerike

Metoda numerike e përshkruar në 4.1.1 dhe algoritmimi i saj në MATLAB u përdorën

për zgjidhjen e problemit (3.41) – (3.42) duke gjetur vlerën e vet minimale të tij R si dhe vlerat korresponduese A dhe σ për 5 vlera të ndryshme të numrit të Taylorit T . Në Tab.4.1 jepen rezultatet e kësaj metode ku përfshihen vlerat e parametrave $\mu = \sigma/i$ dhe vlera e vet R për 5 vlera respektive të T . Po në Tab. 4.1 janë pasqyruar rezultatet analoge të zgjidhjes së këtij problemi në [11] me metoda fiziko-analitike (kolonat A_C, μ_C, R_C) dhe rezultatet e paraqitura në [26] (kolonat A_T, μ_T, R_T) që i përkasin zgjidhjes numerike të problemit me anën e MDF.

Tab.4.1: Vlerat kritike per problemin e vlerave te veta te rendit te tete duke perdorur metoden e pershkruar ne seksionin 4.1 te krahasuara me ato te literatures

T	$A_C = A_T = A$	μ_C	μ_T	μ	R_C	R_T	R
1681×10	2.270	101.4	101.39	101.392	1388	1388	1388.0
1681×10^2	2.594	307.9	307.9	307.898	1694	1693.9	1694.0
1681×10^3	3.710	816.82	816.82	816.805	3436	3436.1	3436.0
1681×10^4	5.698	1930.0	1930.24	1930.20	11020	11023.1	11020.8
1681×10^5	8.626	4330.0	4326.49	4330.21	43680	43683.5	43681.4

Nga Tab.4.1 mund të vihet re se rezultatet e llogaritura deri në 4 shifra me vlerë për R dhe deri në 4 shifra me vlerë për μ , janë identike me ato të Chandrasekhar [11]. Mund të themi se vlerat e llogaritura R dhe μ janë më afër vlerave të Chandrasekhar [11] se sa ato të Twizell [26]. Ndërkaq saktësia e rezultateve R, A, μ mund të rritet akoma duke rafinuar paramëtrat opsionale të funksioneve MATLAB të përdorur.

4.1.4 Përfundime

Duke analizuar rezultatet numerike të paraqitura në Tab.4.1 mund të nxirren disa përfundime. Rezultatet e [11] që në tabelë janë shënuar me indeksin C dhe që kanë dalë me anën e studimit fiziko – analitik të problemit konsiderohen më të saktat por ato janë vetëm rezultate të pjesshme e lokale dhe të nxjerra me një rrugë të ndërlikuar. Rezultatet e [26] të shënuara me indeksin T janë rezultate numerike të fituara nga përdorimi i MDF (metoda të rendit të katërt). Duke krahasuar dy metodat numerike del se metoda e propozuar prodhon rezultate që janë më afër rezultateve të [11].

Metoda e propozuar është më e thjeshtë në programim, më elastike në përdorim. Ajo mund të shtrihet pa shumë vështirësi për zgjidhjen e problemeve të tjera të instabilitetit termal ose problemeve të tjera të ngjashme. Në këtë metodë shfrytëzohet me efektivitet aparati i fuqishëm numerik i zgjidhjes së problemit të vlerës fillestare. Kapaciteti rezervues i saj është minimal ndërkaj metoda e [26] kërkon rezervime matricash të rendit mbi 200.

Metoda e propozuar me gjithë elasticitetin dhe manovrueshmërinë e përdorimit në situatë të ndryshme, është e kufizuar vetëm për problemet lineare. Variante të metodave të tipit goditje janë alternative analoge për problemet jo lineare. Ndërkaj metodat e diferencave të fundme paraqiten më universale dhe ato mund të përdoren dhe për problemet jo lineare me gjithë vështirësitë e shumta që gjeneron ky rast.

4.2 Zgjidhja numerike e problemeve të tjerë të instabilitetit termal. Problemet e rendit të 6

Metoda numerike e përshkruar në 4.1.1 mund të përdoret për zgjidhjen e 4 problemeve A-1, A-2, A-3, A-4 të formuluar në paragrafin 3.6 duke bërë modifikimet përkatëse në algoritmin e paragrafit 4.1.2, që burojnë nga specifika e këtyre

problemeve. Së pari, algoritmi në fjalë pëson një thjeshtim të ndjeshëm nga fakti se vlera e vet R në problemet e mësipërme është gjithmonë reale sepse ka vetëm një parametër shoqërues A që është real. Duke qenë akoma se problemet në fjalë janë të rendit të 6 atëherë ekuacioni kompleks (4.1) i rendit të 8 zëvendësohet në një ekuacion real të rendit të 6 dhe sistemi (4.3) me një ekuacion të vetëm:

$$D_6(W) = (D^6 + BD^4 + CD^2 + E)W(x) = 0 \quad (4.14)$$

ku B, C, E janë funksione të A, R dhe kostanteve të tjera fizike.

Për problemin A-1, (3.26) – (3.27) – (3.28) vendin e matricës $P_{8 \times 8}$ e zë matrica

$$P_{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & b_2 & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & b_4 & 0 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a_6 & 0 & b_6 & 0 & c_6 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

ku minori i formuar nga elementët $a_{2i}, b_{2i}, c_{2i}, i = 1, 2, 3$, kërkohet të jetë i ndryshëm nga zero. Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit (4.14) është

$$W = \sum_{i=1}^6 K_i W_i \quad (4.16)$$

Duke vendosur mbi (4.16) kushtet e majta (3.27) merret

$$K_1 = K_3 = K_5 = 0 \quad (4.17)$$

Kështu që (4.16) shkruhet në formën

$$W = \sum_{i=1}^3 K_{2i} W_{2i} \quad (4.18)$$

Duke vendosur tani mbi (4.18), kushtet e djathta (4.23) merret sistemi algjebrik linear

$$\left[D^{2j} W_{2i}(1) \right] [K_{2i}] = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 0, 1, 2. \quad (4.19)$$

Shënoj me X matricën e sistemit (4.19) dhe me Δ përcaktorin e saj. Është e qartë se

$\Delta = \Delta(R, A)$. Duke përmbledhur rezultatet e këtij paragrafi mund të arrihet në përfundimin se:

Numrat R dhe A do të jenë zgjidhje të problemit A1, (3.26) – (3.27) – (3.28), atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\begin{cases} \Delta(R, A) = 0 \\ \frac{\partial R}{\partial A} = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Shprehje eksplicite për Δ është e pamundur sepse zgjidhjet W_{2i} , $i = 1, 2, 3$, janë të panjohura analitikisht. Por këto zgjidhje mund të fitohen numerikisht me anën e një procedurë numerike çfarëdo.

Sistemi algjebrik (4.20) trajtohet si më poshtë:

- Për një vlerë të dhënë të A gjendet vlera më e vogël R për të cilën $\Delta(R, A) = 0$.
- Gjendet A as minimum i $\{R(A)\}$

Metoda e përshkruar më sipër funksionon mirë numerikisht. Në një seri eksperimentesh numerike, duke j'u referuar Chandrasekhar [11], vlera minimale R dhe vlera

koresponduese A u llogaritën për vlera të ndryshme të numrit të Taylor-it T . Për këtë qëllim u përshtatën skedarët dhe funksionet MATLAB të ndërtuar në paragrafin 4.1.2.

Edhe këtu në vend të zgjidhjes numerike të ekuacionit $\Delta(R, A) = 0$ me anën e ndonjë metode numerike standarte, ose me anën e funksionit MATLAB fzero, rrënja R gjendet duke testuar singularitetin e matricës $X(R)$ të ekuacionit (4.19), si më poshtë:

- Për vlera të ndryshme të R llogaritet numri i kushtëzimit me anën e funksionit MATLAB $\text{cond}(X)$.
- Vlera e vet R gjendet si minimum i funksionit: $\{-\text{cond}(X(R))\}$.

Rezultatet e fituara paraqiten në tabelën 4.2 (kolonat R, A), duke u ballafaquar me rezultatet analoge të [4], (kolonat R_B, A_B) që janë fituar me metodat e fazës integrale dhe me ato të [25], (kolonat R_T, A_T) që janë rezultate numerike të fituara me anën e MDF.

Tab.4.2: Vlerat kritike per problemin e vlerave te veta te rendit te gjashte duke perdorur metoden e pershkruar ne seksionin 4.2 te krahasuara me ato te literatures

R_B	A_B	R_T	A_T	R	A
411.720155	1.6791	411.515421	1.6790	411.715282	1.6791
1382.695328	3.8130	11356.557010	3.8112	11374.815374	3.8124
68778.117	5.971	68397.491	5.965	68512.2154	5.967

Siç duket nga tabela 4.2, rezultatet tona janë më afër atyre të Baldwin [4], ndërkah afërsia fillon të “prishet” ndërsa R (dhe A) rriten. Saktësia numerike në metodën që propozojmë në fakt është e lidhur me procedurën numerike të zgjedhur për zgjidhjen e problemeve të simuluar të vlerës fillestare dhe siç duket nga rezultatet e tabelës 4.2 dhe nga analiza që do të bëjmë më poshtë kjo procedurë është mjaft e varur nga cilësitë specifike të ekuacionit (3.26).

Shkruajmë ekuacionin (3.26) në formën:

$$W^{(6)} - 3A^2W^{(4)} + 3A^4W^{(2)} + \left[RA^2(1-x^2) - A^6 \right] W = 0, \quad 0 \leq x \leq 10 \quad (4.21)$$

Vlerat e veta të Jakobianit të sistemit që buron nga ekuacioni (4.21) janë rrënjët e ekuacionit karakteristik:

$$\lambda^6 - 3A^2\lambda^4 + 3A^4\lambda^2 + [RA^2(1-x^2) - A^6] = 0 \quad (4.22)$$

Konsiderojmë ekuacionin

$$\lambda^6 - 3A^2\lambda^4 + 3A^4\lambda^2 + d = 0 \quad (4.23)$$

ku d është vlera e shprehjes $RA^2(1-x^2) - A^6$ për $x=10$.

Shënojmë me $\lambda_i, i=1, \overline{6}$ rrënjët e (4.23). Një analizë e rrënjëve λ_i , tregon se ky ekuacion ka 2 rrënjë reale të kundërta dhe 4 rrënjë komplekse të formës $\mp a \mp ib$. Rrënja reale λ_1 dominon modulet e rrënjëve $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ dhe shkalla e dominimit të rrënjës mbi modulet e rrënjëve $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ rritet me rritjen e x – it.

Zgjidhja e përgjithshme e ekuacionit (4.23) shkruhet në formën:

$$W = \sum_{i=1}^6 c_i e^{\lambda_i x} \quad (4.24)$$

Duke pasur parasysh arsyetimet e mësipërme del se komponentja e parë $c_1 e^{\lambda_1 x}$ tek zgjidhja e përgjithshme (4.24) dominon komponentet e tjera, ndërsa komponentja e dytë $c_2 e^{\lambda_2 x}$ është krejt pa peshë ndërsa x – i rritet. Nga kjo del se në përgjithsi zgjidhja e çdo problemi diferencial me bazë ekuacionin (4.23) shkon me shpejtësi në infinit. Ajo çka ndodh me këtë ekuacion pritet të ndodhë afërsisht me ekuacionin diferencial (4.21) (eksperimentet në ordinatë e konfirmojnë këtë fakt). Gjatë një hapi integrimi me gjatësi h komponentja $c_1 e^{\lambda_1 x}$ ka një ritëm rritjeje që mund të çmohet:

$$q(h) = \frac{c_1 e^{\lambda_1(x+h)}}{c_1 e^{\lambda_1 x}} = e^{\lambda_1 h} = 1 + \lambda_1 h + 0(h) \approx 1 + \lambda_1 h \quad (4.25)$$

Për të vlerësuar numerikisht me saktësi komponenten $c_1 e^{\lambda_1 x}$ ne duhet të vendosim tek barazimi (4.25) një kufizim të formës,

$$q(h) \leq 1.1 \quad \Rightarrow \quad h \leq 0.1/\lambda_1 \quad (4.26)$$

n.q.s i referohemi tabelës 4.2 të rezultateve për $R \approx 400$ dhe $x = 10$ tek ekuacioni

(4.23) del që $\lambda_1 \approx 10$. Nga kjo dhe mosbarazimi (4.26) del që:

$$h \leq 1/100 = 0.01 \quad (4.27)$$

Të integrosh ekuacionin diferencial (4.21) me hap konstant integrimi $h \leq 0.01$ do të thotë që të kryesh të paktën 1000 hapa integrimi, pra kemi një situatë kritike. Situata keqësohet progresivisht për $R \approx 10^4$ dhe $R \approx 7 \times 10^4$. Koha e llogaritjeve bëhet kritike ndërsa fenomeni i përhapjes së gabimit të rrumbullakimit rrezikon të zhvlerësojë procedurat e zakonshme numerike të integrit.

Për sa i përket zgjedhjes së përshtatshme të a_{2i}, b_{2i}, c_{2i} , tek matrica (4.15), këtu qëllimi është që termi dominant $c_1 e^{\lambda_1 x}$ në zgjidhjen e simuluar të ketë influencë sa më të vogël. Kjo do të thotë që funksioni $W(x)$ në anën e majtë të (4.24) duhet të ketë kushte të tilla fillestare që $|c_1| \approx 10^{-n}$, $n \gg 0$. Duke analizuar (4.20) bindemi që kjo arrihet kur a_{2i}, b_{2i}, c_{2i} zvogëlohen progresivisht (eksperimentet numerike e vërtetuan këtë konkluzion). Rezultatet që janë dhënë në tabelën 4.2 i përkasin përdorimit të kodit ode45.m me zgjedhje të elementëve të matricës (4.15) si më sipër. Duket nga rezultatet se procedura fillon të dobësohet me rritjen e R . Një alternativë për të përmirësuar rezultatet është zgjedhja e një kodi me rend procedure më të lartë.

Analiza dhe komentet e mësipërme janë të vlefshme për problemet e tjerë A-2, A-3, A-4. Problemi A-2 dallon nga problemi A-1 vetëm për faktin se x^2 zëvendësohet me x ç'ka influencon në zbutjen e parametrave kritikë që u përmendën më sipër e që vihet re eksperimentalisht. Në problemin A-3 matrica (4.5) pëson një transformim.

Ajo merr formën:

$$P_{(6 \times 6)} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & b_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & b_3 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_5 & 0 & b_5 & 0 & c_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

Ndërkaq (4.17) merr formën

$$k_2 = k_4 = k_6 = 0 \quad (4.29)$$

Është e kuptueshme ecuria dhe transformimet e proçedimeve të mëtejshme.

Për problemin A-4 matrica $P_{(6 \times 6)}$ ka formën:

$$P_{(6 \times 6)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 & e_4 & f_4 \\ 0 & 0 & 2A^2 & 0 & 1 & 0 \\ a_6 & b_6 & c_6 & d_6 & e_6 & f_6 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

dhe kërkohet që $P_{6 \times 6}$ të jetë e padegjeneruar, kurse barazimi (4.17) merr formën:

$$k_1 = k_2 = k_5 = 0 \quad (4.31)$$

Që këtë mund të nxirret forma që do të ketë (4.18), (4.19). Analiza që bëmë më sipër për ekuacionin diferencial (3.26) duke iu referuar problemit A-1 e tabelës 4.2 dhe konkluzionet e nxjerra për to janë të vlefshme për problemet A-2, A-3, A-4 duke përshtatur ndryshimet e rastit.

Rezultatet numerike për këto probleme nuk po i paraqitim meqënëse rezultatet e tabelës 4.2 për problemin A-1 mund të konsiderohen të mjaftueshme si test i metodës së propozuar për problemet e rendit të 6.

4.3 Transferimi dhe zgjidhja e një problemi kufitar në një problem të optimizimit numerik. Zgjidhja e ekuacionit Navier-Stokes (problemi Blassius).

Rrjedhja laminare e një lëngu në një shtesë horizontale (i ashtuquajti problemi Blassius) mund të modelohet me anën e një ekuacioni diferencial të rendit të tretë të njohur me emrin Navier-Stokes. Modeli matematik është një problem kufitar me 2 pika: Të gjendet funksioni $y = f(x)$ që kënaq ekuacionin diferencial

$$ff'' + 2f''' = 0 \quad (4.32)$$

me kushte kufitare

$$x = 0 \quad f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad (4.33)$$

$$x = \infty \quad f'(\infty) = 1 \quad (4.34)$$

Shpejtësia, u e rrjedhjes së fluidit (u – madhësi pa dimensione), plotëson relacionin

$$\frac{u}{U_\infty} = f'(x)$$

Zgjidhja e problemit (4.32) - (4.33) - (4.34) mund të realizohet numerikisht nëpërmjet teknikave numerike të tipit goditje. Ne do të përdorim këtu një teknikë të optimizimit numerik 1-dimensional për të zgjidhur problemin e mësipërm. Konkretisht, shënojmë me t (t – parametër optimizimi) derivatin e dytë të funksionit f në pikën $x = 0$, pra

$$f''(0) = t$$

Ndërtojmë problemin e vlerës fillestare (problemin Koshi) si më poshtë:

$$ff'' + 2f''' = 0$$

me kushte fillestare

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 0 \quad f''(0) = t$$

Pas zëvendësimeve

$$Y = (y, y', y'')$$

dhe

$$\begin{cases} y_1 = f = y \\ y_2 = f' = y' \\ y_3 = f'' = y'' \end{cases}$$

fitohet nje problem standard i vlerës fillestare që për Çdo vlerë të dhënë të t mund të zgjidhet numerikisht me anën e komandës Matlab ode45. Shënojmë me $f'(t, \infty)$ vlerën $y_2 = f' = y'$ në pikën fundore ∞ te integrit. Në demonstrimin tonë ne do të marrim $\infty = 6$. Formulojmë këtë problem të minimizimit 1-dimensional:

Të gjendet vlera t që minimizon funksionin e qëllimit

$$h(t) = (f'(t, \infty) - 1)^2$$

Funksioni i qëllimit në problemin e mësipërm të optimizimit është implicit. Kuptohet që $h(t) \geq 0$ dhe minimumi (zero) i funksionit $h(t)$ arrihet kur $f'(t, \infty) = 1$, pra kur f plotëson kushti kufitar (4.34). Në zgjidhjen që ne kemi realizuar kemi përdorur funksionin Matlab **fminsearch** për optimizimin e funksionit $h(t)$.

Kodet e mëposhtme Matlab realizojnë plotësisht zgjidhjen e problemit (4.32) - (4.33) - (4.34).

```
function w = ns(x,Y) % krijohe skedar funksioni për sistemin diferencial
```

```
w(1)=Y(1); w(2)=Y(2); w(3)=Y(1).*Y(3)/2;
```

```
w = w';
```

```
function H = h(t) % krijohe skedar funksioni për funksionin e qellit h(t)
```

```
[x,Y]=ode45('ns',[0 6],[0 0 t]);
```

```
H = Y(end,2);
```

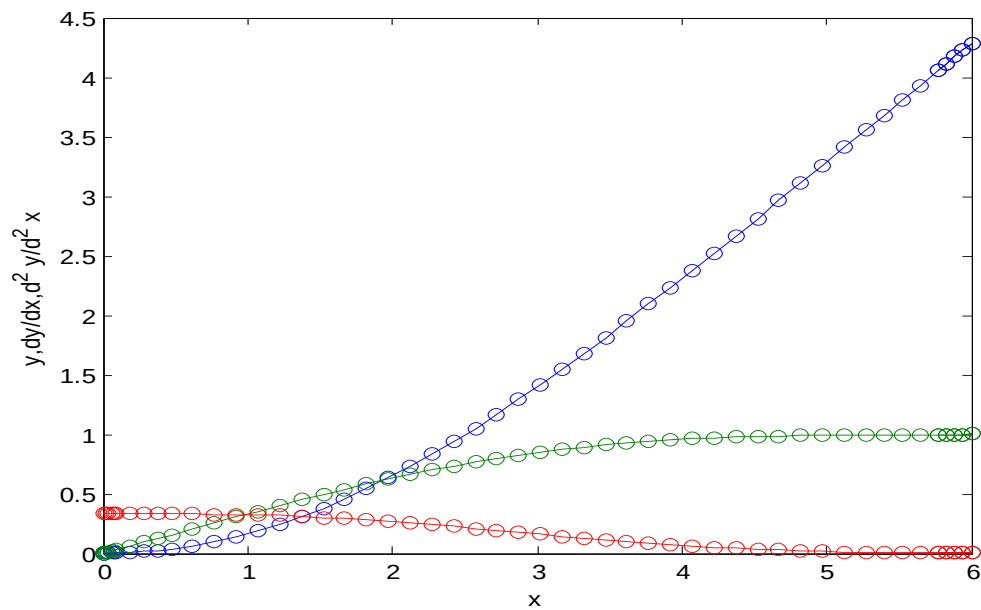
```
problemi_blassius.m % krijohe skedari kryesor për zgjidhjen e problemit Blassius
```

$t = f \text{ min search}('h',1);$

$\text{ode45}('ns',[0 \ 6],[0 \ 0 \ t]);$

Egzekutimi i skedarit. Problemi_blassius.m grafikon zgjidhjen numerike të problemit

Blassius siç paraqitet më poshte. Rezulton se $t_{\min} = 0.3326$.



KAPITULLI 5

Zgjidhje numerike për një ekuacion vale me kushte kufitare

5.1 Modeli matematik i lëkundjes së linjës së tensionit të lartë

Në këtë paragraf përshkruhet shkurtimisht modeli matematik i lëkundjes së linjës elektrike të transmetimit, nën veprimin e erës, kur linja është mbuluar me një shtresë akulli dhe bore. Detaje më të hollësishme për këtë model jepen në [33]. Siç dihet nga konsiderata fizika lëkundja në këtë model është thujse vertikale, me frekuencë të ulët dhe amplitudë të madhe. Sistemi mund të bëhet aerodinamikisht i paqëndrueshëm në varësi të ngarkesës borë-akull.

Le të jetë l gjatësia e linjës së transmetimit, tani e tutje kordë, që supozohet e pazgjatshme. Në fig. 2 jepet një prerje tërthore e kordës ku ρ është densiteti i kordës, T është tensioni i saj, kurse $\tilde{\alpha}$ është koeficienti i shuarjes së sistemit shuarës. Marrim parasysh vetëm spostimin vertikal të kordës sipas drejtimit oz . Shënojmë me $\tilde{u}(x, t)$ spostimin në pikën x të kordës, në momentin e kohës t .

Supozojmë se:

- Ngurtësia në përdredhje e kordës dhe shuarja e saj e brendshme janë të papërfillshme.
- Densiteti ρ i kordës është konstant, pra pesha e saj për njësi gjatësie është $W = \rho g$
- Era uniforme, shkakton forcat jolineare, të uljes dhe ngritjes (F_D, F_L) që veprojnë në strukturë për njësi gjatësie.

Këtu forca ulëse F_D ka drejtimin e shpejtësisë relative $V_S = V_\infty - \tilde{u}_t e_z$, ku V_∞ është

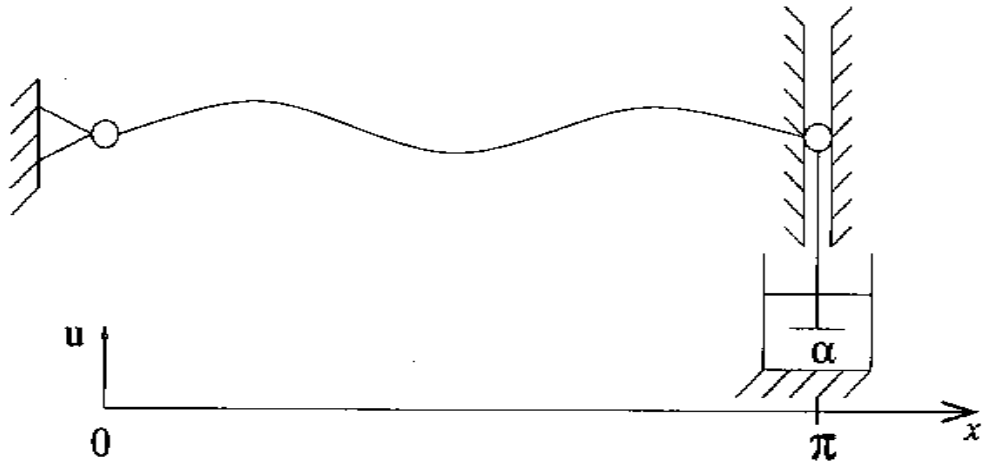


Fig.5.1

shpejtësia e erës sipas drejtimit oy , kurse forca ngritëse F_L ka drejtim përpindikular me drejtimin e shpejtësisë relative të erës V_s . Këndi α jepet si:

$$\alpha = \alpha_s + \varphi = \alpha_s + \arctan\left(-\frac{\tilde{u}_t}{v_\infty}\right)$$

ku α_s këndi statik i goditjes, pranohet konstant për të gjithë seksionin tërthor, kurse

$$\varphi \leq \pi$$

- Ndikimi i jolinearitetit gjeometrik të kordës pranohet të jetë i vogël (në krahasim me forcat e erës) kështu që do të neglizhohet.

Ekuacioni i zhvendosjes vertikale të kordës është

$$\rho \tilde{u}_{tt} - T \tilde{u}_{xx} = -\rho g + F_D + F_L \quad (5.1)$$

$$\text{me k.k.} \quad \tilde{u}(0, t) = 0 \quad \text{dhe} \quad T \tilde{u}_x(l, t) + \tilde{\alpha} \tilde{u}_t(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \quad (5.2)$$

Në [33] është treguar se $F_D + F_L$ mund të përafrohet me madhësinë

$$\frac{\rho d v_\infty^2}{2} \left(a_0 + \frac{a_1}{v_\infty} \tilde{u}_t + \frac{a_2}{v_\infty^2} \tilde{u}_t^2 + \frac{a_3}{v_\infty^3} \tilde{u}_t^3 \right)$$

Nomenklatura e koeficientëve a_0, a_1, a_2, a_3 si dhe konstantet dhe madhësitë e tjera fizike

janë përshkruar në mënyrë të detajuar tek [33].

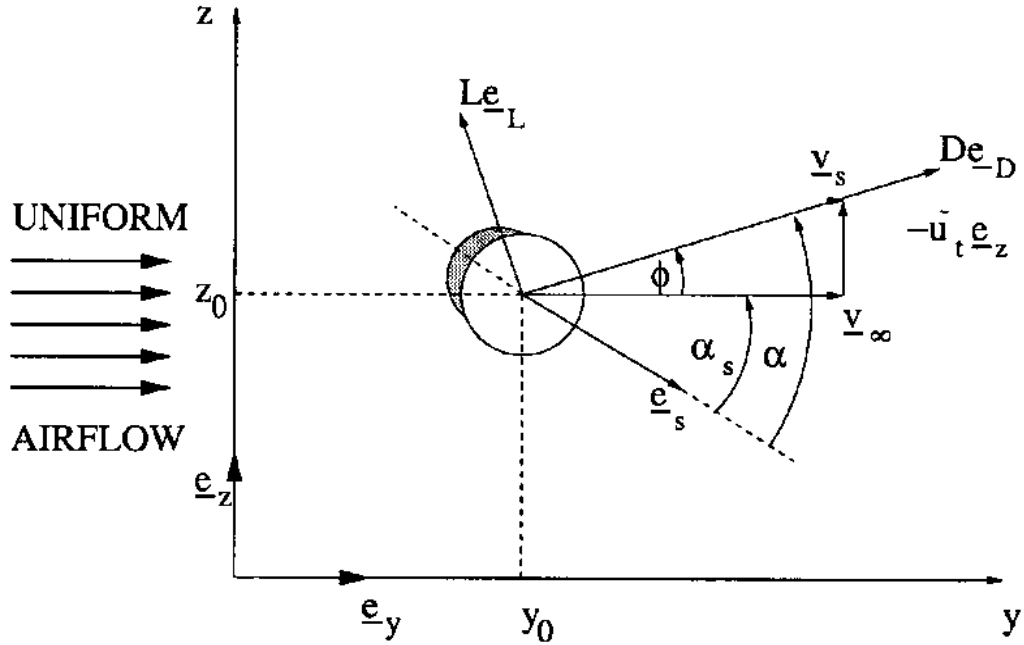


Fig.5.2

Për të thjeshtuar problemin e vlerës kufitare për $\tilde{u}(x, t)$ futet transformimi:

$$\tilde{u}(x, t) = \bar{u}(x, t) + g \frac{\rho}{T} u_s(x)$$

ku $u_s(x) = \frac{1}{2}x^2 - lx$ është zgjidhja stacionare e problemit të vlerës fillestare-kufitare

$$u_s''(x) - 1 = 0 \quad 0 < x < l$$

me kushte $u_s(0) = u_s'(l) = 0$.

Më tej futen variablat pa përmasa,

$$\bar{x} = \frac{\pi}{l}x, \quad \bar{t} = ct, \quad v(\bar{x}, t) = \frac{c}{v_\infty} \bar{u}(x, t), \quad \text{ku} \quad c = (\pi/l) \sqrt{\frac{T}{\rho}}.$$

Ekuacioni (5.1) merr formën:

$$v_{\bar{t}\bar{t}} - v_{\bar{x}\bar{x}} = \frac{\rho_a d}{2\rho} \frac{v_\infty}{c} (\alpha_0 + \alpha_1 v_{\bar{t}} + \alpha_2 v_{\bar{t}}^3) \quad (5.3)$$

Duke pranuar shpejtësinë e erës V_∞ te vogël në krahasim me shpejtësinë valore c ,

rrjedh që parametri $\bar{\varepsilon} = \frac{v_\infty}{c}$ është i vogël. Duke ju rreferuar [33], mund të tregohet se

ana e djathtë e ekuacionit (5.3), me përafërsi të rendit $\bar{\varepsilon}$, është barabartë me

$$\frac{\rho_a d}{2\rho} \bar{\varepsilon} (av_{\bar{t}} - bv_{\bar{t}}^3),$$

ku a dhe b janë kostante pozitive që varen prej koeficientëve të ngritjes dhe uljes, e të përshkruar në mënyrë eksplicite tek [33]. Nëse përdorim transformimin

$$u(\bar{x}, \bar{t}) = \sqrt{\frac{3b}{a}} v(\bar{x}, \bar{t})$$

dhe shënojmë me $\varepsilon = \frac{\rho_a d}{2\rho} a \bar{\varepsilon}$, ekuacioni (5.3) merr formën

$$u_{\bar{t}\bar{t}} - u_{\bar{x}\bar{x}} = \varepsilon \left(u_{\bar{t}} - \frac{1}{3} u_{\bar{t}}^3 \right).$$

Kështu fitohet i ashtuquajtur i ekuacioni i Rayleigh. Duke pranuar se koeficienti i

shuarjes $\tilde{\alpha}$ jepet në formën, $\tilde{\alpha} = \alpha \sqrt{\frac{\rho}{T}}$ dhe duke përmblodhur rezultatet e këtij

paragrafi, formulohet ky problem i vlerës fillestare-kufitare:

$$u_{\bar{t}\bar{t}} - u_{\bar{x}\bar{x}} = \varepsilon \left(u_{\bar{t}} - \frac{1}{3} u_{\bar{t}}^3 \right), \quad 0 < x < \pi, t > 0, \quad (5.4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.5)$$

$$u_x(\pi, t) = -\alpha x u_t(\pi, t), \quad t \geq 0, \quad (5.6)$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (5.7)$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (5.8)$$

Funksionet ϕ_x dhe ψ_x më sipër janë respektivisht zhvendosja dhe shpejtësia fillestare e

kordës, a është konstante positive, kurse $0 < \varepsilon \ll 1$.

5.2 Korrektësia e problemit të shtruar

Thuhet se një problem i dhënë është shtruar në mënyrë korrekte në qoftë se ai ka zgjidhje të vetme dhe zgjidhja e tij është e qëndrueshme.

Nuk mund të bëhet asnjë tentativë zgjidhjeje numerike për një problem, pa verifikuar paraprakisht korrektësinë e shtrimit të tij. Tek [35], duke përdorur një aparat të ndërlikuar matematik, është vërtetuar korrektësia e shtrimit të problemit të mëposhtëm, për çdo $t > 0$:

$$u_{tt} - u_{xx} = cu_t - \sigma(u_t), \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \quad (5.9)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad (5.10)$$

$$u_x(\pi, t) = -cu_t(\pi, t), \quad t \geq 0, \quad (5.11)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (5.12)$$

$$u_t(x, 0) = u_1(x), \quad 0 < x < \pi, \quad (5.13)$$

Meqënëse problemi (5.4) – (5.5) – (5.6) – (5.7) – (5.8) është rast i veçantë i problemit (5.9) – (5.10) – (5.11) – (5.12) – (5.13), rrjedh menjëherë se ai është shtruar në mënyrë korrekte.

5.3 Zgjidhja numerike për problemin valor (5.4)-(5.8)

Metoda numerike e propozuar është e tipit të karakteristikave. Rrjeta e veçantë gjeneruar nga kurba karakteristike e ekuacionit që shtrohet për zgjidhje dhe specifika e kushteve fillestaro-kufitare e bëjnë këtë metodë më të favorshme për aplikim. Metoda duket të minimizojë vështirësitë e procedurave algebrike të komplikuara që shtrohen

nga metoda klasike e karakteristikave.

Një nga qëllimet e studimit është gjetja e vlerave të parametrut amortizues α për të cilën zgjidhja $u(x;t)$ tenton në zero ose në një funksion të kufizuar të caktuar.

Siç tregohet edhe tek [33] problemi (5.1) - (5.5) është i shtruar mire. Metoda e transformimit Laplace përdoret fillimisht për të ndërtuar përafrimin analitik të zgjidhjes $u(x;t)$ për variantin linear të ekuacionit (5.1), që është përfutur pas

shpërfilljes së termit jolinear $\frac{1}{3}u_t'^3$. Një metodë perturbimi dy shkallësh përdoret vetëm

për rastin jolinear të kushteve fillestare të thjeshta, të konsideruara si kushte monokromatike të forms

$$\varphi(x) = a_n \sin(nx) \quad \text{dhe} \quad \psi(x) = b_n \sin(nx)$$

Zgjidhjet analitike të këtyre ekuacioneve diferenciale parashtrojnë një sërë vështirësish praktike:

- 1) Zgjidhja analitike mund të jetë e mundur për rastet e kufizuara
- 2) Metodat zgjidhëse analitike në shumicën e rasteve janë shumë të komplikuar
- 3) Zgjidhja analitike e gjetur është jo e përshtatshme për përdorim praktik
- 4) Në shumë raste problemi duhet të riinvestigohet dhe të rizgjidhet për ndonjë ndryshim jo thelbësor në kushtet e veta fillestaro-kufitare.

Në [33] është prezantuar një metodë indirekte numerike për zgjidhjen e problemit (5.1) – (5.5) duke transformuar ekuacionin diferencial të pjesshëm të rendit të dytë (5.1) në një system të dy ekuacioneve diferenciale të pjesshëm të rendit të parë. Një skemë difference të rendit të parë, që supozohet të ketë saktësi minimale, aplikohet në vazhdim për sisteme ekuacionesh diferenciale të pjessheme.

Metoda numerike e propozuar në këtë artikull për zgjidhjen e problemit (5.1) – (5.5) bazohet në metodën e karakteristikave që është e zbatueshme për problemin jolinear

hiperbolik të dobët me formë të përgjithshme:

$$a_1 u_{tt}'' + a_2 u_{tx}'' + a_3 u_{xx}'' = a_4 \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (5.14)$$

ku $a_i = a_i(x; t; u; u_x'; u_t')$ për $i = 1, 2, 3, 4$.

Kushtet fillestare dhe kufitare jepen si

$$u(0, t) = u(l, t) \equiv 0, \quad t > 0 \quad (5.15)-(5.16)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.17)$$

$$u_t'(x, 0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq l \quad (5.18)$$

Mund të shihet lehtë se ekuacioni diferencial (5.4) është një rast i veçantë i ekuacionit (5.14), porse kushtet fillestare-kufitare (5.5) - (5.8) ndryshojnë konsiderueshëm nga kushtet analoge (5.15) - (5.18).

Supozojmë se $\varphi(x)$ është i derivueshëm në segmentin $[0, \pi]$, pra që egziston $u_x(x, 0)$ për $0 < x < \pi$ dhe $u_x(x, 0) = \varphi'(x)$. Rrjedhimisht u, u_t, u_x janë funksione të njohur për $0 \leq x \leq \pi$ dhe $t = 0$. Ndërkaq nga kushtet (5.5) – (5.6) – (5.7) – (5.8) lehtësisht rezulton se:

$$u(0, 0) = 0, \quad u_x(0, 0) = \varphi'(0), \quad u_t(0, 0) = 0$$

$$u_x(\pi, 0) = \varphi'(\pi), \quad u_t(\pi, 0) = -\frac{\varphi'(0)}{\varepsilon \alpha},$$

Kërkojmë kushtet për të cilat u_{tt}, u_{xt}, u_{xx} përcaktohen në mënyrë të vetme, vetëm me faktin që kënaqin ekuacionin diferencial (5.14). Me supozimin që derivatet e pjesshme të mësipërm janë funksione të vazhdueshme, egzistojnë dhe mund të llogariten diferencialet:

$$d(u_x) = u_{xx} dx + u_{xt} dt, \quad d(u_t) = u_{xt} dx + u_{tt} dt$$

Dy ekuacionet e fundit, së bashku me ekuacionin (5.14), formojnë sistemin linear

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & dt & dx \\ dt & dx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} \\ u_{xt} \\ u_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_4 \\ d(u_x) \\ d(u_t) \end{pmatrix}$$

Ky system, duke u bazuar tek (1.1) konvertohet në

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & dt & dx \\ dt & dx & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{tt} \\ u_{xt} \\ u_{xx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ d(u_x) \\ d(u_t) \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

ku $a = \varepsilon \left(u_t - \frac{1}{3} u_t^3 \right)$. Sistemi (5.19) ka zgjidhje të vetme në lidhje me të panjohurat

u_{tt}, u_{xt}, u_{xx} me përjashtim të rastit kur

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & dt & dx \\ dt & dx & 0 \end{pmatrix} = -(dx)^2 + (dt)^2 = 0 \quad (5.20)$$

Duke zgjidhur ekuacionin e fundit themi se (5.19) ka zgjidhje të vetme me përjashtim të rastit kur

$$dt = \pm dx$$

Sikurse shihet vijat karakteristike të ekuacionit (5.1), në pikën e çfarëdoshme $P(x_i, t_j)$

të planit xot , janë drejtëzat $t - t_j = \pm x - x_i$, me koeficienta këndorë respektivisht ± 1 .

Meqenëse në çdo pikë $P(x_i, t_j)$ të zonës $D = \{0 \leq x \leq \pi, t \geq 0\}$ kemi dy vija karakteristike, konkretisht dy drejtëzat $t - t_j = \pm x - x_i$, që kalojnë nga ajo pikë, atëherë sistemi (5.20), sipas rregullit Kramer, nuk mund të ketë zgjidhje në qoftë se njëri nga tre përcaktorët sekondarë të tij nuk është zero. Nga kjo rrjedh se në çdo pikë të zonës D plotësohen njëherësh ekuacionet:

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ d(u_x) & dt & dx \\ d(u_t) & dx & 0 \end{pmatrix} = -[d(u_x)dx - d(u_t)dt] - a(dx)^2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & dt & d(u_x) \\ dt & dx & d(u_t) \end{pmatrix} = [d(u_t)dt - d(u_x)dx] - a(dt)^2 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ 0 & d(u_x) & dx \\ dt & d(u_t) & 0 \end{pmatrix} = -d(u_t)dx + d(u_x)dt + adxdt = 0$$

Ekuacioni i fundit mund të shkruhet në formën

$$d(u_t) - d(u_x) \frac{dt}{dx} - a dt = 0 \quad (5.21)$$

Ekuacioni (5.21), së bashku me identitetin

$$du = u_t dt + u_x dx \quad (5.22)$$

do të jenë baza e shtjellimit të mëtejshëm të metodës.

Shenojme me $P(x_1, t_1)$ dhe $Q(x_2, t_2)$, ku $t_1 = t_2 = 0$, dy pika përgjatë boshtit të x —eve të tilla që $0 < x_1 < x_2 < \pi$. Mund të verifikohet lehtë se drejtezat $t - t_1 = \pm x - x_1$ dhe $t - t_2 = \pm x - x_2$ janë 4 kurbat karakteristike të ekuacionit (5.4) përkatësisht në pikat P dhe Q . Le të jetë $R(x, t)$ ndërprerja e vijave $t - t_1 = x - x_1$ dhe $t - t_2 = -x - x_2$. Proçedura standarte e metodës së karakteristikave për përcaktimin e pikës $R(x, t)$ dhe gjetjen e përafrimeve për $u(x, t)$, $u'_x(x, t)$, $u'_t(x, t)$ në këtë pikë (që këtej e tutje e njohur si proçesi (P, Q, R)), thjeshtëzohet shumë për rastin e ekuacionit (5.4). Qyshkur $u(x, t)$, $u'_x(x, t)$, $u'_t(x, t)$ njihen në pikat P dhe Q , kushtet sipas të cilave u''_{xx} , u''_{xy} dhe u''_{yy} gjenden në mënyrë unike, pas disa operacioneve algjebrike, merren nga ekuacionet:

$$u'_x(R) = \frac{1}{2} [u'_x(Q) + u'_x(P) + u'_t(Q) - u'_t(P)] + \frac{h}{8} [a(Q) - a(P)] \quad (5.23)$$

$$u'_t(R) = \frac{1}{2} [u'_x(Q) - u'_x(P) + u'_t(Q) + u'_t(P)] + \frac{h}{8} [a(Q) + 2a(R) + a(P)] \quad (5.24)$$

ku $h = (x_2 - x_1)$.

Mund të shihet lehtë se ekuacioni i parë i sistemit (5.23) – (5.24) është në formë eksplicite, kurse ekuacioni i dytë është në formë implicite për arsye të termit

$$a(R) = \varepsilon \left[u'_t(R) - \frac{1}{8} u_t^3(R) \right]$$

të përfshirë në të. Ky fakt do të përdoret më poshtë.

Në të njëjtën mënyrë përafrimi i $u(R)$ rezulton si më poshtë,

$$u(R) = \frac{1}{2} [u(P) + u(Q)] + \frac{h}{8} [u'_x(P) - u'_x(Q) + u'_t(P) + 2u'_t(R) + u'_t(Q)] \quad (5.25)$$

Mund të shihet se për gjetjen e përafrimeve të $u'_x(x, t)$ dhe $u'_t(x, t)$, (5.23) – (5.24) është i pavarur dhe autonom nga procesi (5.25) për gjetjen e përafrimeve të $u(x, t)$, sepse funksioni $u(x, t)$ nuk është i përfshirë në mënyrë eksplicite në ekuacionet (5.23) – (5.24). Edhe ky fakt do të përdoret më poshte.

Një rrjetë G përftohet nga diskretizimi i intervalit $0 \leq x \leq \pi$, në m nënintervale me gjatësi secila prej $h = \pi/m$. Supozohet se ekziston $\varphi'(x)$ në mënyrë të tillë që $u'_x(x, 0) = \varphi'(x)$, ndërkohë që $0 < x < \pi$. Si pasojë, njihen funksionet $u(x, t), u'_x(x, t), u'_t(x, t)$ kur $t = 0$ dhe $0 < x < \pi$. Ndërkohë, duke ndjekur kushtet (5.5) - (5.8), mund të përftohet lehtë:

$$u(0, 0) = 0, u'_t(0, 0) = 0 \quad (5.26)$$

$$u'_x(\pi, 0) + \varepsilon \alpha u'_t(\pi, 0) = 0 \quad (5.27)$$

Duke konsideruar kushtet (5.26) dhe (5.27) është e qartë se prej 6 përcaktimeve të $u(x, t), u'_x(x, t), u'_t(x, t)$ në pikat $x = 0$ dhe $x = \pi$, ka vetëm tre prej tyre. Kështu,

metoda e karakteristikave nuk mund të “inicializohet”. Kjo vështirësi tejkalohet nga metoda e propozuar si vijon:

Shënimi G_0 , këtej e tutje, do të përdoret për pikat e G . Proçesi (P, Q, R) aplikohet për $(m-1)$ pikat e brendshme të G_0 dhe si rrjedhim përftohen $(m-2)$ pika në të cilat përafrohet funksioni u dhe derivatet e tij të pjesshme. Proçesi (P, Q, R) përsëritet për $(m-2)$ pikat e përfutuara dhe në vijim përftohen $(m-3)$ pika të tjera. Do të tregojmë se si vlerat e $u(x, t), u'_x(x, t), u'_t(x, t)$ përafrohen në pikat A, D, F dhe S, T, V (shiko figurën 1). Supozojmë se njohim vlerat e $u(S), u'_x(S), u'_t(S)$ në pikën S . Nqs zbatojmë proçeset (P, Q, R) , (Q, S, T) dhe (R, T, V) atëherë përftohen përafrimet e $u(x, t), u'_x(x, t), u'_t(x, t)$ në pikën V . Shënimet $u(V, h), u'_x(V, h), u'_t(V, h)$ përdoren pikërisht për keto përafrime të pikës V , për të shprehur faktin që hapi i përdorur është h . Nqs aplikojmë proçesin (P, S, V) , atëherë përftohen përafrime të tjera për $u(x, t), u'_x(x, t), u'_t(x, t)$ në pikën V . Shënimet $u(V, 2h), u'_x(V, 2h), u'_t(V, 2h)$ përdoren për këto përafrime të fundit, pikërisht për të shprehur faktin që hapi i përdorur këtu është $2h$. Dy llojet e përafrimeve më lartë do të përftohen në dy mënyra të ndryshme, në mënyrë të tillë që të shtrihen tre ekuacione duke i barazuar vlerë për vlerë. Dy ekuacionet që korespondojnë tek $u'_x(x, t)$ dhe $u'_t(x, t)$ janë të pavarura, qyshkur përafrimet (5.23) dhe (5.24) përftohen njëkohësisht, dhe, vetëm ekuacioni i bazuar tek $u'_x(x, t)$ do të konservohet (i cili është më i preferuar në sajë të formës së vet eksplicite). Duke grupuar dy ekuacionet e pavarura të mbetura me ekuacionin (5.27) sigurohet një system tre ekuacionesh për përcaktimin e përafrimeve të $u(S), u'_x(S), u'_t(S)$.

Algjebra si mjet do te ishte goxha e komplikuar për të shkruar këtë proces analitikisht, por mund të jetë lehtësisht i implementueshëm numerikisht duke konsideruar faktet e mësipërme. Algoritmi i mëposhtem detajon procedurën për përcaktimin e $u(x,t), u'_x(x,t), u'_t(x,t)$ ne pikat S, V, A dhe F .

Hap 1. Hamendesojmë një vlerë p për $u'_x(S)$ dhe llogaritim një përafrim për $u'_t(S)$ nga (5.27).

Hap 2. Shkruaj ekuacionet (5.23) dhe (5.24) për pikat Q, S, T dhe llogarit përafrimet e $u'_x(T)$ dhe $u'_t(T)$. Për të shprehur faktin që keto përafrime varen nga p i rishënoj keto përafrime me $u'_x(T, p)$ dhe $u'_t(T, p)$.

Hap 3. Shkruaj vetëm ekuacionin eksplisit (5.23) për pikat R, T, V dhe llogarit përafrimin për $u'_x(V)$ të cilin e rishënojmë $u'_x(V, p, h)$ për arsye të ngjashme si më sipër.

Hap 4. Shkruaj vetëm ekuacionin eksplisit (5.23) për pikat P, S, V dhe llogarit përafrimin për $u'_x(V)$ të cilin e rishënojmë $u'_x(V, p, 2h)$ për arsye të ngjashme si më sipër.

Hap 5. Zgjidhim në mënyrë iterative ekuacionin

$$d(p) = u'_x(V, p, 2h) - u'_x(V, p, h) \equiv 0 \text{ dhe}$$

gjejmë rrenjen e tij p^* . Shenojmë $u'_x(S) = p^*$ dhe nga (5.23) llogaritim $u'_t(S)$.

Hap 6. Sapo të përcaktohen $u'_x(S)$ dhe $u'_t(S)$, hamendësojmë një vlerë për q për $u(S)$ dhe ngjashmërisht si në hapat 1 - 5 gjej vlerën e q si rrënjë e ekuacionit

$$d(q) = u(V, q, 2h) - u(V, q, h) \equiv 0$$

Në fund të këtij hapi gjej përafrimet për $u(x,t), u'_x(x,t), u'_t(x,t)$ ne pikat S, V .

Hap 7. Gjej përafrimin për $u'_x(x, t)$ në pikat A dhe F nga një proces të ngjashëm, por më të thjeshtë si më sipër.

Siç mund të shihet nga hapat 1 deri tek 5 duhet të zgjidhet vetëm një ekuacion implicit për çdo iteracion hap 5.

Le të shenojmë me G_1 rrjetën prej $(m+1)$ pikash të formuara nga pikat A, F, V dhe S_1 siç tregohet në figuren 1, dhe nga $(m-3)$ pikat e përfthuara nga përsëritja e procesit (P, Q, R) për pikat e brendshme të G_0 . Mund të shihet se duke u bazuar në rrjetën G_1 , mund të ndërtohet një rrjetë G_2 në të njëjtën mënyrë, dhe në vazhdim një rrjetë G_3 , e kështu në vazhdim, me qëllim që të lëvizë për nga lartë në drejtim të boshtit të kohës. Kështu përftohet një rrjetë katrore dhe uniforme pikash ku përafrohen funksioni $u(x, t)$ dhe derivatet e pjesshme të tij. Algoritmi i plotë i detajuar i metodës së propozuar, implementimi i saj në MATLAB, dhe krahasimi i rezultateve numerike me ato që ofrohen në literature janë objekt i një pune të metejshme kërkimi.

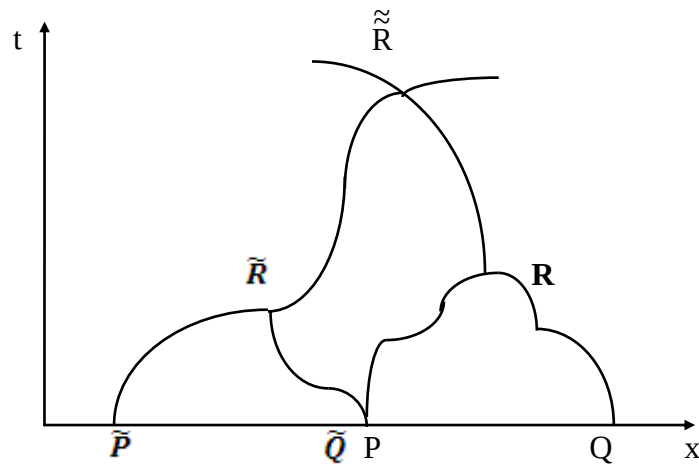
Në prfundim mund të themi se gjetëm dhe aplikua një metodë numerike të tipit të karakteristikave. Kjo metodë ka fituar epërsi nga veçoritë e problemit që shtrohet për zgjidhje, siç janë konfigurimi i veçante i rrjetës së pikave të gjeneruara nga kurbat karakteristike të ekuacionit dhe specifika e kushteve fillestaro-kufitare të përfshira.

Ndërsa kushtet origjinale fillestare të problemit nuk sigurojnë të dhëna të mjaftueshme për funksionin e panjohur dhe derivatet e tij në dy pikat fundore, metoda klasike e karakteristikave nuk inicializohet. Sakaq kjo metodë aplikohet vetëm për pikat e brendshme të një rrjete uniforme, por në një mënyrë të përsëritur. Një teknikë iterative përdorej më tej për të llogaritur të dhënat e munguara në dy pikat fundore, duke aplikuar metodën e karakteristikave për 6 pika fundore në dy mënyra:

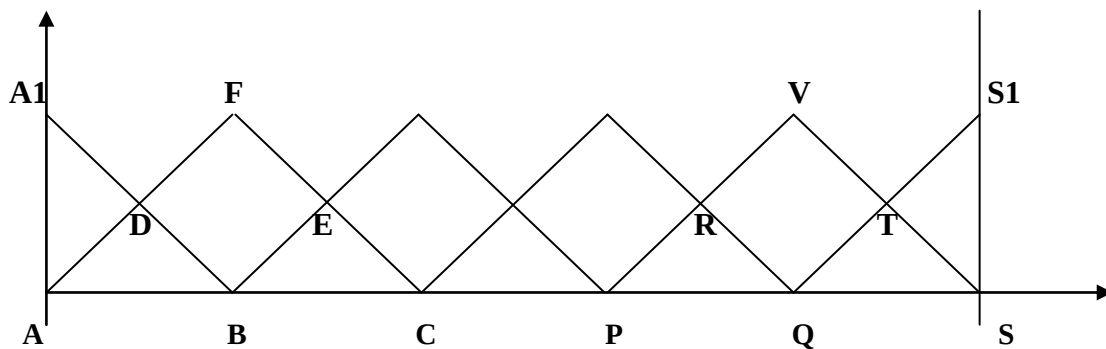
- si një proces i dubluar me hap h dhe, ne vijim

- si një proces të vetëm me hap të dubluar $2h$.

Metoda numerike e propozuar ketu është më e thjeshtë në formulim dhe besoj edhe në kodim krahasuar me procedurën e komplikuar algjebrike e prezantuar nga metoda klasike e karakteristikave. Më poshtë ilustrohen me figurë situatat e mësipërme.



Figurë 5.3



Figurë 5.4

5.4 Një metodë alternative për zgjidhjen e ekuacionit valor

5.4.1 Hyrje

Një metodë alternative për zgjidhjen e problemit (5.4)-(5.8) propozohet nga Mohanty [38] e cila aplikohet për zgjidhjen numerike të një ekuacioni kuasilinear hiperbolik të rendit të dytë me derivate të pjesshme dhe bazohet në përafrimin me spline në tension në drejtimin ox dhe diferencat e fundme të qendëruara në drejtimin ot . Me konkretisht, konsiderohet ekuacioni

$$u_{tt} = A(x, t, u)u_{xx} + f(x, t, u, u_x, u_t) \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (5.28)$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = a(x), \quad u_t(x, 0) = b(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (5.29)$$

dhe kushte kufitare

$$u(0, t) = p_0(t), \quad u(1, t) = p_1(t), \quad t \geq 0 \quad (5.30)$$

Më konkretisht problemi (5.4) - (5.8) është rast i veçantë i problemit të mësipërm ku

$$A(x, t, u) \equiv 1, \quad f(x, t, u, u_x, u_t) = \varepsilon \left(u_t - \frac{1}{3} u_t^3 \right)$$

Funksionet spline në tension që ndërtohen janë

$$S^j(x) = a_i^j + b_i^j(x - x_i) + c_i^j \left(e^{\omega(x-x_i)} - e^{\omega(x-x_i)} \right) + d_i^j \left(e^{\omega(x-x_i)} + e^{\omega(x-x_i)} \right),$$

$$i = \overline{0, N+1}$$

ku $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S^j(x) \in C^2[0;1]$ dhe që interpolon funksionin $u(x, t)$ në pikat nyje

(x_i, t_j) të rrjetës në nivelin j të kohës. Shënojmë me

$$M_i^j = S_j''(x_i), \quad i = \overline{0, N+1}, j = \overline{1, J}$$

Shënojmë

$$S_j(x_i) = U_i^j, \quad S_j(x_{i+1}) = U_{i+1}^j, \quad M_i^j = S_j''(x_i), \quad M_{i+1}^j = S_j''(x_{i+1})$$

Vlerat e parametrave $a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j$ përcaktohen si

$$\begin{aligned} a_i^j &= U_i^j - \frac{M_i^j}{\omega^2}, & b_i^j &= \frac{U_i^j - U_{i+1}^j}{h} + \frac{M_i^j - M_{i+1}^j}{\omega\theta} \\ c_i^j &= \frac{2M_{i+1}^j - (e^\theta + e^{-\theta})M_i^j}{2\omega^2(e^\theta - e^{-\theta})}, & d_i^j &= \frac{M_i^j}{2\omega^2} \end{aligned}$$

ku $\theta = \omega h, i = \overline{0, N-1}$. Në çdo pikë nyje të rrjetës diskretizohet ekuacioni diferencial

(5.28) si

$$L_1(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) = \frac{k^2}{2} \left[R_1 \bar{U}_{ti+1}^j + R_2 \bar{U}_{ti-1}^j + 10\bar{U}_{ti}^j \right] - \frac{k^2}{2} \left[R_1 \hat{G}_{i+1}^j + R_2 \hat{G}_{i-1}^j + 10\hat{G}_i^j \right] + \hat{T}_i^j$$

ku $i = \overline{1, N}, j = 0, 1, 2, \dots$, dhe

$$\begin{aligned} L_1 &= 6\lambda^2 \left[A_i^j - \frac{h^2}{6} \left(\frac{A_{xi}^j}{A_i^j} \right) A_{xi}^j + \frac{h^2}{12} A_{xxi}^j \right], \\ R_1 &= 1 - \frac{hA_{xi}^j}{A_i^j}, \quad R_2 = 1 + \frac{hA_{xi}^j}{A_i^j} \end{aligned}$$

dhe gabimi lokal i ndërprerjes është

$$\hat{T}_i^j = O(k^4 + k^4 h^2 + k^2 h^4)$$

Për detaje të mëtejshme shih Shtojcë B në fund të materialit.

5.4.2. Nje projekt-ide per funksionet spline ne tension

Funksionet spline jopolinomiale $S^j(x)$ të funksionit $u(x, t)$ në pikat nyje (x_i, t_j) të

rrjetës

$$S^j(x) = a_i^j + b_i^j(x - x_i) + c_i^j(\cos \omega(x - x_i) - \sin \omega(x - x_i)) + d_i^j(\cos \omega(x - x_i) + \sin \omega(x - x_i))$$

$$i = \overline{0, N+1} \quad (5.31)$$

ku $x \in [x_i, x_{i+1}]$, ndërsa $a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j$ janë të panjohura si dhe ω një parametër që duhet përcaktuar. Këto funksione, $S^j(x) \in C^2[0,1]$, interpolojnë funksionin $u(x,t)$ në pikat nyje (x_i, t_j) të rrjetës (si rezultat i diskretizimit të zones). Kështu, derivatet e tyre deri në rendin e dytë jepen si

$$S'^j(x) = b_i^j - \omega c_i^j (\cos \omega(x - x_i) + \sin \omega(x - x_i)) + \omega d_i^j (\cos \omega(x - x_i) - \sin \omega(x - x_i)),$$

$$i = \overline{0, N+1}, j = \overline{1, J} \quad (5.32)$$

$$S''^j(x) = -\omega^2 [c_i^j (\cos \omega(x - x_i) - \sin \omega(x - x_i)) + d_i^j (\cos \omega(x - x_i) + \sin \omega(x - x_i))]$$

$$i = \overline{1, N+1}, j = \overline{1, J} \quad (5.33)$$

Shënojmë me

$$M_i^j = S_j''(x_i), \quad i = \overline{0, N+1}, j = \overline{1, J} \quad (5.34)$$

Shënojmë

$$S_j(x_i) = U_i^j, \quad S_j(x_{i+1}) = U_{i+1}^j, \quad M_i^j = S_j''(x_i), \quad M_{i+1}^j = S_j''(x_{i+1})$$

Pra formohet sistemi i mëposhtem me 4 ekuacione dhe 4 ndryshore

$$\left\{ \begin{array}{l} a_i^j + c_i^j + d_i^j = U_i^j \\ a_i^j + h b_i^j + c_i^j (\cos \omega h - \sin \omega h) + d_i^j (\cos \omega h + \sin \omega h) = U_{i+1}^j \\ -\omega^2 c_i^j - \omega^2 d_i^j = M_i^j \\ c_i^j [-\omega^2 (\cos \omega h - \sin \omega h)] + d_i^j [-\omega^2 (\cos \omega h + \sin \omega h)] = M_{i+1}^j \end{array} \right.$$

Pas disa operacioneve algjebrike, marrim

$$a_i^j = U_i^j + \frac{M_i^j}{\omega^2}, \quad b_i^j = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} - \frac{M_i^j - M_{i+1}^j}{\omega^2 h}$$

$$c_i^j = \frac{M_{i+1}^j - [\cos(\omega h) + \sin(\omega h)] M_i^j}{2\omega^2 \sin(\omega h)}, \quad d_i^j = \frac{-M_{i+1}^j + [\cos(\omega h) - \sin(\omega h)] M_i^j}{2\omega^2 \sin(\omega h)}$$

ose

$$\begin{aligned} a_i^j &= U_i^j + \frac{M_i^j}{\omega^2}, & b_i^j &= \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} - \frac{M_i^j - M_{i+1}^j}{\omega\theta} \\ c_i^j &= \frac{M_{i+1}^j - (\cos\theta + \sin\theta)M_i^j}{2\omega^2 \sin\theta}, & d_i^j &= \frac{-M_{i+1}^j + (\cos\theta - \sin\theta)M_i^j}{2\omega^2 \sin\theta} \end{aligned}$$

ku $\theta = \omega h$, $i = \overline{0, N-1}$. Duke shfrytëzuar vazhdueshmerinë e derivatit të parë (pra

limitet e njëanshme të derivatit në pikat nyje), pra $S'^j(x_i -) = S'^j(x_i +)$, rezultojnë

marrëdhëniet e mëposhtme për $i = \overline{0, N-1}$

$$S'^j(x_i -) = b_{i-1}^j - \omega c_{i-1}^j (\cos\omega(x_i - x_{i-1}) + \sin\omega(x_i - x_{i-1})) + \omega d_{i-1}^j (\cos\omega(x_i - x_{i-1}) - \sin\omega(x_i - x_{i-1}))$$

$$S'^j(x_i -) = b_{i-1}^j - \omega c_{i-1}^j (\cos\omega h + \sin\omega h) + \omega d_{i-1}^j (\cos\omega h - \sin\omega h)$$

$$S'^j(x_i -) = b_{i-1}^j - \omega c_{i-1}^j (\cos\theta + \sin\theta) + \omega d_{i-1}^j (\cos\theta - \sin\theta)$$

dhe

$$S'^j(x_i +) = b_i^j - \omega c_i^j (\cos\omega(x_i - x_i) + \sin\omega(x_i - x_i)) + \omega d_i^j (\cos\omega(x_i - x_i) - \sin\omega(x_i - x_i))$$

$$S'^j(x_i +) = b_i^j - \omega c_i^j + \omega d_i^j$$

Duke barazuar të dyja përfundimet e mësipërme marrim relacionin

$$S'^j(x_i +) = b_i^j - \omega c_i^j + \omega d_i^j = b_{i-1}^j - \omega c_{i-1}^j (\cos\theta + \sin\theta) + \omega d_{i-1}^j (\cos\theta - \sin\theta) = S'^j(x_i -)$$

nga ku marrim formën e thjeshtuar

$$\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} = \alpha M_{i+1}^j + 2\beta M_i^j + \alpha M_{i-1}^j \quad (5.35)$$

ku

$$\alpha = \frac{1}{\theta \sin\theta}, \quad \beta = \frac{-\cos\theta}{\theta \sin\theta} = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{\theta}, \quad \theta = \omega h.$$

Nga (5.35), marrim kushtin e qëndrueshmërisë

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta + \alpha = 1 &\Rightarrow 2\frac{1}{\theta \sin \theta} - 2\frac{\cos \theta}{\theta \sin \theta} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\theta}{2} \\ &\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}\end{aligned}$$

Ky ekuacion ka një numër të fundëm rrënjësh, por duke e zgjidhur grafikisht marrim vlerën më të vogël positive $\theta = 8.98681891581813 \approx 8.99$.

Në punimin e sipërm janë përdorur si pjesë përbërës e funksionit spline në tension, pikërisht funksionet trigonometrike sinus dhe kosinus në vend të funksioneve eksponenciale të përdorur nga Mohanty [38]. Lehtësia në trajtimin e tyre si funksione që derivohen sa herë të jetë e nevojshme dhe fakti që konvertohen tek njeri tjetri gjatë derivimit përbëjnë një element të rëndësishëm për studim të mëtejshëm.

Qëndrueshmeria e metodës që bazohet tek këto funksione trigonometrike vlen të studiohet në vazhdimësi. Ndërkohë që analiza e konvergjencës mund të trajtohet duke u mbështetur tek Mohatny [38].

PËRFUNDIME-REKOMANDIME

1. Probleme te shumta ne ekuacionet diferenciale te zakonshme si problem i vleres fillestare, problemet e vleres kufitare, gjetja e zgjidhjeve periodike, problemet e vlerave te veta etj. modelojne procese te ndryshme ne shkencat natyrore dhe ato teknike. Metodatat numerike perbejne nje aparat matematik te suksesshem e operativ per zgjidhjen e problemeve diferenciale dhe zgjidhjen e problemeve te ndryshme inxhinjerike e teknike qe modelohen prej tyre.

2. Ne studim tregohet se sistemet diferenciale jakobiani te cileve ka vlera te veta prane boshtit imagjinar gjate integritit numerik te tyre paraqitin veshtiresi ne drejtim te kohes se llogaritjeve dhe saktesise se rezultatit. Situata qe krijohet eshte e ngjashme me sistemet stiff. Metodatat me qendrueshmeri $A(\alpha)$ jane te padobishme per keto sisteme. Ne qofte se vlerat e veta te jakobianit qendrojne relativisht kostante, atehere nje klase metodash te mbeshketura ne polinomet trigonometrike mund te jene te pershtatshme.

3. Formulimi matematik i problemit qe modelon vibracionet ne mekanizmat e dhembëzuar si nje problem i vlerave te veta dhe zgjidhja numerike e ketij te fundit me metoden qe propozohet ne 2.3 – 2.4 perben nje trajtim me te thjeshte dhe me operativ te problemit ne krahasim me ate qe propozohet ne literature [17], [18], [20].

4. Zgjidhja numerike e problemeve diferenciale te rendeve te larta shoqerohet me veshtiresi te ndryshme. MDF qe ka nje perdorim universal ne zgjidhjen e problemeve diferenciale mund te perdoret per problemet e rendeve te larta por ne keto raste ajo

ballafaqohet me vështiresi të shumta të procedimit algjebrik, pershtatet me vështiresi në situata të ndryshme dhe paraqitet disi e ngurte karshi cilesive të problemit që zgjidhet. Në kapitullin e (III) të këtij punimi behen disa perpjekje për të zbutur vështiresitë e procedimit algjebrik gjatë përdorimit të MDF në problemet e instabilitetit termal.

5. Metoda të tjera numerike mund të përdoren për zgjidhjen e problemeve diferenciale të rendeve të larta, ku shquhen metodat e tipit goditje që kanë si avantazh kryesor përdorimin elastik në situata të ndryshme dhe shfrytëzimin e aparatit të fuqishëm numerik të zgjidhjes së problemit të vlerës fillestare. Në veçanti për ekuacionet lineare apo pjesë-pjesë lineare nxirren metoda mjaft efektive që shfrytëzojnë me së miri cilesitë e problemit që zgjidhet.

6. Metodatat numerike që paraqiten në kapitullin e IV të punimit përbejnë një drejtim alternativ dhe të suksesshëm për zgjidhjen e problemeve të instabilitetit termal. Ndryshe nga MDF këto metoda i transformojnë problemet diferenciale në probleme algjebrike në të cilat vlerat e veta janë zero ose ekstremume funksionesh. Disa rezultate numerike ballafaqohen me ato të literaturës dhe rezultojnë të jenë më të mira.

7. Metoda numerike e trajtuar në 3 seksionet e parë të kapitullit pesë është më e tjeshtë në formulim krahasuar me procedurën e komplikuar algjebrike e prezantuar nga metoda klasike e karakteristikave. Ndërkohë kompleksiteti i këtyre metodave e bën mjaft të vështirë përpilimin e kodit për implementimin e saj. Kështu që përpilimi i kodit dhe implementimi ngelet një detyrë që i kalon caqet e këtij punimi.

8. Në seksionin e fundit të kapitullit të pestë hidhet një ide që kërkon studim të mëtejshëm. Më konkretisht, tentohet të ndërtohen disa funksione spline në tension të cilat kanë karakteristika të mira përsa i përket çështjeve të tilla si qëndrueshmeria dhe konvergenca të metodës për zgjidhjen e disa problemeve numerike për ekuacione kuasilineare të rendit të dytë për ekuacione diferenciale të pjesshme. Këto funksione (trigonometrike) duket të jenë mjaft të përshtatshme për zgjidhjen numerike të problemeve të sipërpërmendura, por që do të jenë objekti i një studimi të mëtejshëm.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Agarwal, R.P – Boundary – value problems for higher – order differential equations, world scientific, Singapore 1986
- [2] Ascher, U.M. etj – Numerical solution of boundary value problems for ODE, Prentice – Hall, 1988
- [3] Baldwin, P. A localized instability in a Benard layer, Applicable Anal.24, 1987
- [4] Balduin, P. Asymptotic estimates of the eigenvalues of a sixth – order boundary – value problem obtained by using global phase – integral methods, Phil.Trans.R. Soc.Lond.A 322, 1987
- [5] Bellen, A. Zennaro,M. Stability properties of interpolants for Runge-Kutta methods, Siam.J.Num. Analysis. Vol 25 No. 2, 1988
- [6] Boutayeb,A. Twizel, E.H. – Finite difference methods for twelfth – order boundary – value problems, J.Comp.Appl.Math.18, 1991
- [7] Twizel, E.H. Boutayeb,A. Numerical methods for the solution of special sixth – order boundary – value problems, Intern.J.Computer Math.45, 1992
- [8] Boutayeb,A. Twizel, E.H. Finite difference methods for solution of eighth – order boundary – value problems, Intern.J.Computer Math.48, 1993.
- [9] Branko, G - On some problems Concerning development and results of the investigations on nonlinear oscillations, tenth international Conference on nonlinear oscillations, Sofia 1985
- [10] Butcher, J.C – An order bound for Runge – Kutta methods, Siam J. Numer. Anal. ,

Vol 12, 1975

[11] Chandrasekhar, S – Hydrodynamic and hydromagnetic Stability, Oxford 1961, Reprinted New York 1981.

[12] Chala, M.M. – Finite difference methods for two – point boundary – value problems – involving Katt, C.P higher – order differential equations, BIT 19, 1979

[13] Doedel, E – Finite – difference methods for nonlinear two – point boundary – value problems, Siam J. Numer. Anal 16, 1979

[14] Esser, H. – Stability inequalities for discrete nonlinear two – point boundary – value problems, Applicable anal.10, 1980

[15] Gear, C.W – Numerical initial value problems in ODE, Prentice Hall 1971

[16] Granas, A. etj – the shooting method for the numerical solution of a class of nonlinear boundary value problems, Siam J.Num. Anal, Vol 16, 1979

[17] Gjika, K. – Probleme të vibracioneve në transimione me rrota të dhëmbëzuara me dhëmbë të drejtë, disertacion, Tiranë 1984

[18] Hanelli, L – Mbi konvergjencën dhe qëndrueshmërinë në problemin e vlerës fillestare të ekuacioneve diferenciale të zakonshme me dy modele zbatimi në mekanikë hidroteknikë, disertacion, Tiranë 1989

[19] Integrimi numerik i sistemeve me lëkundje të madhe, Bul.Sh.N., Tiranë 1990

[20] Hanelli, L. Një metodë numerike e tipit goditje për kërkimin e zgjidhjeve periodike të ekuacioneve diferenciale të zakonshme me zbatim në vibracionet mekanike, Bul.Shk.Nat., Nr 1, Tiranë 1989.

[21] Huang, W. The pseudospectral method for solving Benard type differential eigenproblems, Sloan, D. J.Computer. Physics, 1992

[22] The pseudospectral method for solving differential eigenvalue problems, J. Computer physics, 1992

- [23] Keller, H.B. Approximation methods for nonlinear problems with application to two – point boundary – value problems, Math. Computer. 29, 1975
- [24] Lync, R.E A high – order difference method for differential equations, Math. Computer.34, Rice, J.R 1980
- [25] Twizel, E.H, Numerical method for the solution of special and general sixth – order boundary Boutayeb, A. value problems, Proc. R. Soc. London. A-431, 1990
- [26] Twizel, E.H – Numerical methods for 8-10-12 – order eigenvalue problems arising in thermal Boutayeb, A. instability, Tech.Rep, Brunel, London 1993.
- [27] Voss, D. – A fifth – order exponentially fitted formula, Siam J. Num. Anal, vol 25, Nr.3, 1988.
- [28] Keller, J.B. and Kogelman, S., “Asymptotic Solutions of Initial Value Problems for Nonlinear Partial Diferential Ekuations”, SIAM Journal on Applied Mathematics18, 748-758
- [29] Darmawijoyo, and van Horssen W.T., "On the weakly Damped Vibrations of A String Attached to A Spring-Mass-Dashpot System",2002 to appear in Journal of Vibration and Control.
- [30] Morgul, Rao, B.P., and Conrad, F., "Ön the stabilization of a cable with a tip Mass", IEE Transaction on automatic control 39, no. 10,1994, 2140-2145.
- [31] Krol, M.S., "On a Galerkin – Averaging Method for Weakly nonlinear Wave Equations", Mathematical methods in the Applied Sciences 11,1989, 649-664.
- [32] Van Horssen, W. T. and van der Burg, A. H. P., "On initial-boundary value problems for weakly semi-linear telegraph equations. Asymptotic theory and application" SIAM Journal on Applied Mathematics 48, 1988, 719-736.
- [33] Darmawijoyo , W.T. van Horssen, and Ph. Clément "On a Rayleigh Wave

Equation with Boundary Damping", reports of the Departament of Applied Mathematical Analysis, ISSN 1389-6520 delft 2003.

[34] Van Horssen, W. T., "An asynptotic Theory for a class of initial – Boundary Value Problems for Weakly Nonlinear Wafe Equations with an application to a model of the an application to a model of the Galloping Oscillations of Overhead transmission Lines", Siam Journal on Applied Mathematics 48, 1988, 1227-1243

[35] Boerttjens,G.J. and van Horssen, W.T., "An Asymptotic Theory for A weakly Nonlinear Beam Equation With A QuadraticPeturbation", SIAM Journal on Applied Mathematics 60, 2000, 602-632.

[36]. Jain, MK, Aziz, T: Cubic spline solution of two-point boundary value problems with significant first derivatives. Comput. Methods Appl. Mech. Eng. 39(1), 83-91 (1983)

[37]. Mohanty, RK, Gopal, V: High accuracy arithmetic average type discretization for the solution of two-spacedimensional nonlinear wave equations. Int. J. Model. Simul. Sci. Comput. 3, 1150005 (2012)

[38] Mohanty, RK, Gopal, V: A fourth-order finite difference method based on spline in tension approximation for the solution of one-space dimensional second-order quasi-linear hyperbolic equations. Advances in Difference Equations, <http://www.advancesindifferenceequations.com/content/2013/1/70> 2013:70 (2013)

[39] Naco A, Hanelli L, Huti B: Numerical solution for a wave equation with boundary damping. Aktet. Journal of Institute Alb-Shkenca. **Vol. II**, Nr. 3 (2008).

[40] Naço A, Hanelli L: Studimi matematik i valës lëkundese në kullën e ekuilibrit të një heci dhe probleme te lidhura me të. Libri i përmbledhjeve, Konferenca Kombëtare “Studime te avancuara në Inxhinierinë Matematike, Fizike dhe Kimike“,Universiteti Politeknik – Tiranë, FIM&IF, ALBANIA. (2011).

SHTOJCË A

1. Metoda e goditjes - Llogaritja e potencialit elektrostatik

```
% Ky skedar sebashku me aksesoret e tij zgjidh me % anen e metodes
se goditjes ekuacionin e Laplasit qe % modelon shperndarjen e
potencialit
% elektrostatik mdis 2 sferave metalike koncetrike % dhe grafikun
rezultatet
clear all; close all;
global R1 R2 V1 V2
R1=2; R2=4; V1=220; V2=0;
fplot('zgjidhjateorike',[R1 R2]);
hold on
t=fzero('dif',1);
[tt yy]=ode45('fpotenc',[R1 R2],[V1 t]);
plot(tt,yy(:,1),'r*')

function w=fpotenc(r,u)
w(1)=u(2);
w(2)=-2./r.*u(2);
w=w';

function d=dif(t)
global R1 R2 V1 V2
[tt yy]=ode45('fpotenc',[R1 R2],[V1 t]);
d=yy(end,1)-V2;
```

2. Zgjidhja e modelit jolinear 3.1 me metoden e diferencave te fundme

```
% Programi kryesor - funksioni mdf.m

function y=mdf(a,b,A,B,N,M)

h=(b-a)/(N+1);
```

```

t0=(B-A)/(b-a);

for i=1:N

    y(i)=A+i*h*t0;

end

y=y';

for k=1:M

    x=a+h;

    t=(y(2)-A)/(2*h);

    aa(1)=2+h^2*gy(x,y(1),t);

    bb(1)=-1+(h/2)*dgy(x,y(1),t);

    d(1)=-(2*y(1)-y(2)-A+h^2*g(x,y(1),t));

    for i=2:N-1

        x=a+i*h;

        t=(y(i+1)-y(i-1))/(2*h);

        aa(i)=2+h^2*gy(x,y(i),t);

        bb(i)=-1+(h/2)*dgy(x,y(i),t);

        c(i)=-1-(h/2)*dgy(x,y(i),t);

        d(i)=-(2*y(i)-y(i+1)-y(i-1)+h^2*g(x,y(i),t));

    end


    x=b-h;

    t=(B-y(N-1))/(2*h);

    aa(N)=2+h^2*gy(x,y(N),t);

    c(N)=-1-(h/2)*dgy(x,y(N),t);

    d(N)=-(2*y(N)-y(N-1)-B+h^2*g(x,y(N),t));

    J=zeros(N);

    for i=1:N

        J(i,i)=aa(i);

    end

    for i=1:N-1

```

```

        J(i,i+1)=bb(i);

        J(i+1,i)=c(i);

    end

    y=y-inv(J)*f9(y);

end

function p=f9(y) % Ky funksion llogarit anet e majta te sistemit
(2.10)

a=1;

b=2;

A=2;

B=5/2;

N=9;

h=(b-a)/(N+1);

x=a+h;

p(1)=2*y(1)-y(2)-A+h^2*g(x,y(1),(y(2)-A)/(2*h));

for i=2:N-1

    x=a+i*h;

    p(i)=-y(i-1)+2*y(i)-y(i+1)+h^2*g(x,y(i),(y(i+1)-y(i-1))/(2*h));

end

x=b-h;

p(N)=-y(N-1)+2*y(N)-B+h^2*g(x,y(N),(B-y(N-1))/(2*h));

p=p';

fplot('za',[1 2]); % nderon grafikun e zgjidhjes analitike

hold on

y=[A; y; B];

r=linspace(a,b,N+2);

r=r'

plot(r,y,'r*') % nderon grafikun e zgjidhjes numerike

```

```
function p=g(x,y,t)
p=2*y.^3-6*y-2*x.^3;
```

```
function p=gy(x,y,t)
p=6*y.^2-6;
```

```
function p=dgy(x,y,t)
p=0;
```

```
function y=za(x)
y=x+1./x;
```

3. Zgjidhja e problemit II-B (3.41)-(3.42) me metoden e pershkruar ne 4.1

```
% Programi kryesor - kodi pr8.m

global TT SA p p2 SS ee8 ee6 Rmin Rmax;
ee8=eye(8); ee6=eye(6);
for k=1:5

    TI(k)=1.681*10^(3+k);

end;
AImín=[2.2699 2.593 3.709 5.697 8.625];
AImax=AImín+2*1e-4;
SImin=[101.380 307.880 816.745 1929 4325];
SImax=SImin+[0.020 0.025 0.60 2 6];
RImín=[1385 1693 3438 11019 43673];
RImax=RImín+[6 2 3 2 8];
var=input('VAR=');
for k=1:5
```

```

if var==k TT=TI(k); Amin=AImin(k); Amax=AImax(k);

    Smin=SImin(k); Smax=SImax(k);

    Rmin=RImin(k); Rmax=RImax(k);

    end; end;

SS=[Smin,Smax];

p=0.025; p2=p+2; % Chandr. p 120;

AFIN=fmin('RSA',Amin,Amax)

RFIN=RSA(AFIN)

SFIN=SA

```

```

function cn1=cond1(R)

global ee8 A2 A4 PE PF F E;

E=PE+R*A2; F=PF-R*A4;

for i=2:2:8

    [T,Y]=ode45('ek8',[0,1],ee8(i,:));

    y(:,i)=[Y(end,:)]';

end;

delta=y(:,2:2:8);

cn1=-cond(delta)

function cn2=cond2(R)

global ee6 A2 PF1 p2 F1;

F1=(PF1+R*A2)/p2;

for i=2:2:6

    [T,Y]=ode45('ek6',[0,1],ee6(i,:));

    y(:,i)=[Y(end,:)]';

end;

delta=y(:,2:2:6);

cn2=-cond(delta)

%-----

```

```

function di=dif(S)

global p p2 Rmin Rmax A2 A4 A6 A8 PC PE1 PPE R1 R2 di...

    PE PF C PF1 E1 C1 S2 Sp;

S2=S^2; Sp=(2*p+1)*S2;

PE=PPE+2*A2*Sp; PF=A8-A4*Sp;

C=PC-Sp;

PF1=-A6*p2+A2*S2*p;

E1=(PE1-p*S2)/p2;

R1=fmin('cond1',Rmin,Rmax);

R2=fmin('cond2',Rmin,Rmax);

di=R1-R2;


function RA=RSA(A);

global TT SA p p2 SS A2 A4 A6 A8 PC C1 PE1 PPE R1 R2 B di;

A2=A^2; A4=A2^2; A6=A2*A4; A8=A2*A6;

PC=6*A4+TT; C1=-3*A2; PE1=3*A4*p2+p*TT; PPE=-4*A6-A2*TT;

B=-4*A2;

    SA=fzero('dif',SS,1e-6)

    dif(SA)

di

RA=(R1+R2)/2


%-----

function fu6=ek6(T,Z);

global F1 E1 C1;

fu6=zeros(6,1);

for i=1:5 fu6(i)=Z(i+1);

```

```
    end;

    z6=-F1*Z(1)-E1*Z(3)-C1*Z(5);

    fu6(6)=z6;

function fu8=ek8(T,Z)

global B C E F;

fu8=zeros(8,1);

for i=1:7 fu8(i)=Z(i+1);

    end;

    z8=-F*Z(1)-E*Z(3)-C*Z(5)-B*Z(7);

    fu8(8)=z8;
```


SHTOJCË B

1. Funksionet spline në tension

Një metodë alternative për zgjidhjen e problemit (5.4)-(5.8) propozohet nga Mohanty [38] e cila aplikohet për zgjidhjen numerike të një ekuacioni kuasilinear hiperbolik të rendit të dytë me derivate të pjesshme dhe bazohet në përafrimin me spline në tension në drejtimin ox dhe diferencat e fundme të qëndëruara në drejtimin ot . Më konkretisht, konsiderohet ekuacioni

$$u_{tt} = A(x, t, u)u_{xx} + f(x, t, u, u_x, u_t) \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (\text{B.1})$$

me kushte fillestare

$$u(x, 0) = a(x), \quad u_t(x, 0) = b(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (\text{B.2})$$

dhe kushte kufitare

$$u(0, t) = p_0(t), \quad u(1, t) = p_1(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{B.3})$$

Funksionet spline në tension që ndërtohen janë

$$S^j(x) = a_i^j + b_i^j(x - x_i) + c_i^j(e^{\omega(x-x_i)} - e^{\omega(x-x_i)}) + d_i^j(e^{\omega(x-x_i)} + e^{\omega(x-x_i)}), \quad i = \overline{0, N+1}$$

ku $x \in [x_i, x_{i+1}]$, $S^j(x) \in C^2[0;1]$ dhe që interpolon funksionin $u(x, t)$ në pikat nyje

(x_i, t_j) të rrjetës në nivelin j të kohës. Shënojmë me

$$M_i^j = S_j''(x_i), \quad i = \overline{0, N+1}, j = \overline{1, J}$$

Shënojmë

$$S_j(x_i) = U_i^j, \quad S_j(x_{i+1}) = U_{i+1}^j, \quad M_i^j = S_j''(x_i), \quad M_{i+1}^j = S_j''(x_{i+1})$$

Vlerat e parametrave $a_i^j, b_i^j, c_i^j, d_i^j$ përcaktohen si

$$a_i^j = U_i^j - \frac{M_i^j}{\omega^2}, \quad b_i^j = \frac{U_i^j - U_{i+1}^j}{h} + \frac{M_i^j - M_{i+1}^j}{\omega\theta}$$

$$c_i^j = \frac{2M_{i+1}^j - (e^\theta + e^{-\theta})M_i^j}{2\omega^2(e^\theta - e^{-\theta})}, \quad d_i^j = \frac{M_i^j}{2\omega^2}$$

Duke shfrytëzuar vazhdueshmërinë e derivatit të parë (pra limitet e njëanshme të derivatit në pikat nyje), pra $S'^j(x_i -) = S'^j(x_i +)$, rezultojnë marrëdhëniet e mëposhtme për $i = \overline{0, N-1}$

$$S'^j(x_i +) = -\omega^2 2d_i^j = b_{i-1}^j + \omega c_{i-1}^j (e^\theta + e^{-\theta}) + \omega d_{i-1}^j (e^\theta - e^{-\theta}) = S'^j(x_i -)$$

2.Kushte qëndrueshmërie

Nga relacioni i fundit marrim formën e thjeshtuar

$$\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} = \alpha M_{i+1}^j + 2\beta M_i^j + \alpha M_{i-1}^j \quad (\text{B.5})$$

ku

$$\alpha = \frac{1}{\theta^2} \left(1 - \frac{2\theta}{e^\theta - e^{-\theta}} \right), \quad \beta = \frac{1}{\theta^2} \left(\frac{\theta(e^\theta + e^{-\theta})}{e^\theta - e^{-\theta}} - 1 \right), \quad \theta = \omega h.$$

Kur $\omega \rightarrow 0$, pra $\theta \rightarrow 0$, atëherë $(\alpha, \beta) \rightarrow \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ dhe relacioni (B.5) reduktohet në një

relacion spline kubik të zakonshëm

$$U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j = \frac{h^2}{6} (M_{i+1}^j + 2M_i^j + M_{i-1}^j)$$

Nga (B.5), marrim kushtin e qëndrueshmërisë

$$\alpha + 2\beta + \alpha = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{\theta}{2}$$

Ky ekuacion ka një numër të fundëm rrënjësh, por duke e zgjidhur grafikisht marrim vlerën më të vogël positive $\theta = 0.001$.

$$m_i^j = S'^j(x_i) = U_{xi}^j = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} - h[\alpha M_{i+1}^j + \beta M_i^j], \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (\text{B.6})$$

Dhe duke zëvendësuar h me $-h$ marrim

$$m_i^j = S'^j(x_i) = U_{xi}^j = \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} + h[\beta M_i^j + \alpha M_{i-1}^j], \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (\text{B.7})$$

Nga kombinimi i dy formulave të fundit marrim

$$m_i^j = S'^j(x_i) = U_{xi}^j = \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h} - \frac{\alpha h}{2}[M_{i+1}^j - M_{i-1}^j], \quad x \in [x_{i-1}, x_i] \quad (\text{B.8})$$

Njëkohësisht, nga (B.6) dhe (B.7) kemi

$$m_{i+1}^j = S'^j(x_{i+1}) = U_{xi+1}^j = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + h[\beta M_{i+1}^j + \alpha M_i^j], \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (\text{B.9})$$

$$m_{i-1}^j = S'^j(x_{i-1}) = U_{xi-1}^j = \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} - h[\beta M_{i+1}^j + \alpha M_i^j], \quad x \in [x_i, x_{i+1}] \quad (\text{B.10})$$

Vërejmë se relacionet (B.4), (B.8), (B.9) dhe (B.10) janë veti të rëndësishme të funksioneve spline kubike jopolinomialë në tension $S^j(x)$.

3. Metoda e diferencave të fundme bazuar në përafrimin e spline në tension

Le të jepet ekuacioni hiperbolik jolinear me derivate të pjesshme me dy ndryshore

$$u_{tt} = A(x, t)u_{xx} + f(x, t, u, u_x, u_t) \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (\text{B.11})$$

Me kushte fillestare dhe kufitare si (B.2) dhe (B.3). Bëjmë diskretizimin e zonës

$[0, 1] \times [0, +\infty[$ në rrjetën $(N+1) \times J$, me hap $h = 1/(N+1)$ në drejtimin ox dhe me hap

$k > 0$ në drejtimin e kohës ot . Shënojmë me $\lambda = (k/h) > 0$ dhe e quajmë parametër të

rrjetës. Nyjet e rrjetës janë pikat

$$(x_i, t_j) = (ih, jk), \quad i = \overline{0, N+1}, \quad j = \overline{0, J}.$$

Simbolet u_i^j dhe U_i^j përdoren për përafrimin diskret dhe vlerën e saktë të funksionit

$u(x, t)$ në nyjet e rrjetës. Njëkohësisht shënojmë për thjeshtësi me $A_i^j = A(x_i, t_j)$,

$A_{xi}^j = A_x(x_i, t_j)$, e kështu me radhë në pikat nyje të rrjetës. Le të konsiderojmë

përafrimet e mëposhtme

$$\bar{U}_{ti}^j = \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2k} \quad (\text{B.1.2a})$$

$$\bar{U}_{ti\pm 1}^j = \frac{U_{i\pm 1}^{j+1} - U_{i\pm 1}^{j-1}}{2k} \quad (\text{B.12b})$$

$$\bar{U}_{tti}^j = \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{k^2} \quad (\text{B.12c})$$

$$\bar{U}_{tti\pm 1}^j = \frac{U_{i\pm 1}^{j+1} - 2U_{i\pm 1}^j + U_{i\pm 1}^{j-1}}{k^2} \quad (\text{B.12d})$$

$$\bar{U}_{xi}^j = \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2h} \quad (\text{B.13a})$$

$$\bar{U}_{xi\pm 1}^j = \frac{\pm 3U_{i\pm 1}^j \mp U_i^j \pm U_{i-1}^j}{2h} \quad (\text{B.13b})$$

$$\bar{F}_i^j = f\left(x_i, t_j, U_i^j, \bar{U}_{xi}^j, \bar{U}_{ti}^j\right) \quad (\text{B.14a})$$

$$\bar{F}_{i\pm 1}^j = f\left(x_{i\pm 1}, t_j, U_{i\pm 1}^j, \bar{U}_{xi\pm 1}^j, \bar{U}_{ti\pm 1}^j\right) \quad (\text{B.14b})$$

Meqënëse vlerat e derivative të $S^j(x)$ përcaktuar nga (B.4), (B.8), (B.9) dhe (B.10)

nuk janë të njohura në çdo nyje të rrjetës, përdorim përafrimin e mëposhtëm për

derivatat e tij. Pra

$$\bar{M}_i^j = \frac{1}{A_i^j} \left(\bar{U}_{ti}^j - \bar{F}_i^j \right) \quad (\text{B.15a})$$

$$\bar{M}_{i+1}^j = \frac{1}{A_{i+1}^j} \left(\bar{U}_{ti+1}^j - \bar{F}_{i+1}^j \right) \quad (\text{B.15b})$$

$$\overline{M}_{i-1}^j = \frac{1}{A_{i-1}^j} \left(\overline{U}_{ti-1}^j - \overline{F}_{i-1}^j \right) \quad (\text{B.15c})$$

$$\widehat{m}_i^j = \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h} - \frac{\alpha h}{2} [M_{i+1}^j - M_{i-1}^j], \quad (\text{B.16a})$$

$$\widehat{m}_{i+1}^j = \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} + h [\beta M_{i+1}^j + \alpha M_i^j], \quad (\text{B.16b})$$

$$\widehat{m}_{i-1}^j = \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} - h [\beta M_{i-1}^j + \alpha M_i^j], \quad (\text{B.16c})$$

përcaktojmë në vazhdim përafrimet

$$\widehat{F}_i^j = f \left(x_i, t_j, U_i^j, \widehat{m}_i^j, \overline{U}_{ti}^j \right) \quad (\text{B.17a})$$

$$\widehat{F}_{i+1}^j = f \left(x_{i+1}, t_j, U_{i+1}^j, \widehat{m}_{i+1}^j, \overline{U}_{ti+1}^j \right) \quad (\text{B.17b})$$

$$\widehat{F}_{i-1}^j = f \left(x_{i-1}, t_j, U_{i-1}^j, \widehat{m}_{i-1}^j, \overline{U}_{ti-1}^j \right) \quad (\text{B.17c})$$

në të cilin përdorim funksionin spline në tension (3.7a), $U_i^j = S^j(x_i)$, përafrimin e derivative të para përcaktuar nga (B.16a)-(B.16c) në drejtimin ox dhe përafrimin e derivative në lidhje me kohën me diferenca të fundme të qëndëruara përcaktuar nga (B.12a)-(B.12d) në drejtimin ot .

Në vazhdim, në çdo nyje të rrjetës, ekuacioni diferencial (B.1) diskretizohet si

$$L_1 \left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j \right) = \frac{k^2}{2} \left[R_1 \overline{U}_{ti+1}^j + R_2 \overline{U}_{ti-1}^j + 10\overline{U}_{ti}^j \right] - \frac{k^2}{2} \left[R_1 \widehat{G}_{i+1}^j + R_2 \widehat{G}_{i-1}^j + 10\widehat{G}_i^j \right] + \widehat{T}_i^j$$

$$i = \overline{1, N}, \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{B.18})$$

ku

$$L_1 = 6\lambda^2 \left[A_i^j - \frac{h^2}{6} \left(\frac{A_{xi}^j}{A_i^j} \right) A_{xi}^j + \frac{h^2}{12} A_{xxi}^j \right], \quad R_1 = 1 - \frac{hA_{xi}^j}{A_i^j}, \quad R_2 = 1 + \frac{hA_{xi}^j}{A_i^j}$$

dhe gabimi lokal i ndërprerjes është

$$\hat{T}_i^j = O(k^4 + k^4 h^2 + k^2 h^4). \quad (\text{B.19})$$

4. Nxjerrja e metodës

Duke u mbështëtur tek ideja e Jain et al. [36,37] ne përdorim përafrimin me spline në tension në drejtimin ox dhe diferencat e fundme të qëndërzura në drejtimin ot .

Në nyjet e rrjetës, shënojmë

$$U_{ab} = \left(\frac{\partial^{a+b} U}{\partial x^a \partial t^b} \right)_i^j, \quad A_{ab} = \left(\frac{\partial^{a+b} A}{\partial x^a \partial t^b} \right)_i^j, \quad \eta_i^j = \left(\frac{\partial f}{\partial U_x} \right)_i^j. \quad (\text{B.20})$$

Në pikat nyje të rrjetës mund të shkruajmë ekuacionin diferencial (B.11) si

$$U_{tti}^j - A_i^j U_{xxi}^j = f(x_i, t_j, U_i^j, U_{xi}^j, U_{ti}^j) \equiv F_i^j \quad (\text{B.21})$$

Duke përdorur zbërthimin e Taylor, marrim

$$\begin{aligned} L_1(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j) &= \frac{k^2}{2} [R_1 \bar{U}_{tti+1}^j + R_2 \bar{U}_{tti-1}^j + 10\bar{U}_{tti}^j] - \frac{k^2}{2} [R_1 F_{i+1}^j + R_2 F_{i-1}^j + 10F_i^j] + \\ &+ O(k^4 + k^4 h^2 + k^2 h^4) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Duke thjeshtuar më shumë formulat (B.12a)-(B.13b), marrim

$$\bar{U}_{ti}^j = U_{ti}^j + O(k^2) \quad (\text{B.23a})$$

$$\bar{U}_{ti\pm 1}^j = U_{i\pm 1}^j + O(k^2 \pm k^2 h) \quad (\text{B.23b})$$

$$\bar{U}_{tti}^j = U_{tti}^j + O(k^2)$$

$$(\text{B.23c}) \bar{U}_{tti\pm 1}^j = U_{ti\pm 1}^j + O(k^2 \pm k^2 h)$$

$$(\text{B.23d}) \bar{U}_{xi}^j = U_{xi}^j + \frac{h^2}{6} U_{30} + O(h^4)$$

$$(\text{B.24a})$$

$$\bar{U}_{xi\pm 1}^j = U_{xi\pm 1}^j - \frac{h^2}{3} U_{30} \pm O(h^3) \quad (\text{B.24b})$$

Duke u bazuar në përafrimet (B.23a) dhe (B.24b), nga (B.14a), rezulton

$$\begin{aligned}
 \bar{F}_i^j &= f\left(x_i, t_j, U_i^j, U_{xi}^j + \frac{h^2}{6}U_{30} + O(h^4), U_{ti}^j + O(k^2)\right) \\
 &= f\left(x_i, t_j, U_i^j, U_{xi}^j, U_{ti}^j\right) + \frac{h^2}{6}U_{30}\eta_i^j + O(k^2 + h^4) \\
 &= F_i^j + \frac{h^2}{6}U_{30}\eta_i^j + O(k^2 + h^4)
 \end{aligned} \tag{B.25a}$$

Ngjashmërisht,

$$\bar{F}_{i+1}^j = F_{i+1}^j - \frac{h^2}{3}U_{30}\eta_i^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.25b}$$

$$\bar{F}_{i-1}^j = F_{i-1}^j - \frac{h^2}{3}U_{30}\eta_i^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.25c}$$

Duke përdorur përafrimet (B.23a)-(B.24b), (B.25a)-(B.25c) dhe duke thjeshtëzuar (B.15a), rezulton se

$$\hat{m}_i^j = m_i^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.26a}$$

Ngjashmërisht,

$$\hat{m}_{i+1}^j = m_{i+1}^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.26b}$$

$$\hat{m}_{i-1}^j = m_{i-1}^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.26c}$$

Me ndihmën e përafrimeve (B.23a) dhe (B.26a), nga (B.17a), nxjerrim se

$$\begin{aligned}
 \hat{F}_i^j &= f\left(x_i, t_j, U_i^j, m_i^j + O(k^2 + h^4), U_{ti}^j + O(k^2)\right) \\
 &= f\left(x_i, t_j, U_i^j, m_i^j, U_{ti}^j\right) + O(k^2 + h^4) \\
 &= F_i^j + O(k^2 + h^4)
 \end{aligned} \tag{B.27a}$$

Ngjashmërisht,

$$\hat{F}_{i+1}^j = F_{i+1}^j + O(k^2 + h^4) \tag{B.27b}$$

$$\widehat{F}_{i-1}^j = F_{i-1}^j + O(k^2 + h^4) \quad (\text{B.27c})$$

Duke përdorur përafrimet (B.23a)-(B.23d) dhe (B.27a)-(B.27c), nga (B.18) dhe (B.22),

del se gabimi lokal i ndërprerjes është $\widehat{T}_i^j = O(k^4 + k^4 h^2 + k^2 h^4)$.