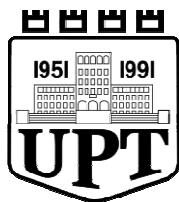


KRISANTHI S. NAKA

*KONTRIBUT NË STUDIMIN
E TEORISË
SË
HIPERSTRUKTURAVE*

DISERTACION



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE & INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

Disertacion

i

paraqitur nga

Znj. KRISANTHI STAVRI NAKA

për marrjen e gradës shkencore

D O K T O R

Specialiteti : MATEMATIKË

**Tema : *Kontribut në studimin e Teorisë së
Hiperstrukturave***

Udhëheqës Shkencor : Prof.dr. Kostaq Hila

Mbrojtur më dt. 25.09.2014 para jurisë :

- | | |
|----------------------------------|---------|
| 1. Prof. asoc. dr. Shkëlqim Kuka | Kryetar |
| 2. Prof. asoc. dr. Jani Dine | Anëtar |
| 3. Prof.dr. Kristaq Filipi | Anëtar |
| 4. Prof. dr. Kristaq Kikina | Anëtar |
| 5. Prof. dr. Petro Karajani | Anëtar |

Mirënjohje

Do të dëshiroja fillimisht të shpreh mirënjohjen dhe falënderimet e mia të veçanta ndaj udhëheqësit tim shkencor, *Prof.dr. Kostaq Hila*, për mbështetjen, udhëheqjen dhe bashkëpunimin e tij të frytshëm gjatë gjithë kohës së këtij kërkimi dhe përgatitjes së këtij disertacioni. Gjithashtu, do të dëshiroja të shprehja falënderimet dhe mirënjohjen time ndaj pedagogëve të Departamentit të Inxhinierisë Matematike të Universitetit Politeknik për mbështetjen gjatë procesit të kryerjes së doktoratës pranë këtij departamenti.

Gjithashtu, një falënderim të veçantë, e rezervoj për komisionin e nderuar të mbrojtjes së këtij disertacioni.

Një falënderim e mirënjohje speciale i duhet dhënë të gjithë kolegëve të mi të Departamentit të Matematikës & Informatikës, të Universitetit të Gjirokastrës, për mbështetjen, inkurajimin dhe bashkëveprimin me të gjitha mënyrat gjatë gjithë kohës së përgatitjes së këtij disertacioni.

Së fundi, do të dëshiroja të falënderoja gjithë miqtë dhe në mënyrë të veçantë familjen time, për durimin, mbështetjen dhe mirëkuptimin e tyre deri në përfundim të këtij disertacioni.

Kontribut në studimin e Teorisë së Hiperstrukturave

Kandidati për Doktor : **Krisanthi S. Naka**

Udhëheqës Shkencor : **Prof.dr. Kostaq Hila**

Abstrakt

Teorja e Hiperstrukturave njihet fillimet e saj në vitin 1934, kur matematikieni francez Marty në Kongresin e 8-të të Matematikanëve Skandinavë, prezantoi konceptin e hiperveprimit, dha përkufizimin e hipergrupit dhe ilustroi me disa zbatime dhe tregoi dobinë e tij në studimin e grupeve, funksioneve algjebrike dhe thyesave racionale. Qysh prej atëherë kjo teori filloi të zhvillohet dhe të studiohet gjerësisht si një teori e konsoliduar nga shumë autorë nga vende të ndryshme të botës duke paraqitur interes jo vetëm nga pikëpamja teorike por sidomos nga ajo praktike e zbatimeve të saj në mjaft disiplina të matematikës së pastër dhe asaj të aplikuar dhe të fushave të tjera jashtë matematikës. Por periudha më e shkëlqyer e studimit të hiperstrukturave është rreth viteve 70' kryesisht në Europë, Azi, Amerikë, Australi. K. Hila etj. me një sërë artikujsh të botuar këto pesë vitet e fundit në periodikë të njohur ndërkombëtarë, ka kontribuar në futjen edhe të Shqipërisë në hartën e vendeve që kontribuojnë sot në këtë teori.

Rezultatet e këtij punimi, të cilat janë botuar në formën e një sërë artikujve shkencore në periodikë të njohur ndërkombëtarë si dhe janë referuar në disa konferenca ndërkombëtare, përbëjnë një kontribut të mëtijshëm të rëndësishëm në studimin e teorisë së hiperstrukturave, kryesisht të gjysmëhipergroupeve, gjysmëhipergroupeve ternare dhe atyre m -are.

Ky punim ka si qëllim kryesor në përgjithësi studimin dhe karakterizimin e hiperideal strukturës së gjysmëhipergroupeve, gjysmëhipergroupeve ternare dhe përgjithësimeve të tyre, dhe përbën një kontribut të mëtijshëm në thellimin dhe zgjerimin e teorisë strukturale të tyre.

Studimi i strukturës algjebrike të një teorie matematike ka rezultuar efektiv në qënien më eficiente të aplikimeve në shkenca të ndryshme. Ky është një motivim i natyrshëm për ne për të studiuar zbatimin e teorisë së bashkësive fuzzy dhe teorisë së bashkësive soft në studimin e strukturës së hiperstrukturave, për këtë qëllim, një kapitull i veçantë i kushtohet këtyre zbatimeve.

Punimi është i organizuar në 6 Kapituj dhe 44 seksione.

Në kapitullin e parë, prezantohen disa koncepte bazë mbi të cilat ndërtohet teoria e hiperstrukturave dhe të cilat përdoren gjatë gjithë punimit si dhe bëhen të qarta dhe motivimet kryesore të studimit të kësaj teorie. Gjithashtu, bëhet dhe një përshkrim retrospektiv i historisë së teorisë së hiperstrukturave dhe zhvillimeve të saj.

Në kapitullin e dytë, merremi me një klasë të hiperstrukturave algjebrike të quajtura gjysmëhipergroupe, të cilat janë një përgjithësim i gjysmëgrupeve. Gjysmëhipergrupet dhe

përgjithësime të tyre janë studiuar gjerësisht nga disa autorë. Në këtë kapitull ne vazhdojmë kontributin tonë në studimin e hiperideal strukturës së gjysmëhipergroupeve, duke prezantuar disa rezultate të tjera në to nëpërmjet karakterizimeve me anë të disa llojeve hiperidealesh, kuazi-hiperidealet dhe përgjithësime të tyre. Konkretisht:

- prezantojmë hiperradikalin e pastër të një hiperideali në një gjysmëhipergруп me element zero. Për këtë qëllim përcaktojmë hiperidealet e pastra, gjysmë të pastra dhe hiperideale të llojeve të tjera të ngjashme dhe vërtetojmë disa prej vetive bazë të tyre në gjysmëhipergroupe.

- përgjithësojmë konceptin e kuazi-idealeve duke prezantuar konceptin e kuazi-hiperidealit në gjysmëhipergрупet dhe për më tepër, prezantojmë konceptin e një (m, n) -kuazi-hiperideali, të hiperidealit n -të djathtë, m -të majtë në gjysmëhipergрупet dhe studiojmë marrëdhëniet ndërmjet tyre; përftojmë karakterizime të ndryshme lidhur me veti të ndryshme të (m, n) -kuazi-hiperidealeve, (m, n) -kuazi-hiperidealeve minimale, hiperidealeve m -të majta minimale, hiperidealeve n -të djathta minimale dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet tyre. Gjithashtu, janë studiuar disa veti të prerjes dhe karakterizime të (m, n) -kuazi-hiperidealeve të gjysmëhipergroupeve dhe gjysmëhipergroupeve të rregullt. Në vazhdim janë përkufizuar gjysmëhipergрупet m -të thjeshta të majta, n -të thjeshta të djathta dhe (m, n) -kuazi-të thjeshta dhe janë shqyrtuar disa veti të tyre.

Në kapitullin e tretë, duke u mbështetur në disa rezultate të përftuara nga disa autorë, ne kemi përftuar disa rezultate të tjera që lidhen me studimin e hiperideal strukturës së gjysmëhipergroupeve ternare duke studiuar disa klasa të gjysmëhipergroupeve ternare nëpërmjet disa klasave të hiperidealeve. Konkretisht:

- prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergрупet ternare të thjeshta të majta, të thjeshtë lateral, $(0-)$ të thjeshta të majta dhe $(0-)$ të thjeshtë lateral. Disa veti të tyre studiohen nëpërmjet hiperidealeve të majta dhe lateral.

- japim disa veti të hiperidealeve të majta $(0-)$ minimale dhe lateral $(0-)$ minimale të gjysmëhipergroupeve ternare dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperidealeve të majta $(0-)$ minimale dhe lateral $(0-)$ minimal dhe gjysmëhipergroupeve ternare $(0-)$ të thjeshta të majta dhe $(0-)$ të thjeshtë lateral.

- japim disa veti të hiperidealeve lateral dhe të majta maksimale të gjysmëhipergroupeve ternare dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperidealeve lateral dhe të majta maksimale dhe bashkimit të gjithë hiperidealeve lateral dhe të majta të mirëfillta (jzero) në gjysmëhipergрупet ternare.

- prezantojmë konceptet e hiperidealeve prim të pastra dhe pastërtisht prim dhe studjojmë vetitë e tyre në gjysmëhipergруппet ternare dhe gjysmëhipergруппet ternare dobësisht të rregullta.

- koncepti i hiperidealit dobësisht të pastër të gjysmëhipergруппit ternar prezantohet si përgjithësim i hiperidealit të dyanshëm të pastër dhe disa veti të tij janë shqyrtuar.

- merremi me gjysmëhipergруппin ternar (H, f) , që është një gjysmëhipergрупп ternar me 0, i tillë që $f(H, H, H) = H$. Bashkësia e gjithë hiperidealeve pastërtisht prim të mirëfilltë të një gjysmëhipergруппi ternar me zero është topologjizuar.

- prezantojmë dhe karakterizojmë hiperidealet prim dhe hiperidealet e majta prim në gjysmëhipergруппet ternare. Gjithashtu, janë shqyrtuar disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptet e hiperfiltrave dhe kongruencës hipergjysmëlatisë të gjysmëhipergroupeve ternare. Ne japim disa karakteristika të hiperfiltrave në gjysmëhipergрупet ternare. Gjithashtu, shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperfiltrave dhe hiperidealeve prim dhe kongruencës hipergjysmëlatisë në gjysmëhipergрупet ternare.

- karakterizojmë hiperidealet gjysmëprim dhe hiperidealet e majta gjysmëprim në gjysmëhipergрупet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë dhe karakterizojmë hiperidealet e majta irreducible në gjysmëhipergрупet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptin e zgjerimit të hiperidealeve në gjysmëhipergрупet ternare dhe karakterizojmë vetitë e zgjerimit të hiperidealeve në gjysmëhipergрупet ternare.

Në Kapitullin e katërt, karakterizojmë gjysmëhipergрупet ternare nëpërmjet klasave të ndryshme të kuazi-hiperidealeve dhe bi-hiperidealeve. Konkretisht:

- prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealeve në gjysmëhipergрупet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealit minimal në gjysmëhipergрупet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve në gjysmëhipergрупet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve minimale në gjysmëhipergрупet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve të përgjithësuara në gjysmëhipergрупet ternare dhe vetitë e disa llojeve të tyre (irreducible, fortësisht irreducible etj.) janë studiuar dhe një sërë rezultatesh të përfuara nga disa autorë në gjysmëgrupet ternare mund të shihen si rrjedhim i rezultateve tona.

- prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealeve të përgjithësuara në gjysmëhipergрупet ternare, domethënë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealeve duke shtrirë konceptin e kuazi-hiperidealeve në gjysmëhipergрупet të trajtuar në §2.2 dhe vërtetojmë disa rezultate në lidhje me to.

- studiojmë konceptin e kuazi-hiperidealit minimal të përgjithësuar ose $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealit minimal të një gjysmëhipergрупi ternar H . Një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q i një gjysmëhipergрупi ternar H quhet $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal minimal (minimal $(m, (p, q), n)$ -quasi-hyperideal) i H , në qoftë se Q nuk përmban në mënyrë rigoroze asnjë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal të H . Në mënyrë të ngjashme, përcaktojmë hiperidealin m -të djathtë minimal, hiperidealin (p, q) -lateral minimal dhe hiperidealin n -të majtë minimal të një gjysmëhipergрупi ternar. Gjithashtu, prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergрупin ternar të thjeshtë n -të majtë (the n -left simple ternary semihypergroup), gjysmëhipergрупin ternar të thjeshtë (p, q) -lateral ((p, q) -lateral simple ternary semihypergroup), gjysmëhipergрупin ternar të thjeshtë m -të djathtë (m -right simple ternary semihypergroup). Disa veti të tyre shqyrtohen nëpërmjet hiperidealeve n -të majta, (p, q) -lateral dhe m -të djathta.

- përkufizojmë bi-hiperidealet e përgjithësuara në një gjysmëhipergrup ternar, domethënë shqyrtojmë $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperidealet dhe vetitë e tyre.

- prezantojmë konceptin e bi-hiperidealit minimal të përgjithësuar ose $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperidealit minimal në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë veti të tyre.

Në Kapitullin e pestë, studiohet koncepti i rregullsisë së gjysmëhipergrupeve ternare dhe përgjithësohet ajo në hiperstrukturat m -are duke shtrirë dhe përgjithësuar këtë koncept të studiuar në disa struktura algjebrike. Konkretisht:

- ne përgjithësojmë konceptin e rregullsisë në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë disa veti të gjysmëhipergrupeve ternare të rregullta dhe i karakterizojmë ato nëpërmjet llojeve të ndryshme të hiperidealeve të gjysmëhipergrupeve ternare.

- studiojmë disa veti të gjysmëhipergrupeve ternare plotësisht të rregullta dhe intra të rregullta dhe i karakterizojmë ato nëpërmjet llojeve të ndryshme të hiperidealeve të gjysmëhipergrupeve ternare.

- përgjithësojmë konceptin e rregullsisë në hipersistemet algjebrike duke dhënë një përgjithësim të unifikuar të karakterizimeve të Kovacs, Iseki dhe Lajos etj. Gjithashtu, përgjithësojmë konceptin e idealit duke futur konceptin e j -hiperidealit dhe të hiperidealit të një hipersistemi algjebrik. Rezulton që përshkrimi i rregullsisë nëpërmjet hiperidealeve është një çështje e brendshme e hiperveprimeve shoqërimtare në përgjithësi. Teorema kryesore përgjithëson në hipersistemet algjebrike disa rezultate që kanë vend në gjysmëgrupet dhe unazat e rregullta dhe shpreh një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm me anë të hiperidealeve kryesore. Për më tepër, janë përfutur dy teorema të tjera: njëra ka të bëjë me një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm që një hipersistem algjebrik ndërrimtar, shoqërimtar të jetë i rregullt; tjetra ka të bëjë me elementet nilpotent në një hipersistem algjebrik.

Në Kapitullin e gjashtë, merremi me zbatimin e teorisë së bashkësive fuzzy dhe teorisë së bashkësive soft në gjysmëhipergrupet ternare dhe në ato m -are nëpërmjet klasave të ndryshme përkatësisht të hiperidealeve fuzzy dhe soft. Konkretisht:

- studiojmë gjysmëhipergrupet ternare nëpërmjet hiperidealeve fuzzy duke fuzzyfikuar disa rezultate të përfutura për hiperidealet në gjysmëhipergrupet ternare në kapitullin e kaluar; prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të hiperidealeve fuzzy siç janë ato të hiperidealeve fuzzy të pastra, fuzzy dobësisht të pastra në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre. Ne identifikojmë ato gjysmëhipergrupe ternare për të cilat çdo hiperideal fuzzy është idempotent. Gjithashtu, karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare për të cilat çdo hiperideal i dyanshëm fuzzy është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë.

- prezantojmë konceptin e bi-hiperidealit fuzzy në gjysmëgrupet ternare dhe përfutur disa veti të tyre.

- prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të bi-hiperidealeve fuzzy siç janë bi-hiperidealet fuzzy prim, gjysmëprim dhe fortësisht prim në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

- prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të tjera të bi-hiperidealeve fuzzy siç janë bi-hiperidealet fuzzy irreducible dhe fortësisht irreducible në gjysmëhipergrupet ternare dhe

shqyrtojmë disa veti të tyre. Hapësira e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të mirëfilltë fortësisht prim në një gjysmëhipergrup ternar është topologjizuar. Ne karakterizojmë ato gjysmëhipergroupe ternare për të cilat çdo bi-hiperideal është fortësisht irreducible dhe gjithashtu, ato në të cilat çdo bi-hiperideal është fortësisht prim. Në fakt, vërtetohet se në rastin e bashkësisë së bi-hiperidealeve fuzzy tërësisht të renditur të një gjysmëhipergrupi H , konceptet e bi-hiperidealeve fuzzy prim irreducible dhe bi-hiperidealeve fuzzy prim fortësisht irreducible përputhen.

- prezantojmë dhe iniciojmë studimin e gjysmëhipergroupeve ternare soft duke përdorur TBS. Konceptet e gjysmëhipergroupeve ternare soft, nëngjysmëhipergroupeve ternare soft, hiperidealet e majta (të djathta, lateral) soft, hiperidealet soft, kuazi-hiperidealet dhe bi-hiperidealet soft janë prezantuar dhe janë studiuar vetitë e tyre.

- prezantojmë dhe iniciojmë studimin e gjysmëhipergroupeve m -are soft duke përdorur TBS. Konceptet e gjysmëhipergroupeve m -are soft, nëngjysmëhipergroupeve m -are soft, hiperidealet e majta (të djathta, lateral) soft, hiperidealet soft, kuazi-hiperidealet dhe bi-hiperidealet soft janë prezantuar dhe janë studiuar vetitë e tyre.

- studiojmë nënhiperhapësirat e një hapësire hipervektoriale prezantuar nga Scafati Tallini, duke shqyrtuar disa veti të tyre. Nga ky këndvështrim, ne prezantojmë konceptin e një nënhiperhapësire fuzzy normale të hapësirës hipervektoriale. Duke përdorur këtë koncept, ndërtojmë nënhiperhapësira fuzzy të reja; gjithashtu, tregojmë se nën disa kondita të caktuara, një nënhiperhapësirë fuzzy e një hapësire hipervektoriale është dy-vlerëshe dhe merr vlerat 0 dhe 1.

LISTA E PUBLIKIMEVE & REFERIMEVE

Artikuj në periodikë shkencorë

1. K. Hila, B. Davvaz, **K. Naka**, “On quasi-hyperideals in semihypergroups”, COMMUNICATIONS IN ALGEBRA 39:11(2011), 4183-4194. (ISI JOURNAL CITATION)
2. **K. Naka**, K. Hila, “Some properties of hyperideals in ternary semihypergroups”, MATHEMATICA SLOVACA, 63 (2013), No. 3, 449–468. (ISI JOURNAL CITATION)
3. **K. Naka**, K. Hila, “On some special classes of hyperideals in ternary semihypergroups”, UTILITAS MATHEMATICA, accepted. (ISI JOURNAL CITATION)
4. K. Hila, **K. Naka**, “On pure hyperradical in semihypergroups”, INTERNATIONAL JOURNAL OF MATHEMATICS AND MATHEMATICAL SCIENCES, Volume 2012, Article ID 876919, 7 pages, 2012. doi:10.1155/2012/876919.
5. K. Hila, **K. Naka**, “On fuzzy sub-hyperspaces of hypervector spaces”, IRANIAN JOURNAL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY, TRANSACTION A: SCIENCE, IJST (2013) A2: 103-108 (ISI JOURNAL CITATION).
6. K. Hila, **K. Naka**, V. Leoreanu-Fotea, S. Sadiku, “Algebraic hyperstructure of soft sets associated to ternary semihypergroups”, ITALIAN JOURNAL OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, No. 30 (2013), 349-372.
7. K. Hila, **K. Naka**, “Ternary semihypergroups characterized by fuzzy bi-hyperideals”, UTILITAS MATHEMATICA (ISI JOURNAL CITATION)., accepted.
8. K. Hila, T. Vougiouklis, **K. Naka**, “On the structure of soft m -ary semihypergroups”, UPB Scientific Bulletin, Series A: Applied Mathematics and Physics (ISI JOURNAL CITATION)., accepted.
9. K. Hila, B. Davvaz, **K. Naka**, J. Dine, “Regularity in terms of hyperideals”, CHINESE JOURNAL OF MATHEMATICS, Volume 2013, Article ID 167037, 4 pages.
10. K. Hila, B. Davvaz, **K. Naka**, “On hyperideal structure of ternary semihypergroups”, IRANIAN JOURNAL OF MATHEMATICAL SCIENCES AND INFORMATICS, Vol. 9, No. 1 (2014), pp 78-95.
11. **K. Naka**, K. Hila, “On the structure of quasi-hyperideals and bi-hyperideals in ternary semihypergroups”, submitted.
12. K. Hila, **K. Naka**, M.K. Dubey, Anuradha, Ternary semihypergroups in terms of generalized quasi(bi)-hyperideals, submitted.
13. **K. Naka**, K. Hila, “Regularity of ternary semihypergroups”, submitted.

Referime në Konferenca

1. K. Hila, **K. Naka** "Ternary semihypergroups characterized by a class of fuzzy hyperideals", 1st VIRTUAL INTERNATIONAL CONFERENCE ON ADVANCED RESEARCH IN SCIENTIFIC AREAS(ARSA-2012), December 3 - 7, 2012, Slovakia
2. K. Hila, **K. Naka**, "On Fuzzy Sub-Hyperspaces of Hypervector Spaces" INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLIED ANALYSIS AND ALGEBRA (ICAAA2011)", June 29-30 and July 1-2, 2011 in Istanbul, Turkey
3. K. Hila, **K. Naka**, "On lateral hyperideals in ternary semihypergroups", FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ALGEBRA AND FUNCTIONAL ANALYSIS, 14-15 May 2010, Elbasan, Albania.
4. K. Hila, **K. Naka**, J. Dine, "On regular algebraic hypersystems", FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ALGEBRA AND FUNCTIONAL ANALYSIS, 14-15 May 2010, Elbasan, Albania
5. K. Hila, **K. Naka**, "On regular ternary semihypergroups", FIFTH INTERNATIONAL ANNUAL MEETING OF "ALB-SHKENCA" INSTITUTE "IASH 2010", 2-5 September 2010, Tirana, Albania
6. K. Hila, **K. Naka**, "On pure hyperradical in semihypergroups with zero", FIFTH INTERNATIONAL ANNUAL MEETING OF "ALB-SHKENCA" INSTITUTE "IASH 2010", 2-5 September 2010, Tirana, Albania
7. K. Hila, **K. Naka**, "On pure hyperideals in ternary semihypergroups", 1ST INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTING IN INFORMATICS AND MATHEMATICS 2011 (ISCIM 2011), June 2-4, 2011, Tirana-Durres, Albania
8. **K. Naka**, K. Hila, "On quasi-hyperideals in ternary semihypergroups", SIXTH INTERNATIONAL ANNUAL MEETING OF "ALB-SHKENCA" INSTITUTE "IASH 2011", September 1-4, 2011, Prishtina, Kosovo
9. K. Hila, **K. Naka**, "On prime fuzzy bi-hyperideals in ternary semihypergroups", NATIONAL CONFERENCE "ADVANCED STUDIES IN MATHEMATICS, PHYSICS AND CHEMISTRY ENGINEERING", 28 October 2011, TIRANA-ALBANIA
10. K. Hila, J. Dine, **K. Naka**, "Soft m -ary Semihypergroups, INTERNATIONAL CONFERENCE "INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGY INNOVATION: THEIR APPLICATION IN ECONOMY" (ISTI2012), June 8-9, 2012, Tirana, Albania
11. K. Hila, S. Sadiku, **K. Naka**, "Algebraic hyperstructure of soft sets associated to ternary semihypergroups", 1st INTERNATIONAL EURASIAN CONFERENCE ON MATHEMATICAL SCIENCES AND APPLICATIONS (IECMSA), September 03-07, 2012, Prishtine, KOSOVO
12. **K. Naka**, K. Hila, "On generalised quasi(bi)-hyperideals of ternary semihypergroups", 1ST INTERNATIONAL WESTERN BALKAN CONFERENCE OF MATHEMATICAL SCIENCES (IWBCMS), May 30- June 1, 2013, Elbasan, Albania

Referime të botuara në Proceedings të Konferencave

1. K. Hila, **K. Naka**, "*Ternary semihypergroups characterized by a class of fuzzy hyperideals*", PROCEEDINGS OF THE 1st VIRTUAL INTERNATIONAL CONFERENCE IN THE ADVANCED RESEARCH IN SCIENTIFIC AREAS (ARSA-2012), December 3 - 7, 2012, EDIS - Publishing Institution of the University of Zilina, Slovak Republic. Edit. Ing. Michal Mokryš, Ing. Anton Lieskovský, Ph.D., pp. 1468-1473, ISBN: 978-80-554-0606-0, ISSN: 1338-9831
2. K. Hila, **K. Naka**, "*On lateral hyperideals in ternary semihypergroups*" PROCEEDINGS OF THE FOURTH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ALGEBRA AND FUNCTIONAL ANALYSIS, 14-15 May 2010, Elbasan, Albania. ALBANIAN JOURNAL OF NATURAL AND TECHNICAL SCIENCES (AJNTS) (SPECIAL ISSUE) 28(2010), No. 2, 79-92. ISSN 2074-0867.
3. K. Hila, **K. Naka**, "*On regular ternary semihypergroups*", PROCEEDINGS OF THE FOURTH INTERNATIONAL ANNUAL MEETING OF "ALB-SHKENCA" INSTITUTE IASH 2010, 2-5 September 2010, Tirana, ALBANIA, JOURNAL OF INSTITUTE ALB-SHKENCA (SPECIAL ISSUE) Vol. IV(2011), Nr. 3, 551-560, ISSN 2073-2244.
4. K. Hila, **K. Naka**, "*On pure hyperideals in ternary semihypergroups*", PROCEEDINGS OF 1ST INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTING IN INFORMATICS & MATHEMATICS 2011 (ISCIM 2011), June 2-4, 2011, Tirana-Durres, Albania. 582-598. ISBN: 978-9928-4044-8-0
5. **K. Naka**, K. Hila, "*On quasi-hyperideals in ternary semihypergroups*", PROCEEDINGS OF THE SIXTH INTERNATIONAL ANNUAL MEETING OF "ALB-SHKENCA" INSTITUTE IASH 2011, 1-4 September 2011, Prishtina, KOSOVO, JOURNAL OF INSTITUTE ALB-SHKENCA (SPECIAL ISSUE) Vol. V(2012), Nr. 3, 331-342, ISSN 2073-2244.
6. K. Hila, J. Dine, **K. Naka**, "*Soft m -ary Semihypergroups*", PROCEEDINGS OF THE INTERNATIONAL CONFERENCE "INFORMATION SYSTEMS AND TECHNOLOGY INNOVATION: THEIR APPLICATION IN ECONOMY" (ISTI2012), June 8-9, 2012, Tirana, Albania, Edit. K. Sevrani, pp. 64 (2012). ISBN:978-9995-6377-8-1
7. **K. Naka**, K. Hila, "*On generalised quasi(bi)-hyperideals of ternary semihypergroups*", PROCEEDINGS OF THE 1ST INTERNATIONAL WESTERN BALKAN CONFERENCE OF MATHEMATICAL SCIENCES (IWBCMS), May 30- June 1, 2013, Elbasan, Albania, Edit. A. Tato, E. Savaş, N. Braha, pp. 27-45. ISBN 978-9928-115-27-0

P Ë R M B A J T J A

KAPITULLI 1

NJOHURI PARAPRAKE PËR HIPERSTRUKTURAT.....	1
§1.1. Origjina e teorisë së hiperstrukturave	1
§1.2. Përkufizimet më të rëndësishme	2
§1.3. Motivacioni-pse i studiojmë Hv -strukturat ?	4
§1.4. Historia bashkëkohore e teorisë së hiperstrukturave	6

KAPITULLI 2

DISA REZULTATE MBI HIPERIDEALET NË GJYSMËHIPERGRUPE.....	10
§ 2.1 Hiperradikalet e pastra në gjysmëhipergrupe.....	10
§2.2. Kuazi-hiperidealet në gjysmëhipergrupet.....	16
§2.2.1. (m, n) -kuazi-hiperidealet, hiperidealet m -të majta dhe n -të djathta.....	16
§2.2.2. (m,n) -kuazi-hiperidealet minimale, hiperidealet m -të majta minimale dhe hiperidealet n -të djathta minimale.....	23

KAPITULLI 3

DISA REZULTATE MBI HIPERIDEAL STRUKTURËN E GJYSMËHIPERGRUPEVE TERNARE.....	27
§3.1. Disa përkufizime të rëndësishme.....	28
§3.2. Disa veti elementare të gjysmëhipergrupeve ternare (0) -të thjeshta të majta dhe (0) -të thjeshta laterale.....	31
§3.3. Hiperidealet lateral dhe të majta minimale të gjysmëhipergrupeve ternare.....	34
§3.4. Hiperidealet lateral dhe të majta maksimale të gjysmëhipergrupeve ternare.....	38
§3.5. Mbi hiperidealet e pastra në gjysmëhipergrupet ternare	42
§3.6. Hiperidealet dobësisht të pastra në gjysmëhipergrupet ternare.....	48
§3.7. Hiperradikali i pastër i një gjysmëhipergrupi ternar	50
§3.8. Hiperidealet e majta prim në gjysmëhipergrupet ternare	51
§3.9. Hiperfiltrat në gjysmëhipergrupet ternare	56
§3.10. Hiperidealet e majta gjysmëprim në gjysmëhipergrupet ternare.....	58
§3.11. Hiperidealet e majta irreducibile në gjysmëhipergrupet ternare	60
§3.12. Zgjerimet hiperideale në gjysmëhipergrupet ternare	62

KAPITULLI 4

DISA REZULTATE MBI KUAZI-HIPERIDEALET DHE BI-HIPERIDEALET NË GJYSMËHIPERGRUPET TERNARE.....	65
§4.1. Kuazi-hiperidealet e gjysmëhipergrupeve ternare.....	65
§4.2. Disa karakterizime të kuazi-hiperidealeve minimale të gjysmëhipergrupit ternar.....	67

§4.3. Bi-hiperidealet e gjysmëhipergroupeve ternare.....	70
§4.4. Disa karakterizime të bi-hiperidealeve minimale në gjysmëhipergрупet ternare.....	72
§4.5. Bi-hiperidealet e përgjithësuara prim, fortësisht prim dhe gjysmëprim të gjysmëhipergroupeve ternare.....	73
§4.6. Bi-hiperidealet e përgjithësuara irreducible dhe fortësisht irreducible të gjysmëhipergroupeve ternare.....	76
§4.7. $(m, (p,q),n)$ - Kuazi-hiperidealet në gjysmëhipergрупet ternare	80
§4.8. $(m, (p,q),n)$ - Kuazi-hiperidealet minimale në gjysmëhipergрупet ternare	84
§4.9. $(m, (p,q),n)$ - Bi-hiperidealet në gjysmëhipergрупet ternare.....	88
§4.10. $(m, (p,q),n)$ - Bi-hiperidealet minimale në gjysmëhipergрупet ternare	91
KAPITULLI 5	
DISA REZULTATE MBI RREGULLSINË E GJYSMËHIPERGRUPEVE TERNARE.	94
§5.1. Gjysmëhipergрупet ternare të rregullta.....	94
§5.2. Gjysmëhipergрупet ternare plotësisht të rregullta dhe intra të rregullta.....	99
§5.3. Përgjithësim i rregullsisë së hipersistemeve algjebrike.....	103
KAPITULLI 6	
DISA REZULTATE MBI ZBATIMIN E TEORISË SË BASHKËSIVE FUZZY DHE TEORISË SË BASHKËSIVE SOFT NË HIPERSTRUKTURA.....	109
§6.1. Disa përkufizime bazë të teorisë së bashkësive fuzzy.....	109
§6.2. Hiperidealet fuzzy të pastra dhe fuzzy dobësisht të pastra në gjysmëhipergрупet ternare.....	111
§6.3. Bi-hiperidealet fuzzy në gjysmëhipergрупet ternare.....	117
§6.4. Bi-hiperidealet fuzzy gjysmëprim, fortësisht prim dhe prim në gjysmëhipergрупet ternare.....	121
§6.5. Bi-hiperidealet fuzzy irreducible dhe fortësisht irreducible në gjysmëhipergрупet ternare.....	123
§6.6. Disa përkufizime bazë të teorisë së bashkësive soft.....	130
§6.7. Gjysmëhipergрупet ternare soft dhe hiperidealet soft.....	133
§6.8. Kuazi-hiperidealet dhe bi-hiperidealet soft mbi gjysmëhipergрупet ternare.....	139
§6.9. Struktura e gjysmëhipergroupeve m -are soft dhe hiperidealet soft.....	147
§6.10. Kuazi-hiperidealet soft dhe bi-hiperidealet soft mbi gjysmëhipergрупet m -are....	150
§6.11. Nënhapësirat fuzzy të hapësirave hipervektoriale.....	157
Referenca.....	163

Kapitulli 1

NJOHURI PARAPRAKE PËR HIPERSTRUKTURAT

Në këtë kapitull prezantohen disa koncepte bazë të cilat do të përdoren gjatë gjithë punimit. Gjithashtu bëjmë dhe një përshkrim retrospektiv të historikut të teorisë së hiperstrukturave dhe zhvillimeve të saj.

§1.1 Origjina e teorisë së hiperstrukturave

Zbatimet e matematikës në disiplina të tjera, për shembull në informatikë etj., luajnë një rol kyç dhe ato përfaqësojnë, në dekadat e fundit, një nga qëllimet e studimit të ekspertëve të Teorisë së Hiperstrukturave në gjithë botën.

Teoria e Hiperstrukturave lindi në 1934, kur Marty në Kongresin e 8-të të Matematikanëve Skandinavë [1], dha përkufizimin e hipergrupit dhe ilustroi me disa zbatime dhe tregoi dobinë e tij në studimin e grupeve, funksioneve algjebrike dhe thyesave racionale. Në dekadat më pas dhe në ditët e sotme, një numër i ndryshëm hiperstrukturash janë studiuar nga pikëpamja teorike dhe për aplikimet e tyre në shumë disiplina të matematikës së pastër dhe të aplikuar nga shumë matematicienë. Në vitet në vijim, rreth viteve 40-të, një sërë matematicienë të tjerë punuan në këtë subjekt: në Francë, Marty, Krasner, Kuntzman, Croisot, ne SHBA Drescher dhe Ore, Prenowitz, Eaton, Griffith, Wall (i cili prezantoi një përgjithësim të hipergrupeve, ku hiperprodukti është një multibashkësi, dmth një bashkësi në të cilën çdo element ka një shumfishitet të caktuar); në Japoni Utumi, në Spanje San Juan, në Rusi Vikhrov, në Uzbekistan Dietzman, në Italy Zappa.

Në vitet 50-të dhe 60-të ata punuan me hiperstrukturat, në Rumani Benado, në Republikën Çeke Drbohlav, në Francë Koskas, Sureau, ne Greqi Mittas, Stratigopoulos, në Itali Orsatti, Boccioni, në SHBA Prenowitz, Graetzer, Pickett, McAlister, në Japoni Nakano, në Jugosllavi Dacic.

Por periudha më e shkëlqyer e studimit të hiperstrukturave është rreth viteve 70-të kryesisht në Europë, Azi, Amerikë, Australi.

§1.2 Përkufizimet më të rëndësishme

Hiperstrukturat algjebrike janë një përgjithësim i përshtatshëm i strukturave klasike algjebrike. Në një strukturë algjebrike klasike, kompozimi i dy elementeve është një element, ndërsa në një hiperstrukturë algjebrike, kompozimi i dy elementeve është një bashkësi.

Përkufizim 1.2.1 *Le të jetë H një bashkësi joboshe dhe $P^*(H)$ familja e nënbashkësive joboshe të H . Një pasqyrim $\circ: H \times H \rightarrow P^*(H)$ quhet veprim shumëvlerësh (multivalued operation) apo hiperveprim binar (binary hyperoperation) në H .*

Në qoftë se $f_i: H \times H \rightarrow P^*(H)$, ku $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ dhe n është numër natyror, janë hiperveprime binare, një sistem algjebrik $(H, f_1, f_2, \dots, f_n)$ quhet *hiperstrukturë algjebrike* ose thjesht një *hiperstrukturë*. Zakonisht $n=1$ ose $n=2$.

Nën disa kushte apo veti të caktuara që plotësojnë pasqyrimet f_i , fitojmë gjysmëhipergрупet, hipergрупet, hiperunazat ose hiperfushat. Ndonjëherë shqyrtohen hiperveprimet e jashtme, të cilat janë pasqyrime të tipit $h: R \times H \rightarrow P^*(H)$, ku $R \neq H$ me ndihmën e të cilave formohen hiperstruktura si hipermodulet, hapësirat hipervektoriale etj.

Hipergroupoid quhet çifti i renditur $(H, \circ)$ ku " $\circ$ " është një hiperveprim në bashkësinë H .

Le të jenë A dhe B dy nënbashkësi joboshë të H . Atëherë përkufizojmë

$$A \circ B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \circ b, \quad a \circ A = \{a\} \circ A \text{ dhe } a \circ B = \{a\} \circ B$$

Një hipergroupoid $(H, \circ)$ quhet *gjysmëhipergруп* (semihypergroup) në qoftë se

$$(I) \quad \forall (x, y, z) \in H^3, (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$$

e cila nënkupton që $\bigcup_{u \in x \circ y} u \circ z = \bigcup_{v \in y \circ z} x \circ v$.

Një hipergroupoid $(H, \circ)$ quhet *kuazi-hipergруп* (quasi-hypergroup) në qoftë se

$$(II) \quad \forall (a, b) \in H^2, \exists (x, y) \in H^2, a \in b \circ x, a \in y \circ b$$

Një hiperveprim quhet *shoqërimtar i dobët* (weak associative) në qoftë se

$$(III) \quad \forall (x, y, z) \in H^3, x \circ (y \circ z) \cap (x \circ y) \circ z \neq \emptyset$$

Hipergrup (hypergroup) quhet hipergrupoidi $(H, \circ)$ që plotëson (I) dhe (II). Ose ndryshe, një hipergrup është një gjysmëhipergrup i cili plotëson aksiomën e riprodhimit, domethënë $\forall a \in H, a \circ H = H \circ a = H$.

Një hiperveprim quhet *ndërrimtar (commutative)* në qoftë se

$$(IV) \quad \forall (x, y) \in H^2, x \circ y = y \circ x$$

Një hiperveprim quhet *ndërrimtar i dobët (weak commutative)* në qoftë se

$$(V) \quad \forall (x, y) \in H^2, x \circ y \cap y \circ x \neq \emptyset$$

H_v -grup (H_v -group) quhet një kuazi-grup $(H, \circ)$ i tillë që hiperveprimi " $\circ$ " është shoqërimtar i dobët.

Një nënbashkësi joboshe K e një gjysmëhipergrupi $(H, \circ)$ quhet *nëngjysmëhipergrup* në qoftë se K është një gjysmëhipergrup. Me fjalë të tjera, një nënbashkësi joboshe K e një gjysmëhipergrupi $(H, \circ)$ quhet *nëngjysmëhipergrup* në qoftë se $K \circ K \subseteq K$.

Një nënbashkësi joboshe K e një hipergrupi $(H, \circ)$ quhet *nënhipergrup* në qoftë se K është një hipergrup. Me fjalë të tjera, një nënbashkësi joboshe K e një hipergrupi $(H, \circ)$ quhet *nënhipergrup* në qoftë se për çdo $a \in K, a \circ K = K \circ a = K$.

Një nënbashkësi joboshe I e një gjysmëhipergrupi H quhet *hiperideal i djathtë (i majtë)* i H , në qoftë se për çdo $x \in H$ dhe $r \in I, r \circ x \subseteq I (x \circ r \subseteq I)$.

Le të jenë $(H_1, \circ)$ dhe $(H_2, \diamond)$ dy gjysmëhipergrupe. Një pasqyrim $f: H_1 \rightarrow H_2$ quhet *homomorfizëm përfshirës (inclusive homomorphism)* në qoftë se kënaq kushtin

$$\text{për çdo } x, y \in H_1, f(x \circ y) \subseteq f(x) \diamond f(y)$$

f quhet një *homomorfizëm i fortë (strong homomorphism)* në qoftë se

$$\text{për çdo } x, y \in H_1, f(x \circ y) = f(x) \diamond f(y).$$

Një element e në një hipergrup H quhet *element identik (identity)* në qoftë se

$$x \in e \circ x \cap x \circ e, \forall x \in H.$$

Një element e në një gjysmëhipergrup H quhet *element identik skalar (scalar identity)* në qoftë se $\{x\} = e \circ x = x \circ e, \forall x \in H$.

Një gjysmëhipergrup $(H, \circ)$ quhet *gjysmëhipergrup i rregullt (regular semihypergroup)* në qoftë se për çdo $x \in H, x \in x \circ y \circ x$ për ndonjë $y \in H$. Atëherë, çdo gjysmëgrup i rregullt është

një gjysmëhipergrup i rregullt. Vërejmë se në qoftë se $(H; \circ)$ është një hipergrup, atëherë për çdo $x \in H$, $x \circ H \circ x = H$. Nga kjo rrjedh që çdo hipergrup është një gjysmëhipergrup i rregullt.

Në një bashkësi H të pajisur me një hiperveprim $\cdot : H \times H \rightarrow P^*(H)$, themi se plotësohet vetia shoqërimtare e dobët (WASS-the weak associativity) në qoftë se: $\forall (x, y, z) \in H^3, (xy)z \cap x(yz) \neq \emptyset$ dhe themi se plotësohet vetia ndërrimtare e dobët (COW-the weak commutativity) në qoftë se: $\forall (x, y) \in H^2, xy \cap yx \neq \emptyset$. Hiperstruktura $(H, \cdot)$ quhet H_v -gjysmëgrup në qoftë se plotësohet vetia shoqërimtare e dobët dhe quhet H_v -grup në qoftë se është një H_v -gjysmëgrup riprodiktiv: $\forall x \in H, xH = Hx = H$.

Hiperstruktura $(R, +, \cdot)$ është një H_v -unazë në qoftë se $(+)$ dhe $(\cdot)$ janë shoqërimtare të dobëta, plotësohet aksioma e riprodiktivitetit për $(+)$ dhe së fundmi, $(\cdot)$ është shpërndarës i dobët (weak distributive) në lidhje me $(+)$:

$$\forall (x, y, z) \in R^3, x(y + z) \cap (xy + xz) \neq \emptyset, (x + y)z \cap (xz + yz) \neq \emptyset.$$

H_v -strukturat u prezantuan në Fourth AHA Congress [4].

Një larmi shembujsh hiperstrukturash të ndryshme mund të gjenden në literaturë si dhe në brendësi të këtij punimi.

§1.3 Motivacioni- pse i studiojmë H_v -strukturat ?

Motivimi pse studiojmë H_v -strukturat është si më poshtë:

Dimë që raporti i një grupi në lidhje me një nëngrup normal është një grup. F. Marty qysh në 1934, pohoi që, raporti i një grupi në lidhje me një nëngrup çfarëdo është një hipergrup. Së fundmi, raporti i një grupi në lidhje me çdo copëtim (ose në mënyrë ekuivalente në lidhje me çdo relacion ekuivalence) është një H_v -grup.

Duke specifikuar këtë motivim, vërejmë: Le të jetë $(G, \cdot)$ një grup dhe R një relacion ekuivalence (ose një copëtim) në G , atëherë $(G/R, \cdot)$ është një H_v -grup dhe në këtë mënyrë kemi raportin $(G/R, \cdot)/\beta^*$ i cili është një grup, *grupi fundamental*. Vërejmë se klasat e grupit fundamental $(G/R, \cdot)/\beta^*$ janë një bashkim i disa prej R -klasave. Ndryshe, $(G/R, \cdot)/\beta^*$ ka si

elemente klasat e G të cilat formojnë një copëtim në të cilin klasat janë më të mëdha se klasat e copëtimit origjinal R .

Vegla kryesore për të studiuar hiperstrukturat janë relacionet fundamentale β^* , γ^* dhe ε^* të cilat janë përkufizuar përkatësisht në Hv -grupet, Hv -unazat dhe Hv -hapësirat vektoriale, si relacionet e ekuivalencës më të vogla të tilla që raporti të jetë përkatësisht grup, unazë dhe hapësirë vektoriale. Relacioni β^* u prezantua nga M. Koskas në 1970 [2] dhe u studiua në mënyre intensive dhe të thelluar nga Corsini [3]. Relacionet γ^* dhe ε^* u prezantuan nga T. Vougiouklis [4], [5], [6] dhe ai i quajti ato Fundamentale.

Pra, në qoftë se H është një Hv -grup (Hv -unazë, Hv -hapësirë vektoriale), atëherë H/β^* është një grup (H/γ^* është një unazë, H/ε^* është një hapësirë vektoriale përkatësisht). Strukturat e mësipërme korresponduese janë strukturat fundamentale. Relacioni fundamental β^* në një Hv -grup ($H, \cdot$) në mënyrë ekuivalente mund të përkufizohet si më poshtë:

Një element $a \in H$ quhet β ekuivalent me elementin $b \in H$ në qoftë se ekziston një bashkësi e fundme elementesh $\{z_1, \dots, z_n\}$ e H e tillë që $\{a, b\} \in z_1 \cdots z_n$. Atëherë mbyllja transitive (transitive closure) e β është β^* .

Një mënyrë për të gjetur klasat fundamentale jepet nga teorema e mëposhtme [5]:

Teoremë 1.3.1. *Le të jetë $(H, \cdot)$ një Hv -grup dhe shënojmë me U bashkësinë e gjithë prodhimeve të fundme të elementeve të H . Përkufizojmë relacionin β në H duke përcaktuar $x \beta y$ vetëm atëherë kur $\{x, y\} \subset u$, ku $u \in U$. Atëherë β^* është mbulimi kalimtar (transitive closure) i β .*

T. Vougiouklis shprehet:

Në vitin 1993 kur isha duke shkruar librin tim: *Hyperstructures and their Representations*, Hadronic Press 1994 [5], isha shumë i eksituar, siç e përmenda në parathënie të tij. Ndjehesha sikur po udhëtoja në një lëndinë shumë të bukur dhe në autostradën e *Representations Theory* dhe në anë po shikoja të kalonin Hv -gjysmëgrupet, Hv -grupet, Hv -unazat, Hv -fushat, Hv -modulet, Hv -hapësirat vektoriale. Kështu, duhet të transferosh sa më shumë rezultate që të jetë e mundur nga teoria klasike, por fatmirësisht, teoria e hiperstrukturave është mjaft e madhe, sidomos ajo e hiperstrukturave të dobëta, dhe problemi bëhet më i vështirë por i bukur! Konceptet të cilat janë të reja në teorinë e hiperstrukturave janë shumë interesante dhe shumëvlerëshe. Aksiomat e dobëta nga njëra anë, japin klasa më të mëdha dhe si rrjedhim aplikime, në anën tjetër, është shumë e vështirë të fitosh një numër të madh teoremash strikte. Kështu, aksioma të reja shfaqen, terma të rinj dhe ndërtime të reja prezantohen me qëllim që të manipulohen dhe klasifikohen

klasat e mëdha të hiperstrukturave të reja. Kjo është një lojë kërkimore shumë interesante: të jesh në Oqeanin e egër të Kërkimit dhe të kesh mundësinë të udhëtosh i sigurt dhe të dëfrehesh. Për të parë sesa i thellë është oqeani duhet që vazhdimisht të mbash sytë hapur për të shfrytëzuar energjinë e valëve, për të ndërtuar konstrakte. Kështu, për shembull, nuk është e nevojshme të kesh një element zero në hiperfushat por është e mjaftueshme të gjesh një bashkësi, bashkësinë fundamentale e cila luan këtë rol. Loja nuk është personale, unike, e veçuar por është një lojë skuadre!

§1.4 Historia bashkëkohore e teorisë së hiperstrukturave

Në ditët e sotme, mjaft matematicienë në kontinente të ndryshme punojnë me sukses me hiperstrukturat. Më poshtë përmendim disa prej tyre qysh prej viteve 70’.

Rreth viteve 70’ dhe 80’, hiperstrukturat u trajtuan në veçanti :

Në Greqi nga Mittas dhe shkolla e tij (Canonical Hypergroups and their applications), Vougiouklis dhe shkolla e tij (Hv – groups); Në Itali: nga Corsini (Homomorphisms, Join Spaces, Quasicanonical Hypergroups, Complete Hypergroups, 1-Hypergroups, Cyclic Hypergroups etc.) dhe shkolla e tij, Tallini G. (Hypergroups associated with Projective Planes), Rota, Procesi Ciampi (Hyperrings); Në SHBA: nga Prenowitz dhe Jantoshak (Join Spaces and Geometries, Homomorphisms), Roth (Character of hypergroups, Canonical hypergroups), Comer (Polygroups, Representations of hypergroups); në France nga Krasner dhe Sureau, (Structure of Hypergroups), Koskas, (Semihypergroups associated with Groupoids). Deza; në Kanada Rosenberg (Hypergroups associated with graphs, binary relations).

Rreth viteve 90’ dhe më vonë, u botuan shumë punime, të bëra në Europë, Azi, Amerikë dhe Australi.

Europë: Në Greqi: - në Thessaloniki (Aristotle Univ.), Mittas, Konstantinidou, Serafimidis Kehagias, Ioulidis, Yatras, Synefaki, - në Alexandroupolis (Democritus Univ. of Thrace), T. Vougiouklis, Dramalidis, S.Vougiouklis, - në Patras (Patras Univ.), Stratigopoulos, - në Orestiada (Democritus Univ. of Thrace), Spartalis, - në Athens, Ch. Massouros, G. Massouros, G. Pinotsis; në Rumani - në Iasi (Cuza Univ.), V. Leoreanu, Cristea, Tofan, Gontineac., Volf, L. Leoreanu, - në Cluj Napoca Babes Bolyai Univ.), Purdea, Pelea, Calugareanu, - në Constanta (Ovidius Univ.) Stefanescu; në Republiken Ceke - në Praha (Karlos Univ.) Kepka, Jezek, Drbohlav,

(Agricultural Univ.) Nemec, - në Brno (Brno Univ. of Technology) J. Chvalina, (Military Academy of Brno) Hoskova, (Technical Univ. of Brno) L. Chvalinova, (Masaryk Univ.) Novotny, (University of Defence) Rackova, Olomouc, (Palacky Univ.) Hort, - në Vyskov (Military Univ. of Ground Forces) Moucka; në Montenegro:- në Podgorica (Univ. of Podgorica) Dasic, Rasovic; në Slovaki - në Bratislava, (Comenius University), Kolibiar, (Slovak Techn. Univ.) Jasem, -në Kosice, (Matematickz ustav SAV), Jakubik, (Safarik Univ.), Lihova, Repasky, Csontoova; në Itali - në Udine (Udine Univ.) Corsini, - në Messina (Messina Univ.) De Salvo, Migliorato, Lo Faro, Gentile, - në Rome (Università' La Sapienza) G. Tallini, M. Scafati-Tallini, Rota, Procesi Ciampi, Peroni, - në Pescara (G. d'Annunzio Univ.) A. Maturo, S. Doria, B. Ferri, - në Teramo (Univ. di Teramo) Eugeni, - ne L'Aquila (Univ. dell'Aquila) Innamorati, L. Berardi, - në Brescia (Università' Cattolica del Sacro Cuore), Marchi, - në Lecce (Università' di Lecce), Letizia, Lenzi, - në Palermo, (Univ. di Palermo), Falcone, - në Milano, (Politecnico), Mercanti, Cerritelli, Gelsomini; në France- në Clermont-Ferrand (Universite' des Math. Pures et Appl.) Sureau, M. Gutan, C. Gutan, - në Lyon, (Universite' Lyon 1), Bayon, Lygeros; në Spain - në Malaga, (Malaga Univ.) Martinez, Gutierrez, De Guzman, Cordero; në Finland - në Oulu, (Univ. of Oulu), Nieminen, Niemenmaa. Në SHBA - në Charleston (The Citadel) Comer, - në New York (Brooklyn College, CUNY), Jantosciak, - në Cleveland, Ohio, (John Carroll Univ.), Olson, Ward, në Canada - në Montreal, (Universite' de Montreal), Rosenberg, Foldes. Në Tailand - në Bangkok, (Chulalongkorn Univ), Kemprasit, Punkla , Chaopraknoi, Triphop, Tumsoun, Samutprakarn, (Hauchievw Chalermprakiet Univ.), Juntakharajorn, - në Phitsanulok, (Naresuan Univ.), C. Namnak. në Iran - në Babolsar (Mazandaran Univ.) Ameri, Razieh Mahjoob, Moghani, Hedayati, Alimohammadi, - në Yazd (Yazd Univ.) Davvaz, Koushky, - në Kerman, (Shahid Bahonar Univ.) Zahedi, Molaei, Torkzadeh, Khorashadi Zadeh, Hosseini, Mousavi, (Islamic Azad Univ.) Borumand Saeid -në Kashan (Univ. of Kashan) Ashrafi, Ali Hossein Zadeh, - në Tehran (Tehran Univ.) Darafsheh, Morteza Yavary, (Tarbiat Modarres Univ.) Iranmanesh, Iradmusa, Madanshekaf, (Iran Univ. of Sci. and Technology) Ghorbany, Alaeyan, (Shahid Beheshti Univ.) Mehdi Ebrahimi, Karimi, Mahmoudi, -në Zahedan (Sistan and Baluchestan Univ.) Borzooei, Hasankhani, Rezaei, -në Zanzan (Institute for Advanced Studies in Basic Sciences) Barghi -në Sari-Branch, (Islamic Azad Univ.), Roohi. Në Kore - në Chinju (Gyeongsang National Univ.) Young Bae Jun, E. H. Roh, - në Taejon, (Chungnam National Univ.) Sang Cho Chung, - në (Taejon Univ.) Byung-Mun Choi, - në Chungju (Chungju National

Univ.) K.H. Kim. Në Indi -në Kolkata, (Uni. of Calcutta), M.K. Sen, Dasgupta, Chowdhury, -në Tiruchendur, Tamilnadu (Adinatar College of Arts and Sciences), Asokkumar, Velrajan, Në Kinë - në Chongqing, (Chongqing three Gorges Univ.) Yuming Feng, - në Xi'an, (Northwest Univ.), Xiao Long Xin, - në Enshi, Hubei Province (Hubei Institute for Nationalities), Janming Zhan, Xueling Ma; Në Japoni - në Tokyo, (Hitotsubashi Univ. Kunitachi), Machida, - në Tagajo, Miyagi, (Tohoku Gakuin Univ.), Shoji Kyuno; Në Jordani - në Karak, (Mu'tah Univ.) M.I. Al Ali; Në Israel - në Ramat Gan, (Bar - Ilan Univ.), Feigelstock.

Ende dhe sot vazhdojnë aplikimet e hipergrupeve në fusha të ndryshme si: gjeometria, topologjia, analiza e sistemeve konvekse, teoria e karakterit të grupeve të fundme, teoria e kriptografisë dhe kodimit, teori e automateve, grafet dhe hipergrafet, teoria e bashkësive fuzzy dhe rough, teoria e relacioneve binare, latisat, C-algjebrat, intelijenca artificiale, teoria e probabilitetit, etnologjia, ekonomia, kimia, biologjia, fizika, shkencat kompjuterike, inxhinjeri, shkencat e informacionit etj.

Një sërë zbatimesh interesante të hiperstrukturave në Kimi, Biologji, Fizikë etj. mund të gjenden në disa punime të kohëve të fundit në [52-58].

Nje nga librat e parë, dedikuar në mënyrë të veçantë hipergrupeve është “*Prolegomena of Hypergroup Theory*”, shkruar nga P. Corsini në 1993 [3]. Një libër tjetër “*Hyperstructures and Their Representations*”, nga T. Vougiouklis, u botua një vit më vonë [5]. Në anën tjetër, teoria e hiperstrukturave algjebrike ka një sasi të madhe aplikimesh në disiplina të tjera siç u përmendën më sipër. Një libër i kohëve të fundit mbi këto çështje është “*Applications of Hyperstructure Theory*”, nga P. Corsini dhe V. Leoreanu, botuar nga Kluwer Academic Publishers në 2003 [7]. Përfundimisht, ne përmendim këtu një tjetër libër të rëndësishëm për aplikimet në Gjeometri shkruar nga W. Prenowitz dhe J. Jantosciak [8]. Gjithashtu, në 2007, B. Davvaz dhe V. Leoreanu botuan “*Hyperring theory and applications*”, nga International Academic Press, USA [9] i cili iu dedikua në mënyrë të veçantë studimit të teorisë së hiperunazave. Janë studiuar dhe analizuar disa lloje hiperunazash. Volumi mbyllet me disa zbatime në kimi dhe fizikë, duke analizuar një sërë llojesh speciale të hiperstrukturave. Disa përgjithësime të veçanta të hiperstrukturave janë konsideruar gjithashtu dhe ne përmendim këtu tre prej tyre. H.S. Wall [10] prezantoi hiperveprimet për të cilat për çdo x, y të H , hiperprodukti $f(x, y)$ përmban jo domosdoshmërisht elemente të dallueshme $a_1, \dots, a_k$. Me fjalë të tjera, çdo element a_i mund të haset në $f(x, y)$ me një shumëfishitet të caktuar, gjë që do të thotë se a_i mund të haset një, dy ose më shumë herë në

$f(x,y)$. Për më tepër, janë shqyrtuar një bashkësi kushtesh të rregullsisë që duhet të plotësohen. Hipergrupe të tilla, të quajtura Wall-hipergrupe, kanë aplikime në fizikë, në veçanti në fizikën atomike, në analizën harmonike. Një lloj tjetër i përgjithësimit konsiston në shqyrtimin e hiperveprimeve n -are, në vend të hiperveprimeve binare, ku $n \geq 3$. Me fjalë të tjera, shqyrtojmë pasqyrimet e tipit të mëposhtëm:

$$f : H \times H \times \dots \times H \rightarrow P^*(H).$$

Ky studim u prezantua nga B. Davvaz dhe T. Vougiouklis [11] dhe u studiua më pas prej tyre dhe matematikanëve të tjerë në kontekste të ndryshme.

Në përgjithësimin e tretë, për çdo x, y të H imazhi $f(x, y)$ është një bashkësi fuzzy në H , në vend të një nënbashkësie të H . Ky përgjithësim është shqyrtuar në mënyrë të veçantë nga matematikanët iranianë, dhe përmendim këtu B. Davvaz, M.M. Zahedi, R. Ameri, R.A. Borzooei, por gjithashtu edhe nga T. Kehagias.

Hiperstrukturat algjebrike përfaqësojnë një fushë të algjebërës shumë terheqëse dhe me produktivitet të madh me shumë rezultate të rëndësishme në algjebër.

Ekzistojnë një sërë tematikash rreth hiperstrukturave, të cilat mund të jenë analizuar në thellësi dhe gjithashtu janë dhe probleme të hapura dhe lidhje të reja me fushat e tjera që mund të eksploroehen më tej në të ardhmen.

Një tjetër tematikë që është trajtuar me interes nga shumë matematikanë është ajo e Hv -strukturave, e prezantuar nga T. Vougiouklis dhe studiuar më pas nga B. Davvaz, M.R. Darafsheh, M. Ghadiri, R. Migliorato, S. Spartalis, A. Dramalidis, A. Iranmanesh, M.N. Iradmusa, A. Madanshekaf. Hv -strukturat janë një lloj i veçantë hiperstrukturash, për të cilat plotësohet vetia shoqërimtare e dobët (weak associativity).

DISA REZULTATE MBI HIPERIDEALET NË GJYSMËHIPERGRUPE

Teorja e idealeve, në formën e saj moderne, është një zhvillim bashkëkohor i njohurive matematike për të cilat matematicienët e sotëm duhet të jenë krenarë. Teoria e idealeve është e rëndësishme jo vetëm për interesat e brendshme dhe pastërtinë e strukturës së saj logjike por sepse është një mjet i nevojshëm në shumë degë të matematikës dhe zbatimeve të saj si informatikë, fizikë dhe të tjera. Si një shembull i zbatimeve të konceptit të një ideali në informatikë, përmendim që idealet e strukturave algjebrike janë përdorur kohët e fundit për një dizenjim eficient të sistemeve të klasifikimit (shih [12-16]).

Në këtë kapitull, merremi me një klasë të hiperstrukturave algjebrike të quajtura gjysmëhipergrupe, të cilat janë një përgjithësim i gjysmëgrupeve. Gjysmëhipergrupet janë studiuar gjerësisht nga disa autorë. Disa nocione dhe rezultate bazë të teorisë së gjysmëhipergrupeve mund të gjenden në [17-33]. Në 2011, Hila dhe Dine [33], prezantuan konceptin e gjysmëhipergrupeve pothuajse të majta si përgjithësim i gjysmëhipergrupeve dhe studiuuan strukturën e tyre nëpërmjet llojeve të ndryshme të hiperidealeve dhe më pas vijuan dhe punime të tjera për këtë strukturë. Kohët e fundit, Davvaz, Hila dhe të tjerë [34-39] prezantuan konceptin e Γ -gjysmëhipergrupit si një përgjithësim i gjysmëgrupit, gjysmëhipergrupit dhe Γ -gjysmëgrupit. Ata prezantuan një sërë shembujsh dhe dhanë një sërë karakterizimesh të Γ -gjysmëhipergrupeve.

Në këtë kapitull ne vazhdojmë kontributin tonë në studimin e hiperideal strukturës së gjysmëhipergrupeve, duke prezantuar disa rezultate të tjera në to nëpërmjet karakterizimeve me anë të disa llojeve hiperidealesh, kuazi-hiperidealet dhe përgjithësimet e tyre.

§2.1 Hiperradikalet e pastra në gjysmëhipergrupe

Në këtë seksion prezantojmë hiperradikalin e pastër të një hiperideali në një gjysmëhipergrup me element zero. Për këtë qëllim përcaktojmë hiperidealet e pastra, gjysmë të pastra dhe hiperideale të llojeve të tjera të ngjashme dhe vërtetojmë disa prej vetive bazë të tyre në gjysmëhipergrupe.

Në vazhdim, do të shënojmë me H një gjysmëhipergrup me element identik skalar 1 i cili përmban një element zero.

Përkufizim 2.1.1 Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Një hiperideal i djathtë A i H quhet hiperideal i djathtë i pastër i djathtë (right pure right hyperideal) në qoftë se për çdo $x \in A$, ekziston një element $y \in A$ i tillë që $x \in x \circ y$. Në qoftë se A është hiperideal i dyanshëm me vetinë që për çdo $x \in A$, ekziston një element $y \in A$ i tillë që $x \in x \circ y$, atëherë A quhet hiperideal i pastër i djathtë (right pure hyperideal).

Hiperidealet e majta të pastra të majta (left pure left hyperideals) dhe hiperidealet e pastra të majta (left pure hyperideals) përkufizohen në mënyrë analoge.

Përkufizim 2.1.2 Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Një hiperideal i djathtë A i H quhet hiperideal i djathtë gjysmë i pastër i djathtë (right semipure right hyperideal) në qoftë se për çdo $x \in A$, ekziston një element y që i përket ndonjë hiperideali të djathtë të mirëfilltë të H , i tillë që $x \in x \circ y$. Në qoftë se A është një hiperideal i dyanshëm me vetinë që për çdo $x \in A$, ekziston një element y që i përket një hiperideali të mirëfilltë të H , i tillë që $x \in x \circ y$, atëherë A quhet hiperideal gjysmë i pastër i djathtë (right semipure hyperideal).

Hiperidealet e majta gjysmë të pastra të majta (left semipure left hyperideals) dhe hiperidealet gjysmë të pastra të majta (left semipure hyperideals) përkufizohen në mënyrë të ngjashme.

Shembull 2.1.3 Le të jetë $(H, \circ)$ një gjysmëhipergrup në $H = \{0, 1, x, y, z, t\}$ me hiperveprimin $\circ$ të dhënë nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	0	x	y	z	t	1
0	0	0	0	0	0	0
x	0	{1, x}	{x, y, 1}	{0, 1, x, z}	H	x
y	0	{0, y}	y	{y, t, 1}	{0, 1, y, t}	y
z	0	z	{z, t}	z	{z, t}	z
t	0	{0, t}	{0, t}	{0, t}	{0, t}	t
1	0	x	y	z	t	1

Shihet lehtë se $I_1 = \{0, t\}$, $I_2 = \{0, z, t\}$ janë hiperidealet e djathta të pastra të djathta të H .

Shembull 2.1.4 Le të jetë $(H, \circ)$ një gjysmëhipergrup në $H = \{0, 1, a, b, c, d, e, f\}$ me hiperveprimin $\circ$ të dhënë nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	{a, b}	c	{c, d}	e	{e, f}	a
b	0	b	b	d	d	f	f	b
c	0	c	{c, d}	c	{c, d}	c	{c, d}	c
d	0	d	d	d	d	d	d	d
e	0	e	{e, f}	c	{c, d}	e	{e, f}	e
f	0	f	f	d	d	f	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Është e qartë se, $I_1 = \{0, d\}$, $I_2 = \{0, d, f\}$ dhe $I_3 = \{0, b, d, f\}$ janë hiperideale të djathta të pastra të djathta të H . $I_4 = \{0, c, d\}$ është një hiperideal i dyanshëm i H i cili është hiperideal i pastër i djathtë, por jo hiperideal i pastër i majtë. Gjithashtu, I_4 është një hiperideal gjysmë i pastër i djathtë dhe i majtë. $I_5 = \{0, c, d, e, f\}$ është hiperideal i dyanshëm i H i cili është hiperideal i pastër i djathtë dhe i majtë.

Shembull 2.1.5 Le të jetë $H = [0, 1]$. Atëherë H në lidhje me hiperveprimin $x \circ y = [0, xy]$ formon gjysmëhipergrup. Le të jetë $t \in [0, 1]$ dhe $T = [0, t]$. Atëherë T është gjysmëhipergrup dhe për më tepër, T është hiperideal i dyanshëm i H i cili nuk është as i pastër i djathtë, as i pastër i majtë, por është gjysmë i pastër i majtë dhe i djathtë.

Pohim 2.1.6 Le të jetë A një hiperideal i dyanshëm i H . Atëherë, A është i pastër i djathtë vetëm atëherë kur për çdo hiperideal të djathtë B , $B \cap A = B \circ A$.

Vërtetim. Supozojmë se A është një hiperideal i pastër i djathtë i H . Meqenëse B është hiperideal i djathtë i H , $B \circ A \subseteq B$. Gjithashtu, meqenëse A është hiperideal i majtë, $B \circ A \subseteq A$, kështu që $B \circ A \subseteq B \cap A$. Le të jetë $x \in B \cap A$. Meqenëse A është hiperideal i pastër i djathtë, ekziston $y \in A$ i tillë që $x \in x \circ y$. Meqenëse $x \in B$ dhe $y \in A$, $x \circ y \subseteq B \circ A$, prandaj $x \in B \circ A$. Kjo sjell që $B \cap A = B \circ A$. Anasjellas, supozojmë se $B \cap A = B \circ A$ për çdo hiperideal të djathtë B të H . Të tregojmë se A është i pastër i djathtë. Le të jetë $x \in A$. Atëherë, $x \circ H = x \circ H \cap A = x \circ H \circ A = x \circ A$. Meqenëse $x \in x \circ H$, $x \in x \circ A$, ekziston $y \in A$ i tillë që $x \in x \circ y$. Kjo provon se A është hiperideal i pastër i djathtë. ■

Rrjedhim 2.1.7 Në qoftë se A është hiperideal i pastër i djathtë, atëherë $A = A \circ A$.

Pohim 2.1.8 (0) dhe H janë hiperideale të pastra të djathta të H . Cdo bashkim dhe prerje e fundme e hiperidealeve të pastra (përkatësisht gjysmë të pastra) të djathta është e pastër (përkatësisht gjysmë e pastër) e djathtë.

Vërtetim. Është e qartë se (0) dhe H janë hiperideale të pastra të djathta. Le të jenë I_1 dhe I_2 hiperideale të pastra të djathta dhe $x \in I_1 \cap I_2$. Meqenëse $x \in I_1$ dhe I_1 është i pastër i djathtë, ekziston $y_1 \in I_1$ i tillë që $x \in x \circ y_1$. Në mënyrë të ngjashme, ekziston $y_2 \in I_2$ i tillë që $x \in x \circ y_2$. Kështu, kemi që $x \in x \circ y_2 \subseteq (x \circ y_1) \circ y_2 = x \circ (y_1 \circ y_2)$. Meqenëse $y_1 \circ y_2 \in I_1 \cap I_2$, rrjedh se $I_1 \cap I_2$ është i pastër i djathtë. Rastet e tjera të këtij pohimi vërtetohen në mënyrë të ngjashme. ■

Nga pohimi i mësipërm rrjedh se në qoftë se I është një hiperideal i çfarëdoshëm i H , atëherë I përmban një hiperideal të pastër më të madh i cili është në fakt, bashkimi i gjithë hiperidealeve të pastra që përfshihen në I (hiperideale të tilla ekzistojnë, për shembull (0), pra një hiperideal i pastër). Hiperideali i pastër më i madh që përmbahet në I shënohet me $L(I)$. Në mënyrë të ngjashme, çdo hiperideal I përmban një hiperideal gjysmë të pastër më të madh, që shënohet $H(I)$. $L(I)$ (përkatësisht $H(I)$) quhet pjesa e pastër (pure part) (përkatësisht pjesa gjysmë e pastër) (resp. semipure part) e I .

Përkufizim 2.1.9 Le të jetë I një hiperideal i pastër ((përkatësisht gjysmë i pastër) i djathtë i H . Atëherë I quhet pastërtisht maksimal (purely maximal), (gjysmëpastërtisht maksimal(semipurely maximal)) në qoftë se I është element maksimal në bashkësinë e hiperidealeve të pastra (gjysmë të pastra) të djathta të mirëfillta.

Në Shembullin 2.1.4, $I_4 = \{0, c, d\}$, $I_5 = \{0, c, d, e, f\}$ dhe $I_6 = \{0, a, b, c, d, e, f\}$ janë hiperideale të pastra të djathta të gjysmëhipergrupit H dhe është e qartë se I_6 është hiperideal pastërtisht maksimal.

Përkufizim 2.1.10 Le të jetë I një hiperideal i pastër (përkatësisht gjysmë i pastër) i djathtë i H . Atëherë I quhet pastërisht prim (purely prime) (përkatësisht gjysmëpastërtisht prim (resp. semipurely prime)) në qoftë se I është i mirëfilltë dhe në qoftë se për çdo hiperideale të pastra (përkatësisht gjysmë të pastra) të djathta I_1 dhe I_2 , $I_1 \cap I_2 \subseteq I \Rightarrow I_1 \subseteq I$ ose $I_2 \subseteq I$.

Në Shembullin 2.1.4, hiperideali I_6 i përmendur më sipër është hiperideal pastërtisht prim.

Pohimet që vijojnë kanë vend për hiperidealet e pastra dhe gjysmë të pastra njëkohësisht. Gjithsesi, vërtetimet jepen vetëm për njërin rast, meqenëse ato janë të ngjashme edhe për rastet e tjera.

Pohim 2.1.11 Cdo hiperideal pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) maksimal është pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) prim.

Vërtetim. Supozojmë se I është pastërtisht maksimal dhe I_1, I_2 janë hiperideale të pastra të djathta të tilla që $I_1 \cap I_2 \subseteq I$. Supozojmë $I_1 \not\subseteq I$. Atëherë $I_1 \cup I = H$. Tani $I_2 = I_2 \cap H = I_2 \cap (I_1 \cup I) = (I_2 \cap I_1) \cup (I_2 \cap I) \subseteq I \cup I = I$. ■

Pohim 2.1.12 Pjesa e pastër (përkatësisht gjysmë e pastër) e çdo hiperideali maksimal është pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) prim.

Vërtetim. Le të jetë M një hiperideal maksimal i H . Të tregojmë se $L(M)$, pjesa e pastër e M , është pastërtisht prim. Supozojmë se $I_1 \cap I_2 \subseteq L(M)$, ku I_1, I_2 të pastër. Në qoftë se $I_1 \subseteq M$, atëherë $I_1 \subseteq L(M)$ dhe vërtetimi përfundon. Supozojmë se $I_1 \not\subseteq M$, atëherë $I_1 \cup M = H$. Që këtë $I_2 = I_2 \cap H = I_2 \cap (I_1 \cup M) = (I_2 \cap I_1) \cup (I_2 \cap M) \subseteq M \cup M = M$. Pra, $I_2 \subseteq M$. Kjo sjell që $I_2 \subseteq L(M)$, meqenëse I_2 është i pastër. ■

Pohim 2.1.13 Në qoftë se I është hiperideal i pastër (përkatësisht gjysmë i pastër) i djathtë i H dhe $a \notin I$, atëherë ekziston një hiperideal pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) prim J i tillë që $I \subseteq J$ dhe $a \notin J$.

Vërtetim. Marrim në konsideratë bashkësinë X të renditur në lidhje me përfshirjen: $X = \{J : J \text{ është një hiperideal gjysmë i pastër i djathtë, } I \subseteq J, a \notin J\}$. Atëherë $X \neq \emptyset$, meqenëse $I \in X$. Le të jetë $(J_k)_{k \in K}$ një nënbashkësi totalisht e renditur e X . Është e qartë se $\bigcup_k J_k$ është hiperideal gjysmë i pastër me $a \notin \bigcup_k J_k$. Pra, X është induktivisht i renditur.

Atëherë, nga Lema e Zorn, X ka një element maksimal J . Të tregojmë se J është gjysmëpastërtisht prim. Supozojmë se I_1, I_2 janë hiperideale gjysmë të pastra të djathta të tilla që $I_1 \not\subseteq J$ dhe $I_2 \not\subseteq J$. Meqenëse $I_k (k=1,2)$ dhe J janë gjysmë të pastra, $I_k \cup J$ është një hiperideal gjysmë i pastër i tillë që $J \subseteq I_k \cup J$. Atëherë, pohojmë se një $a \in I_k \cup J (k=1,2)$. Kjo sepse, në qoftë se $a \notin I_k \cup J$, atëherë, nga fakti që J është maksimal, kemi që $I_k \cup J \subseteq J$. Por kjo vjen në kontradiktë me supozimin që $I_k \not\subseteq J (k=1,2)$, kështu që $a \in (I_1 \cap I_2) \cup J$. Meqenëse $a \notin J$, rrjedh që $I_1 \cap I_2 \not\subseteq J$. Atëherë nga kundërthënia, arrijmë në përfundimin se J është gjysmëpastërtisht prim. ■

Pohim 2.1.14 *Le të jetë I një hiperideal i pastër (përkatësisht gjysmë i pastër) i djathtë i mirëfilltë i H . Atëherë, I përfshihet në një hiperideal pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) maksimal.*

Vërtetim. Shqyrtojmë bashkësinë $X = \{J : J \text{ është një hiperideal gjysmë i pastër i djathtë i mirëfilltë dhe } J \supseteq I\}$, të renditur në lidhje me përfshirjen. Është e qartë se, $X \neq \emptyset$, meqenëse $I \in X$. Për më tepër, çdo $J \in X$ është një hiperideal i mirëfilltë, sepse $1 \notin J$. Që këtë, çdo bashkim i drejtë i elementeve në X përfshihet përsëri në X . Në këtë mënyrë, X është induktivisht i renditur, prandaj nga Lema e Zorn, X përmban një element maksimal J dhe çdo hiperideal gjysmë i pastër i mirëfilltë që përmban J , përmban gjithashtu I , kështu që ky element i përket X . Por një hiperideal i tillë do të jetë vetë J , meqenëse J është maksimal në X . Si rrjedhim, J është gjysmëpastërtisht maksimal. ■

Pohim 2.1.15 *Le të jetë I një hiperideal i pastër (përkatësisht gjysmë i pastër) i djathtë i H . Atëherë, I është prerja e hiperidealeve pastërtisht (përkatësisht gjysmëpastërtisht) prim të H që përmbajnë I .*

Vërtetim. Nga Pohimet 2.1.14 dhe 2.1.11, ekziston një bashkësi $\{P_\alpha : P_\alpha \text{ është një hiperideal gjysmëpastërtisht prim që përmban } I, \alpha \in \Lambda\}$. Që këtë, $I \subseteq \bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$. Për të vërtetuar

që $\bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha \subseteq I$, supozojmë se ekziston një element x i tillë që $x \notin I$. Atëherë, nga pohimi i

mësipërm, ekziston një hiperideal gjysmëpastërtisht prim P_{α_0} i tillë që $I \subseteq P_{\alpha_0}$, por $x \notin P_{\alpha_0}$.

Kjo sjell që $x \notin \bigcap_{\alpha \in \Lambda} P_\alpha$. Kjo vërteton pohimin. ■

Përkufizim 2.1.16 *Le të jetë A një hiperideal i djathtë i H dhe le të jetë $\{K_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ bashkësia e hiperidealeve të pastra të djathta që përmbajnë A . Atëherë, përcaktojmë $P(A) = \bigcap_{\alpha \in \Lambda} K_\alpha$ dhe e quajmë atë hiperradikal të pastër të A . Theksojmë se bashkësia $\{K_\alpha : K_\alpha \text{ është një hiperideal i pastër i djathtë që përmban } A\}$ është joboshe, meqenëse vetë H i përket kësaj bashkësie.*

Pohim 2.1.17 Në qoftë se $P(A)$ është hiperradikali i pastër i hiperidealit A , atëherë është i vërtetë secili nga pohimet e mëposhtme:

1. $P(A)$ është një hiperideal i pastër ose gjysmë i pastër i cili përmban A .
2. $P(A)$ përfshihet në çdo hiperideal të pastër të djathtë që përmban A .
3. Në qoftë se P_α janë ato hiperideale pastërtisht prim që përmbajnë A , atëherë

$$P(A) = \bigcap_{\alpha} P_{\alpha}$$

Vërtetim. (1). Në qoftë se bashkësia $\{K_{\alpha} : \alpha \in \Lambda, K_{\alpha} \text{ është një hiperideal i pastër i djathtë i } H \text{ që përmban } A\}$ përmban vetëm H , atëherë $P(A) = H$, prandaj në këtë rast, $P(A)$ është i pastër. Në rastin kur bashkësia $\{K_{\alpha} : K_{\alpha} \text{ është një hiperideal i pastër i djathtë që përmban } A\}$ ka vetëm një numër të fundëm elementesh, atëherë, nga Pohimi 2.1.8, $P(A)$ është i pastër. Në përgjithësi, $P(A)$ është gjysmëprim.

(2). Evident.

(3). Meqenëse çdo hiperideal i pastër përfshihet në një hiperideal pastërtisht maksimal (Pohim 14) dhe çdo hiperideal pastërtisht maksimal është pastërtisht prim (Pohim 2.1.11), bashkësia $\{P_{\alpha} : P_{\alpha} \text{ është pastërtisht prim që përmban } A\}$ është joboshe. Kështu, nga (2), rrjedh se $P(A) \subseteq \bigcap_{\alpha} P_{\alpha}$. Të vërtetojmë se $\bigcap_{\alpha} P_{\alpha} \subseteq P(A)$. Për këtë, supozojmë se $x \notin P(A)$. Meqenëse

$$P(A) = \bigcap_{\alpha} K_{\alpha}, \text{ ku çdo } K_{\alpha} \text{ është një hiperideal i pastër i djathtë që përmban } A, \text{ atëherë } x \notin K_{\alpha_0}$$

për ndonjë α_0 . Kështu, K_{α_0} është një hiperideal i pastër i mirëfilltë që përmban A , por jo x .

Si rrjedhim, nga Pohimi 2.1.13, ekziston një hiperideal pastërtisht prim P_{α_0} i tillë që

$$A \subseteq K_{\alpha_0} \subseteq P_{\alpha_0} \text{ dhe } x \notin P_{\alpha_0}. \text{ Pra, } x \notin \bigcap_{\alpha} P_{\alpha}, \text{ ku } P_{\alpha} \text{ janë hiperideale pastërtisht prim që}$$

përmbajnë A . Që këtëj arrijmë në përfundimin se $P(A) = \bigcap_{\alpha} P_{\alpha}$. ■

Përkufizim 2.1.18 Le të jetë A një hiperideal i H . Atëherë, $H(A)$ pjesa gjysmë e pastër (the semipure part) e A , që është bashkimi i gjithë hiperidealeve gjysmë të pastra që përfshihen në A , quhet hiperradikali gjysmë i pastër (the semipure hyperradical) i A .

Pohim 2.1.19 Për çdo hiperideal A , $H(A)$ është prerja e hiperidealeve gjysmëpastërtisht prim.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Pohimi 2.1.15. ■

Vërejmë se $P(A)$ dhe $H(A)$ janë në përgjithësi, të ndryshëm. Për shembull, në qoftë se $A = \{0, d\}$ (Shembull 2.1.4), atëherë $P(A) = \{0, d, f\}$ dhe $H(A) = \{0\}$.

§2.2 Kuazi-hiperidealet në gjysmëhipergrupet

Koncepti i bi-idealit është prezantuar për here të parë nga Good dhe Hughes në 1952 [40]. Koncepti i kuazi-idealeve është një përgjithësim i konceptit të idealit të njëanshëm. Ky koncept u prezantua nga Otto Steinfeld në 1953 për unazat [41] dhe në 1956 për gjysmëgrupet [42] dhe më pas ai u studiua gjerësisht në struktura të ndryshme algjebrike. Një monografi e njohur mbi kuazi-idealet është shkruar nga by Otto Steinfeld në 1978 [43].

Në këtë seksion përgjithësojmë konceptin e kuazi-idealeve duke prezantuar konceptin e kuazi-hiperidealit në gjysmëhipergrupet dhe për më tepër, prezantojmë konceptin e një (m,n) -kuazi-hiperideali, të hiperidealit n -të djathtë, m -të majtë në gjysmëhipergrupet dhe studiojmë marrëdhëniet ndërmjet tyre; përftojme karakterizime të ndryshme lidhur me veti të ndryshme të (m,n) -kuazi-hiperidealeve, (m,n) -kuazi-hiperidealeve minimale, hiperidealeve m -të majta minimale, hiperidealeve n -të djathta minimale dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet tyre. Gjithashtu, janë studiuar disa veti të prerjes dhe karakterizime të (m,n) -kuazi-hiperidealeve të gjysmëhipergrupeve dhe gjysmëhipergrupeve të rregullta. Në vazhdim janë përcaktuar gjysmëhipergrupet e thjeshta m - të majta, të thjeshta n -të djathta dhe (m,n) -kuazi-të thjeshta dhe janë shqyrtuar disa veti të tyre.

§2.2.1 (m, n) -kuazi-hiperidealet, hiperidealet m -të majta dhe n -të djathta

Përkufizim 2.2.1.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë, Q quhet kuazi-hiperideal (quasi-hyperideal) i H në qoftë se,*

$$Q \circ H \cap H \circ Q \subseteq Q.$$

Shembull 2.2.1.2 *Le të jetë $(H, \circ)$ një gjysmëhipergrup në $H = \{x, y, z, t\}$, ku hiperveprimi $\circ$ jepet nga tabela e mëposhtme:*

$\circ$	x	y	z	t
x	x	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	H
y	y	y	$\{y, t\}$	$\{y, t\}$
z	z	$\{z, t\}$	z	$\{z, t\}$
t	t	t	t	t

Shihet lehtë se $Q_1 = \{t\}$, $Q_2 = \{z, t\}$, $Q_3 = \{y, t\}$ dhe $Q_4 = \{y, z, t\}$ janë kuazi-hiperideale të H .

Shembull 2.2.1.3 *Le të jetë $(H, \circ)$ një gjysmëhipergrup në $H = \{a, b, c, d, e, f\}$, ku hiperveprimi $\circ$ jepet nga tabela e mëposhtme:*

$\circ$	a	b	c	d	e	f
a	a	$\{a,b\}$	c	$\{c,d\}$	e	$\{e,f\}$
b	b	b	d	d	f	f
c	c	$\{c,d\}$	c	$\{c,d\}$	c	$\{c,d\}$
d	d	d	d	d	d	d
e	e	$\{e,f\}$	c	$\{c,d\}$	e	$\{e,f\}$
f	f	f	d	d	f	f

Është e qartë se $Q_1 = \{d\}$, $Q_2 = \{d, f\}$ dhe $Q_3 = \{b, d, f\}$ janë kuazi-hiperideale të H .

Shembull 2.2.1.4 Le të jetë $H = [0, 1]$. Atëherë, H e pajisur me hiperveprimin $x \circ y = [0, xy]$ është një gjysmëhipergrup. Le të jetë $t \in [0, 1]$ dhe $T = [0, t]$. Atëherë, T është gjysmëhipergrup dhe për më tepër, T është një kuazi-hiperideal i H .

Shembull 2.2.1.5 Le të jetë $H = (0, 1)$. Atëherë, H e pajisur me hiperveprimin $x \circ y = \{\frac{xy}{2^k} \mid 0 \leq k \leq 1\}$ është gjysmëhipergrup. Le të jetë $Q_i = (0, \frac{1}{2^i})$, ku $i \in \mathbb{N}$. Atëherë, Q_i janë gjysmëhipergrupe dhe për më tepër, Q_i janë kuazi-hiperideale të H .

Shembull 2.2.1.6 Le të jetë $H = \mathbb{N}$. Atëherë, H e pajisur me hiperveprimin $x \circ y = x + y + 5\mathbb{N}$ është gjysmëhipergrup. Le të jetë $Q_i = \{i, i+1, \dots\}$, ku $i \in \mathbb{N}$. Atëherë, Q_i janë gjysmëhipergrupe dhe për më tepër, Q_i janë kuazi-hiperideale të H .

Përkufizim 2.2.1.7 Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë, Q quhet (m, n) -kuazi-hiperideal ((m, n) -quasi-hyperideal) i H në qoftë se $H^m \circ Q \cap Q \circ H^n \subseteq Q$, ku m dhe n janë numra të plotë pozitivë.

Shembull 2.2.1.8 Të gjithë kuazi-hiperidealet e Shembullit 2.2.1.2, 2.2.1.3, 2.2.1.4, 2.2.1.5 dhe 2.2.1.6 janë përkatësisht, (m, n) -kuazi-hiperideale të H .

Është e qartë se një kuazi-hiperideal Q i një gjysmëhipergrupi H është $(1, 1)$ -kuazi-hiperideal i H . Për më tepër, një (m, n) -kuazi-hiperideal i H është (k, l) -kuazi-hiperideal i H për çdo $k \geq m$ dhe $l \geq n$. Shembulli që vijon tregon se një (m, n) -kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi H nuk është e nevojshme të jetë një kuazi-hiperideal i H .

Shembull 2.2.1.9 Le të jetë $H = \mathbb{N}$. Atëherë, H e pajisur me hiperveprimin $x \circ y = x + y + 5\mathbb{N}$ është një gjysmëhipergrup. Le të jetë $Q = \{5\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 12\}$. Atëherë Q është gjysmëhipergrup. Verifikohet lehtë se Q është $(2, 3)$ -kuazi-hiperideal i H . Por, meqenëse $5 \circ 1 \subseteq \mathbb{N} \circ Q \cap Q \circ \mathbb{N} \not\subseteq Q$, atëherë Q nuk është një kuazi-hiperideal i H .

Në qoftë se marrim në shqyrtim klasën e kuazi-hiperidealeve në gjysmëhipergrup, vërejmë se ajo është përgjithësimi i klasës së hiperidealeve të njëanshme në gjysmëhipergrup. Është e qartë se çdo hiperideal i njëanshëm i një gjysmëhipergrupi është një kuazi-hiperideal i tij.

Lemë 2.2.1.10 Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe A_i një nëngjysmëhipergrup i H , për çdo $i \in I$. Në qoftë se $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$, atëherë $\bigcap_{i \in I} A_i$ është një nëngjysmëhipergrup i H .

Vërtetim: Supozojmë se $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Le të jetë $a, b \in \bigcap_{i \in I} A_i$. Atëherë $a, b \in A_i$ për çdo $i \in I$. Meqenëse A_i është nëngjysmëhipergrup i H për çdo $i \in I$, $a \circ b \subseteq A_i$ për çdo $i \in I$. Që këtë, $a \circ b \subseteq \bigcap_{i \in I} A_i$, kështu që $\bigcap_{i \in I} A_i$ është nëngjysmëhipergrup i H . ■

Pohim 2.2.1.11 Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Le të jenë Q_i dhe A_i , përkatësisht një (m, n) -kuazi-hiperideal dhe një nëngjysmëhipergrup i H për çdo $i \in I$. Atëherë, $A_i \cap Q_i$ është ose boshe, ose një (m, n) -kuazi-hiperideal i A_i .

Vërtetim: Në qoftë se $A_i \cap Q_i$ është joboshe, atëherë $A_i \cap Q_i$ është një nënbashkësi e A_i , e tillë që $((A_i^m \cap Q_i) \circ A_i^m) \cap (A_i^n \circ (A_i^n \cap Q_i)) \subseteq A_i \circ A_i \subseteq A_i$ dhe $((A_i^m \cap Q_i) \circ A_i^m) \cap (A_i^n \circ (A_i^n \cap Q_i)) \subseteq Q_i \circ H^m \cap H^n \circ Q_i \subseteq Q_i$. Kjo tregon se $A_i \cap Q_i$ është një (m, n) -kuazi-hiperideal i A_i për çdo $i \in I$. ■

Pohim 2.2.1.12 Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe $\{Q_i, i \in I\}$ një bashkësi e (m, n) -kuazi-hiperidealeve të H . Në qoftë se $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, atëherë $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim: Le të jetë Q_i një (m, n) -kuazi-hiperideal i H për $i \in I$. Supozojmë se $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$.

Atëherë, për çdo Q_j , për çdo $j \in I$, kemi që

$$(H^m \circ (\bigcap_{i \in I} Q_i)) \cap ((\bigcap_{i \in I} Q_i) \circ H^m) \subseteq H^m \circ Q_j \cap Q_j \circ H^n \subseteq Q_j.$$

Kjo tregon se $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është (m, n) -kuazi-hiperideal i H . ■

Teoremë 2.2.1.13 Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q_i një (m, n) -kuazi-hiperideal për çdo $i \in I$. Në qoftë se $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$, atëherë $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është (m, n) -kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim: Supozojmë se $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$. Nga Lemma 2.2.1.10 dhe Pohimi 2.2.1.12, kemi që $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një nëngjysmëhipergrup i H . Le të jetë $a \in H^m \circ (\bigcap_{i \in I} Q_i) \cap (\bigcap_{i \in I} Q_i) \circ H^n$. Atëherë, kemi

që $a \in x \circ q = p \circ y$ për $x \in H^m, y \in H^n$ dhe $p, q \in \bigcap_{i \in I} Q_i$. Por, meqenëse $p, q \in \bigcap_{i \in I} Q_i$, kemi $p, q \in Q_i$ për çdo $i \in I$. Në këtë mënyrë, $a \in H^m \circ Q_i \cap Q_i \circ H^n$ për çdo $i \in I$. Meqë dimë se Q_i është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H për çdo $i \in I$, kemi që $a \in \bigcap_{i \in I} Q_i$. Që këtëj, $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H . ■

Le të jetë tani H një gjysmëhipergrup dhe A një nënbashkësi joboshe e H . Shënojmë $\mathcal{F} = \{Q \mid Q \text{ është një } (m, n)\text{-kuazi-hiperideal i } H \text{ që përmban } A\}$. Është e qartë se $\mathcal{F}$ është joboshe meqenëse $H \in \mathcal{F}$. Le të jetë $(A)_{q(m,n)} = \bigcap_{Q \in \mathcal{F}} Q$. Është e qartë se $(A)_{q(m,n)}$ është joboshe meqenëse $A \subseteq (A)_{q(m,n)}$. Nga Teorema 2.2.1.13, $(A)_{q(m,n)}$ është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H dhe për më tepër, është (m, n) -kuazi-hiperideali më i vogël i H që përmban A . (m, n) -kuazi-hiperideali $(A)_{q(m,n)}$ quhet (m, n) -kuazi-hiperideali i H i përfshuar nga A ((m, n) -quasi-hyperideal of H generated by A).

Teoremë 2.2.1.14 Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe $\emptyset \neq A \subseteq H$. Atëherë

$$(A)_{q(m,n)} = \left(\bigcup_{i=1}^{\max\{m,n\}} A^i \right) \cup (H^m \circ A \cap A \circ H^n).$$

Vërtetim: Le të jetë $k = \max\{m, n\}$ dhe $Q = \left(\bigcup_{i=1}^k A^i \right) \cup (H^m \circ A \cap A \circ H^n)$. Është e qartë se $A \subseteq Q$. Le të jetë $x, y \in Q$. Paraqiten rastet e mëposhtme:

Rasti 1. $x, y \in \bigcup_{i=1}^k A^i$. Atëherë, $x \circ y \subseteq A^t$ për ndonjë numër të plotë pozitiv t . Në qoftë se $t \leq k$, atëherë $x \circ y \subseteq \bigcup_{i=1}^k A^i$. Në qoftë se $t \geq k$, atëherë $x \circ y \subseteq H^m \circ A \cap A \circ H^n$.

Rasti 2. $x \in H^m \circ A \cap A \circ H^n$ ose $y \in H^m \circ A \cap A \circ H^n$. Shihet lehtë se $x \circ y \subseteq H^m \circ A \cap A \circ H^n$. Që këtëj, $x \circ y \subseteq Q$. Atëherë, Q është një nëngjysmëhipergrup i H që përmban A . Kemi që

$$\begin{aligned} H^m \circ Q \cap Q \circ H^n &= H^m \circ \left(\left(\bigcup_{i=1}^k A^i \right) \cup (H^m \circ A \cap A \circ H^n) \right) \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^k A^i \right) \cup (H^m \circ A \cap A \circ H^n) \right) \circ H^n \\ &\subseteq H^m \circ \left(\left(\bigcup_{i=1}^k A^i \right) \cup H^m \circ A \right) \cap \left(\left(\bigcup_{i=1}^k A^i \right) \cup A \circ H^n \right) \circ H^n \subseteq H^m \circ A \cap A \circ H^n \subseteq Q. \end{aligned}$$

Pra, Q është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H që përmban A .

Të tregojmë se Q është më i vogli. Le të jetë Q' një (m, n) -kuazi-hiperideal i H që përmban A . Atëherë $A^i \subseteq Q'$, për çdo numër të plotë pozitiv i dhe $H^m \circ A \cap A \circ H^n \subseteq H^m \circ Q' \cap Q' \circ H^n \subseteq Q'$. Që këtë, $Q = (\bigcup_{i=1}^k A^i) \cup (H^m \circ A \cap A \circ H^n) \subseteq Q'$, kështu që Q është (m, n) -kuazi-hiperideali më i vogël i H që përmban A . Në këtë mënyrë përftuam rezultatin e kërkuar. ■

Shembull 2.2.1.15 Le të jetë H gjysmëhipergrupi i Shembullit 2.2.1.3 dhe $A = \{e, f\} \subseteq H$. Duke zbatuar rezultatin e Teoremës së mësipërme, përftojmë $(A)_{q(m,n)} = \{c, d, e, f\}$.

Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe L një nëngjysmëhipergrup i H . Atëherë L quhet hiperideal m -i majtë (m -left hyperideal) i H në qoftë se $H^m \circ L \subseteq L$, ku m është një numër i plotë pozitiv i çfarëdoshëm. Në mënyrë analoge, në qoftë se $R \circ H^n \subseteq R$, atëherë R quhet hiperideal n -i djathtë (n -right hyperideal) i H , ku n është një numër i plotë pozitiv i çfarëdoshëm. Në teoremën e mëposhtme provojmë disa rezultate në lidhje me hiperidealet m -të majta dhe n -të djathta të gjysmëhipergrupeve.

Teoremë 2.2.1.16 Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:

1. Le të jetë L_i një hiperideal m -i majtë i H për çdo $i \in I$. Në qoftë se $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$, atëherë

$\bigcap_{i \in I} L_i$ është hiperideal m -i majtë i H .

2. Le të jetë R_i një hiperideal n -i djathtë i H për çdo $i \in I$. Në qoftë se $\bigcap_{i \in I} R_i \neq \emptyset$, atëherë

$\bigcap_{i \in I} R_i$ është hiperideal n -i djathtë i H .

Vërtetim: (1). Supozojmë se $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$. Le të jetë $a \in H^m \circ (\bigcap_{i \in I} L_i)$. Që këtë rrjedh se $a \in x \circ l$ për ndonjë $x \in H^m$ dhe $l \in \bigcap_{i \in I} L_i$. Atëherë $l \in L_i$ për çdo $i \in I$. Atëherë, $a \in H^m \circ L_i$ për çdo $i \in I$. Meqenëse L_i është një hiperideal m -i majtë i H për çdo $i \in I$, $a \in L_i$ për çdo $i \in I$. Pra, $a \in \bigcap_{i \in I} L_i$. Si rrjedhim, $\bigcap_{i \in I} L_i$ është një hiperideal m -i majtë i H .

- (2). Vërtetohet në mënyrë të ngjashme me (1). ■

Le të jetë tani H një gjysmëhipergrup dhe A një nënbashkësi joboshe e H . Shënojmë $\mathcal{F} = \{L \mid L \text{ është një hiperideal } m\text{-i majtë i } H \text{ që përmban } A\}$. Është e qartë se $\mathcal{F}$ është joboshe meqenëse $H \in \mathcal{F}$. Le të jetë $(A)_{l(m)} = \bigcap_{L \in \mathcal{F}} L$. Është e qartë se $(A)_{l(m)}$ është joboshe, meqenëse $A \subseteq (A)_{l(m)}$. Nga Teorema 2.2.1.16(1), $(A)_{l(m)}$ është një hiperideal m -i majtë i H dhe për më tepër, është hiperideali m -i majtë më i vogël i H që përmban A . Hiperideali m -i majtë $(A)_{l(m)}$ quhet *hiperideali m -i majtë i H i përftuar nga A* (*m -left hyperideal of H generated by A*). Hiperideali n -i djathtë $(A)_{r(n)}$ i H i përftuar nga A (*n -right hyperideal $(A)_{r(n)}$ of H generated by A*) përcaktohet në mënyrë analoge.

Teoremë 2.2.1.17 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe $\emptyset \neq A \subseteq H$. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. $(A)_{l(m)} = (\bigcup_{i=1}^m A^i) \cup H^m \circ A$.
2. $(A)_{r(n)} = (\bigcup_{i=1}^n A^i) \cup A \circ H^n$.

Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 2.2.1.14. ■

Teoremë 2.2.1.18 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe L, R , përkatësisht një hiperideal m -i majtë dhe një hiperideal n -i djathtë i H . Atëherë, $L \cap R$ është (m, n) -kuazi-hiperideal i H .*

Vërtetim: Nga vetitë e L dhe R , kemi që $R^m \circ L^n \subseteq H^m \circ L \cap R \circ H^n \subseteq L \cap R$. Atëherë, $L \cap R$ është joboshe. Nga Lema 2.2.1.10 rrjedh se $L \cap R$ është nëngjysmëhipergrup i H . Tani, kemi që

$$(H^m \circ (L \cap R)) \cap ((L \cap R) \circ H^n) \subseteq H^m \circ L \cap R \circ H^n \subseteq L \cap R,$$

që provon se $L \cap R$ është një (m, n) -kuazi-hiperideal i H . ■

Themi se një (m, n) -kuazi-hiperideal Q ka vetinë e (m, n) prerjes në qoftë se Q është prerja e një hiperideali m -të majtë me një hiperideal n -të djathtë të gjysmëhipergrupit H . Në këtë rast, çdo hiperideal m -i majtë dhe çdo hiperideal n -i djathtë ka vetinë e (m, n) prerjes. Në qoftë se një familje e çfarëdoshme (m, n) -kuazi-hiperidealesh të H ka vetinë e (m, n) prerjes, atëherë thuhet se H ka vetinë e prerjes të (m, n) -kuazi-hiperidealit. Teorema që vijon karakterizon (m, n) -kuazi-hiperidealet që kanë vetinë e (m, n) prerjes.

Teoremë 2.2.1.19 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një (m, n) -kuazi-hiperideal i H . Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. Q ka vetinë e (m, n) prerjes.

$$2. (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q.$$

$$3. H^m \circ Q \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q.$$

$$4. Q \circ H^n \cap (Q \cup Q \circ H^n) \subseteq Q.$$

Vërtetim: (1) $\Rightarrow$ (2). Q ka vetinë e (m, n) prerjes. Është e qartë se $Q \subseteq (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n)$ (*). Meqenëse Q ka vetinë e (m, n) prerjes, ekziston një hiperideal m -i majtë L dhe një hiperideal n -i djathtë R i H të tilla që $Q = L \cap R$, kështu që $Q \subseteq L$ dhe $Q \subseteq R$. Gjithashtu, kemi që $H^m \circ Q \subseteq H^m \circ L \subseteq L$ dhe në mënyrë të ngjashme, $Q \circ H^n \subseteq R \circ H^n \subseteq R$. Kjo sjell që $Q \cup H^m \circ Q \subseteq L$ dhe $Q \cup Q \circ H^n \subseteq R$. Që këtë, kemi $(Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) \subseteq L \cap R \subseteq Q$ (**). Në këtë mënyrë, nga (*) dhe (**) kemi që $(Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë $(Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q$. Të tregojmë se $Q \cup H^m \circ Q$ është një hiperideal m -i majtë i H dhe $Q \cup Q \circ H^n$ është një hiperideal n -i djathtë i H . Le të jetë $L = Q \cup H^m \circ Q$ dhe $R = Q \cup Q \circ H^n$. Të tregojmë se L është nëngjysmëhipergrup i H . Le të jetë $a, b \in L$. Paraqiten rastet e mëposhtme:

Rasti 1. $a, b \in Q$. Atëherë, meqenëse Q është një nëngjysmëhipergrup i H , $a \circ b \in Q \subseteq L$.

Rasti 2. $a \in Q$ dhe $b \in H^m \circ Q$. Atëherë, $a \circ b \in Q \circ H^m \circ Q \subseteq H^m \circ Q \subseteq L$.

Rasti 3. $a \in H^m \circ Q$ dhe $b \in Q$. Atëherë, $a \circ b \in H^m \circ Q \circ Q \subseteq H^m \circ Q \subseteq L$.

Rasti 4. $a \in H^m \circ Q$ dhe $b \in H^m \circ Q$. Atëherë, $a \circ b \in H^m \circ Q \circ H^m \subseteq H^m \circ Q \subseteq L$.

Si rrjedhim, L është një nëngjysmëhipergrup i H . Kemi që

$$H^m \circ L = H^m \circ (Q \cup H^m \circ Q) = H^m \circ Q \cup H^{2m} \circ Q \subseteq H^m \circ Q \subseteq L,$$

kështu që L është hiperideal m -i majtë i H . Në mënyrë të ngjashme, R është hiperideal n -i djathtë i H . Meqenëse $H^m \circ Q \cap Q \circ H^n \subseteq Q$, $L \cap R = (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q \cup (H^m \circ Q \cap Q \circ H^n) = Q$. Si rrjedhim, $Q = L \cap R$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Le të jetë $(Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q$. Meqenëse $H^m \circ Q \subseteq Q \cup H^m \circ Q$, kemi që $H^m \circ Q \cap (Q \cup Q \circ H^n) \subseteq (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q$.

(3) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë $H^m \circ Q \cap (Q \cup Q \circ H^n) = Q$. Atëherë $Q \subseteq (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n)$ (*). Le të jetë $x \in (Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n)$. Atëherë, meqenëse $H^m \circ Q \cap (Q \cup Q \circ H^n) \subseteq Q$, kemi që $x \in Q$, prandaj $(Q \cup H^m \circ Q) \cap (Q \cup Q \circ H^n) \subseteq Q$ (**). Nga (*) dhe (**) marrim rezultatin e kërkuar.

Vërtetimi për $(2) \Rightarrow (4)$ dhe $(4) \Rightarrow (2)$ është i ngjashëm, përkatësisht me vërtetimin e $(2) \Rightarrow (3)$ dhe $(3) \Rightarrow (2)$. ■

Pohim 2.2.1.20 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një (m,n) -kuazi-hiperideal i H . Në qoftë se $H^m \circ Q \subseteq Q \circ H^n$ ose $Q \circ H^m \subseteq H^n \circ Q$, atëherë Q ka vetinë e (m,n) prerjes.*

Vërtetim: Supozojmë se $H^m \circ Q \subseteq Q \circ H^n$. Atëherë $H^m \circ Q = H^m \circ Q \cap Q \circ H^n \subseteq Q$, gjë që tregon se Q është një hiperideal m -i majtë i H . Pra, Q ka vetinë e (m,n) prerjes. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se supozojmë se $Q \circ H^m \subseteq H^n \circ Q$, atëherë Q ka një hiperideal n -të djathtë të H . Edhe në këtë rast Q ka vetinë e (m,n) prerjes. ■

Teorema e mëposhtme merret me vetinë e prerjes së (m,n) -kuazi-hiperidealeve të një gjysmëhipergrupi të rregullt.

Teoremë 2.2.1.21 *Çdo gjysmëhipergrup i rregullt H ka vetinë e prerjes të (m,n) -kuazi-hiperidealeve për çdo numër të plotë pozitiv $m, n \in \mathbb{N}$.*

Vërtetim: Le të jetë Q një (m,n) -kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi të rregullt H . Atëherë, tregohet lehtë se $Q \subseteq Q \circ H^n$. Pra, $Q \cup Q \circ H^n = Q \circ H^n$. Si rrjedhim, $H^m \circ Q \cap (Q \cup Q \circ H^n) = H^m \circ Q \cap Q \circ H^n \subseteq Q$. Nga Teorema 2.2.1.19 rrjedh se Q ka vetinë e prerjes. ■

§2.2.2 (m,n) -kuazi-hiperidealet minimale, hiperidealet m -të majta minimale dhe hiperidealet n -të djathta minimale

Përkufizim 2.2.2.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe L një hiperideal m -i majtë i H . Atëherë, L quhet hiperideal m -i majtë minimal (minimal m -left hyperideal) i H , në qoftë se L nuk përmban rigorozisht asnjë hiperideal m -të majtë të H .*

Përkufizim 2.2.2.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe R një hiperideal n -i djathtë i H . Atëherë, R quhet hiperideal n -i djathtë minimal (minimal n -right hyperideal) i H në qoftë se R nuk përmban rigorozisht asnjë hiperideal n -të djathtë të H .*

Përkufizim 2.2.2.3 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një (m,n) -kuazi-hiperideal i H . Atëherë, Q quhet (m,n) -kuazi-hiperideal minimal (minimal (m,n) -quasi-hyperideal) i H në qoftë se Q nuk përmban rigorozisht asnjë (m,n) -kuazi-hiperideal të H .*

Lemë 2.2.2.4 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe $a \in H$. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. $H^m \circ a$ është hiperideal m -i majtë i H .
2. $a \circ H^n$ është hiperideal n -i djathtë i H .

3. $H^m \circ a \cap a \circ H^n$ është (m,n) -kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim: (1). Kemi që $(H^m \circ a) \circ (H^m \circ a) \subseteq H^m \circ a$ dhe $H^m \circ (H^m \circ a) \subseteq H^m \circ a$, kështu që është i vërtetë (1).

(2). Vërtetimi është i ngjashëm me atë të (1).

(3). Vërtetimi rrjedh nga (1), (2) dhe Teorema 2.2.1.18. ■

Teoremë 2.2.2.5 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup dhe Q një (m,n) -kuazi-hiperideal i H . Atëherë Q është minimal vetëm atëherë kur Q është prerja e ndonjë hiperideali m -të majtë minimal L dhe ndonjë hiperideali n -të djathtë minimal R të H .*

Vërtetim: Supozojmë se Q është një (m,n) -kuazi-hiperideal minimal i H . Le të jetë $a \in Q$. Nga Lema 2.2.2.4, rrjedh se $H^m \circ a, a \circ H^n$ dhe $H^m \circ a \cap a \circ H^n$ janë përkatësisht, hiperideal m -i majtë, hiperideal n -i djathtë dhe (m,n) -kuazi-hiperideal i H . Nga minimaliteti i Q , meqenëse $H^m \circ a \cap a \circ H^n \subseteq H^m \circ Q \cap Q \circ H^n \subseteq Q$, kemi që $H^m \circ a \cap a \circ H^n = Q$.

Të tregojmë tani se hiperideali m -i majtë $H^m \circ a$ dhe hiperideali n -i djathtë $a \circ H^n$ janë minimal. Le të jetë L një hiperideal m -i majtë i H që përfshihet në $H^m \circ a$. Atëherë, kemi $L \cap a \circ H^n \subseteq H^m \circ a \cap a \circ H^n = Q$. Nga minimaliteti i Q , meqenëse $L \cap a \circ H^n$ është një (m,n) -kuazi-hiperideal i H , rrjedh që $L \cap a \circ H^n = Q$. Atëherë, $Q \subseteq L$. Si rrjedhim, $H^m \circ a \subseteq H^m \circ Q \subseteq H^m \circ L \subseteq L$. Që këtë, $H^m \circ a \subseteq H^m \circ Q \subseteq H^m \circ L \subseteq L$. Kjo sjell që $L = H^m \circ a$, kështu që hiperideali m -i majtë $H^m \circ a$ është minimal. Në mënyrë të ngjashme, provohet minimaliteti i hiperidealit n -të djathtë të $a \circ H^n$.

Anasjellas, supozojmë se $Q = L \cap R$ për ndonjë hiperideal m -të majtë minimal L dhe ndonjë hiperideal n -të djathtë minimal R të H . Le të jetë Q' një (m,n) -kuazi-hiperideal i H që përfshihet në Q . Atëherë, kemi që

$$H^m \circ Q' \subseteq H^m \circ Q \subseteq H^m \circ L \subseteq L \text{ dhe } Q' \circ H^n \subseteq Q \circ H^n \subseteq R \circ H^n \subseteq R.$$

Provohet lehtë se $H^m \circ Q'$ dhe $Q' \circ H^n$ janë përkatësisht, hiperideal m -i majtë dhe hiperideal n -i djathtë i H . Minimaliteti i L dhe R sjell që $H^m \circ Q' = L$ dhe $Q' \circ H^n = R$, kështu që $Q = L \cap R = H^m \circ Q' \cap Q' \circ H^n \subseteq Q'$. Atëherë $Q = Q'$. Që këtë, Q është (m,n) -kuazi-hiperideal minimal i H . ■

Pohimet e mëposhtme japin kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme për ekzistencën e një (m,n) -kuazi-hiperideali minimal të një gjysmëhipergrupi.

Pohimi i mëposhtëm është një rrjedhim i drejtpërdrejtë i Teoremës 2.2.2.5.

Rrjedhim 2.2.2.6 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Atëherë, H ka të paktën një (m,n) -kuazi-hiperideal minimal vetëm atëherë kur H ka të paktën një hiperideal m -të majtë minimal dhe të paktën një hiperideal n -të djathtë minimal.*

Teoremë 2.2.2.7 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Një hiperideal m -i majtë L është minimal vetëm atëherë kur $H^m \circ a = L$ për çdo $a \in L$.*
2. *Një hiperideal n -i djathtë R është minimal vetëm atëherë kur $a \circ H^n = R$ për çdo $a \in R$.*
3. *Një (m,n) -kuazi-hiperideal Q është minimal vetëm atëherë kur $H^m \circ a \cap a \circ H^n = Q$ për çdo $a \in Q$.*

Vërtetim: (1). Supozojmë se L është minimal. Le të jetë $a \in L$. Atëherë $H^m \circ a \subseteq H^m \circ L \subseteq L$. Nga Lema 2.2.2.4(1), rrjedh se $H^m \circ a$ është një hiperideal m -i majtë i H . Meqenëse L është hiperideal m -i majtë minimal i H , kemi që $H^m \circ a = L$.

Anasjellas, supozojmë se $H^m \circ a = L$ për çdo $a \in L$. Le të jetë L' një hiperideal m -i majtë i H që përfshihet në L . Le të jetë $x \in L' \subseteq L$. Atëherë, $H^m \circ x = L$. Kemi:

$$L = H^m \circ x \subseteq H^m \circ L' \subseteq L'.$$

Kjo sjell që $L = L'$. Si rrjedhim, L është minimal.

(2) dhe (3) vërtetohen në mënyrë të ngjashme me (1). ■

Përkufizim 2.2.2.8 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. H quhet gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë (m -left simple semihypergroup) në qoftë se H është hiperideali m -i majtë i vetëm i H .*

Përkufizim 2.2.2.9 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. H quhet gjysmëhipergrup i thjeshtë n -i djathtë (n -right simple semihypergroup), në qoftë se H është hiperideali n -i djathtë i vetëm i H .*

Përkufizim 2.2.2.10 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. H quhet gjysmëhipergrup (m,n) -kuazi- i thjeshtë në qoftë se H është (m,n) -kuazi-hiperideali i vetëm i H .*

Teoremë 2.2.2.11 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *H është një gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë vetëm atëherë kur $H^m \circ a = H$ për çdo $a \in H$.*
2. *H është një gjysmëhipergrup i thjeshtë n -i djathtë vetëm atëherë kur $a \circ H^n = H$ për çdo $a \in H$.*
3. *H është një gjysmëhipergrup (m,n) -kuazi- i thjeshtë vetëm atëherë kur $H^m \circ a \cap a \circ H^n = H$ për çdo $a \in H$.*

Vërtetim: (1). Meqenëse H është gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë, kemi që H është hiperideal m -i majtë minimal i H . Nga Teorema 2.2.2.7(1), $H^m \circ a = H$ për çdo $a \in H$.

Anasjellas, supozojmë se $H^m \circ a = H$ për çdo $a \in H$. Nga Teorema 2.2.2.7(1), H është hiperideal m -i majtë minimal i H dhe si rrjedhim, H është gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë.

(2) dhe (3) provohen në mënyrë të ngjashme me (1). ■

Teoremë 2.2.2.12 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se një hiperideal m -i majtë L i H është gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë, atëherë L është hiperideal m -i majtë minimal i H .*
2. *Në qoftë se një hiperideal n -i djathtë R i H është gjysmëhipergrup i thjeshtë n -i djathtë, atëherë R është hiperideal n -i djathtë minimal i H .*
3. *Në qoftë se një (m,n) -kuazi-hiperideal Q i H është gjysmëhipergrup (m,n) -kuazi- i thjeshtë, atëherë Q është (m,n) -kuazi-hiperideal minimal i H .*

Vërtetim: (1). Le të jetë L një gjysmëhipergrup i thjeshtë m -i majtë. Nga Teorema 2.2.2.11(1), kemi që $L^m \circ a = L$ për çdo $a \in L$. Për çdo $a \in L$, kemi $L = L^m \circ a \subseteq H^m \circ a \subseteq H^m \circ L \subseteq L$. Atëherë, $H^m \circ a = L$ për çdo $a \in L$. Nga Teorema 2.2.2.7(1), kemi që L është minimal.

(2) dhe (3) vërtetohen në mënyrë të ngjashme me (1). ■

DISA REZULTATE MBI HIPERIDEAL STRUKTURËN E GJYSMËHIPERGRUPEVE TERNARE

Veprimet ternare algjebrike janë shqyrtuar në shekullin e 19-të nga një sërë matematicienësh si Cayley [59] i cili prezantoi konceptin e “matricës kubike (cubic matrix)” e cila u përgjithësua më vonë nga Kapranov dhe të tjerë, në 1990 [60]. Strukturat ternare dhe përgjithësimet e tyre, të ashtuquajturat strukturat n -are, rritën shpresat për zbatime të mundshme të tyre në fizikë dhe shkenca të tjera. Disa aplikime të rëndësishme fizike në mekanikën Nambu, megjithëse ende hipotetike, në efektin Hall (fractional quantum Hall effect), statistika jo-standarte (the “anyons”), teoritë supersimetrike, ekuacionet Yang–Baxter, etj. mund të gjenden në [61-66]). Koncepti i grupit n -ar u prezantua në 1928 nga W. Dörnte [67] (i frymëzuar nga Emmy Noether). Ideja e shqyrtimeve të algjebrave n -are, domethënë bashkësitë me një veprim n -ar, shkon më larg tek leksioni i Krasner [68] në takimin vjetor të 53-të të Shoqatës Amerikane të Avancimit të Shkencës në 1904. Bashkësitë me një veprim n -ar që plotësojnë veti të ndryshme janë shqyrtuar nga shumë autorë. Të tilla sisteme kanë shumë zbatime në fusha të ndryshme. Për shembull, në teorinë e automatave [69] janë përdorur sistemet n -are që plotësojnë disa ligje shoqërimi, disa sisteme të tjera n -are janë zbatuar në teorinë e grupeve kuantike [70] dhe kombinatorikë [71]. Zbatime të ndryshme të strukturave ternare në fizikë janë përshkruar nga R. Kerner në [72]. Në fizikë janë përdorur gjithashtu struktura të tilla si n -algjebtrat Filippov [73] dhe n -algjebtrat Lie [74]. Disa struktura n -are kanë aplikime në error-correcting dhe error-detecting në teorinë e kodimit, kriptologji si dhe në teorinë e (t, m, s) -rrjetave [75]. Gjysmëgrupet ternare janë algjebra universale me një veprim ternar shoqërimtar. Teoria e sistemeve algjebrike ternare u prezantua nga D. H. Lehmer [76] në 1932. Ai shqyrtoi sisteme të caktuara algjebrike të quajtura triplexes të cilat rezultojnë të jenë grupe ternare ndërrimtare. Koncepti i gjysmëgrupeve ternare u prezantua nga S. Banach (shih [77]). Ai tregoi me një shembull se një gjysmëgrup ternar jo domosdoshmërisht reduktohet në një gjysmëgrup të zakonshëm. Në 1965, Sioson [78] studioi ideal teorinë në gjysmëgrupet ternare. Në [79, 80] Dudek dhe të tjerë studiuin idealet në gjysmëgrupet n -are. Në 1995, Dixit dhe Dewan [81] prezantuan dhe studiuin disa veti të idealeve dhe kuazi-(bi-)idealeve në gjysmëgrupet ternare. Gjithashtu, një sërë rezultatesh të tjera në gjysmëgrupet ternare janë përfutur në [83-89].

Përgjithësimet n -are të strukturave algjebrike janë rruga më e natyrshme për zhvillim të

mëtejshëm dhe kuptim më të thellë të vetive të tyre themelore. Në [11], Davvaz dhe Vougiouklis prezantuan konceptin e hipergrupeve n -are si një përgjithësim i hipergrupeve sipas Marty. Gjithashtu, hipergrupet n -are mund të shqyrtohen si një përgjithësim i këndshëm i grupeve n -are. Davvaz dhe të tjerë, në [20] shqyrtuan një klasë të hipersistemeve algjebrike e cila përfaqëson një përgjithësim të gjysmëgrupeve, gjysmëhipergrupeve dhe gjysmëgrupeve n -are. Gjysmëhipergrupet ternare janë struktura algjebrike me një hiperveprim ternar dhe ato janë një rast i veçantë i gjysmëhipergrupeve n -are (n -semihypergroup) për $n = 3$ (shih [11, 20, 21, 82]).

§3.1 Disa përkufizime të rëndësishme

Përkufizim 3.1.1. *Një pasqyrim $f : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ quhet hiperveprim ternar (ternary hyperoperation) në bashkësinë H , ku H është një bashkësi joboshe dhe $\mathcal{P}^*(H) = \mathcal{P}(H) \setminus \{\emptyset\}$ shënohet bashkësia e gjithë nënbashkësive joboshe të H .*

Përkufizim 3.1.2 *Hipergrupoid ternar (ternary hypergroupoid) quhet çifti (H, f) , ku f është një hiperveprim ternar në bashkësinë H .*

Në qoftë se A, B, C janë nënbashkësi joboshe të H , atëherë përkufizojmë

$$f(A, B, C) = \bigcup_{a \in A, b \in B, c \in C} f(a, b, c).$$

Përkufizim 3.1.3 *Një hipergrupoid ternar (H, f) quhet gjysmëhipergrup ternar (ternary semihypergroup) në qoftë se për çdo $a_1, a_2, \dots, a_5 \in H$, kemi*

$$f(f(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5) = f(a_1, f(a_2, a_3, a_4), a_5) = f(a_1, a_2, f(a_3, a_4, a_5)). \quad (*)$$

Meqenëse bashkësinë $\{x\}$ mundemi ta identifikojmë me elementin x , çdo gjysmëgrup ternar [76] është një gjysmëhipergrup ternar. Një gjysmëgrup ternar jo gjithmonë reduktohet në një gjysmëgrup të zakonshëm. Kjo tregohet në shembullin e mëposhtëm:

Shembull 3.1.4 [81] $S = \{-i, 0, i\}$ formon gjysmëgrup ternar në lidhje me veprimin e shumëzimit me numrat kompleks, por nuk formon një gjysmëgrup binar në lidhje me këtë veprim.

Los [77] tregoi se ndërkaq, çdo gjysmëgrup ternar mund të zhytet në një gjysmëgrup të zakonshëm në mënyrë të tillë që veprimi në gjysmëgrupin ternar është një zgjerim (ternar) i veprimit (binar) të gjysmëgrupit që përmban.

Është e qartë se për shkak të ligjit të shoqërimit në gjysmëhipergrupin ternar (H, f) , për elementet e çfarëdoshme $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1} \in H$ dhe numrat e plotë pozitivë m, n ku $m \leq n$, mundemi të shkruajmë

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}) &= f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_{2n+1}) \\ &= f(x_1, \dots, f(f(x_m, x_{m+1}, x_{m+2}), x_{m+3}, x_{m+4}), \dots, x_{2n+1}). \end{aligned}$$

Përkufizim 3.1.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. H quhet hipergrup ternar (ternary hypergroup) në qoftë se për çdo $a, b, c \in H$, ekzistojnë $x, y, z \in H$ të tilla që:*

$$c \in f(x, a, b) \cap f(a, y, b) \cap f(a, b, z).$$

Përkufizim 3.1.6 *Le të jetë (H, f) një hipergrupoid ternar. Atëherë*

1. (H, f) është $(1,3)$ -ndërrimtar në qoftë se për çdo $a_1, a_2, a_3 \in H, f(a_1, a_2, a_3) = f(a_3, a_2, a_1)$
2. (H, f) është $(2,3)$ -ndërrimtar në qoftë se për çdo $a_1, a_2, a_3 \in H, f(a_1, a_2, a_3) = f(a_1, a_3, a_2)$;
3. (H, f) është $(1,2)$ -ndërrimtar në qoftë se për çdo $a_1, a_2, a_3 \in H, f(a_1, a_2, a_3) = f(a_2, a_1, a_3)$;
4. (H, f) është ndërrimtar në qoftë se për çdo $a_1, a_2, a_3 \in H$ dhe për çdo $\sigma \in \mathbb{S}_3, f(a_1, a_2, a_3) = f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, a_{\sigma(3)})$.

Shembull 3.1.7 *Një hipergrupoid ternar (H, f) i pajisur me veprimin $f(x, y, z) = x$, për çdo $x, y, z \in H$ dhe $|H| > 1$ është një shembull i një gjysmëhipergrupi ternar.*

Shembull 3.1.8 *Le të jetë $(H, *)$ një gjysmëhipergrup. Ne mund të përcaktojmë një gjysmëhipergrup ternar (H, f) ku $f(x, y, z) = x * y * z$ për çdo $x, y, z \in H$.*

Përkufizim 3.1.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe T një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë T quhet nëngjysmëhipergrup ternar (ternary subsemihypergroup) i H vetëm atëherë kur $f(T, T, T) \subseteq T$.*

Përkufizim 3.1.10 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) quhet me element zero në qoftë se ekziston një element $0 \in H$ i tillë që për çdo $a, b \in H, f(0, a, b) = f(a, 0, b) = f(a, b, 0) = \{0\}$.*

Përkufizim 3.1.11 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një element $e \in H$ quhet element identik i majtë (left identity element) i H në qoftë se për çdo $a \in H, f(e, a, a) = \{a\}$. Një element $e \in H$ quhet element identik (identity element) i H në qoftë se për çdo $a \in H, f(a, a, e) = f(e, a, a) = f(a, e, a) = \{a\}$. Është e qartë se $f(e, e, a) = f(e, a, e) = f(a, e, e) = \{a\}$.*

Përkufizim 3.1.12 *Një nënbashkësi joboshe I e një gjysmëhipergrupi ternar H quhet hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) i H në qoftë se $f(H, H, I) \subseteq I (f(I, H, H) \subseteq I, f(H, I, H) \subseteq I)$.*

Një nënbashkësi joboshe I e një gjysmëhipergrupi ternar H quhet hiperideal i H në qoftë se është hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i H . Një nënbashkësi joboshe I e një gjysmëhipergrupi ternar H quhet hiperideal i dyanshëm i H në qoftë se është hiperideal i majtë dhe i djathtë i H .

Përkufizim 3.1.13 *Një hiperideal i majtë I i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet idempotent në qoftë se $f(I, I, I) = I$.*

Përkufizim 3.1.14 *Një element a i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet i rregullt në qoftë se ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a)$.*

Një gjysmëhipergrup ternar H quhet *i rregullt* në qoftë se çdo element i tij është i rregullt. Është e qartë se çdo hipergrup ternar është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt.

Shembull 3.1.15 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, g\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$, $\forall x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela:

$*$	a	b	c	d	e	g
a	a	$\{a, b\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, g\}$
b	b	b	d	d	g	g
c	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$
d	d	d	d	d	d	d
e	e	$\{e, g\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, g\}$
g	g	g	d	d	g	g

Atëherë (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se $I_1 = \{c, d\}$, $I_2 = \{c, d, e, g\}$ dhe H janë hiperideale lateral të H .

Shembull 3.1.16 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, g\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$ për çdo $x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela:

$*$	a	b	c	d	e	g
a	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$	$\{b, c\}$
b	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, c\}$
c	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$	$\{a, b\}$
d	$H - d$	$H - d$	$H - d$	$H - d$	$H - d$	$H - d$
e	$H - e$	$H - e$	$H - e$	$H - e$	$H - e$	$H - e$
g	$H - g$	$H - g$	$H - g$	$H - g$	$H - g$	$H - g$

Atëherë (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar që nuk ka hiperideal lateral të mirëfilltë.

Shembull 3.1.17 [82] Le të jetë $|H| \geq 4$ dhe $f : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$, përcaktuar si më poshtë:

$$f(x_0, x_0, x_0) = H - \{x_0, x_1\}$$

$$f(x, y, z) = H - \{x_0, x_2\}, \forall (x, y, z) \neq (x_0, x_0, x_0)$$

dhe $x_0 \neq x_1 \neq x_2 \neq x_0$. (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Mund të shihet se $H - \{x_0\}$ dhe $H - \{x_0, x_2\}$ janë hiperideale lateral të mirëfilltë të H .

Shembull 3.1.18 Le të jetë $H = \{a, b, c\}$ një bashkësi dhe f një hiperveprim ternar i përcaktuar në H si më poshtë :

$$f(x, y, z) = \begin{cases} x & \text{për } x = y = z, \\ b & \text{për } x \neq y \neq z, \\ z & \text{për } x = y, x \neq z, x \neq b, \\ \{a, c\} & \text{për } x = y = b, z \neq b. \end{cases}$$

Mund të verifikohet lehtë se (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar, dhe për më tepër ai është një hipergrup ndërrimtar.

Shembuj të tjerë gjysmëhipergrupesh ternare mund të gjenden në [11, 20, 21, 22, 82].

§3.2 Disa veti elementare të gjysmëhipergrupeve ternare (0-)të thjeshta të majta dhe (0-)të thjeshtë lateral

Në këtë seksion prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare të thjeshta të majta, të thjeshtë lateral, (0-) të thjeshta të majta dhe (0-) të thjeshtë lateral. Disa veti të tyre studiohen nëpërmjet hiperidealeve të majta dhe hiperidealeve lateral.

Në vazhdim, do të shënojmë me H një gjysmëhipergrup me element identik skalar 1 i cili përmban një element zero.

Përkufizim 3.2.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë lateral (lateral simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal lateral të mirëfilltë.*

Përkufizim 3.2.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë i majtë (left simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal të majtë të mirëfilltë.*

Gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 3.1.16 është i thjeshtë lateral.

Është e qartë që në qoftë se H është një gjysmëhipergrup ternar me zero, atëherë çdo hiperideal lateral i H përmban një element zero.

Përkufizim 3.2.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. H quhet 0-i thjeshtë lateral (lateral 0-simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal lateral të mirëfilltë jozero dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$.*

Përkufizim 3.2.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. H quhet 0-i thjeshtë i majtë (left 0-simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal të majtë të mirëfilltë jozero dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$.*

Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se prerja e gjithë hiperidealeve lateral të një nëngjysmëhipergrupi ternar T të H që përmbajnë një nënbashkësi joboshe A të T është hiperideali lateral i H i përfshuar nga A .

Për çdo element $a \in H$, hiperideali i majtë, i djathtë, lateral, i dyanshmëm dhe hiperideali i përfshuar nga a , jepen përkatësisht nga

$$\langle a \rangle_l = \{a\} \cup f(H, H, a)$$

$$\langle a \rangle_r = \{a\} \cup f(a, H, H)$$

$$\langle a \rangle_m = \{a\} \cup f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H)$$

$$\langle a \rangle_t = \{a\} \cup f(H, H, a) \cup f(a, H, H) \cup f(H, H, a, H, H)$$

$$\langle a \rangle = \{a\} \cup f(H, H, a) \cup f(a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H)$$

Është e thjeshtë të vërtetohen lemat e mëposhtme.

Lemë 3.2.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Për çdo nënbashkësi joboshe A të H , $f(H, H, A, H, H) \cup f(H, A, H) \cup A$ është hiperideali lateral më i vogël i H që përmban A .*

Lemë 3.2.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Për çdo nënbashkësi joboshe A të H , $f(H, H, A) \cup A$ është hiperideali i majtë më i vogël i H që përmban A .*

Lemë 3.2.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Për çdo nënbashkësi joboshe A të H , $f(H, H, A, H, H) \cup f(H, A, H)$ është një hiperideal lateral i H .*

Lemë 3.2.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Për çdo nënbashkësi joboshe A të H , $f(H, H, A)$ është një hiperideal i majtë i H .*

Lemë 3.2.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është i thjeshtë lateral.
2. për çdo $a \in H$, $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) = H$
3. për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_m = H$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë H i thjeshtë lateral. Nga Lema 3.2.7, kemi që për çdo $a \in H$, $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) = H$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Nga Lema 3.2.5, kemi që $\langle a \rangle_m = f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup \{a\} = H \cup \{a\} = H$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë I një hiperideal lateral i H dhe $a \in I$. Atëherë $H = \langle a \rangle_m \subseteq I \subseteq H$. Pra, $I = H$. Si rrjedhim, H është i thjeshtë lateral. ■

Lemë 3.2.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është i thjeshtë i majtë.
2. Për çdo $a \in H$, $f(H, H, a) = H$
3. Për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_l = H$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë H i thjeshtë i majtë. Nga Lema 3.2.8, kemi që për çdo $a \in H$, $f(H, H, a) = H$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Nga Lema 3.2.6, kemi që $\langle a \rangle_l = f(H, H, a) \cup \{a\} = H \cup \{a\} = H$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë L një hiperideal i majtë i H dhe $a \in L$. Atëherë $H = \langle a \rangle_l \subseteq L \subseteq H$. Pra, $L = H$. Si rrjedhim, H është i thjeshtë i majtë. ■

Lemë 3.2.11 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme :*

1. Në qoftë se H është 0-i thjeshtë lateral, atëherë për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_m = H$.

2. Në qoftë se $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_m = H$, atëherë ose $f(H, H, H) = \{0\}$, ose H është 0-i thjeshtë lateral.

Vërtetim. (1). Le të jetë H 0-i thjeshtë lateral. Atëherë për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_m$ është një hiperideal lateral i H i ndryshëm nga zero. Si rrjedhim, për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_m = H$.

(2). Supozojmë se për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_m = H$ dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$. Le të jetë I një hiperideal lateral jozero i H dhe $a \in I \setminus \{0\}$. Atëherë $H = \langle a \rangle_m \subseteq I \subseteq H$, kështu që $I = H$. Rrjedhimisht, H është 0-i thjeshtë lateral. ■

Lemë 3.2.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. Në qoftë se H është 0-i thjeshtë i majtë, atëherë për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_l = H$.

2. Në qoftë se $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_l = H$, atëherë, ose $f(H, H, H) = \{0\}$, ose H është 0-i thjeshtë i majtë.

Vërtetim. (1). Le të jetë H 0-i thjeshtë i majtë. Atëherë për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_l$ është një hiperideal i majtë jozero i H . Që këtë, për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_l = H$.

(2). Supozojmë se për çdo $a \in H \setminus \{0\}$, $\langle a \rangle_l = H$ dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$. Le të jetë L një hiperideal i majtë jozero i H dhe $a \in L \setminus \{0\}$. Atëherë $H = \langle a \rangle_l \subseteq L \subseteq H$, kështu që $L = H$. Si rrjedhim, H është 0-i thjeshtë i majtë. ■

Lemat e mëposhtme kanë vend në mënyrë evidente.

Lemë 3.2.13 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe $\{I_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ një familje hiperidealesh lateral të H . Atëherë $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$ është një hiperideal lateral i H dhe $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha$ është gjithashtu, hiperideal lateral i H në qoftë se $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} I_\alpha \neq \emptyset$.*

Lemë 3.2.14 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe $\{L_\alpha, \alpha \in \Gamma\}$ një familje hiperidealesh të majta të H . Atëherë $\bigcup_{\alpha \in \Gamma} L_\alpha$ është hiperideal i majtë i H dhe $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} L_\alpha$ është gjithashtu, një hiperideal i majtë i H në qoftë se $\bigcap_{\alpha \in \Gamma} L_\alpha \neq \emptyset$.*

Lemë 3.2.15 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar, I një hiperideal lateral i H dhe T një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. Në qoftë se T është i thjeshtë lateral i tillë që $T \cap I \neq \emptyset$, atëherë $T \subseteq I$.

2. Në qoftë se T është 0-i thjeshtë lateral i tillë që $T \setminus \{0\} \cap I \neq \emptyset$, atëherë $T \subseteq I$.

Vërtetim. (1). Supozojmë se T është i thjeshtë lateral i tillë që $T \cap I \neq \emptyset$. Atëherë, le të jetë $a \in T \cap I$. Nga Lema 3.2.7, meqenëse $(f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T)) \cap T$ është një hiperideal lateral i T , rrjedh se $(f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T)) \cap T = T$. Që këtë, $T \subseteq f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T) \subseteq f(H, H, I, H, H) \cup f(H, I, H) \subseteq f(H, I, H) \subseteq I$. Pra, $T \subseteq I$.

(2). Supozojmë se T është 0-i thjeshtë lateral i tillë që $T \setminus \{0\} \cap I \neq \emptyset$. Atëherë, le të jetë $a \in T \setminus \{0\} \cap I$. Nga Lema 3.2.5 dhe Lema 3.2.11(1), kemi që

$$\begin{aligned} T &= \langle a \rangle_m = (f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T) \cup \{a\}) \cap T \subseteq f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T) \cup \{a\} \\ &\subseteq f(T, T, a, T, T) \cup f(T, a, T) \cup \{a\} = \langle a \rangle_m \subseteq I \end{aligned}$$

Pra, $T \subseteq I$. ■

Lemë 3.2.16 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar, L një hiperideal i majtë i H dhe T një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se T është i thjeshtë i majtë i tillë që $T \cap I \neq \emptyset$, atëherë $T \subseteq L$.*
2. *Në qoftë se T është 0-i thjeshtë i majtë i tillë që $T \setminus \{0\} \cap L \neq \emptyset$, atëherë $T \subseteq L$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me vërtetimin e Lemes 3.2.15 duke bërë modifikimet e përshtatshme. ■

Lemë 3.2.17 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se A është një nënbashkësi joboshe e një hiperideali lateral I të H , e tillë që $f(I, I, A, I, I) = f(I, A, I)$, atëherë $f(I, A, I)$ është një hiperideal lateral i H .*

Vërtetim. Le të jetë A një nënbashkësi joboshe e një hiperideali lateral I të H , e tillë që $f(I, I, A, I, I) = f(I, A, I)$. Atëherë $f(H, I, H) \subseteq I$, kështu që

$$\begin{aligned} f(H, f(I, A, I), H) &= f(H, f(I, I, A, I, I), H) = f(f(H, I, I), A, f(I, I, H)) \\ &\subseteq f(f(H, I, H), A, f(H, I, H)) \subseteq f(I, A, I). \end{aligned}$$

Pra, $f(I, A, I)$ është një hiperideal lateral i H . ■

§3.3 Hiperidealet lateral dhe të majta minimale të gjysmëhipergrupeve ternare

Në këtë seksion, japim disa veti të hiperidealeve të majta (0-) minimale dhe lateral (0-) minimal të gjysmëhipergrupeve ternare dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperidealeve të majta (0-) minimale dhe lateral (0-) minimal dhe gjysmëhipergrupeve ternare (0-) të thjeshta të majta dhe (0-) të thjeshtë lateral.

Përkufizim 3.3.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Një hiperideal lateral I i H quhet hiperideal lateral minimal (a minimal lateral hyperideal) i H , në qoftë se nuk ekziston asnjë hiperideal lateral A i H i tillë që $A \subset I$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Një hiperideal lateral I i H quhet hiperideal lateral minimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal lateral A të H të tillë që $A \subseteq I$, kemi $A = I$.*

Hiperideali lateral I_1 i Shembullit 3.1.15 është një hiperideal lateral minimal i H .

Përkufizim 3.3.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Një hiperideal i majtë L i H quhet hiperideal i majtë minimal (minimal left hyperideal) i H , në qoftë se nuk ekziston asnjë hiperideal i majtë A i H i tillë që $A \subset L$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Një hiperideal i majtë L i H , quhet hiperideal i majtë minimal i H në qoftë se për çdo hiperideal të majtë A të H të tillë që $A \subseteq L$, kemi $A = L$.*

Përkufizim 3.3.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal lateral jozero I i H quhet hiperideal lateral 0-minimal (0-minimal lateral hyperideal) i H , në qoftë se nuk ekziston asnjë hiperideal lateral jozero A i H i tillë që $A \subset I$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal lateral jozero I i H quhet hiperideal lateral 0-minimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal lateral jozero A të H të tillë që $A \subseteq I$, kemi $A = I$.* **Përkufizim ekuivalent:** *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal lateral jozero I i H quhet hiperideal lateral 0-minimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal lateral A të H të tillë që $A \subseteq I$, kemi $A = \{0\}$.*

Përkufizim 3.3.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal i majtë jozero L i H quhet hiperideal i majtë 0-minimal (0-minimal left hyperideal) i H , në qoftë se nuk ekziston asnjë hiperideal i majtë jozero A i H i tillë që $A \subset L$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal i majtë jozero L i H quhet hiperideal i majtë 0-minimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal të majtë jozero A të H të tillë që $A \subseteq L$, kemi $A = L$.* **Përkufizim ekuivalent:** *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero. Një hiperideal i majtë jozero L i H quhet hiperideal i majtë 0-minimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal të majtë A të H të tillë që $A \subseteq L$, kemi $A = \{0\}$.*

Teoremë 3.3.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero dhe I një hiperideal lateral i H . Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se I është një hiperideal lateral minimal pa zero i H , atëherë ose ekziston një hiperideal lateral A i I i tillë që $f(I, I, A, I, I) \neq f(I, A, I)$, ose I është i thjeshtë lateral.*
2. *Në qoftë se I është i thjeshtë lateral, atëherë I është një hiperideal lateral minimal i H .*
3. *Në qoftë se I është një hiperideal lateral minimal me zero i H , atëherë ose ekziston një hiperideal lateral jozero A i I i tillë që $f(I, I, A, I, I) \neq f(I, A, I)$ ose I është 0-i thjeshtë lateral.*

Vërtetim. (1). Supozojmë se I është një hiperideal lateral minimal pa zero i H dhe $f(I, I, C, I, I) = f(I, C, I)$ për çdo hiperideal lateral C të I . Le të jetë A një hiperideal lateral i I . Atëherë $f(I, I, A, I, I) = f(I, A, I) \subseteq A \subseteq I$. Nga Lema 3.2.17, kemi që $f(I, A, I)$ është hiperideal lateral i H . Meqenëse I është hiperideal lateral minimal i H , atëherë $f(I, A, I) = I$. Pra, $A = I$. Si rrjedhim, I është i thjeshtë lateral.

(2). Supozojmë se I është i thjeshtë lateral dhe A një hiperideal lateral i H , i tillë që $A \subseteq I$. Atëherë, kemi që $A \cap I \neq \emptyset$. Nga Lema 3.2.15(1) rrjedh se $I \subseteq A$. Që këtë, $A = I$, prandaj I është një hiperideal lateral minimal i H .

(3). Vërtetimi është i ngjashëm me vërtetimin e (1). ■

Teoremë 3.3.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero dhe L një hiperideal i majtë i H . Atëherë janë të vërteta pohimet mëposhtme:*

1. *Në qoftë se L është një hiperideal i majtë minimal pa zero i H , atëherë L është i thjeshtë i majtë.*
2. *Në qoftë se L është një hiperideal i majtë minimal me zero i H , atëherë L është 0-i thjeshtë i majtë.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 3.3.5. ■

Teoremë 3.3.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero dhe I një hiperideal lateral jozero i H . Atëherë janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se I është një hiperideal lateral 0-minimal i H , atëherë, ose ekziston një hiperideal lateral jozero A i I i tillë që $f(I, I, A, I, I) \neq f(I, A, I) = \{0\}$, ose I është 0-i thjeshtë lateral.*
2. *Në qoftë se I është 0-i thjeshtë lateral, atëherë I është hiperideal lateral 0-minimal i H .*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 3.3.5(1) dhe Lemës 3.2.15(2). ■

Teoremë 3.3.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero dhe L një hiperideal i majtë jozero i H . Atëherë janë të vërteta pohimet që vijojnë:*

1. *Në qoftë se L është një hiperideal i majtë 0-minimal i H , atëherë, ose ekziston një hiperideal i majtë jozero A i L i tillë që $f(L, L, A) = \{0\}$, ose L është 0-i thjeshtë i majtë.*
2. *Në qoftë se L është 0-i thjeshtë i majtë, atëherë L është një hiperideal i majtë 0-minimal i H .*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të teoremës së mësipërme. ■

Teoremë 3.3.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero që përmban hiperideale lateral të mirëfilltë. Atëherë çdo hiperideal lateral i mirëfilltë i H është minimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal lateral të mirëfilltë ose H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë I_1, I_2 , të tillë që $I_1 \cup I_2 = H$ dhe $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.*

Vërtetim. " $\Rightarrow$ ". Supozojmë se çdo hiperideal lateral i mirëfilltë i H është minimal. Le të jetë I një hiperideal lateral i mirëfilltë i H . Atëherë, I është një hiperideal lateral minimal i H . Janë të mundshme dy rastet e mëposhtme:

Rasti 1. Për çdo $a \in H \setminus I$, $H = \langle a \rangle_m$.

Në qoftë se P është gjithashtu një hiperideal lateral i mirëfilltë i H dhe $P \neq I$, atëherë meqë I është hiperideal lateral minimal, kemi që $P \setminus I \neq \emptyset$, prandaj ekziston $a \in P \setminus I \subseteq H \setminus I$. Që këtë, $H = \langle a \rangle_m \subseteq P \subseteq H$, kështu që $P = H$. Kjo është e pamundur! Pra, kemi që $P = I$ dhe në këtë rast I është hiperideali lateral i vetëm i mirëfilltë i H .

Rasti 2. Ekziston $a \in H \setminus I$ i tillë që $H \neq \langle a \rangle_m$.

Kemi $\langle a \rangle_m \neq I$ dhe $\langle a \rangle_m$ është një hiperideal lateral minimal i H . Nga Lema 3.2.13 rrjedh që $\langle a \rangle_m \cup I$ është hiperideal lateral i H . Meqenëse $I \subset \langle a \rangle_m \cup I$, nga hipoteza marrim $\langle a \rangle_m \cup I = H$. Meqë $\langle a \rangle_m \cap I \subset \langle a \rangle_m$ dhe $\langle a \rangle_m$ është një hiperideal lateral minimal i H , marrim $\langle a \rangle_m \cap I = \emptyset$. Le të jetë P një hiperideal lateral i mirëfilltë i çfarëdoshëm i H . Atëherë P është një hiperideal lateral minimal i H . Kemi që $P = P \cap H = P \cap (\langle a \rangle_m \cup I) = (P \cap \langle a \rangle_m) \cup (P \cap I)$. Në qoftë se $P \cap I \neq \emptyset$, meqenëse P dhe $\langle a \rangle_m$ janë hiperideale lateral minimal të H , kemi $P = \langle a \rangle_m$. Në këtë rast, H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë I dhe $\langle a \rangle_m$ të tillë që $\langle a \rangle_m \cup I = H$ dhe $\langle a \rangle_m \cap I = \emptyset$.

" $\Leftarrow$ ". Evident. ■

Teoremë 3.3.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero që përmban hiperideale të majta të mirëfillta. Atëherë, çdo hiperideal i majtë i mirëfilltë i H është minimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal të majtë të mirëfilltë, ose H përmban vetëm dy hiperideale të majta të mirëfillta L_1, L_2 , të tilla që $L_1 \cup L_2 = H$ dhe $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të teoremës së mësipërme. ■

Teoremë 3.3.11 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero që përmban hiperideale lateral të mirëfilltë jozero. Atëherë, çdo hiperideal lateral i mirëfilltë jozero i H është 0-minimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal lateral të mirëfilltë jozero ose H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë jozero I_1, I_2 , të tillë që $I_1 \cup I_2 = H$ dhe $I_1 \cap I_2 = \{0\}$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të Teoremës 3.3.9. ■

Teoremë 3.3.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero që përmban hiperideale të majta të mirëfillta jozero. Atëherë, çdo hiperideal i majtë i mirëfilltë jozero i H është 0-minimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal të majtë të mirëfilltë jozero ose H përmban vetëm dy hiperideale të majta të mirëfillta jozero L_1, L_2 , të tilla që $L_1 \cup L_2 = H$ dhe $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të teoremës së mësipërme. ■

§3.4 Hiperidealet lateral dhe të majta maksimale të gjysmëhipergrupeve ternare

Në këtë seksion, japim disa veti të hiperidealeve lateral dhe të majta maksimale të gjysmëhipergrupeve ternare dhe shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperidealeve lateral dhe të majta maksimale dhe bashkimit të gjithë hiperidealeve lateral dhe të majta të mirëfillta (jozero) në gjysmëhipergrupet ternare.

Përkufizim 3.4.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal lateral I i H quhet hiperideal lateral maksimal (maximal lateral hyperideal) i H , në qoftë se për çdo hiperideal lateral A të H të tillë që $I \subset A$, kemi $A = H$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal lateral I i H quhet hiperideal lateral maksimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal lateral të mirëfilltë A të H të tillë që $I \subseteq A$, kemi $A = I$.*

Hiperideali lateral I_2 i Shembullit 3.1.15 është një hiperideal lateral maksimal i H .

Përkufizim 3.4.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup. Një hiperideal i majtë L i H quhet hiperideal i majtë maksimal (maximal left hyperideal) i H në qoftë se për çdo hiperideal të majtë A të H të tillë që $L \subset A$, kemi $A = H$.*

Përkufizim ekuivalent: *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë L i H quhet hiperideal i majtë maksimal i H , në qoftë se për çdo hiperideal të majtë të mirëfilltë A të H të tillë që $L \subseteq A$, kemi $A = L$.*

Teoremë 3.4.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero që përmban hiperideale lateral të mirëfilltë. Atëherë, çdo hiperideal lateral i mirëfilltë H është maksimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal lateral të mirëfilltë ose H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë I_1, I_2 , të tillë që $I_1 \cup I_2 = H$ dhe $I_1 \cap I_2 = \emptyset$.*

Vërtetim. " $\Rightarrow$ ". Supozojmë se çdo hiperideal lateral i mirëfilltë i H është maksimal. Le të jetë I një hiperideal lateral i mirëfilltë i H . Atëherë, I është hiperideal lateral maksimal i H . Kemi dy rastet e mëposhtme:

Rasti 1. Për çdo $a \in H \setminus I$, $H = \langle a \rangle_m$.

Në qoftë se P është gjithashtu një hiperideal lateral i mirëfilltë i H dhe $P \neq I$, atëherë P është hiperideal lateral maksimal i H . Që këtë rrjedh se $P \setminus I \neq \emptyset$, prandaj ekziston $a \in P \setminus I \subseteq H \setminus I$. Pra $H = \langle a \rangle_m \subseteq P \subseteq H$, kështu që $P = H$. Kjo është e pamundur! Pra, kemi $P = I$ dhe në këtë rast I është hiperideali lateral i mirëfilltë i vetëm i H .

Rasti 2. Ekziston $a \in H \setminus I$ i tillë që $H \neq \langle a \rangle_m$.

Kemi $\langle a \rangle_m \neq I$ dhe $\langle a \rangle_m$ është një hiperideal lateral maksimal i H . Nga Lema 3.2.13 rrjedh që $\langle a \rangle_m \cup I$ është hiperideal lateral i H . Meqenëse $I \subset \langle a \rangle_m \cup I$ dhe I është një hiperideal

lateral maksimal i H , kemi që $\langle a \rangle_m \cup I = H$. Meqenëse $\langle a \rangle_m \cap I \subset \langle a \rangle_m$ dhe nga hipoteza, kemi $\langle a \rangle_m \cap I = \emptyset$. Le të jetë P një hiperideal lateral i mirëfilltë i çfarëdoshëm i H . Atëherë P është hiperideal lateral maksimal i H . Kemi që $P = P \cap H = P \cap (\langle a \rangle_m \cup I) = (P \cap \langle a \rangle_m) \cup (P \cap I)$. Në qoftë se $P \cap I \neq \emptyset$, atëherë, meqë $P \cap \langle a \rangle_m$ dhe $\langle a \rangle_m$ janë hiperideale lateral maksimal të H , kemi $P = I \langle a \rangle_m$. Në këtë rast, H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë I dhe $\langle a \rangle_m$, të tillë që $\langle a \rangle_m \cup I = H$ dhe $\langle a \rangle_m \cap I = \emptyset$.

" $\Leftarrow$ ". Evident. ■

Teoremë 3.4.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero që përmban hiperideale të majta të mirëfillta. Atëherë, çdo hiperideal i majtë i mirëfilltë i H është maksimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal të majtë të mirëfilltë ose H përmban vetëm dy hiperideale të majta të mirëfillta L_1, L_2 , të tilla që $L_1 \cup L_2 = H$ dhe $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të teoremës së mësipërme. ■

Teoremë 3.4.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero që përmban hiperideale lateral të mirëfilltë jozero. Atëherë çdo hiperideal lateral i mirëfilltë jozero i H është maksimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal lateral të mirëfilltë ose H përmban vetëm dy hiperideale lateral të mirëfilltë jozero I_1, I_2 , të tillë që $I_1 \cup I_2 = H$ dhe $I_1 \cap I_2 = \{0\}$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të Teoremës 3.4.3. ■

Teoremë 3.4.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero që përmban hiperideale të majta të mirëfillta jozero. Atëherë, çdo hiperideal i majtë i mirëfilltë jozero i H është maksimal vetëm atëherë kur H përmban vetëm një hiperideal të majtë të mirëfilltë jozero ose H përmban vetëm dy hiperideale të majta të mirëfillta L_1, L_2 , të tilla që $L_1 \cup L_2 = H$ dhe $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të teoremës së mësipërme. ■

Teoremë 3.4.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal lateral i mirëfilltë I i H është maksimal vetëm atëherë kur*

1. $H \setminus I = \{a\}$ dhe $f(H, a, H) \subseteq I$ për ndonjë $a \in H$ ose
2. $H \setminus I \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$ për çdo $a \in H \setminus I$.

Vërtetim. " $\Rightarrow$ ". Supozojmë se I është një hiperideal lateral maksimal i H . Atëherë, kemi dy rastet e mëposhtme:

Rasti 1. Ekziston $a \in H \setminus I$ i tillë që $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \subseteq I$.

Kemi që $f(H, a, H) \subseteq I$. Nga Lema 3.2.5 rrjedh që

$$\begin{aligned} I \cup \{a\} &= (I \cup f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)) \cup \{a\} = I \cup (f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup \{a\}) \\ &= I \cup \langle a \rangle_m \end{aligned}$$

Kështu, meqenëse $I \cup \langle a \rangle_m$ është një hiperideal lateral i H edhe $I \cup \{a\}$ është hiperideal lateral i H . Meqenëse I është një hiperideal lateral maksimal i H dhe $I \subset I \cup \{a\}$, kemi që $I \cup \{a\} = H$, prandaj $H \setminus I = \{a\}$.

Rasti 2. Për çdo $a \in H \setminus I$, $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \not\subseteq I$.

Në qoftë se $a \in H \setminus I$, atëherë, në bazë të Lemës 3.2.7 $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \not\subseteq I$ dhe $f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$ është një hiperideal lateral i H . Nga Lema 3.2.13 rrjedh që $I \cup f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$ është hiperideal lateral i H dhe $I \subset I \cup f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$. Meqenëse I është një hiperideal lateral maksimal i H , $I \cup f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) = H$. Që këtë, për çdo $a \in H \setminus I$, kemi $H \setminus I \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$.

" $\Leftarrow$ ". Le të jetë P një hiperideal lateral i H i tillë që $I \subset P$. Atëherë $P \setminus I \neq \emptyset$. Në qoftë se $H \setminus I = \{a\}$ dhe $f(H, a, H) \subseteq I$ për ndonjë $a \in H$, atëherë $P \setminus I \subseteq H \setminus I = \{a\}$. Kështu, $P \setminus I = \{a\}$ dhe si rrjedhim $P = I \cup \{a\} = H$. Që këtë rrjedh se I është një hiperideal lateral maksimal i H . Në qoftë se $H \setminus I \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$ për çdo $a \in H \setminus I$, atëherë $H \setminus I \subseteq f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) \subseteq f(H, H, P, H, H) \cup f(H, P, H) \subseteq P$ për çdo $x \in P \setminus I$. Pra, $H = (H \setminus I) \cup I \subseteq P \subseteq H$, prandaj $P = H$. Si rrjedhim, I është një hiperideal lateral maksimal i H . ■

Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Shënojmë me $\mathcal{U}$ dhe $\mathcal{V}$ përkatësisht bashkimin e gjithë hiperidealeve lateral të mirëfilltë jozero të H dhe bashkimin e gjithë hiperidealeve të majta të mirëfillta jozero të H , në qoftë se H është një gjysmëhipergrup ternar me zero dhe shënojmë me $\mathcal{U}$ dhe $\mathcal{V}$ përkatësisht bashkimin e gjithë hiperidealeve lateral të mirëfilltë të H dhe bashkimin e gjithë hiperidealeve të majta të mirëfillta të H , në qoftë se H është gjysmëhipergrup ternar pa zero. Vërtetohen lehtë lemat e mëposhtme:

Lemë 3.4.8 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë $\mathcal{U} = H$ në qoftë se për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_m \neq H$.

Lemë 3.4.9 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë $\mathcal{V} = H$ në qoftë se për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_l \neq H$.

Teoremë 3.4.10 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Atëherë, ka vend vetëm një nga pohimet që vijojnë:

1. H është i thjeshtë lateral

2. Për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_m \neq H$.

3. Ekziston $a \in H$ i tillë që $\langle a \rangle_m = H$, $a \notin f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$, $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{U} = H \setminus \{a\}$ dhe $\mathcal{U}$ është hiperideali lateral maksimal i vetëm i H .

4. $H \setminus \mathcal{U} = \{x \in H : f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) = H\}$ dhe $\mathcal{U}$ është hiperideali lateral maksimal i vetëm i H .

Vërtetim. Supozojmë se H nuk është i thjeshtë lateral. Atëherë ekziston një hiperideal lateral i mirëfilltë i H . Pra $\mathcal{U}$ është hiperideal lateral i H . Paraqiten dy rastet e mëposhtme:

Rasti 1. $\mathcal{U} = H$.

Nga Lema 3.4.8, për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_m \neq H$ pra, ka vend pohimi (2).

Rasti 2. $\mathcal{U} \neq H$.

Kemi që $\mathcal{U}$ është hiperideal lateral maksimal i H . Supozojmë se I është një hiperideal lateral maksimal i H . Atëherë, meqenëse I është hiperideal lateral i mirëfilltë i H , kemi që $I \subseteq \mathcal{U} \subset H$. Meqenëse I është hiperideal lateral maksimal i H , kemi $I = \mathcal{U}$, prandaj $\mathcal{U}$ është hiperideali lateral maksimal i vetëm i H . Nga Teorema 3.4.7 rrjedh që

(a) $H \setminus \mathcal{U} = \{a\}$ dhe $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{U}$ për ndonjë $a \in H$, ose

(b) Për çdo $a \in H \setminus \mathcal{U}$, $H \setminus \mathcal{U} \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$.

Supozojmë se $H \setminus \mathcal{U} = \{a\}$ dhe $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{U}$ për ndonjë $a \in H$. Atëherë $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{U} = H \setminus \{a\}$. Meqenëse $a \notin \mathcal{U}$, kemi që $\langle a \rangle_m = H$. Në qoftë se $a \in f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$, atëherë $\{a\} \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$. Nga Lema 3.2.5 rrjedh që

$$\begin{aligned} H &= \langle a \rangle_m = f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup \{a\} = f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H) \\ &\subseteq f(H, \mathcal{U}, H) \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} \subseteq H, \end{aligned}$$

kështu që kemi $H = \mathcal{U}$. Kjo është e pamundur! Pra, $a \notin f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$ dhe në këtë mënyrë, plotësohet pohimi (3).

Supozojmë tani se për çdo $a \in H \setminus \mathcal{U}$, $H \setminus \mathcal{U} \subseteq f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$. Le të jetë $x \in H \setminus \mathcal{U}$. Atëherë, $x \in f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H)$, kështu që $\{x\} \subseteq f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H)$. Nga Lema 3.2.5 rrjedh se $\langle x \rangle_m = f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) \cup \{x\} = f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H)$. Meqenëse $x \notin \mathcal{U}$, kemi $\langle x \rangle_m = H$, prandaj $H = \langle x \rangle_m = f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H)$. Anasjellas, le të jetë $x \in H$ i tillë që $f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) = H$. Në qoftë se $x \in \mathcal{U}$, atëherë $\langle x \rangle_m \subseteq \mathcal{U} \subset H$. Nga Lemma 3.2.5 rrjedh se $\langle x \rangle_m = f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) \cup \{x\} = H \cup \{x\} = H$.

Kjo gjë është e pamundur, kështu që $x \in H \setminus \mathcal{U}$. Që këtë kemi $H \setminus \mathcal{U} = \{x \in H : f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) = H\}$, kështu që plotësohet pohimi (4). Këtu përfundon vërtetimi i teoremës. ■

Teoremë 3.4.11 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. Atëherë ka vend vetëm një nga pohimet e mëposhtme:*

1. H është i thjeshtë i majtë.
2. Për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_l \neq H$.
3. Ekziston $a \in H$ i tillë që $\langle a \rangle_l = H$, $a \notin f(H, H, a)$, $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{V} = H \setminus \{a\}$ dhe $\mathcal{V}$ është i vetmi hiperideal i majtë maksimal i H .
4. $H \setminus \mathcal{V} = \{x \in H : f(H, H, x) = H\}$ dhe $\mathcal{V}$ është i vetmi hiperideal i majtë maksimal i H .

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të teoremës së mësipërme. ■

Teoremë 3.4.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$. Atëherë ka vend vetëm një nga pohimet e mëposhtme:*

1. H është 0-i thjeshtë lateral.
2. Për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_m \neq H$.
3. Ekziston $a \in H$ i tillë që $\langle a \rangle_m = H$, $a \notin f(H, H, a, H, H) \cup f(H, a, H)$, $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{U} = H \setminus \{a\}$ dhe $\mathcal{U}$ është i vetmi hiperideal lateral maksimal i H .
4. $H \setminus \mathcal{U} = \{x \in H : f(H, H, x, H, H) \cup f(H, x, H) = H\}$ dhe $\mathcal{U}$ është i vetmi hiperideal lateral maksimal i H .

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të Teoremës 3.4.10. ■

Teoremë 3.4.13 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me zero dhe $f(H, H, H) \neq \{0\}$. Atëherë ka vend vetëm një nga pohimet e mëposhtme: :*

1. H është 0-i thjeshtë i majtë.
2. Për çdo $a \in H$, $\langle a \rangle_l \neq H$.
3. Ekziston $a \in H$ i tillë që $\langle a \rangle_l = H$, $a \notin f(H, H, a)$, $f(H, a, H) \subseteq \mathcal{V} = H \setminus \{a\}$ dhe $\mathcal{V}$ është i vetmi hiperideal i majtë maksimal i H .
4. $H \setminus \mathcal{V} = \{x \in H : f(H, H, x) = H\}$ dhe $\mathcal{V}$ është i vetmi hiperideal i majtë maksimal i H .

Vërtetim. Vërtetimi është i njëjtë me atë të teoremës së mësipërme. ■

§3.5 Mbi hiperidealet e pastra në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë konceptet e hiperidealeve prim të pastër dhe pastërtisht prim dhe studiojmë vetitë e tyre në gjysmëhipergrupet ternare dhe gjysmëhipergrupet ternare dobësisht të rregullta.

Përkufizim 3.5.1 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i djathtë A i H quhet hiperideal i djathtë i pastër i djathtë (a right pure right hyperideal) në qoftë se për çdo $x \in A$, ekzistojnë $y, z \in A$ të tilla që $x \in f(x, y, z)$. Në qoftë se A është një hiperideal i dyanshëm i H që gëzon vetinë që për çdo $x \in A$, ekzistojnë elementet $y, z \in A$ të tilla që $x \in f(x, y, z)(x \in f(y, z, x))$, atëherë A quhet hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë (i majtë) (a right(left) pure two-sided hyperideal). Në qoftë se A është një hiperideal i H që gëzon vetinë që për çdo $x \in A$, ekzistojnë elementet $y, z \in A$ të tilla që $x \in f(x, y, z)(x \in f(y, z, x))$, atëherë A quhet hiperideal i pastër i djathtë (i majtë) (a right(left) pure hyperideal).

Hiperidealet e majta të pastra të majta (left pure left hyperideals) përcaktohen në mënyrë analoge.

Shembull 3.5.2 Le të jetë (H, f) gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 3.1.15. Është e qartë se $I_1 = \{c, d\}$, $I_2 = \{c, d, e, g\}$ dhe H janë hiperideale të dyanshme të pastra të djathta (të majta) të H .

Shembull 3.5.3 Le të jetë $H = \{0, 1, x, y, z, t\}$ dhe $f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$ për çdo $x, y, z \in H$ me hiperveprimin $\circ$ të dhënë nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	0	x	y	z	t	1
0	0	0	0	0	0	0
x	0	x	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	H	x
y	0	y	y	$\{y, t\}$	$\{y, t\}$	y
z	0	z	$\{z, t\}$	z	$\{z, t\}$	z
t	0	t	t	t	t	t

Atëherë (H, f) është gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se $I_1 = \{0, t\}$, $I_2 = \{0, z, t\}$, $I_3 = \{0, y, t\}$ dhe $I_4 = \{0, y, z, t\}$ janë hiperideale të djathta të pastra të djathta të H .

Shembull 3.5.4 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ dhe $f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$ për çdo $x, y, z \in H$ me hiperveprimin $\circ$ të dhënë nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	$\{a, b\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, f\}$	a
b	0	b	b	d	d	f	f	b
c	0	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	c
d	0	d	d	d	d	d	d	d
e	0	e	$\{e, f\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, f\}$	e
f	0	f	f	d	d	f	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Atëherë (H, f) është gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se $I_1 = \{0, d\}$, $I_2 = \{0, d, f\}$ dhe $I_3 = \{0, b, d, f\}$ janë hiperideale të djathta të pastra të djathta të H . $I_4 = \{0, c, d\}$ është një

hiperideal i dyanshëm i H , i cili është hiperideal i pastër i djathtë, por jo i pastër i majtë. $I_5 = \{0, c, d, e, f\}$ është hiperideal i dyanshëm i H , i cili është një hiperideal i pastër i djathtë dhe i majtë.

Pohim 3.5.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe A një hiperideal i dyanshëm i H . Atëherë, A është i pastër i djathtë vetëm atëherë kur për çdo hiperideal të djathtë B , $B \cap A = f(B, A, A)$.*

Vërtetim. Supozojmë se A është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H . Për çdo hiperideal të djathtë B të H , kemi që $f(B, A, A) \subseteq B \cap A$. Le të jetë $x \in B \cap A$. Meqenëse A është hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë, ekzistojnë $y, z \in A$ të tilla që $x \in f(x, y, z)$. Përderisa $x \in B$ dhe $y, z \in A$, $x \in f(x, y, z) \subseteq f(B, A, A)$. Që këtë $x \in f(B, A, A)$. Kjo sjell që $B \cap A \subseteq f(B, A, A)$. Pra, $B \cap A = f(B, A, A)$. Anasjellas, supozojmë se $B \cap A = f(B, A, A)$, për çdo hiperideal të djathtë B të H . Të tregojmë se A është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë. Le të jetë $x \in A$ dhe $B = \{x\} \cup f(x, H, H)$ hiperideali i djathtë i H i përfshirë nga x . Atëherë, kemi që

$$\begin{aligned} (\{x\} \cup f(x, H, H)) \cap A &= f((\{x\} \cup f(x, H, H)), A, A) = f(x, A, A) \cup f(f(x, H, H), A, A) \subseteq \\ &\subseteq f(x, A, A) \cup f(x, A, A) = f(x, A, A). \end{aligned}$$

Meqenëse $x \in (\{x\} \cup f(x, H, H)) \cap A$, kemi që $x \in f(x, A, A)$, kështu që ekzistojnë $y, z \in A$ të tilla që $x \in f(x, y, z)$. Pra, A është i pastër i djathtë.

Në mënyrë të ngjashme, tregohet se një hiperideal A i një gjysmëhipergrupi ternar H është i pastër i djathtë vetëm atëherë kur $B \cap A = f(B, A, A)$, për çdo hiperideal të djathtë B të H . ■

Përkufizim 3.5.6 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) quhet dobësisht i rregullt i djathtë (right weakly regular) në qoftë se për çdo $x \in H$, $x \in f(f(x, H, H), f(x, H, H), f(x, H, H))$.*

Është e qartë se çdo gjysmëhipergrup ternar i rregullt është dobësisht i rregullt i djathtë, por e anasjella nuk është e vërtetë.

Teoremë 3.5.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është dobësisht i rregullt i djathtë.
2. Cdo hiperideal i djathtë i H është idempotent, domethënë $B = f(B, B, B)$ për çdo hiperideal të djathtë B të H .
3. $B \cap A = f(B, A, A)$ për çdo hiperideal të djathtë B dhe hiperideal të dyanshëm A të H
4. $B \cap A = f(B, A, A)$ për çdo hiperideal të djathtë B dhe për çdo hiperideal A të H .

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë B një hiperideal i djathtë i H , atëherë $f(B, B, B) \subseteq f(B, H, H) \subseteq B$. Le të jetë $x \in B$. Atëherë, $x \in f(f(x, H, H), f(x, H, H), f(x, H, H)) \subseteq f(B, B, B)$, kështu që $B \subseteq f(B, B, B)$. Pra, $B = f(B, B, B)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se çdo hiperideal i djathtë i H është idempotent. Le të jetë $x \in H$. Atëherë, $B = \{x\} \cup f(x, H, H)$ është hiperideal i djathtë i H , kështu që është idempotent, domethënë

$$\begin{aligned} \{x\} \cup f(x, H, H) &= f((\{x\} \cup f(x, H, H)), (\{x\} \cup f(x, H, H)), (\{x\} \cup f(x, H, H))) \\ &= f(x, x, x) \cup f(f(x, x, x), H, H) \cup f(x, x, H, H, x) \cup f(x, x, H, H, x, H, H) \cup f(x, H, H, x, x) \cup \\ &\quad \cup f(x, H, H, x, x, H, H) \cup f(x, H, H, x, H, H, x) \cup f(x, H, H, x, H, H, x, H, H). \end{aligned}$$

Duke bërë llogaritje të thjeshta, kemi $x \in f(f(x, H, H), f(x, H, H), f(x, H, H))$, kështu që H është dobësisht i rregullt i djathtë.

(1) $\Rightarrow$ (3). Supozojmë se H është gjysmëhipergrup ternar dobësisht i rregullt i djathtë, B është një hiperideal i djathtë dhe A një hiperideal i dyanshëm i H . Atëherë, $f(B, A, A) \subseteq B \cap A$. Le të jetë $x \in B \cap A$. Meqenëse H është dobësisht i rregullt i djathtë, kemi $x \in f(f(x, H, H), f(x, H, H), f(x, H, H))$. Kështu, $x \in f(B, A, A)$, që tregon se $B \cap A \subseteq f(B, A, A)$. Pra, $B \cap A = f(B, A, A)$.

(3) $\Rightarrow$ (4). Është evident.

(4) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë $x \in H$ dhe $B = \{x\} \cup f(x, H, H)$ hiperideali i djathtë i H i përfshuar nga x , $A = \{x\} \cup f(x, H, H) \cup f(H, H, x) \cup f(H, x, H) \cup f(H, H, x, H, H)$ hiperideali i H i përfshuar nga x . Atëherë, kemi që

$$\begin{aligned} (\{x\} \cup f(x, H, H)) \cap (\{x\} \cup f(x, H, H) \cup f(H, H, x) \cup f(H, x, H) \cup f(H, H, x, H, H)) &= \\ = f((\{x\} \cup f(x, H, H)), (\{x\} \cup f(x, H, H) \cup f(H, H, x) \cup f(H, x, H) \cup f(H, H, x, H, H)), & \\ (\{x\} \cup f(x, H, H) \cup f(H, H, x) \cup f(H, x, H) \cup f(H, H, x, H, H))) &= (f(x, x, x) \cup f(x, x, x, H, H) \cup \\ \cup f(x, x, H, H, x) \cup f(x, x, H, x, H) \cup f(x, x, H, H, x, H, H) \cup f(x, H, H, x, x) \cup & \\ \cup f(x, H, H, x, x, H, H) \cup f(x, H, H, x, H, H, x) \cup f(x, H, H, x, H, x, H) \cup & \\ \cup f(x, H, H, x, H, H, x, H, H) \cup f(x, H, x, H, x) \cup f(x, H, x, H, x, H, H) \cup & \end{aligned}$$

Nga llogaritje të thjeshta, kemi që $x \in f(f(x, H, H), f(x, H, H), f(x, H, H))$. Pra, H është gjysmëhipergrup ternar dobësisht i rregullt i djathtë. ■

Teoremë 3.5.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është dobësisht i rregullt i djathtë.
2. Cdo hiperideal i dyanshëm A i H është i pastër i djathtë.
3. Cdo hiperideal A i H është i pastër i djathtë.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Teorema 3.5.7 dhe Pohimi 3.5.5. ■

Pohim 3.5.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me 0 . Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. $\{0\}$ është një hiperideal i pastër i djathtë i H .

2. Bashkimi i një numri të çfarëdoshëm hiperidealesh të dyanshme (hiperidealesh) të pastra të djathta të H , është një hiperideal i dyanshëm (hiperideal) i pastër i djathtë i H .

3. Prerja e një numri të fundëm hiperidealesh të dyanshme (hiperidealesh) të pastra të djathta të H është një hiperideal i dyanshëm (hiperideal) i pastër i djathtë i H .

Vërtetim. (1). Është e qartë se $\{0\}$ është hiperideal i pastër i djathtë i H .

(2). Le të jetë $\{I_k\}_{k \in K}$ një familje hiperidealesh të dyanshme të pastra të djathta të H .

Atëherë, $\bigcup_{k \in K} I_k$ është një hiperideal i dyanshëm i H . Supozojmë se $x \in \bigcup_{k \in K} I_k$. Atëherë $\exists k \in K$ i tillë që $x \in I_k$. Meqenëse I_k është hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H , ekzistojnë $y, z \in I_k$ të tilla që $x \in f(x, y, z)$. Që këtë rrjedh se $y, z \in \bigcup_{k \in K} I_k$ të tilla që $x \in f(x, y, z)$. Pra,

përfundimisht $\bigcup_{k \in K} I_k$ është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H .

(3). Le të jenë I_1 dhe I_2 hiperideale të dyanshme të pastra të djathta të H dhe $x \in I_1 \cap I_2$. Meqenëse $x \in I_1, x \in I_2$ dhe I_1, I_2 janë hiperideale të dyanshme të pastra të djathta të H , ekzistojnë $y_1, z_1 \in I_1$ dhe $y_2, z_2 \in I_2$ të tilla që $x \in f(x, y_1, z_1)$ dhe $x \in f(x, y_2, z_2)$. Në këtë mënyrë, kemi që $x \in f(x, y_1, z_1) \subseteq f(f(x, y_2, z_2), y_1, z_1) \subseteq f(f(f(x, y_1, z_1), y_2, z_2), y_1, z_1) \subseteq f(x, f(y_1, z_1, y_2), f(z_2, y_1, z_1))$, ku $f(y_1, z_1, y_2), f(z_2, y_1, z_1) \subseteq I_1 \cap I_2$. Kështu, $I_1 \cap I_2$ është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H .

Në mënyrë të ngjashme provohet rasti i hiperidealit. ■

Pohim 3.5.10 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me 0 dhe A një hiperideal i dyanshëm i çfarëdoshëm i H . Atëherë, A përmban një hiperideal të dyanshëm të pastër të djathtë më të madh, i cili quhet pjesa e pastër e A (the pure part of A) dhe shënohet me $S(A)$.

Vërtetim. Le të jetë $S(A)$ bashkimi i gjithë hiperidealeve të dyanshme të pastra të djathta që përfshihen në A . Hiperideale të tillë ekzistojnë, sepse $\{0\}$ është një hiperideal i pastër i djathtë që përfshihet në çdo hiperideal të dyanshëm. Nga pohimi i mësipërm $S(A)$ është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë. Ai është me të vërtetë hiperideali i dyanshëm i pastër i djathtë më i madh që përfshihet në A . ■

Pohim 3.5.11 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me 0. Le të jenë A, K hiperideale të dyanshme të H dhe $\{A_i\}_{i \in I}$ familja e hiperidealeve të dyanshme të H . Atëherë

$$1. S(A \cap K) = S(A) \cap S(K). \quad 2. \bigcup_{i \in I} S(A_i) \subseteq S\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right).$$

Vërtetim. (1). Nga $S(A) \subseteq A, S(K) \subseteq K$ rrjedh se $S(A) \cap S(K) \subseteq A \cap K$. Por, nga Pohimi 3.5.9, $S(A) \cap S(K)$ është i pastër i djathtë, kështu që $S(A) \cap S(K) \subseteq S(A \cap K)$. Nga ana

tjetër, $\mathcal{S}(A \cap K) \subseteq \mathcal{S}(A)$. Në mënyrë të ngjashme, $\mathcal{S}(A \cap K) \subseteq \cap \mathcal{S}(K)$, kështu që $\mathcal{S}(A \cap K) \subseteq \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(K)$. Përfundimisht, $\mathcal{S}(A \cap K) = \mathcal{S}(A) \cap \mathcal{S}(K)$.

(2). Nga $\mathcal{S}(A_i) \subseteq A_i$ rrjedh se $\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}(A_i) \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Meqenëse $\mathcal{S}(A_i)$ është i pastër i djathtë,

kemi që $\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}(A_i)$ është i pastër i djathtë. Në këtë mënyrë, kemi që $\bigcup_{i \in I} \mathcal{S}(A_i) \subseteq \mathcal{S}(\bigcup_{i \in I} A_i)$. ■

Përkufizim 3.5.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe A një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H . Atëherë, A quhet pastërtisht maksimal (purely maximal) në qoftë se A është maksimal në latisën e hiperidealeve të dyanshme të pastra të djathta të H .*

Një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i mirëfilltë A i H quhet pastërtisht prim (purely prime) në qoftë se $f(A_1, H, A_2) \subseteq A$ sjell që $A_1 \subseteq A$ ose $A_2 \subseteq A$ për çdo dy hiperideale të dyanshme të pastra të djathta A_1, A_2 të H . Në mënyrë ekuivalente, $A_1 \cap A_2 \subseteq A$ sjell që $A_1 \subseteq A$ ose $A_2 \subseteq A$. Kjo ndodh sepse $f(A_1, H, A_2) \subseteq A_1 \cap A_2$ dhe $A_1 \cap A_2 = f(A_1, A_2, A_2) \subseteq f(A_1, H, A_2)$. Kështu, $f(A_1, H, A_2) = A_1 \cap A_2$.

Pohim 3.5.13 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, çdo hiperideal i dyanshëm pastërtisht maksimal është pastërtisht prim.*

Vërtetim. Le të supozojmë se A është hiperideal i dyanshëm pastërtisht maksimal i H dhe A_1, A_2 janë hiperideale të dyanshme të pastra të djathta të H të tilla që $A_1 \cap A_2 \subseteq A$. Supozojmë se $A_1 \not\subseteq A$. Atëherë, $A_1 \cup A$ është hiperideal i pastër i djathtë i tillë që $A \subsetneq A_1 \cup A$. Meqenëse A është pastërtisht maksimal, $A_1 \cup A = H$. Kështu,

$$A_2 = A_2 \cap H = A_2 \cap (A_1 \cup A) = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap A) \subseteq A \cup A = A.$$

Pra, A është pastërtisht prim. ■

Pohim 3.5.14 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me 0. Atëherë, pjesa e pastër e çdo hiperideali të dyanshëm maksimal të H është pastërtisht prim.*

Vërtetim. Le të jetë M një hiperideal i dyanshëm maksimal i H dhe $\mathcal{S}(M)$ pjesa e pastër e tij. Supozojmë se $A_1 \cap A_2 \subseteq \mathcal{S}(M)$, ku A_1, A_2 janë hiperideale të dyanshme të pastra të djathta të H . Në qoftë se $A_1 \subseteq M$, atëherë $A_1 \subseteq \mathcal{S}(M)$. Në qoftë se $A_1 \not\subseteq \mathcal{S}(M)$, atëherë $A_1 \not\subseteq M$. Kështu, $A_1 \cup M = H$ meqenëse M është maksimal. Që këtë, kemi që $A_2 = A_2 \cap H = A_2 \cap (A_1 \cup M) = (A_2 \cap A_1) \cup (A_2 \cap M) \subseteq \mathcal{S}(M) \cup M \subseteq M \cup M = M$. Por $\mathcal{S}(M)$ është hiperideali i dyanshëm i pastër i djathtë më i madh që përfshihet në M . Pra, $A_2 \subseteq \mathcal{S}(M)$, kështu që $\mathcal{S}(M)$ është pastërtisht prim. ■

Pohim 3.5.15 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë A një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i H dhe $a \in H$ i tillë që $a \notin A$, atëherë ekziston një hiperideal i dyanshëm pastërtisht prim B i H i tillë që $A \subseteq B$ dhe $a \notin B$.*

Vërtetim. Le të jetë

$$X = \{B : B \text{ është një hiperideal i dyanshëmi pastër i djathtëi } H, A \subseteq B \text{ dhe } a \notin B\}$$

Meqenëse $A \in X$, atëherë $X \neq \emptyset$. Për më tepër, X është pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Le të jetë $\{B_i\}_{i \in I}$ një nënbashkësi tërësisht e renditur e X . Nga Pohimi 3.5.9, $\bigcup_{i \in I} B_i$

është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë. Meqenëse $B \subseteq \bigcup_{i \in I} B_i$ dhe $a \notin \bigcup_{i \in I} B_i$, atëherë

$\bigcup_{i \in I} B_i \in X$. Kështu, nga Lema e Zorn, X ka një element maksimal të cilin po e shënojmë me B ,

të tillë që B është i pastër, $A \subseteq B$ dhe $a \notin B$. Të provojmë se B është pastërtisht prim. Supozojmë se A_1 dhe A_2 janë hiperideale të dyanshme të pastra të djathta të H të tilla që $A_1 \not\subseteq B$ dhe $A_2 \not\subseteq B$. Meqenëse A_1, A_2 dhe B janë të pastra të djathta, atëherë $A_i \cup B$ është një hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i tillë që $B \subsetneq A_i \cup B$. Kështu, $a \in A_i \cup B$ ($i=1,2$). Meqenëse $a \notin B$, kemi që $a \in A_i$ ($i=1,2$), kështu që $a \in A_1 \cap A_2$. Pra, $A_1 \cap A_2 \not\subseteq B$. Kjo tregon që B është pastërtisht prim. ■

Pohim 3.5.16 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, çdo hiperideal i dyanshëm i pastër i djathtë i mirëfilltë A i H është prerja e gjithë hiperidealeve të dyanshme pastërtisht prim të H që përmbajnë A .*

Vërtetim. Nga Pohimi 3.5.15, ekzistojnë hiperideale të dyanshme pastërtisht prim që përmbajnë A . Le të jetë $\{B_i\}_{i \in I}$ familja e gjithë hiperidealeve të dyanshme pastërtisht prim të H që përmbajnë A . Meqenëse $A \subseteq B_i$ për çdo $i \in I$, atëherë $A \subseteq \bigcap_{i \in I} B_i$. Të tregojmë tani se

$\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq A$. Le të jetë $a \notin A$. Atëherë, nga Pohimi 3.5.15, ekziston një hiperideal i dyanshëm

pastërtisht prim B i tillë që $A \subseteq B$ dhe $a \notin B$. Që këtë rrjedh se $a \notin \bigcap_{i \in I} B_i$. Kështu, $\bigcap_{i \in I} B_i \subseteq A$

dhe përfundimisht $A = \bigcap_{i \in I} B_i$. ■

§3.6 Hiperidealet dobësisht të pastra në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion koncepti i hiperidealit dobësisht të pastër të gjysmëhipergrupit ternar prezantohet si përgjithësim i hiperidealit të dyanshëm të pastër dhe shqyrtohen disa veti të tij.

Përkufizim 3.6.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i dyanshëm A i H quhet dobësisht i pastër i majtë (left weakly pure) (dobësisht i pastër i djathtë (right weakly pure)), në qoftë se $A \cap B = f(A, A, B)$ (përkatësisht $A \cap B = f(B, A, A)$) për çdo hiperideal të dyanshëm të H .*

Është e qartë se çdo hiperideal i dyanshëm i pastër i majtë (i djathtë) është dobësisht i pastër i majtë (i djathtë).

Pohim 3.6.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar me 0 dhe A, B hiperideale të dyanshme të H . Atëherë*

$BA^{-1} = \{h \in H : f(x, y, h) \subseteq B, \forall x, y \in A\}$ dhe $A_{-1}B = \{h \in H : f(h, x, y) \subseteq B, \forall x, y \in A\}$ janë hiperideale të dyanshme të H .

Vërtetim. Kemi $BA^{-1} \neq \emptyset$, sepse $0 \in BA^{-1}$. Le të jenë $r, s \in H$ dhe $h \in BA^{-1}$. Atëherë, për çdo $x, y \in A$, $f(x, y, f(s, r, h)) = f(x, f(y, s, r), h) \subseteq B$, sepse $f(y, s, r) \subseteq A$. Kështu, $f(s, r, h) \subseteq BA^{-1}$. Gjithashtu, $f(x, y, f(h, s, r)) = f(f(x, y, h), s, r) \subseteq f(B, H, H) \subseteq B$, sepse $f(x, y, h) \subseteq B$. Që këtë, $f(h, s, r) \subseteq BA^{-1}$. Si rrjedhim, BA^{-1} është një hiperideal i dyanshëm i H . Le të jetë tani $s, r \in H$ dhe $h \in A_{-1}B$. Atëherë, $f(f(s, r, h), x, y) = f(s, r, f(h, x, y)) \subseteq f(H, H, B) \subseteq B$ për çdo $x, y \in A$, sepse $f(h, x, y) \subseteq B$. Kështu, $f(s, r, h) \subseteq A_{-1}B$. Gjithashtu, $f(f(h, s, r), x, y) = f(h, f(s, r, x), y) = f(h, x, y) \subseteq B$, sepse $f(s, r, x) \subseteq A$. Si rrjedhim, $f(h, s, r) \subseteq A_{-1}B$. Pra, $A_{-1}B$ është një hiperideal i dyanshëm i H . ■

Pohim 3.6.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe A një hiperideal i dyanshëm i H . Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. A është dobësisht i pastër i majtë (i djathtë).
2. $(BA^{-1}) \cap A = B \cap A$ ($A_{-1}B \cap A = A \cap B$) për çdo hiperideal B të H .

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se A është dobësisht i pastër i majtë. Meqenëse BA^{-1} është hiperideal i dyanshëm, kemi që $(BA^{-1}) \cap A = f(A, A, BA^{-1})$. Të tregojmë tani se $f(A, A, BA^{-1}) \subseteq B$. Le të jetë $f(a, h, x) \subseteq f(A, A, BA^{-1})$, ku $a, h \in A, x \in BA^{-1}$. Atëherë, nga përkufizimi $f(a, h, x) \subseteq B$. Si rrjedhim, $f(A, A, BA^{-1}) \subseteq B$. Gjithashtu, $f(A, A, BA^{-1}) \subseteq f(A, A, H) \subseteq A$ dhe $BA^{-1} \cap A = f(A, A, BA^{-1}) \subseteq A \cap B$. Pra, $(BA^{-1}) \cap A \subseteq B \cap A$. Le të jetë $b \in B \cap A$, atëherë $f(x, y, b) \subseteq B$ për çdo $x, y \in A$, kështu që $b \in BA^{-1}$. Pra, $B \cap A \subseteq (BA^{-1}) \cap A$. Si rrjedhim, $(BA^{-1}) \cap A = B \cap A$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se A, B janë hiperideale të dyanshme të një gjysmëhipergrupi ternar H dhe $(BA^{-1}) \cap A = B \cap A$. Të tregojmë se A është dobësisht i pastër i majtë. Së pari, të tregojmë se $B \subseteq f(A, A, B)A^{-1}$. Le të jetë $b \in B$, atëherë për çdo $x, y \in A$, kemi që $f(x, y, b) \subseteq f(A, A, B)$. Kështu, $b \in f(A, A, B)A^{-1}$. Kjo tregon se $B \subseteq f(A, A, B)A^{-1}$. Në këtë mënyrë, nga hipoteza $A \cap B \subseteq f(A, A, B)A^{-1} \cap A = f(A, A, B) \cap A \subseteq f(A, A, B)$. Por, gjithmonë kemi që $f(A, A, B) \subseteq A \cap B$, prandaj $A \cap B = f(A, A, B)$. Pra, A është dobësisht i pastër i majtë. ■

Pohim 3.6.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. *Cdo hiperideal i dyanshëm i H është dobësisht i pastër i majtë.*
2. *Cdo hiperideal i dyanshëm i H është idempotent.*
3. *Cdo hiperideal i dyanshëm i H është dobësisht i pastër i djathtë.*

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se çdo hiperideal i dyanshëm i H është dobësisht i pastër i majtë. Le të jetë X një hiperideal i dyanshëm i H , atëherë, për çdo hiperideal të dyanshëm të H , kemi që $X \cap Y = f(X, X, Y)$. Veçanërisht, $X = X \cap X = f(X, X, X)$, kështu që çdo hiperideal i dyanshëm i H është idempotent.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se çdo hiperideal i dyanshëm i H është idempotent. Le të jetë X një hiperideal i dyanshëm i H , atëherë për çdo hiperideal të dyanshëm Y të H , kemi $f(X, X, Y) \subseteq X \cap Y$. Nga ana tjetër, kemi që $X \cap Y = f(X \cap Y, X \cap Y, X \cap Y) \subseteq f(X, X, Y)$.

Si rrjedhim, $X \cap Y = f(X, X, Y)$. Kështu, X është dobësisht i pastër i majtë.

(2) $\Rightarrow$ (3). Në mënyrë të ngjashme provohet se (2) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se çdo hiperideal i dyanshëm i H është dobësisht i pastër i djathtë. Le të jetë X një hiperideal i dyanshëm i H . Atëherë, X është dobësisht i pastër i djathtë. Që këtë, për çdo hiperideal të dyanshëm Y të H , kemi $X \cap Y = f(Y, X, X)$. Veçanërisht, $X \cap X = f(X, X, X)$. Pra, çdo hiperideal i dyanshëm i H është idempotent. ■

§3.7 Hiperradikali i pastër i një gjysmëhipergrupi ternar

Në këtë seksion merremi me gjysmëhipergrupin ternar (H, f) që është një gjysmëhipergrup ternar me 0, i tillë që $f(H, H, H) = H$. Bashkësia e gjithë hiperidealeve pastërtisht prim të mirëfilltë të një gjysmëhipergrupi ternar me zero është topologjizuar.

Le të jetë $\mathcal{RP}(H)$ bashkësia e gjithë hiperidealeve të pastra të djathta të H dhe $\mathcal{PP}(H)$ bashkësia e gjithë hiperidealeve pastërtisht prim të mirëfilltë të H . Përcaktojmë për çdo $I \in \mathcal{RP}(H)$, $\mathcal{B}_I = \{J \in \mathcal{PP}(H) : I \not\subseteq J\}$, $\mathfrak{I}(H) = \{\mathcal{B}_I : I \in \mathcal{RP}(H)\}$.

Teoremë 3.7.1 $\mathfrak{I}(H)$ formon një topologji në $\mathcal{PP}(H)$.

Vërtetim. Meqenëse $\{0\}$ është hiperideal i pastër i djathtë i H , atëherë $\mathcal{B}_{\{0\}} = \{J \in \mathcal{PP}(H) : \{0\} \not\subseteq J\} = \emptyset$, sepse 0 i përket çdo hiperideali të pastër të djathtë. Meqenëse H është një hiperideal i pastër i djathtë i H , $\mathcal{B}_H = \{J \in \mathcal{PP}(H) : H \not\subseteq J\} = \mathcal{PP}(H)$, sepse $\mathcal{PP}(H)$ është bashkësia e gjithë hiperidealeve pastërtisht prim të mirëfilltë të H . Le të jetë $\mathcal{B}_{I_\alpha} : \alpha \in \Lambda \subseteq \mathfrak{I}(H)$, atëherë

$$\bigcup_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{B}_{I_\alpha} = \{J \in \mathcal{PP}(H) : I_\alpha \not\subseteq J \text{ për disa } \alpha \in \Lambda\} = \{J \in \mathcal{PP}(H) : \bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha \not\subseteq J\} = \mathcal{B}_{\bigcup_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha}.$$

Për të provuar se $\mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2} \in \mathfrak{Z}(H)$ për çdo $\mathcal{B}_{I_1}, \mathcal{B}_{I_2} \in \mathfrak{Z}(H)$, shqyrtojmë $J \in \mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2}$. Atëherë, $J \in \mathcal{PP}(H)$, $I_1 \not\subseteq J$ dhe $I_2 \not\subseteq J$. Supozojmë se $I_1 \cap I_2 \subseteq J$. Meqenëse J është hiperideal pastërtisht prim, atëherë ose $I_1 \subseteq J$ ose $I_2 \subseteq J$. Ky është kontradiksion! Kështu, $I_1 \cap I_2 \not\subseteq J$, gjë që sjell që $J \in \mathcal{B}_{I_1 \cap I_2}$. Në këtë mënyrë, $\mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2} \subseteq \mathcal{B}_{I_1 \cap I_2}$. Nga ana tjetër, në qoftë se $J \in \mathcal{B}_{I_1 \cap I_2}$, atëherë $I_1 \cap I_2 \not\subseteq J \Rightarrow I_1 \not\subseteq J$ dhe $I_2 \not\subseteq J \Rightarrow J \in \mathcal{B}_{I_1}$ dhe $J \in \mathcal{B}_{I_2} \Rightarrow J \in \mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2}$. Që këtë, $\mathcal{B}_{I_1 \cap I_2} \subseteq \mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2}$. Si rrjedhim, $\mathcal{B}_{I_1 \cap I_2} = \mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2}$, gjë që sjell $\mathcal{B}_{I_1} \cap \mathcal{B}_{I_2} \in \mathfrak{Z}(H)$. Pra, $\mathfrak{Z}(H)$ është topologji në $\mathcal{PP}(H)$. ■

§3.8 Hiperidealet e majta prim në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë dhe karakterizojmë hiperidealet prim dhe hiperidealet e majta prim në gjysmëhipergrupet ternare. Gjithashtu, janë shqyrtuar disa veti të tyre.

Përkufizim 3.8.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe M një hiperideal i majtë i H . Atëherë M quhet hiperideal i majtë maksimal (maximal left hyperideal) i H në qoftë se $M \neq H$ dhe nuk ekziston ndonjë hiperideal i majtë i mirëfilltë I i H i tillë që $M \subset I$.*

Përkufizim 3.8.2 *Një hiperideal i majtë I i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet idempotent në qoftë se $f(I, I, I) = I$.*

Përkufizim 3.8.3 *Një gjysmëhipergrup ternar H quhet gjysmë i thjeshtë (semisimple) në qoftë se të gjitha hiperidealet e tij të majta janë idempotente.*

Lemë 3.8.4 *Bashkimi i hiperidealeve të një gjysmëhipergrupi ternar është një hiperideal.*

Vërtetim. Supozojmë se I dhe J janë hiperideale të një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) .

Atëherë kemi $f(H, H, I \cup J) = \bigcup_{a \in I \cup J} f(H, H, a) = \left(\bigcup_{a \in I} f(H, H, a) \right) \cup \left(\bigcup_{a \in J} f(H, H, a) \right) \subseteq I \cup J$. ■

Është e dukshme që bashkimi i çdo familjeje hiperidealesh të majta të një gjysmëhipergrupi ternar H është përsëri një hiperideal i majtë i H dhe prerja joboshe e çdo familjeje hiperidealesh të majta të një gjysmëhipergrupi ternar H është një hiperideal i majtë i H .

Lema e mëposhtme është e qartë.

Lemë 3.8.5 *Në qoftë se A, B, C janë tre hiperideale të majta çfarëdo të një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) , atëherë $f(A, B, C)$ është një hiperideal i majtë i H .*

Vërtetim. Kemi $f(H, H, f(A, B, C)) = f(f(H, H, A), B, C) \subseteq f(A, B, C)$. ■

Përkufizim 3.8.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal (hiperideal i majtë) i mirëfilltë P i H quhet hiperideal (hiperideal i majtë) prim (prime hyperideal (left hyperideal)) i H në qoftë se $f(A, B, C) \subseteq P$ sjell që $A \subseteq P$ ose $B \subseteq P$ ose $C \subseteq P$ për çdo tre hiperideale (hiperideale të majta) A, B, C të H .*

Përkufizim 3.8.7 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal (hiperideal i majtë) i mirëfilltë P i H quhet hiperideal (hiperideal i majtë) gjysmëprim (semiprime hyperideal (left hyperideal)) i H në qoftë se $f(I, I, I) \subseteq P$ sjell që $I \subseteq P$ për çdo hiperideal (hiperideal të majtë) I të H .

Është e qartë se çdo hiperideal i majtë prim i një gjysmëhipergrupi ternar H është gjithashtu hiperideal i majtë gjysmëprim i H .

Përkufizim 3.8.8 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i mirëfilltë P i H quhet irreducible (irreducible), në qoftë se për hiperidealet T dhe K të H , $T \cap K = P$ sjell që $P = T$ ose $P = K$ ose në mënyrë ekuivalente, $T \cap K \subseteq P$ sjell që $T \subseteq P$ ose $K \subseteq P$.

Shembull 3.8.9 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$, për çdo $x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela:

$*$	a	b	c	d	e	f
a	a	$\{a, b\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, f\}$
b	b	b	d	d	f	f
c	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$
d	d	d	d	d	d	d
e	e	$\{e, f\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, f\}$
f	f	f	d	d	f	f

Atëherë (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se, $I_1 = \{c, d\}$, $I_2 = \{c, d, e, f\}$ dhe H janë hiperideale të majta të H . Vërtetohet lehtë se I_2 dhe H janë hiperideale të majta prim. I_1 është hiperideal i majtë irreducible. ■

Teoremë 3.8.10 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. P është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H dhe $a \in H$. Atëherë, $a \in P$ vetëm atëherë kur $f(H, H, a) \subseteq P$.

Vërtetim. Le të supozojmë se P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H . Në qoftë se $a \in P$, atëherë $f(H, H, a) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P$.

Anasjellas, supozojmë se $f(H, H, a) \subseteq P$, ku P është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . Atëherë

$$f(\langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l) = f(a \cup f(H, H, a), \{a\} \cup f(H, H, a), \{a\} \cup f(H, H, a)) \subseteq f(H, H, a) \subseteq P.$$

Meqenëse P është hiperideal i majtë gjysmëprim, kemi që $\langle a \rangle_l \subseteq P$ dhe që këtë $a \in P$. ■

Teoremë 3.8.11 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe P një hiperideal i majtë i H . Pohimet që vijojnë janë ekuivalente:

1. P është një hiperideal i majtë prim i H .
2. $f(a, H, H, b, H, H, c) \subseteq P$ sjell që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.
3. $f(\langle a \rangle_l, \langle b \rangle_l, \langle c \rangle_l) \subseteq P$ sjell që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se P është një hiperideal i majtë prim i H dhe

$f(a, H, H, b, H, H, c) \subseteq P$. Atëherë, $f(H, H, f(a, H, H, b, H, H, c)) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P$. Nga kjo rrjedh që $f(f(H, H, a), f(H, H, b), f(H, H, c)) \subseteq P$. Meqë P është hiperideal i majtë prim i H , atëherë $f(H, H, a) \subseteq P$ ose $f(H, H, b) \subseteq P$ ose $f(H, H, c) \subseteq P$. Meqenëse çdo hiperideal i majtë prim është gjysmëprim, P është hiperideal i majtë gjysmëprim. Kështu, nga Teorema 3.8.10, $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Le të jetë $f(\langle a \rangle_l, \langle b \rangle_l, \langle c \rangle_l) \subseteq P$ për $a, b, c \in P$, atëherë $f(a, H, H, b, H, H, c) = f(a, f(H, H, b), f(H, H, c)) \subseteq f(\langle a \rangle_l, \langle b \rangle_l, \langle c \rangle_l) \subseteq P$. Si rrjedhim, nga (2) kemi që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Le të jenë A, B, C tre hiperideale të majta të çfarëdoshme të H të tilla që $f(A, B, C) \subseteq P$. Le të jetë $B \not\subseteq P$ dhe $C \not\subseteq P$ dhe akoma, $b \in B$ dhe $c \in C$, të tilla që $b, c \notin P$. Atëherë, për çdo $a \in A$ kemi që $f(\langle a \rangle_l, \langle b \rangle_l, \langle c \rangle_l) \subseteq f(A, B, C) \subseteq P$. Nga (3) marrim $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$, por $b \notin P$ dhe $c \notin P$, kështu që $a \in P$ dhe që këtë $A \subseteq P$. Si rrjedhim, P është një hiperideal i majtë prim i H . ■

Rrjedhim 3.8.12 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar dhe P një hiperideal i majtë i H . Atëherë, P është hiperideal i majtë prim vetëm atëherë kur $f(a, b, c) \subseteq P$ sjell që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$, për çdo $a, b, c \in H$.*

Mund të shihet lehtë se rezultati i mësipërm është gjithashtu i vlefshëm për gjysmëhipergrupin ternar (1,3)-ndërrimtar.

Përkufizim 3.8.13 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi joboshe A e H quhet m -sistem i majtë (a left m -system) në qoftë se për çdo $x, y, z \in A$, ekzistojnë elementet $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$ të tilla që $f(x, a_1, a_2, y, a_3, a_4, z) \subseteq A$.*

Teoremë 3.8.14 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe P një hiperideal i majtë i mirëfilltë i H . P është hiperideal i majtë prim vetëm atëherë kur plotësi i tij P^c është një m -sistem i majtë.*

Vërtetim. Le të jetë P një hiperideal i majtë prim i H . Supozojmë se $x, y, z \notin P$. Atëherë $x, y, z \in P^c$. Le të supozojmë se P^c nuk është m -sistem i majtë. Atëherë, për çdo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$, $f(x, a_1, a_2, y, a_3, a_4, z) \not\subseteq P^c$, kështu që $f(x, a_1, a_2, y, a_3, a_4, z) \subseteq P$. Meqenëse P është hiperideal i majtë prim i H , nga Teorema 3.8.11 kemi $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$. Kjo është e pamundur, kështu që P^c është një m -sistem i majtë.

Anasjellas, supozojmë se P^c është një m -sistem i majtë. Le të jetë $x, y, z \in P^c$. Atëherë, ekzistojnë $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$ të tilla që $f(x, a_1, a_2, y, a_3, a_4, z) \subseteq P^c$. Pra, $f(x, a_1, a_2, y, a_3, a_4, z) \not\subseteq P$, prandaj, në qoftë se $x, y, z \notin P$, atëherë $f(x, H, H, y, H, H, z) \not\subseteq P$. Si rrjedhim, nga Teorema 3.8.11, P është një hiperideal i majtë prim i H . ■

Përkufizim 3.8.15 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe P një hiperideal i majtë i H . P quhet hiperideal i majtë plotësisht prim (completely prime left hyperideal) i H në qoftë se $f(a,b,c) \subseteq P$ sjell që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$, për çdo element $a,b,c \in H$.

Është e qartë se çdo hiperideal i majtë plotësisht prim i H është hiperideal i majtë prim i H , por e anasjella në përgjithësi, mund të mos jetë e vërtetë. Për gjysmëhipergrupet ternare ndërrimtare, konceptet e hiperidealeve të majta plotësisht prim dhe prim përputhen.

Lemë 3.8.16 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë P i gjysmëhipergrupit ternar H është plotësisht prim vetëm atëherë kur P^c është nëngjysmëhipergrup ternar i H .

Vërtetim. Evident. ■

Teoremë 3.8.17 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë P i H është plotësisht prim vetëm atëherë kur për çdo çift $(m,n) \in \mathbb{Z}^+$, ku $m+n$ numër çift, $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_{m \text{ times}}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_{n \text{ times}}, f(a,b,c)) \subseteq P$ sjell që $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.

Vërtetim. Supozojmë se P është një hiperideal i majtë plotësisht prim i H dhe $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_{m \text{ times}}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_{n \text{ times}}, f(a,b,c)) \subseteq P$. Atëherë, $f(\underbrace{f(a,b,c), f(a,b,c), \dots, f(a,b,c)}_{m+n+1 \text{ times}}) \subseteq P$.

Meqenëse P është plotësisht prim, nga induksioni matematik gjejmë $f(a,b,c) \subseteq P$ dhe që këtij, $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$.

Anasjellas, supozojmë se $f(a,b,c) \subseteq P$. Atëherë, për çdo çift $(m,n) \in \mathbb{Z}^+$ ku $m+n$ numër çift, $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_{m \text{ times}}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_{n \text{ times}}, f(a,b,c)) \subseteq f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_{m \text{ times}}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_{n \text{ times}}, P) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P$.

Si rrjedhim, $a \in P$ ose $b \in P$ ose $c \in P$, kështu që P është plotësisht prim. ■

Pohim 3.8.18 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar me identik të majtë. Atëherë çdo hiperideal i majtë maksimal i H është hiperideal prim i H .

Vërtetim. Le të jetë P një hiperideal i majtë maksimal i H . Le të jenë A, B, C tre hiperideale të majta të H të tilla që $f(A,B,C) \subseteq P$. Supozojmë se $A, B \not\subseteq P$. Atëherë, $A \cup P = H$ dhe $B \cup P = H$. Meqenëse $e \in H$, kemi që $e \in A \cup P$ dhe $e \in B \cup P$, kështu që $e \in A$ ose $e \in P$ dhe $e \in B$ ose $e \in P$. Meqenëse $e \notin P$, kemi që $e \in A$ dhe $e \in B$ sjell që $A = H$ dhe $B = H$. Tani, meqë $e \in H$, kemi $C = f(H, H, C) = f(A, B, C) \subseteq P$ sjell që $C \subseteq P$. Rrjedhimisht, P është hiperideal i majtë prim i H . ■

Teoremë 3.8.19 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, P një m -sistem i majtë dhe Q një hiperideal i majtë i H i tillë që $P \cap Q = \emptyset$. Atëherë, ekziston një hiperideal i majtë maksimal M i H që përmban Q dhe $M \cap P = \emptyset$. Për më tepër, M është gjithashtu një hiperideal i majtë prim i H .

Vërtetim. Le të jetë $\tau_P = \{B : B \text{ është një hiperideal i majtë prim i } H, Q \subseteq B, B \cap P = \emptyset\}$. Meqenëse $Q \in \tau_P$, $\tau_P \neq \emptyset$. τ_P është bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen e

bashkësive. Le të jetë $\{M_i\}$ një varg i çfarëdoshëm në τ_P . Meqë bashkimi i hiperidealeve të majta është një hiperideal i majtë, $\bigcup_{i \in I} M_i$ është hiperideal i majtë i H . Meqenëse $Q \subseteq M_i$ për çdo $i \in I$, kemi që $Q \subseteq \bigcup_{i \in I} M_i$. Supozojmë se $(\bigcup_{i \in I} M_i) \cap P \neq \emptyset$. Atëherë, ekziston $a \in H$ i tillë që $a \in (\bigcup_{i \in I} M_i) \cap P$. Kjo sjell që $a \in \bigcup_{i \in I} M_i$ dhe $a \in P$. Pra $a \in M_i$ për $i \in I$ dhe $a \in P$, kështu që $M_i \cap P \neq \emptyset$. Kjo është e pamundur, prandaj $(\bigcup_{i \in I} M_i) \cap P = \emptyset$. Si rrjedhim $\bigcup_{i \in I} M_i$ është një kufi i sipërm i $\{M_i\}$. Meqenëse $\{M_i\}$ është një varg i çfarëdoshëm, kemi që çdo varg në τ_P ka një kufi të sipërm në τ_P , kështu që nga Lema e Zorn, familja τ_P përmban një element maksimal M . Të tregojmë që M është një hiperideal i majtë prim i H . Le të jenë A, B, C tre hiperideale të majta të H të tilla që $f(A, B, C) \subseteq M$. Supozojmë se $A \not\subseteq M, B \not\subseteq M$ dhe $C \not\subseteq M$. Atëherë, ekzistojnë $a \in A, b \in B$ dhe $c \in C$ të tilla që $a, b, c \notin M$. Tani, $\langle a \rangle_l \cup M, \langle b \rangle_l \cup M$ dhe $\langle c \rangle_l \cup M$ janë hiperideale të majta të H që e përmbajnë rigorozisht M , kështu që $(\langle a \rangle_l \cup M) \cap P \neq \emptyset, (\langle b \rangle_l \cup M) \cap P \neq \emptyset$ dhe $(\langle c \rangle_l \cup M) \cap P \neq \emptyset$. Le të jetë $x \in (\langle a \rangle_l \cup M) \cap P, y \in (\langle b \rangle_l \cup M) \cap P$ dhe $z \in (\langle c \rangle_l \cup M) \cap P$. Meqenëse $x, y, z \in P$ dhe P është një m -sistem i majtë, kemi që $f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq P$ për $x_1, x_2, x_3, x_4 \in H$. Gjithashtu, $f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq f((\langle a \rangle_l \cup M), H, H, (\langle b \rangle_l \cup M), H, H, (\langle c \rangle_l \cup M))$. Si rrjedhim, kemi që

Rasti I: Në qoftë se $x \in \langle a \rangle_l \subseteq A, y \in \langle b \rangle_l \subseteq B, z \in \langle c \rangle_l \subseteq C$, atëherë

$$f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq f(A, f(H, H, B), f(H, H, C)) \subseteq f(A, B, C) \subseteq M.$$

Rasti II: Në qoftë se $x \in M$, atëherë

$f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq f(M, f(H, H, M), f(H, H, M)) \subseteq f(M, M, M) \subseteq M$. Në mënyrë të ngjashme, në qoftë se $y \in M$ ose $z \in M$, atëherë

$$f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq f(H, H, f(H, M, H), H, H) \subseteq f(H, M, H) \subseteq M \text{ dhe}$$

$$f(x, x_1, x_2, y, x_3, x_4, z) \subseteq f(H, H, H, H, f(H, H, M)) \subseteq f(H, H, M) \subseteq M.$$

Që këtë $P \cap M \neq \emptyset$, gjë që është e pamundur, kështu që $A \subseteq M$ ose $B \subseteq M$ ose $C \subseteq M$.

Si rrjedhim, M është një hiperideal i majtë prim i H . ■

§3.9 Hiperfiltrat në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë konceptet e hiperfiltrave dhe kongruencës hipergjysmëlatisë të gjysmëhipergrupeve ternare; japim disa karakteristika të hiperfiltrave në gjysmëhipergrupet ternare. Gjithashtu, shqyrtojmë marrëdhëniet ndërmjet hiperfiltrave dhe hiperidealeve prim dhe kongruencës hipergjysmëlatisë në gjysmëhipergrupet ternare.

Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një nëngjysmëhipergrup ternar $F_l(F_m, F_r)$ i gjysmëhipergrupit ternar H quhet *hiperfiltër i majtë, (lateral, i djathtë) (left (lateral, right) hyperfilter)* i H në qoftë se për çdo $a, b, c \in H$, $f(a, b, c) \subseteq F_l(f(a, b, c) \subseteq F_m, f(a, b, c) \subseteq F_r)$ sjell që $c \in F_l(b \in F_m, c \in F_r)$. Në qoftë se një nëngjysmëhipergrup ternar i gjysmëhipergrupit ternar H është hiperfiltër i majtë, lateral dhe i djathtë i H , atëherë ai quhet *hiperfiltër (hyperfilter)* i H . Prerja e gjithë hiperfiltrave të një gjysmëhipergrupi ternar H që përmbajnë një nënbashkësi joboshe A të H , është hiperfiltri i H i përfshuar nga A . Për $A = \{x\}$, shënojmë me $n(x)$ hiperfiltrin e H të përfshuar nga $\{x\}$. Një relacion ekuivalence ρ në një gjysmëhipergrup ternar H quhet *kongruencë (congruence)* në qoftë se për çdo $a, b \in H$, $a\rho b$ sjell që $\forall u \in f(a, x, y), \exists v \in f(b, x, y)$ i tillë që $u\rho v$ dhe $\forall t \in f(y, x, a), \exists s \in f(y, x, b)$ i tillë që $t\rho s$ për çdo $x, y \in H$. Një kongruencë ρ në një gjysmëhipergrup ternar H quhet *kongruencë hipergjysmëlatisë (hypersemilattice congruence)* në qoftë se $a\rho x$, $\forall x \in f(a, a, a), \forall a \in H$ dhe $\forall x \in f(a, b, c), \exists y \in f(a, c, b)$ i tillë që $x\rho y$, $\exists z \in f(c, b, a)$ i tillë që $x\rho z$, $\exists w \in f(b, a, c)$ i tillë që $x\rho w$ për çdo $a, b, c \in H$. Për një nënbashkësi joboshe A të një gjysmëhipergrupi ternar H , përcaktojmë një relacion në H si më poshtë:

$$n := \{(x, y) \in H \times H : n(x) = n(y)\}.$$

Provohet lehtë se n është relacion ekuivalence në H .

Teoremë 3.9.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe F një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. F është një hiperfiltër i majtë (lateral, i djathtë) i H .
2. $H \setminus F = \emptyset$ ose $H \setminus F$ është një hiperideal i majtë (lateral, i djathtë) prim i H .

Vërtetim. Supozojmë se F është një hiperfiltër i majtë i H dhe $H \setminus F \neq \emptyset$. Le të jenë $a, b \in H$ dhe $c \in H \setminus F$. Atëherë $f(a, b, c) \subseteq H \setminus F$ sepse F është hiperfiltër i majtë i H dhe $c \notin F$, kështu që $H \setminus F$ është hiperideal i majtë i H . Në vazhdim, le të jenë $a, b, c \in H$ të tilla që $f(a, b, c) \subseteq H \setminus F$. Atëherë $a \in H \setminus F$ ose $b \in H \setminus F$ ose $c \in H \setminus F$, sepse F është nëngjysmëhipergrup ternar i H . Që këtë, $H \setminus F$ është hiperideal i majtë prim i H .

Anasjellas, në qoftë se $H \setminus F = \emptyset$, atëherë $F = H$, prandaj F është një hiperideal i majtë i H . Supozojmë se $H \setminus F$ është hiperideal i majtë prim i H . Le të jenë $a, b, c \in F$. Atëherë $f(a, b, c) \subseteq F$, sepse $H \setminus F$ është prim, kështu që F është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Në

vazhdim, le të jenë $a, b, c \in H$ të tilla që $f(a, b, c) \subseteq F$. Atëherë $c \in F$, sepse $H \setminus F$ është hiperideal i majtë i H . Si rrjedhim F është një hiperfiltër i majtë i H . Në këtë mënyrë kompletohet vërtetimi i Teoremës. ■

Rrjedhim 3.9.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe F një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë, janë ekuivalente pohimet e mëposhtme:*

1. F është hiperfiltër i H .
2. $H \setminus F = \emptyset$ ose $H \setminus F$ është hiperideal prim i H .

Teoremë 3.9.3 *Në qoftë se H është një gjysmëhipergrup ternar, atëherë n është një kongruencë hipergjysmëlatisë në H .*

Vërtetim. Le të jenë $a, x, y \in H$ të tilla që anb . Atëherë, $n(a) = n(b)$. Meqenëse $f(b, x, y) \subseteq \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y)$, kemi që $b, x, y \in \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y)$. Kështu, $n(a) = n(b) \subseteq \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y)$, prandaj dhe $a, x, y \in \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y)$. Që këtëj $f(a, x, y) \subseteq \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y)$, kështu që $\bigcup n(s) \subseteq \bigcup n(t), \forall t \in f(b, x, y), \forall s \in f(a, x, y)$. Në mënyrë të ngjashme, $\bigcup n(t) \subseteq \bigcup n(s), \forall t \in f(b, x, y), \forall s \in f(a, x, y)$. Si rrjedhim, $\bigcup n(t) = \bigcup n(s), \forall t \in f(b, x, y), \forall s \in f(a, x, y)$, kështu që $\forall s \in f(a, x, y), \exists t \in f(b, x, y)$ i tillë që snt . Në mënyrë të ngjashme tregohet se $\forall s \in f(y, x, a), \exists t \in f(y, x, b)$ i tillë që snt . Kjo provon se n është një kongruencë në H . Në qoftë se $a \in H$, atëherë $a \in n(x), \forall x \in f(a, a, a)$ sepse $f(a, a, a) \subseteq \bigcup n(x), \forall x \in f(a, a, a)$. Kështu, $n(a) \subseteq \bigcup n(x), \forall x \in f(a, a, a)$. Meqenëse $a \in n(a)$, kemi $f(a, a, a) \subseteq n(a)$, kështu që $\bigcup n(x) \subseteq n(a), \forall x \in f(a, a, a)$. Si rrjedhim, $anx, \forall x \in f(a, a, a)$. Në qoftë se $a, b, c \in H$, atëherë $f(a, b, c) \subseteq \bigcup n(x), \forall x \in f(a, b, c)$. Si rrjedhim, $a, b, c \in \bigcup n(x), \forall x \in f(a, b, c)$, kështu që $f(c, b, a) \subseteq \bigcup n(x), \forall x \in f(a, b, c)$. Që këtëj, $\bigcup n(x) \subseteq \bigcup n(y), \forall x \in f(c, b, a), \forall y \in f(a, b, c)$. Në mënyrë të ngjashme, $\bigcup n(x) \subseteq \bigcup n(y), \forall x \in f(a, b, c), \forall y \in f(c, b, a)$, kështu që $\bigcup n(x) = \bigcup n(y), \forall x \in f(a, b, c), \forall y \in f(c, b, a)$, pra $\forall x \in f(a, b, c), \exists y \in f(c, b, a)$ i tillë që xny . Në mënyrë të ngjashme mundemi të tregojmë raste të tjera që $\forall x \in f(a, b, c), \exists y \in f(a, c, b)$ i tillë që xny dhe $\forall x \in f(a, b, c), \exists y \in f(b, a, c)$ i tillë që xny . Si rrjedhim, n është një kongruencë hipergjysmëlatisë në H . ■

§3.10 Hiperidealet e majta gjysmëprim në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion karakterizojmë hiperidealet gjysmëprim dhe hiperidealet e majta gjysmëprim në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

Teoremë 3.10.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe P një hiperideal i majtë i H . Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H .
2. $f(a, H, H, a, H, H, a) \subseteq P \Rightarrow a \in P$.
3. $f(\langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l) \subseteq P \Rightarrow a \in P$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H dhe $f(a, H, H, a, H, H, a) \subseteq P$. Atëherë, $f(H, H, f(a, H, H, a, H, H, a)) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P$. Si rrjedhim, $f(f(H, H, a), f(H, H, a), f(H, H, a)) \subseteq P$. Meqenëse P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H , kemi që $f(H, H, a) \subseteq P$ dhe nga Teorema 3.8.10 marrim $a \in P$.

(2) $\Rightarrow$ (3). Le të jetë $f(\langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l) \subseteq P$ për ndonjë $a \in P$. Atëherë $f(a, H, H, a, H, H, a) = f(a, f(H, H, a), f(H, H, a)) \subseteq f(\langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l) \subseteq P$. Nga (2) marrim $a \in P$.

(3) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë I një hiperideal i majtë i çfarëdoshëm i H i tillë që $f(I, I, I) \subseteq P$. Supozojmë se $I \not\subseteq P$. Atëherë, ekziston një element $a \in I$ i tillë që $a \notin P$. Kështu, $f(\langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l, \langle a \rangle_l) \subseteq f(I, I, I) \subseteq P$. Nga (3) kemi që $a \in P$. Kjo është e pamundur! Atëherë $I \subseteq P$, kështu që P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H . ■

Rrjedhim 3.10.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar dhe P një hiperideal i majtë i mirëfilltë i H . P është gjysmëprim vetëm atëherë kur për çdo $a \in H$, $f(a, a, a) \subseteq P \Rightarrow a \in P$*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar. Supozojmë se P është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H dhe $f(a, a, a) \subseteq P$ për ndonjë $a \in H$. Atëherë, kemi që

$$f(H, H, f(H, H, f(a, a, a))) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P.$$

Meqenëse H është ndërrimtar, kemi $f(a, H, H, a, H, H, a) \subseteq P$. Nga Teorema 3.10.1, meqenëse P është hiperideal i majtë gjysmëprim i H , kemi që $a \in P$.

Anasjellas, supozojmë se $f(a, a, a) \subseteq P \Rightarrow a \in P$. Supozojmë se për çdo hiperideal të majtë I të H , $f(I, I, I) \subseteq P$. Supozojmë se $I \not\subseteq P$. Atëherë, ekziston një element $x \in I$ i tillë që $x \notin P$. Kështu, $f(x, x, x) \subseteq f(I, I, I) \subseteq P$ sjell që $x \in P$. Kjo është e pamundur! Atëherë, $I \subseteq P$ dhe që këtë P është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . ■

Përkufizim 3.10.3 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi joboshe A e H quhet p -sistem i majtë (left p -system) në qoftë se për çdo $a \in A$, ekzistojnë elementet $b_1, b_2, b_3, b_4 \in H$ të tilla që $f(a, b_1, b_2, a, b_3, b_4, a) \subseteq A$.*

Është e qartë se në një gjysmëhipergrup ternar H çdo m -sistem i majtë është një p -sistem i majtë dhe bashkimi i p -sistemeve të majta është gjithashtu një p -sistem i majtë.

Teoremë 3.10.4 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe P një hiperideal i majtë i mirëfilltë i H . P është gjysmëprim atëherë dhe vetëm atëherë kur plotësi i tij P^c është p -sistem i majtë.*

Vërtetim. Le të jetë P një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . Supozojmë se $b \notin P$. Atëherë $b \in P^c$. Supozojmë se P^c nuk është p -sistem i majtë. Atëherë, për çdo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$, $f(b, a_1, a_2, b, a_3, a_4, b) \notin P^c$. Kjo sjell që për çdo $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$, $f(b, a_1, a_2, b, a_3, a_4, b) \subseteq P$. Nga Teorema 3.10.1 rrjedh që $b \in P$. Kjo është e pamundur! Si rrjedhim P^c është një p -sistem i majtë.

Anasjellas, supozojmë se P^c është një p -sistem i majtë. Le të jetë $b \in P^c$. Atëherë, ekzistojnë $a_1, a_2, a_3, a_4 \in H$ të tilla që $f(b, a_1, a_2, b, a_3, a_4, b) \subseteq P^c$, kështu që $f(b, a_1, a_2, b, a_3, a_4, b) \not\subseteq P$. Në këtë mënyrë, $b \notin P \Rightarrow f(b, H, H, b, H, H, b) \not\subseteq P$. Nga Teorema 3.10.1 rrjedh që P është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . ■

Përkufizim 3.10.5 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë P i H quhet hiperideal i majtë plotësisht gjysmëprim (completely semiprime left hyperideal) i H në qoftë se për çdo $a \in H$, $f(a, a, a) \subseteq P \Rightarrow a \in P$.*

Teoremë 3.10.6 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë i mirëfilltë P i H është plotësisht gjysmëprim vetëm atëherë kur për çdo çift $(m, n) \in \mathbb{Z}^+$, ku $m+n$ numër çift, $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_m \text{ herë}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_n \text{ herë}, f(a, a, a)) \subseteq P \Rightarrow a \in P$.*

Vërtetim. Supozojmë se P është hiperideal i majtë plotësisht gjysmëprim i H dhe $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_m \text{ times}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_n \text{ times}, f(a, a, a)) \subseteq P$. Atëherë, $f(\underbrace{f(a, a, a), f(a, a, a), \dots, f(a, a, a)}_{m+n+1 \text{ herë}}) \subseteq P$. Meqenëse P është i majtë plotësisht gjysmëprim, nga induksioni matematik kemi $f(a, a, a) \subseteq P$ dhe që këtë, $a \in P$.

Anasjellas, supozojmë se $f(a, a, a) \subseteq P$. Atëherë, për çdo çift $(m, n) \in \mathbb{Z}^+$, ku $m+n$ numër çift, $f(\underbrace{f(H, \dots, H)}_m \text{ herë}, \underbrace{f(H, \dots, H)}_n \text{ herë}, f(a, a, a)) \subseteq f(H, H, P) \subseteq P$. Kjo sjell që $a \in P$. Që këtë, P është plotësisht gjysmëprim. ■

Teoremë 3.10.7 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, A një p -sistem dhe I një hiperideal i majtë i H i tillë që $A \cap I = \emptyset$. Atëherë, ekziston një hiperideal i majtë maksimal M i H që përmban I , i tillë që $A \cap M = \emptyset$. Për më tepër, M është gjithashtu një hiperideal i majtë gjysmëprim i H .*

Vërtetim. Le të jetë $\tau_A = \{M : M \text{ është hiperideal i majtë i mirëfilltë i } H, I \subseteq M, M \cap A = \emptyset\}$. Meqenëse $I \in \tau_A$, kemi që $\tau_A \neq \emptyset$. τ_A është bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive. Le të jetë $\{M_i\}$ një varg i çfarëdoshëm në τ_A . Të tregojmë se $\bigcup_{i \in J} M_i$

është një element i τ_A . Meqë bashkimi i hiperidealeve të majta është hiperideal i majtë, kemi që $\bigcup_{i \in J} M_i$ është hiperideal i majtë i H . Gjithashtu, $I \subseteq M_i$ për çdo $i \in J$, si rrjedhim $I \subseteq \bigcup_{i \in J} M_i$. Tani, le të tregojmë se $(\bigcup_{i \in J} M_i) \cap A = \emptyset$. Supozojmë se $(\bigcup_{i \in J} M_i) \cap A \neq \emptyset$. Atëherë, ekziston $a \in H$ i tillë që $a \in (\bigcup_{i \in J} M_i) \cap A \neq \emptyset$, kështu që $a \in \bigcup_{i \in J} M_i$ dhe $a \in A$. Në këtë mënyrë, $a \in M_i$ për disa $i \in J$ dhe $a \in A$, prandaj $M_i \cap A \neq \emptyset$. Kjo është e pamundur! Atëherë, $(\bigcup_{i \in J} M_i) \cap A = \emptyset$, kështu që $\bigcup_{i \in J} M_i$ është kufiri i sipërm i $\{M_i\}$. Nga Lema e Zorn familja τ_A përmban një element maksimal M . Të tregojmë se M është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . Le të jetë $f(X, X, X) \subseteq M$, ku X është një hiperideal i majtë i H . Supozojmë se $X \not\subseteq M$. Atëherë, ekziston $x \in X$ i tillë që $x \notin M$. Kemi që $\langle a \rangle_l \cup M$ është një hiperideal i majtë i H që e përmban rigorozisht M , i tillë që $(\langle a \rangle_l \cup M) \cap A \neq \emptyset$. Le të jetë $c \in (\langle a \rangle_l \cup M) \cap A \Rightarrow c \in A$. Meqenëse A është një p -sistem i majtë, atëherë ekzistojnë $c_1, c_2, c_3, c_4 \in H$ të tilla që $f(c, c_1, c_2, c, c_3, c_4, c) \subseteq A$. Kështu, $f(c, c_1, c_2, c, c_3, c_4, c) \subseteq f(\langle a \rangle_l \cup M, H, H, \langle a \rangle_l \cup M, H, H, \langle a \rangle_l \cup M)$. Kemi

Rasti I: Në qoftë se $c \in \langle a \rangle_l$, meqenëse $\langle a \rangle_l \subseteq X$, kemi që $c \in X$. Si rrjedhim, $f(c, c_1, c_2, c, c_3, c_4, c) \subseteq f(X, f(H, H, X), f(H, H, X)) \subseteq f(X, X, X) \subseteq M$.

Rasti II: Në qoftë se $c \in M$, atëherë, $f(c, c_1, c_2, c, c_3, c_4, c) \subseteq f(M, f(H, H, M), f(H, H, M)) \subseteq f(M, M, M) \subseteq M$, kështu që $A \cap M \neq \emptyset$, gjë që është e pamundur! Pra, $X \subseteq M$ dhe si rrjedhim, M është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H . ■

§3.11 Hiperidealet e majta irreducible në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë dhe karakterizojmë hiperidealet e majta irreducible në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

Përkufizim 3.11.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë i mirëfilltë I i H quhet irreducible, në qoftë se për hiperidealet e majta T dhe K të H , $T \cap K = I \Rightarrow I = T$ ose $I = K$.*

Vërtetohet lehtë se përkufizimi i mësipërm është ekuivalent me përkufizimin që vijon.

Përkufizim 3.11.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal i majtë i mirëfilltë I i H quhet irreducible, në qoftë se për hiperidealet e majta T dhe K të H , $T \cap K \subseteq I \Rightarrow T \subseteq I$ ose $K \subseteq I$.*

Pohim 3.11.3 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, $a \in H$ dhe I një hiperideal i majtë i mirëfilltë i H i tillë që $a \notin I$. Atëherë, ekziston një hiperideal i majtë irreducible T i H i tillë që $I \subseteq T$ dhe $a \notin T$.*

Vërtetim. Le të jetë $\mathfrak{F} = \{J \text{ një hiperideal i majtë i } H : I \subseteq J \text{ dhe } a \notin J\}$. Është e qartë se $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ meqenëse $I \in \mathfrak{F}$. Bashkësia $\mathfrak{F}$ është bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive. Le të jetë $\{T_i : i \in \Omega\}$ një varg hiperidealesh të majta në $\mathfrak{F}$. Atëherë, $T = \bigcup_{i \in \Omega} T_i$ është hiperideal i majtë i H i tillë që $a \notin T$. Nga Lema e Zorn rrjedh se bashkësia $\mathfrak{F}$ përmban një element maksimal M . Të tregojmë se M është një hiperideal i majtë irreducible. Supozojmë se $M = B \cap C$, ku B dhe C janë hiperideale të majta të tilla që $I \subset B, C$. Meqenëse $M = B \cap C$, nga vetia që gëzon M , kemi që $a \in B$ dhe $a \in C$. Si rrjedhim $a \in B \cap C = M$, gjë që është e pamundur! Si rrjedhim, $M = B$ ose $M = C$. Kështu, M është hiperideal i majtë irreducible. ■

Pohim 3.11.4 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Cdo hiperideal i majtë i mirëfilltë I i H është prerja e gjithë hiperidealeve të majta irreducible që e përmbajnë atë.*

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 3.11.5 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe I një hiperideal i majtë gjysmëprim irreducible i H . Atëherë, I është një hiperideal i majtë prim i H .*

Vërtetim. Evident. ■

Përkufizim 3.11.6 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi joboshe A e H quhet i -sistemi i majtë (left i -system), në qoftë se për $a, b \in A$, $\langle a \rangle_i \cap \langle b \rangle_i \cap A \neq \emptyset$.*

Teoremë 3.11.7 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është gjysmë i thjeshtë.
2. Për çdo tre hiperideale të majta I, J, K të H , $I \cap J \cap K \subseteq f(I, J, K)$.
3. Cdo hiperideal i majtë i H është i majtë gjysmëprim.
4. Cdo hiperideal i majtë i H është prerja e hiperidealeve të majta prim që e përmbajnë atë.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë H gjysmë i thjeshtë dhe I, J, K hiperideale të majta të H . Meqenëse $I \cap J \cap K$ është një hiperideal i majtë i H , kemi

$$I \cap J \cap K = f(I \cap J \cap K, I \cap J \cap K, I \cap J \cap K) \subseteq f(I, J, K).$$

(2) $\Rightarrow$ (1). Duke marrë $I = J = K$ kemi $I \subseteq f(I, I, I)$ dhe meqenëse $f(I, I, I) \subseteq I$, rrjedh që $I = f(I, I, I)$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Le të jetë H gjysmë i thjeshtë dhe I, J hiperideale të majta të H të tilla që $f(I, I, I) \subseteq J$. Meqenëse H është gjysmë i thjeshtë, kemi që $f(I, I, I) = I$, kështu që $I \subseteq J$. Që këtë, J është një hiperideal i majtë gjysmëprim i H .

(3) $\Rightarrow$ (4). Le të supozojmë se çdo hiperideal i majtë i H është hiperideal i majtë gjysmëprim. Nga Pohimi 3.10.4 dhe (3) kemi që çdo hiperideal i majtë i H është prerja e gjithë hiperidealeve të majta gjysmëprim irreducible të H që e përmbajnë atë. Nga Pohimi 3.10.5 çdo

hiperideal i majtë gjysmëprim irreducible është hiperideal i majtë prim. Në këtë mënyrë, çdo hiperideal i majtë I i H është prerja e gjithë hiperidealeve të majta prim që e përmbajnë atë.

(4) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se çdo hiperideal i majtë i H është prerja e gjithë hiperidealeve të majta prim që e përmbajnë atë. Le të jetë I një hiperideal i majtë i çfarëdoshëm i H . Nga (4), ai është prerja e gjithë hiperidealeve të majta prim që e përmbajnë atë. Meqenëse prerja e hiperidealeve prim është një hiperideal i majtë gjysmëprim, kemi që I është hiperideal i majtë gjysmëprim. Por, meqenëse $f(I, I, I) \subseteq f(I, I, I) \Rightarrow I \subseteq f(I, I, I)$ dhe $f(I, I, I) \subseteq I$, kemi që $I = f(I, I, I)$. Kështu, H është gjysmë i thjeshtë. ■

§3.12 Zgjerimet hiperideale në gjysmëhipergrup ternare

Në këtë seksion prezantojmë konceptin e zgjerimit të hiperidealeve në gjysmëhipergrupet ternare dhe karakterizojmë vetitë e zgjerimit të hiperidealeve në gjysmëhipergrupet ternare.

Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, I një hiperideal i H dhe $A \subseteq H$. Kemi që

$$\langle A, I \rangle := \{h \in H \mid f(A, H, h) \subseteq I\}$$

përmban I dhe quhet zgjerimi i I nga A . Është e qartë se $f(A, H, \langle A, I \rangle) \subseteq I$ dhe për $B \subseteq H, f(A, H, B) \subseteq I$ sjell që $B \subseteq \langle A, I \rangle$. Në fakt, në qoftë se H është ndërrimtar, $\langle A, I \rangle$ është një hiperideal i H që përmban I . Meqenëse

$$f(A, H, f(\langle A, I \rangle, H, H)) = f(f(A, H, \langle A, I \rangle), H, H) = f(I, H, H) = I,$$

rrjedh që $f(\langle A, I \rangle, H, H) \subseteq \langle A, I \rangle$.

Lemë 3.12.1 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, I një hiperideal i H dhe $A, B \subseteq H$. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë të vërteta:*

1. *Në qoftë se $A \subseteq B$, atëherë $\langle B, I \rangle \subseteq \langle A, I \rangle$.*
2. *Në qoftë se $A \subseteq I$, atëherë $\langle A, I \rangle = H$.*
3. *$\langle A, I \rangle \subseteq \langle A \setminus I, I \rangle$.*

Vërtetim. (1). Le të jetë $A \subseteq B$. Atëherë, kemi

$$x \in \langle B, I \rangle \Rightarrow f(B, H, x) \subseteq I \Rightarrow f(A, H, x) \subseteq I \Rightarrow x \in \langle A, I \rangle.$$

Që këtë, $\langle B, I \rangle \subseteq \langle A, I \rangle$.

(2). Le të jetë $A \subseteq I$. Është e qartë se $\langle A, I \rangle \subseteq H$. Në qoftë se $x \in H$, atëherë kemi

$$f(A, H, x) \subseteq f(I, H, x) \subseteq I.$$

Kështu, $x \in \langle A, I \rangle$ dhe që këtë, $H \subseteq \langle A, I \rangle$. Pra, $\langle A, I \rangle = H$.

(3). Meqenëse $A \setminus I \subseteq A$, nga (1) rrjedh që $\langle A, I \rangle \subseteq \langle A \setminus I, I \rangle$. ■

Pohim 3.12.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, I një hiperideal i H dhe $A \subseteq H$. Atëherë, për çdo nënbashkësi X, Y të H , kemi*

$$\langle A, I \rangle \subseteq f(X, H, A), I \subseteq f(X, Y, A), I \rangle.$$

Vërtetim. Meqenëse $f(f(X, H, A), H, \langle A, I \rangle) = f(X, H, f(A, H, \langle A, I \rangle)) \subseteq f(X, H, I) \subseteq I$

dhe $f(f(X, Y, A), H, \langle f(X, H, A), I \rangle) \subseteq f(f(X, H, A), H, \langle f(X, H, A), I \rangle) \subseteq I$, rrjedh që përkatësisht $\langle A, I \rangle \subseteq \langle f(X, H, A), I \rangle$ dhe $\langle f(X, H, A), I \rangle \subseteq \langle f(X, Y, A), I \rangle$. ■

Pohim 3.12.3 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar, I dhe I_i hiperideale të H dhe $A, A_i \subseteq H$ për çdo $i \in \Omega$. Atëherë, kemi që

$$1. \langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle = \bigcap_{i \in \Omega} \langle A, I_i \rangle.$$

$$2. \langle \bigcup_{i \in \Omega} A_i, I \rangle = \bigcap_{i \in \Omega} \langle A_i, I \rangle.$$

Vërtetim. (1). Për $x \in H$, kemi

$$x \in \langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle \Leftrightarrow f(A, H, x) \subseteq \bigcap_{i \in \Omega} I_i \Leftrightarrow f(A, H, x) \subseteq I_i, \forall i \in \Omega \Leftrightarrow x \in \langle A, I_i \rangle, \forall i \in \Omega \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in \Omega} \langle A, I_i \rangle.$$

Që këtë, $\langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle = \bigcap_{i \in \Omega} \langle A, I_i \rangle$.

(2). Për $x \in H$, kemi

$$x \in \langle \bigcup_{i \in \Omega} A_i, I \rangle \Leftrightarrow f(\bigcup_{i \in \Omega} A_i, H, x) \subseteq I \Leftrightarrow f(A_i, H, x) \subseteq I, \forall i \in \Omega \Leftrightarrow x \in \langle A_i, I \rangle, \forall i \in \Omega \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in \Omega} \langle A_i, I \rangle.$$

Që këtë, $\langle \bigcup_{i \in \Omega} A_i, I \rangle = \bigcap_{i \in \Omega} \langle A_i, I \rangle$. ■

Pohim 3.12.4 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe I një hiperideal i H . Atëherë, I është hiperideal prim i H vetëm atëherë kur $\langle A, I \rangle = I$ për çdo $A \subseteq H$ me $A \not\subseteq I$.

Vërtetim. Le të jetë I një hiperideal prim i H dhe le të jetë $A \not\subseteq I$. Meqenëse $f(A, H, \langle A, I \rangle) \subseteq I, A \not\subseteq I$ dhe I është hiperideal prim i H , rrjedh që $\langle A, I \rangle \subseteq I$. Kjo sjell që $\langle A, I \rangle = I$.

Anasjellas, supozojmë se $\langle A, I \rangle = I$ për çdo $A \not\subseteq I$. Le të jenë $A, B \subseteq H$ të tilla që $f(A, H, B) \subseteq I$ dhe $A \not\subseteq I$. Atëherë, $B \subseteq \langle A, I \rangle = I$. Kështu, I është një hiperideal prim i H . ■

Pohimi i mëposhtëm është rrjedhim i drejtpërdrejtë i Lemës 3.12.1(2) dhe Pohimit 3.12.4.

Rrjedhim 3.12.5 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar. Në qoftë se I është një hiperideal prim i H dhe $A \subseteq H$, atëherë $\langle A, I \rangle$ është hiperideal prim i H .

Rrjedhim 3.12.6 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar dhe $A \subseteq H$. Në qoftë se $\{I_i \mid i \in \Omega\}$ është një bashkësi hiperidealesh prim të H të tilla që $\bigcap_{i \in \Omega} I_i \neq \emptyset$, atëherë $\langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle$ është hiperideal gjysmëprim i H .

Vërtetim. Nga Rrjedhimi 3.12.5 kemi që $\langle A, I_i \rangle$ është një hiperideal prim i H për çdo $i \in \Omega$. Nga Pohimi 3.12.3(1) kemi $\langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle = \bigcap_{i \in \Omega} \langle A, I_i \rangle$. Nga fakti i qartë që një prerje joboshe hiperidealesh prim të H është hiperideal gjysmëprim i H , rrjedh që $\langle A, \bigcap_{i \in \Omega} I_i \rangle$ është një hiperideal gjysmëprim. ■

Pohim 3.12.7 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar dhe $A, B \subseteq H$. Në qoftë se $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$, atëherë për çdo hiperideal I të H , $\langle B, I \rangle \subseteq \langle A, I \rangle$.

Vërtetim. Le të jetë $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$ dhe I një hiperideal i H . Në qoftë se $x \in \langle B, I \rangle$, atëherë $f(B, H, x) \subseteq I$. Nga Lema 3.12.1(1), meqenëse $A \subseteq \langle B \rangle$, rrjedh që $\langle \langle B \rangle, I \rangle \subseteq \langle A, I \rangle$. Nga Lema 3.12.1(1), Pohimi 3.12.2 dhe Pohimi 3.12.3(2), kemi që

$$\langle B, I \rangle \subseteq \langle \langle B \rangle, I \rangle \cap \langle f(H, H, B), I \rangle = \langle B \cup f(H, H, B), I \rangle = \langle \langle B \rangle, I \rangle \subseteq \langle A, I \rangle. \quad \blacksquare$$

DISA REZULTATE MBI KUAZI-HIPERIDEALET DHE BI-HIPERIDEALET NË GJYSMËHIPERGRUPET TERNARE

§4.1 Kuazi-hiperidealet e gjysmëhipergrupeve ternare

Në këtë seksion prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealeve në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

Përkufizim 4.1.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe Q një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë, Q quhet kuazi-hiperideal (quasi-hyperideal) i H vetëm atëherë kur $f(Q, H, H) \cap f(H, Q, H) \cap f(H, H, Q) \subseteq Q$ dhe $f(Q, H, H) \cap f(H, H, Q, H, H) \cap f(H, H, Q) \subseteq Q$.*

Teoremë 4.1.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe Q një nënbashkësi joboshe e H . Q është kuazi-hiperideal i H vetëm atëherë kur Q është prerja e një hiperideali të djathtë, lateral dhe të majtë të H .*

Vërtetim. Le të jetë R një hiperideal i djathtë, M një hiperideal lateral dhe L një hiperideal i majtë i H , të tillë që $Q = R \cap M \cap L$. Atëherë, Q është një kuazi-hiperideal. Në fakt, kemi:

$$\begin{aligned} & f((R \cap M \cap L), H, H) \cap f(H, (R \cap M \cap L), H) \cap f(H, H, (R \cap M \cap L)) \subseteq \\ & \subseteq f(R, H, H) \cap f(H, M, H) \cap f(H, H, L) \subseteq R \cap M \cap L, \\ & f((R \cap M \cap L), H, H) \cap f(H, H, (R \cap M \cap L), H, H) \cap f(H, H, (R \cap M \cap L)) \subseteq \\ & \subseteq f(R, H, H) \cap f(H, H, M, H, H) \cap f(H, H, L) \subseteq R \cap M \cap L. \end{aligned}$$

Anasjellas, le të jetë Q një kuazi-hiperideal i H . Atëherë, është e qartë se

$$Q \subseteq \langle Q \rangle_R \cap \langle Q \rangle_M \cap \langle Q \rangle_L, \text{ ku } \langle Q \rangle_R = \bigcup_{q \in Q} \langle q \rangle_R, \langle Q \rangle_M = \bigcup_{q \in Q} \langle q \rangle_M \text{ dhe } \langle Q \rangle_L = \bigcup_{q \in Q} \langle q \rangle_L.$$

Për më tepër,

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle_R \cap \langle Q \rangle_M \cap \langle Q \rangle_L &= (Q \cup f(Q, H, H)) \cap (Q \cup f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap (Q \cup f(H, H, Q)) = \\ &= Q \cup (f(Q, H, H) \cap ((f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap f(H, H, Q))) \subseteq Q. \end{aligned}$$

Pra, $Q = \langle Q \rangle_R \cap \langle Q \rangle_M \cap \langle Q \rangle_L$. ■

Rrjedhim 4.1.3 *Cdo kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H është një gjysmëhipergrup ternar.*

Vërtetim. Në qoftë se Q është një kuazi-hiperideal i H , atëherë, kemi

$$f(Q, Q, Q) \subseteq f(Q, H, H) \cap (f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap f(H, H, Q) \subseteq Q.$$

Lemë 4.1.4 Cdo hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i një gjysmëhipergrupi ternar H është kuazi-hiperideal i H .

Vërejtje 4.1.5 E anasjella e Lemës 4.1.4, në përgjithësi nuk është e vërtetë, pra, një kuazi-hiperideal mund të mos jetë një hiperideal i majtë, i djathtë ose lateral i H .

Shembull 4.1.6 Le të jetë $H = \{x, y, z, t\}$ dhe $f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$ për çdo $x, y, z \in H$, ku $\circ$ përcaktohet nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	x	y	z	t
x	x	$\{x, y\}$	$\{x, z\}$	H
y	y	y	$\{y, t\}$	$\{y, t\}$
z	z	$\{z, t\}$	z	$\{z, t\}$
t	t	t	t	t

Atëherë, (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Shihet thjeshtë se $Q = \{z, t\}$ është një kuazi-hiperideal i H , por nuk është hiperideal i majtë i H .

Pohim 4.1.7 Në qoftë se Q është një kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) dhe T është një nëngjysmëhipergrup ternar i H , atëherë $Q \cap T$ është ose boshe, ose një kuazi-hiperideal i H .

Lemë 4.1.8 Prerja e një bashkësie të çfarëdoshme kuazi-hiperidealesh të një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) është ose boshe ose një kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim. Le të jetë Q_i një kuazi-hiperideal i H për çdo $i \in I$, i tillë që $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$. Kjo

prerja është me të vërtetë një kuazi-hiperideal. Në fakt, në qoftë se është boshe, përfundimi është i dukshëm. Në përgjithësi, kemi që për çdo $i \in I$:

$$\begin{aligned} & f((\bigcap_{i \in I} Q_i), H, H) \cap (f(H, (\bigcap_{i \in I} Q_i), H) \cup f(H, H, (\bigcap_{i \in I} Q_i), H, H)) \cap \\ & \cap f(H, H, (\bigcap_{i \in I} Q_i)) \subseteq f(Q_i, H, H) \cap (f(H, Q_i, H) \cup f(H, H, Q_i, H, H)) \cap f(H, H, Q_i) \subseteq Q_i. \end{aligned}$$

Që këtëj

$$f((\bigcap_{i \in I} Q_i), H, H) \cap (f(H, (\bigcap_{i \in I} Q_i), H) \cup f(H, H, (\bigcap_{i \in I} Q_i), H, H)) \cap f(H, H, (\bigcap_{i \in I} Q_i)) \subseteq \bigcap_{i \in I} Q_i. \quad \blacksquare$$

Shembull 4.1.9 Le të jetë $H = N$ dhe $f: H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ përcaktohet si më poshtë:

$$f(x, y, z) = x + y + z + 5N$$

Shihet lehtë se (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $Q_i = \{i, i+1, \dots\}$ për çdo $i \in N$. Atëherë, Q_i është një kuazi-hiperideal i H dhe $\bigcap_{i \in I} Q_i = \emptyset$.

Teoremë 4.1.10 Bashkësia L e gjithë kuazi-hiperidealeve të një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) është një bashkim-gjysmëlatisë e plotë.

Vërtetim. Është e qartë se L është pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Le të shënojmë

$$\bigvee_{i \in I} Q_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_R \cap \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_M \cap \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_L.$$

Nga Teorema 4.1.2, është e qartë që ky është një kuazi-hiperideal i cili kufizon nga sipër gjithë kuazi-hiperidealet $Q_i (i \in I)$. Ai është superior i L . Me të vërtetë, për çdo kuazi-hiperideal Q që përmban të gjithë $Q_i (i \in I)$, kemi

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in I} Q_i &= \left(\bigcup_{i \in I} Q_i \cup f\left(\bigcup_{i \in I} Q_i, H, H\right) \right) \cap \left(\bigcup_{i \in I} Q_i \cup f\left(H, \bigcup_{i \in I} Q_i, H\right) \cup f\left(H, H, \bigcup_{i \in I} Q_i, H, H\right) \right) \cap \\ &\quad \cap \left(\bigcup_{i \in I} Q_i \cup f\left(H, H, \bigcup_{i \in I} Q_i\right) \right) = \\ &= \bigcup_{i \in I} Q_i \cup \left(f\left(\bigcup_{i \in I} Q_i, H, H\right) \cap \left(f\left(H, \bigcup_{i \in I} Q_i, H\right) \cup f\left(H, H, \bigcup_{i \in I} Q_i, H, H\right) \right) \cap \right. \\ &\quad \left. \cap f\left(H, H, \bigcup_{i \in I} Q_i\right) \right) \subseteq f(Q, H, H) \cap \left(f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H) \right) \cap f(H, H, Q) \subseteq Q. \blacksquare \end{aligned}$$

§4.2 Disa karakterizime të kuazi-hiperidealeve minimale të gjysmëhipergrupit ternar

Në këtë seksion, prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealit minimal në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

Përkufizim 4.2.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një hiperideal (i majtë, i djathtë, lateral), kuazi-hiperideal A i H quhet minimal (minimal) në qoftë se nuk përmban rigorozisht asnjë hiperideal (të majtë, të djathtë, lateral), kuazi-hiperideal të H .*

Teoremë 4.2.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi joboshe Q e H është kuazi-hiperideal minimal vetëm atëherë kur Q është prerja e një hiperideali të majtë minimal, një hiperideali lateral minimal dhe një hiperideali të djathtë minimal të H .*

Vërtetim. Le të jetë L një hiperideal i majtë minimal, M një hiperideal lateral minimal dhe R një hiperideal i djathtë minimal i H . Atëherë, nga Teorema 4.1.2, $Q = R \cap M \cap L$ është një kuazi-hiperideal. Le të supozojmë se $Q' \subseteq Q$ është një tjetër kuazi-hiperideal i H . Atëherë, $f(Q', H, H)$ është hiperideal i djathtë dhe $f(Q', H, H) \subseteq f(Q, H, H) \subseteq R$, kështu që $f(Q', H, H) = R$. Në mënyrë të ngjashme $f(Q', H, H) = L$ dhe $f(H, Q', H) \cup f(H, H, Q', H, H) = M$. Atëherë, $Q = R \cap M \cap L = f(Q', H, H) \cap (f(H, Q', H) \cup f(H, H, Q', H, H)) \cap f(H, H, Q') \subseteq Q'$. Rrjedhimisht, $Q = Q'$.

Anasjellas, në qoftë se Q është një kuazi-hiperideal minimal i H , atëherë nga përkufizimi

$$f(Q, H, H) \cap (f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap f(H, H, Q) \subseteq Q.$$

Le të jetë $q \in Q$. Atëherë, $f(q, H, H)$ është një hiperideal i djathtë, $f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)$ është një hiperideal lateral dhe $f(H, H, q)$ është një hiperideal i majtë, kështu që

$$f(q, H, H) \cap (f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)) \cap f(H, H, q)$$

është një kuazi-hiperideal që përfshihet në Q dhe si rrjedhim, nga minimaliteti, i barabartë me Q . Gjithashtu, theksojmë se $f(q, H, H), f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)$, dhe $f(H, H, q)$ janë përkatësisht hiperideal i djathtë minimal, lateral minimal dhe i majtë minimal i H . Le të jetë R një hiperideal i djathtë i çfarëdoshëm që përmbahet në $f(q, H, H)$. Atëherë $f(R, H, H) \subseteq R \subseteq f(q, H, H)$, kështu që

$$\begin{aligned} & f(R, H, H) \cap (f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)) \cap f(H, H, q) \\ & \subseteq f(q, H, H) \cap (f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)) \cap f(H, H, q) = Q. \end{aligned}$$

Në këtë mënyrë, nga minimaliteti i Q , kemi $Q = f(R, H, H) \cap (f(H, q, H) \cup f(H, H, q, H, H)) \cap f(H, H, q)$. Kjo do të thotë se $Q \subseteq f(R, H, H)$, kështu që $f(R, H, H) \supseteq f(f(R, H, H), H, H) \supseteq f(Q, H, H) \supseteq f(q, H, H)$. Përfundimisht, rrjedh që $f(q, H, H) = f(R, H, H) = R$. Vërtetimi është i ngjashëm dhe për dy rastet e tjera. ■

Rrjedhim 4.2.3 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Cdo kuazi-hiperideal minimal i H përfshihet në një hiperideal minimal të H .*

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga fakti që çdo hiperideal lateral minimal është një hiperideal minimal. Le të jetë $m \in M$, ku M është një hiperideal lateral minimal. Atëherë, është e qartë se $f(H, m, H) \cup f(H, H, m, H, H)$ është gjithashtu një hiperideal lateral i H , i cili përfshihet në M dhe nga minimaliteti i M , rrjedh se është i barabartë me të. Nga ana tjetër, $M = f(H, m, H) \cup f(H, H, m, H, H)$ është njëkohësisht hiperideal i majtë dhe i djathtë i H , meqenëse

$$f(M, H, H) = f(f(H, m, H), H, H) \cup f(f(H, H, m, H, H), H, H) \subseteq f(H, m, H) \cup f(H, H, m, H, H)$$

$$f(H, H, M) = f(H, H, f(H, m, H)) \cup f(H, H, f(H, H, m, H, H)) \subseteq f(H, m, H) \cup f(H, H, m, H, H). \quad \blacksquare$$

Rrjedhim i menjëhershëm i Teoremës 4.2.2 është pohimi i mëposhtëm:

Rrjedhim 4.2.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë H ka të paktën një kuazi-hiperideal minimal vetëm atëherë kur H ka të paktën një hiperideal të djathtë minimal, të paktën një hiperideal lateral minimal dhe të paktën një hiperideal të majtë minimal.*

Teoremë 4.2.5 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, kanë vend pohimet e mëposhtme:*

1. *Një hiperideal i djathtë R është minimal vetëm atëherë kur $f(a, H, H) = R$ për çdo $a \in R$.*
2. *Një hiperideal lateral M është minimal vetëm atëherë kur $f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H) = M$ për çdo $a \in M$.*
3. *Një hiperideal i majtë L është minimal vetëm atëherë kur $f(H, H, a) = L$ për çdo $a \in L$.*
4. *Një kuazi-hiperideal Q është minimal vetëm atëherë kur $f(a, H, H) \cap (f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H)) \cap f(H, H, a) = Q$ për çdo $a \in Q$.*

Vërtetim. (1). Supozojmë se hiperideali i djathtë R është minimal dhe $a \in R$. Atëherë, $f(a, H, H) \subseteq f(R, H, H) \subseteq R$. Kemi që $f(a, H, H)$ është një hiperideal i djathtë i H dhe meqenëse R është një hiperideal i djathtë minimal i H , atëherë $f(a, H, H) = R$.

Anasjellas, le të supozojmë se $f(a, H, H) = R$ për çdo $a \in R$. Le të jetë R' një hiperideal i djathtë i H që përfshihet në R . Le të jetë $x \in R'$. Atëherë, $x \in R$. Nga supozimi, kemi që $f(x, H, H) = R$ për çdo $x \in R$. $R = f(x, H, H) \subseteq f(R', H, H) \subseteq R'$. Kjo sjell që $R \subseteq R'$. Kështu, $R = R'$. Si rrjedhim, R është hiperideal i djathtë minimal.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohen (2), (3) dhe (4). ■

Në vazhdim, më poshtë prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare të thjeshta të djathta, të thjeshtë lateral, të thjeshta të majta, kuazi-të thjeshta. Disa veti të tyre janë studiuar nëpërmjet hiperidealeve të djathta, të majta, lateral dhe kuazi-hiperidealeve.

Përkufizim 4.2.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë lateral (i majtë, i djathtë), kuazi-i thjeshtë, (lateral (left, right, quasi-) simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal lateral (të majtë, të djathtë), kuazi-hiperideal të mirëfilltë.*

Teoremë 4.2.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i majtë vetëm atëherë kur $f(H, H, a) = H$, për çdo $a \in H$.*
2. *H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i djathtë vetëm atëherë kur $f(a, H, H) = H$ për çdo $a \in H$.*
3. *H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë lateral vetëm atëherë kur $f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H) = H$ për çdo $a \in H$.*
4. *H është një gjysmëhipergrup ternar kuazi-i thjeshtë vetëm atëherë kur $f(a, H, H) \cap (f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H)) \cap f(H, H, a) = H$ për çdo $a \in H$.*

Vërtetim. (1) Meqenëse H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i majtë, kemi që H është hiperideal i majtë minimal i H . Nga Teorema 4.2.5(3), kemi $f(H, H, a) = H$ për çdo $a \in H$.

Anasjellas, supozojmë se $f(H, H, a) = H$ për çdo $a \in H$. Nga Teorema 4.2.5(3), H është hiperideal i majtë minimal i H dhe si pasojë, H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i majtë.

(2), (3) dhe (4) provohen në mënyrë të ngjashme si tek (1). ■

Teoremë 4.2.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se një hiperideal i majtë L i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i majtë, atëherë L është hiperideal i majtë minimal i H ;*
2. *Në qoftë se një hiperideal i djathtë R i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i djathtë, atëherë R është hiperideal i djathtë minimal i H ;*
3. *Në qoftë se një hiperideal lateral M i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë lateral, atëherë M është hiperideal lateral minimal i H ;*
4. *Në qoftë se një kuazi-hiperideal Q i H është gjysmëhipergrup ternar kuazi-i thjeshtë, atëherë Q është kuazi-hiperideal minimal i H .*

Vërtetim. (1). Le të jetë L një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë i majtë. Nga Teorema 4.2.10(1), kemi $f(L, L, a) = L$ për çdo $a \in L$. Për çdo $a \in L$, kemi $L = f(L, L, a) \subseteq f(H, H, a) \subseteq f(H, H, L) \subseteq L$. Nga Teorema 4.2.5(3), kemi që L është minimal.

(2), (3) dhe (4) vërtetohen në mënyrë të ngjashme si (1). ■

Theksojmë se jo çdo gjysmëhipergrup ternar përmban një kuazi-hiperideal minimal. Këtë e shohim në shembullin që vijon:

Shembull 4.2.9 *Le të jetë (H, f) gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 4.1.9. Shihet lehtë se për çdo kuazi-hiperideal Q_i , $Q'_i = Q_i - \{i\}$ është një kuazi-hiperideal i H dhe një nënbashkësi e mirëfilltë e Q_i , kështu që H nuk përmban një kuazi-hiperideal minimal.*

§4.3 Bi-hiperidealet e gjysmëhipergrupeve ternare

Në këtë seksion prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

Përkufizim 4.3.1 *Një nëngjysmëhipergrup B i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet bi-hiperideal (bi-hyperideal) i H në qoftë se $f(B, H, B, H, B) \subseteq B$.*

Lemë 4.3.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Cdo kuazi-hiperideal i H është një bi-hiperideal i H .*

Vërejtje 4.3.3 *E anasjella e lemës së mësipërme në përgjithësi nuk qëndron, domethënë një bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H mund të mos jetë një kuazi-hiperideal i H .*

Shembull 4.3.4 *Le të jetë (H, f) gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 4.1.9. Le të jetë $B = \{5\} \cup \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq 16\} \subseteq H$. Vërtetohet lehtë se B është një bi-hiperideal i H , por jo një kuazi-hiperideal i H , meqenëse $\{12\} \in f(B, H, H) \cap ((f(H, B, H) \cup f(H, H, B, H, H)) \cap f(H, H, B))$, por $\{12\} \notin B$.*

Vërejtje 4.3.5 *Meqenëse çdo hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i H është një kuazi-hiperideal i H , rrjedh se çdo hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i H është një bi-hiperideal i H , por në përgjithësi, e anasjella nuk është e vërtetë. Në Shembullin 4.3.4, B është një bi-hiperideal i H , por nuk është hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i H .*

Në vazhdim, kanë vend rezultatet që vijojnë. Vërtetimin e tyre nuk po e bëjmë, meqenëse është evident.

Pohim 4.3.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se B është bi-hiperideal i H dhe T është nëngjysmëhipergrup ternar i H , atëherë $B \cap T$ është ose boshe, ose bi-hiperideal i T .*

Lemë 4.3.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se B është një bi-hiperideal i gjysmëhipergrupit ternar H dhe T_1, T_2 janë dy nëngjysmëhipergrupe ternare të H , atëherë $f(B, T_1, T_2), f(T_1, B, T_2)$ dhe $f(T_1, T_2, B)$ janë bi-hiperideale të H .*

Rrjedhim 4.3.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se B_1, B_2 dhe B_3 janë tre bi-hiperideale të gjysmëhipergrupit ternar H , atëherë $f(B_1, B_2, B_3)$ është një bi-hiperideal i H .*

Rrjedhim 4.3.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se Q_1, Q_2 dhe Q_3 janë tre kuazi-hiperideale të gjysmëhipergrupit ternar H , atëherë $f(Q_1, Q_2, Q_3)$ është një bi-hiperideal i H .*

Në përgjithësi, në qoftë se B është një bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H dhe C është një bi-hiperideal i B , atëherë C nuk është një bi-hiperideal i H . Por, në veçanti, ka vend rezultati i mëposhtëm.

Teoremë 4.3.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar, B një bi-hiperideal i H dhe C një bi-hiperideal i B i tillë që $f(C, C, C) = C$. Atëherë, C është një bi-hiperideal i H .*

Pohim 4.3.11 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Le të jenë X, Y, Z tre nëngjysmëhipergrupe ternare të H dhe $B = f(X, Y, Z)$. Atëherë, B është bi-hiperideal në qoftë se të paktën një nga X, Y, Z është hiperideal i djathtë, lateral ose i majtë i H .*

Rrjedhim 4.3.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një nëngjysmëhipergrup ternar B i H është bi-hiperideal i H në qoftë se $B = f(R, M, L)$, ku R është një hiperideal i djathtë, M është një hiperideal lateral dhe L është një hiperideal i majtë i H .*

Pohim 4.3.13 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe B një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Në qoftë se R është një hiperideal i djathtë, M një hiperideal lateral dhe L një hiperideal i majtë i H , të tillë që $f(R, M, L) \subseteq B \subseteq R \cap M \cap L$, atëherë B është një bi-hiperideal i H .*

Pohim 4.3.14 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar, A një hiperideal i H dhe Q një kuazi-hiperideal i H . Atëherë $A \cap Q$ është ose boshe, ose një bi-hiperideal dhe një kuazi-hiperideal i H .*

Pohim 4.3.15 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Prerja e një bashkësie të çfarëdoshme bi-hiperidealesh të H është ose boshe, ose bi-hiperideal i H .*

Shembull 4.3.16 *Le të jetë $H = (0, 1)$ dhe $f : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ e përcaktuar si më poshtë:*

$$f(x, y, z) = \left\{ \frac{xyz}{2^k} \mid k \in N_0 \right\}, \forall (x, y, z) \in H^3.$$

Mund të shihet se (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë se për çdo $i \in N$, $B_i = (0, \frac{1}{2^i})$. Atëherë, B_i është një bi-hiperideal i H dhe $\bigcap_{i \in I} B_i = \emptyset$.

Shembull 4.3.17 *Le të jetë Z^- bashkësia e gjithë numrave të plotë negativë dhe $f : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ një hiperveprim ternar i përcaktuar si më poshtë:*

$$f(x, y, z) = x \cdot y \cdot z \cdot 2N, \forall (x, y, z) \in Z^{-3}, \text{ ku } "-" \text{ është shumëzimi i zakonshëm.}$$

Mund të shihet se (Z^-, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $B_i = \{k \in Z^- \mid k \leq -i\}$ për çdo $i \in I$. Atëherë, B_i është një bi-hiperideal i Z^- për çdo $i \in I$. Por $\bigcap_{i \in I} B_i = \emptyset$.

§4.4 Disa karakterizime të bi-hiperidealeve minimale në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve minimale në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë disa veti të tyre.

Përkufizim 4.4.1 *Një bi-hiperideal B i një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) quhet bi-hiperideal minimal (minimal bi-hyperideal) i H në qoftë se B nuk përmban rigorozisht asnjë bi-hiperideal të H .*

Teoremë 4.4.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe B një bi-hiperideal i H . Atëherë, B është minimal vetëm atëherë kur B është produkti i ndonjë hiperideali të djathtë minimal R , hiperideali lateral minimal M dhe hiperideali të majtë minimal L të H .*

Vërtetim. Supozojmë se B është bi-hiperideal minimal i H . Le të jetë $a \in B$. Atëherë, $f(a, H, H)$ është një hiperideal i djathtë, $f(H, a, H)$ është një hiperideal lateral, $f(H, H, a)$ është një hiperideal i majtë dhe $f(f(a, H, H), f(H, a, H), f(H, H, a))$ është bi-hiperideal i H . Tani, $f(f(a, H, H), f(H, a, H), f(H, H, a)) \subseteq f(f(B, H, H), f(H, B, H), f(H, H, B)) \subseteq B$. Meqenëse B është minimal, atëherë $f(f(a, H, H), f(H, a, H), f(H, H, a)) = B$. Tani të tregojmë se $f(a, H, H)$ është hiperideal i djathtë minimal i H . Le të jetë R një hiperideal i djathtë i H që përfshihet në $f(a, H, H)$. Atëherë, $f(R, f(H, a, H), a) \subseteq f(f(a, H, H), f(H, a, H), f(H, H, a)) = B$. Meqenëse $f(R, f(H, a, H), f(H, H, a))$ është bi-hiperideal i H dhe B është minimal, atëherë $f(R, f(H, a, H), f(H, H, a)) = B$. Kjo sjell që $B \subseteq R$. Si pasojë, $f(a, H, H) \subseteq f(B, H, H) \subseteq f(R, H, H) \subseteq R$. Kështu, $f(a, H, H)$ është minimal. Në mënyrë të ngjashme provohet se $f(H, a, H)$ është hiperideal lateral minimal i H dhe $f(H, H, a)$ është hiperideal i majtë minimal i H .

Anasjellas, supozojmë se $B = f(R, M, L)$ për ndonjë hiperideal të djathtë minimal R , hiperideal lateral minimal M dhe hiperideal të majtë minimal L . Kështu, $B \subseteq R$, $B \subseteq M$ dhe $B \subseteq L$. Le të jetë B_0 një bi-hiperideal i H që përfshihet në B . Atëherë, $f(B_0, H, H) \subseteq f(B, H, H) \subseteq f(R, H, H) \subseteq R$. Në mënyrë të ngjashme, $f(H, B_0, H) \subseteq f(H, B, H) \subseteq f(H, M, H) \subseteq M$ dhe $f(H, H, B_0) \subseteq f(H, H, B) \subseteq f(H, H, L) \subseteq L$. Tani, $f(f(B_0, H, H), H, H) \subseteq f(B_0, H, H)$, kështu që $f(B_0, H, H)$ është një hiperideal i djathtë i H . Në mënyrë të ngjashme, $f(H, B_0, H)$ është hiperideal lateral dhe $f(H, H, B_0)$ është hiperideal i majtë i H . Meqenëse R , M dhe L janë përkatësisht hiperideal i djathtë minimal, hiperideal lateral minimal dhe hiperideal i majtë minimal i H , atëherë $f(B_0, H, H) = R$, $f(H, B_0, H) = M$ dhe $f(H, H, B_0) = L$. Kështu, $B = f(R, M, L) = f(f(B_0, H, H), f(H, B_0, H), f(H, H, B_0)) \subseteq B_0$, prandaj $B = B_0$. Si rrjedhim, B është bi-hiperideal minimal i H . ■

Përkufizim 4.4.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, H quhet gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë (bi-simple) në qoftë se H është bi-hiperideali i vetëm i H .*

Teoremë 4.4.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe B një bi-hiperideal i H . Atëherë, B është bi-hiperideal minimal i H vetëm atëherë kur B është gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë.*

Vërtetim. Supozojmë se B është një bi-hiperideal minimal i H . Le të jetë C një bi-hiperideal i B . Atëherë, $f(f(C, B, B), f(B, C, B), f(B, B, C)) \subseteq C \subseteq B$. Nga Lema 4.3.7, $f(B, C, C)$ është një bi-hiperideal i H , prandaj,

$$f(f(f(B, C, C), H, H), f(H, f(B, C, C), H), f(H, H, f(B, C, C))) \subseteq f(B, C, C) \subseteq f(B, B, B) \subseteq B.$$

Meqenëse B është minimal, atëherë $f(B, C, C) = B$. Tregohet lehtë se $f(f(C, B, B), f(B, C, B), f(B, B, C))$ është një bi-hiperideal i H . Meqë B është minimal, atëherë $f(f(C, B, B), f(B, C, B), f(B, B, C)) = B$. Kjo sjell që $B = f(f(C, B, B), f(B, C, B), f(B, B, C)) \subseteq C$. Që këtëj, $C = B$. Si rrjedhim, B është një gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë.

Anasjellas, supozojmë se B është gjysmëhipergrup ternar bi- i thjeshtë. Le të jetë C një bi-hiperideal i H i tillë që $C \subseteq B$. Atëherë,

$f(f(C, B, B), f(B, C, B), f(B, B, C)) \subseteq f(f(C, H, H), f(H, C, H), f(H, H, C)) \subseteq C$ prej nga rrjedh që C është një bi-hiperideal i B . Meqenëse B është gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë, atëherë $C = B$ dhe si rrjedhim, B është minimal. ■

Shembull 4.4.5 *Le të jetë $H = \{a, b, c, d, \dots\}$ e tillë që $|H| \geq 4$ dhe $f: H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ përcaktohet si më poshtë:*

$$f(a, a, a) = H - \{a, b\}$$

$$f(x, y, z) = H - \{a, c\}, \forall (x, y, z) \neq (a, a, a).$$

dhe $a \neq b \neq c \neq a$. (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Mund të shihet se $B_1 = H - \{a\}$ dhe $B_2 = H - \{a, c\}$ janë bi-hiperideale të H . B_2 është një bi-hiperideal minimal, ndërsa B_1 nuk është bi-hiperideal minimal.

Në dy seksionet që vijojnë prezantojmë konceptin e bi-hiperidealeve të përgjithësuara në gjysmëhipergrupet ternare dhe studiojmë vetitë e disa llojeve të tyre. Rezultatet e përfuara në [86] mund të shihen si rrjedhim i rezultateve tona.

§4.5 Bi-hiperidealet e përgjithësuara prim, fortësisht prim dhe gjysmëprim të gjysmëhipergrupeve ternare

Përkufizim 4.5.1 *Një nënbashkësi joboshe B e një gjysmëhipergrupi ternar H quhet bi-hiperideal i përgjithësuar (generalized bi-hyperideal) i H në qoftë se $f(B, H, B, H, B) \subseteq B$. Në qoftë se H është gjysmëhipergrup ternar me zero, atëherë $0 = f(x, 0, y, 0, z) \in f(B, H, B, H, B) \subseteq B$ për çdo bi-hiperideal të përgjithësuar B të H .*

Eshtë e qartë se bi-hiperidealet e përgjithësuara janë një përgjithësim i bi-hiperidealeve.

Shembull 4.5.2 *Le të jetë (H, f) gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 4.4.5. Shihet lehtë se $B = H - \{c\}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar, por jo një bi-hiperideal.*

Në këtë seksion do ta konsiderojmë H si një gjysmëhipergrup ternar me zero.

Lemë 4.5.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Atëherë, çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është një bi-hiperideal.*

Vërtetim. Le të jetë B një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . Atëherë, $f(B, H, B, H, B) \subseteq B$. Duhet të tregojmë se B është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Le të jetë $a, b, c \in B$. Atëherë, ekzistojnë $x, y, z \in H$ të tilla që $a \in f(a, x, a), b \in f(b, y, b)$ dhe $c \in f(c, z, c)$. Kështu,

$$\begin{aligned} f(a, b, c) &\subseteq f(f(a, x, a), f(b, y, b), f(c, z, c)) = f(a, f(x, a, b), y, f(b, c, z), c) \\ &\subseteq f(a, f(x, a, b), y, f(b, f(c, z, c), z), c) \subseteq f(a, f(x, a, b, y, b), c, f(c, z, c), c) \\ &\subseteq f(B, H, B, H, B) \subseteq B \end{aligned}$$

Pra, B është një nëngjysmëhipergrup ternar i H dhe si rrjedhim, B është një bi-hiperideal. ■

Teoremë 4.5.4 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, pohimet që vijojnë janë ekuivalente:*

1. H është intra-i rregullt
2. Për çdo hiperideal të majtë L , hiperideal lateral M dhe hiperideal të djathtë R të H , $L \cap M \cap R \subseteq f(L, M, R)$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2) Le të supozojmë se H është një gjysmëhipergrup ternar intra-i rregullt dhe le të jenë L, M dhe R përkatësisht hiperideal i majtë, hiperideal lateral dhe hiperideal i djathtë i H . Për $a \in L \cap M \cap R$, kemi $a \in f(x, a, a, a, y)$ për ndonjë $x, y \in H$. Kjo sjell që $a \in f(x, a, a, a, y) \subseteq f(f(x, x, a, a, a), f(y, x, a, a, a, y, x), f(a, a, a, y, y)) \subseteq f(L, M, R)$. Pra, kemi që $L \cap M \cap R \subseteq f(L, M, R)$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supozojmë se $L \cap M \cap R \subseteq f(L, M, R)$. Le të jetë $a \in H$ dhe konsiderojmë hiperidealin e djathtë $\langle a \rangle_r$ të përfshuar nga a , hiperideal lateral $\langle a \rangle_m$ të përfshuar nga a dhe hiperidealin e majtë $\langle a \rangle_l$ të përfshuar nga a . Kështu, nga hipoteza kemi:

$$\begin{aligned} &(\{a\} \cup f(H, H, a)) \cap (\{a\} \cup f(H, a, H)) \cap (\{a\} \cup f(a, H, H)) \\ &\subseteq f(\{a\} \cup f(H, H, a), \{a\} \cup f(H, a, H), \{a\} \cup f(a, H, H)) \\ &\subseteq (f(a, \{a\} \cup f(H, a, H), \{a\} \cup f(a, H, H)) \cup (f(f(H, H, a), \{a\} \cup f(H, a, H), \{a\} \cup f(a, H, H)) \\ &\subseteq (f(a, \{a\} \cup f(H, a, H), \{a\} \cup f(a, H, H)) \cup (f(f(H, H, a), \{a\} \cup f(H, a, H), \{a\} \cup f(a, H, H)) \\ &\subseteq f(a, a, a) \cup f(a, a, f(a, H, H)) \cup f(a, f(H, a, H), a) \\ &\quad \cup f(a, f(H, a, H), f(a, H, H)) \cup f(f(H, H, a), a, a) \cup f(f(H, H, a), a, f(a, H, H)) \\ &\quad \cup f(f(H, H, a), f(H, a, H), a) \cup f(f(H, H, a), f(H, a, H), f(a, H, H)) \end{aligned}$$

Pra, në çdo rast kemi që $a \in f(H, a, a, a, H)$, prandaj H është intra-i rregullt. ■

Lemë 4.5.5 (shih Teoremë 5.1.3) *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, H është i rregullt vetëm atëherë kur për çdo hiperideal të djathtë R , hiperideal lateral M dhe hiperideal të majtë L të H , $f(R, M, L) = R \cap M \cap L$.*

Lemë 4.5.6 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe intra-i rregullt. Atëherë, $f(B, B, B) = B$ për çdo bi-hiperideal të përgjithësuar B të H .*

Vërtetim. Le të jetë B një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . Nga Lema 4.5.3, kemi $f(B, B, B) \subseteq B$. Le të jetë $a \in B$. Atëherë, ekzistojnë $x, y, z \in H$ të tilla që $a \in f(a, x, a)$ dhe $a \in f(y, a, a, z)$ (*). Që këtë rrjedh se $B = f(B, H, B)$ dhe $B \subseteq f(H, B, B, H)$. Prej këndeje, marrim $B \subseteq f(B, B, B)$, kështu që $B = f(B, B, B)$. ■

Lemë 4.5.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe B_1, B_2, B_3 bi-hiperideale të përgjithësuara të H . Atëherë, $f(B_1, B_2, B_3)$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar.*

Vërtetim. Evident. ■

Lemë 4.5.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Prerja e çdo familjeje bi-hiperidealesh të përgjithësuar të H është një bi-hiperideal i përgjithësuar.*

Vërtetim. Le të jetë $\mathcal{B} = \{B \mid B \text{ është bi-hiperideal i përgjithësuar i } H\}$. Meqenëse $0 \in B$ për çdo $B \in \mathcal{B}$, kemi që $0 \in \bigcap \mathcal{B}$. Kështu, $\bigcap \mathcal{B} \neq \emptyset$. Le të jetë $x \in f(\bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B})$. Atëherë, $x \in f(b_1, h_1, b_2, h_2, b_3)$ për $b_1, b_2, b_3 \in \bigcap \mathcal{B}, h_1, h_2 \in H$. Në këtë mënyrë, $x \in f(\bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B}) \subseteq f(B, H, B, H, B) \subseteq B$, për çdo $B \in \bigcap \mathcal{B}$. Që këtë $x \in \bigcap \mathcal{B}$ dhe kështu $f(\bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B}, H, \bigcap \mathcal{B}) \subseteq \bigcap \mathcal{B}$. Si rrjedhim, $\bigcap \mathcal{B}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . ■

Përkufizim 4.5.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal i përgjithësuar B i H quhet*

- *prim (prime) në qoftë se $f(B_1, B_2, B_3) \subseteq B$ sjell që $B_1 \subseteq B$ ose $B_2 \subseteq B$ ose $B_3 \subseteq B$ për çdo bi-hiperideale të përgjithësuara B_1, B_2, B_3 të H .*
- *fortësisht prim (strongly prime) në qoftë se $f(B_1, B_2, B_3) \cap f(B_2, B_3, B_1) \cap f(B_3, B_1, B_2) \subseteq B$ sjell që $B_1 \subseteq B$ ose $B_2 \subseteq B$ ose $B_3 \subseteq B$ për çdo bi-hiperideale të përgjithësuara B_1, B_2, B_3 të H .*
- *gjysmëprim (semiprime) në qoftë se $f(B_1, B_1, B_1) \subseteq B$ sjell që $B_1 \subseteq B$ për çdo bi-hiperideal të përgjithësuar B_1 të H .*

Vërejtje 4.5.10 *Cdo bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim i një gjysmëhipergrupi ternar H është një bi-hiperideal i përgjithësuar prim dhe çdo bi-hiperideal i përgjithësuar prim është një bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim. Një bi-hiperideal i përgjithësuar prim nuk është domosdoshmërisht një bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim dhe një bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim nuk është domosdoshmërisht një bi-hiperideal i përgjithësuar prim.*

Shembull 4.5.11 *Le të jetë $H = \{0, a, b, c, d, e, g\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$ për çdo $x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela e mëposhtme:*

*	0	a	b	c	d	e	g
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	{a,b}	c	{c,d}	e	{e,g}
b	0	b	b	d	d	g	g
c	0	c	{c,d}	c	{c,d}	c	{c,d}
d	0	d	d	d	d	d	d
e	0	e	{e,g}	c	{c,d}	e	{e,g}
g	0	g	g	d	d	g	g

Atëherë, (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se $B_1 = \{0\}$, $B_2 = \{0, c, d\}$, $B_3 = \{0, c, d, e, g\}$, $B_4 = \{0, b, d, g\}$ janë të gjitha bi-hiperideale të përgjithësuara prim të H dhe si rrjedhim gjysmëprim. Bi-hiperideali i përgjithësuar prim $\{0\}$ nuk është bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim.

Vërtetohet lehtë se kanë vend pohimet e mëposhtme.

Pohim 4.5.12 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Prerja e çdo familjeje bi-hiperidealesh të përgjithësuar prim të H është një bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim.*

Vërtetim. Le të jetë $\mathcal{P} = \{B \mid B \text{ është një bi-hiperideal i përgjithësuar prim i } H\}$. Meqenëse $0 \in B$ për çdo $B \in \mathcal{P}$, kemi që $0 \in \bigcap \mathcal{P}$. Kështu, $\bigcap \mathcal{P} \neq \emptyset$. Nga Lema 4.5.8, $\bigcap \mathcal{P}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . Le të jetë B një bi-hiperideal i përgjithësuar i H i tillë që $f(B, B, B) \subseteq \bigcap \mathcal{P}$. Pra $B \subseteq \bigcap \mathcal{P}$, kështu që $\bigcap \mathcal{P}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim i H . ■

§4.6 Bi-hiperidealet e përgjithësuar irreducible dhe fortësisht irreducible të gjysmëhipergrupeve ternare

Përkufizim 4.6.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal i përgjithësuar B i H quhet*

- *irreducible (irreducible) në qoftë se $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = B$ sjell që $B_1 = B$ ose $B_2 = B$ ose $B_3 = B$ për çdo bi-hiperideale të përgjithësuar B_1, B_2, B_3 të H .*
- *fortësisht irreducible (strongly irreducible) në qoftë se $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \subseteq B$ sjell që $B_1 \subseteq B$ ose $B_2 \subseteq B$ ose $B_3 \subseteq B$ për çdo bi-hiperideale të përgjithësuar B_1, B_2, B_3 të H .*

Çdo bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht irreducible i një gjysmëhipergrupi ternar H është një bi-hiperideal i përgjithësuar irreducible por e anasjella, në përgjithësi nuk është e vërtetë.

Në Shembullin 4.5.11, të gjithë bi-hiperidealet e përgjithësuar janë bi-hiperideale të përgjithësuar irreducible. Bi-hiperideale të përgjithësuar fortësisht irreducible janë vetëm B_2, B_3, B_4 .

Pohim 4.6.2 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Cdo bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim fortësisht irreducible i H është një bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim.*

Vërtetim. Le të jetë B një bi-hiperideal i përgjithësuar gjysmëprim fortësisht irreducible i H . Supozojmë se B_1, B_2 dhe B_3 janë bi-hiperideale të përgjithësuara të H , të tilla që

$$f(B_1, B_2, B_3) \cap f(B_2, B_3, B_1) \cap f(B_3, B_1, B_2) \subseteq B.$$

Meqenëse

$$f(B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3) \subseteq f(B_1, B_2, B_3)$$

$$f(B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3) \subseteq f(B_2, B_3, B_1)$$

$$f(B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3) \subseteq f(B_3, B_1, B_2)$$

kemi

$$f(B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3, B_1 \cap B_2 \cap B_3) \subseteq f(B_1, B_2, B_3) \cap f(B_2, B_3, B_1) \cap f(B_3, B_1, B_2) \subseteq B.$$

Por B është gjysmëprim, kështu që $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \subseteq B$.

Meqenëse B është fortësisht irreducible, kemi ose $B_1 \subseteq B$ ose $B_2 \subseteq B$ ose $B_3 \subseteq B$. Pra, B është një bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim i H . ■

Le të jetë $\mathcal{GB}$ familja e gjithë bi-hiperidealeve të përgjithësuara të H dhe $\mathcal{P}$ familja e gjithë bi-hiperidealeve të përgjithësuara fortësisht prim të mirëfilltë të H . Për çdo $B \in \mathcal{GB}$, përcaktojmë $\Theta_B = \{J \in \mathcal{P} : B \not\subseteq J\}$ dhe $\mathfrak{F}(\mathcal{P}) = \{\Theta_B : B \in \mathcal{GB}\}$.

Lemë 4.6.3 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, $\mathcal{GB}$ është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen.*

Vërtetim. Kemi që $\mathcal{GB} \neq \emptyset$, meqenëse $\{0\} \in \mathcal{GB}$ dhe $\{0\}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . Shihet lehtë se përfshirja është pasqyruese, anti-simetrike, kalimtare, pra është një relacion renditjeje në $\mathcal{GB}$. Pra, $\mathcal{GB}$ është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. ■

Pohim 4.6.4 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar dhe B një bi-hiperideal i përgjithësuar i H . Për çdo $a \in H \setminus B$, ekziston një bi-hiperideal i përgjithësuar irreducible I i H i tillë që $B \subseteq I$ dhe $a \notin I$.*

Vërtetim. Le të jetë

$$\mathcal{GB}_B = \{B_i \mid B_i \text{ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i } H \text{ i tillë që } B \subseteq B_i \text{ dhe } a \notin B_i\}.$$

Atëherë, $\mathcal{GB}_B \neq \emptyset$ sepse $B \in \mathcal{GB}_B$. Nga Lema 4.6.3 është evidente që $\mathcal{GB}_B$ është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Në qoftë se $\mathcal{C}$ është një nënbashkësi tërësisht e renditur e çfarëdoshme e $\mathcal{GB}_B$, e cila është një zinxhir i $\mathcal{GB}_B$, atëherë tregohet lehtë se $\bigcup \mathcal{C}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i H që përmban B dhe nuk përmban a . Me të vërtetë: Le të jetë $x \in f(\bigcup \mathcal{C}, H, \bigcup \mathcal{C}, H, \bigcup \mathcal{C})$. Atëherë, $x \in f(b_1, h_1, b_2, h_2, b_3)$ për $b_1, b_2, b_3 \in \bigcup \mathcal{C}$ dhe $h_1, h_2 \in H$. Kështu, $b_1 \in B_1, b_2 \in B_2, b_3 \in B_3$ për $B_1, B_2, B_3 \in \mathcal{C}$. Por B_1, B_2, B_3 janë të krahasueshme meqenëse $\mathcal{C}$ është një zinxhir. Kështu, $B_1 \subseteq B_2$ ose $B_2 \subseteq B_1$,

$B_3 \subseteq B_1$ ose $B_1 \subseteq B_3$, $B_2 \subseteq B_3$ ose $B_2 \subseteq B_1$, prandaj $b_1, b_2, b_3 \in B_1$ ose $b_1, b_2, b_3 \in B_2$ ose $b_1, b_2, b_3 \in B_3$. Meqenëse B_1, B_2, B_3 janë bi-hiperideale të përgjithësuara, kemi $x \in f(b_1, h_1, b_2, h_2, b_3) \subseteq f(B_1, H, B_1, H, B_1) \subseteq B_1 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ ose $x \in f(b_1, h_1, b_2, h_2, b_3) \subseteq f(B_2, H, B_2, H, B_2) \subseteq B_2 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ ose $x \in f(b_1, h_1, b_2, h_2, b_3) \subseteq f(B_3, H, B_3, H, B_3) \subseteq B_3 \subseteq \bigcup \mathcal{C}$. Pra $x \in \bigcup \mathcal{C}$. Që këtëj, $\bigcup \mathcal{C}$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar i H i tillë që $B \subseteq \bigcup \mathcal{C}$ dhe $a \notin \bigcup \mathcal{C}$ meqenëse $a \notin C$ për çdo $C \in \mathcal{C}$. Si rrjedhim, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{GB}_B$. Kështu, $\bigcup \mathcal{C}$ është një kufi i sipërm i C në $\mathcal{GB}_B$, prandaj nga Lema e Zorn, ekziston një element maksimal I në $\mathcal{GB}_B$. Të tregojmë se I është një bi-hiperideal i përgjithësuar irreducible i H . Le të jenë C, D dhe E tre bi-hiperideale të përgjithësuara të çfarëdoshme të H , të tilla që $I = C \cap D \cap E$. Në qoftë se të tre bi-hiperidealet e përgjithësuara C, D dhe E përmbajnë rigorozisht I , atëherë $B \subseteq I \subset C, B \subseteq I \subset D, B \subseteq I \subset E$. Në qoftë se $a \notin C$, atëherë $C \in \mathcal{GB}_B$, por kjo është e pamundur meqenëse I është një element maksimal i $\mathcal{GB}_B$. Pra, $a \in C$. Për të njëjtën arsye, kemi që $a \in D$ dhe $a \in E$. Pra, $a \in C \cap D \cap E = I$, gjë që është e pamundur meqë $a \notin I$. Kështu, ose $I = C$ ose $I = D$ ose $I = E$. Që këtëj rrjedh se I është një bi-hiperideal i përgjithësuar irreducible i H . ■

Pohim 4.6.5 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt, B një bi-hiperideal i përgjithësuar i H dhe T_1, T_2 janë nënbashkësi joboshe të H . Atëherë, $f(B, T_1, T_2)$, $f(T_1, T_2, B)$ janë bi-hiperideale të përgjithësuara të H .*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt, B bi-hiperideal i përgjithësuar i H dhe T_1, T_2 janë nënbashkësi joboshe të H . Atëherë,

$$\begin{aligned} f(f(B, T_1, T_2), f(B, T_1, T_2), f(B, T_1, T_2)) &\subseteq f(B, f(T_1, T_2, B), f(T_1, T_2, B), T_1, T_2) \\ &\subseteq f(B, f(H, H, B), f(H, H, B), T_1, T_2) = f(B, f(H, H, B, H, H), f(B, T_1, T_2)) \\ &\subseteq f(B, f(H, H, H, H, H), B, T_1, T_2) \subseteq f(B, f(H, H, H), B, T_1, T_2) \\ &\subseteq f(B, H, B), T_1, T_2 = f(B, T_1, T_2). \end{aligned}$$

sepse në gjysmëhipergrupin ternar të rregullt $B = f(B, H, B)$. Kështu, $f(B, T_1, T_2)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Gjithashtu

$$\begin{aligned} f(f(B, T_1, T_2), H, f(B, T_1, T_2), H, f(B, T_1, T_2)) &\subseteq f(B, f(T_1, T_2, H), B, f(T_1, T_2, H), B, T_1, T_2) \\ &\subseteq f(B, f(H, H, H), B, f(H, H, H), B, T_1, T_2) \subseteq f(f(B, H, B, H, B), T_1, T_2) \subseteq f(B, T_1, T_2). \end{aligned}$$

Pra, $f(B, T_1, T_2)$ është bi-hiperideal i përgjithësuar i H .

Në mënyrë të ngjashme tregohet se $f(T_1, B, T_2)$, $f(T_1, T_2, B)$ janë bi-hiperideale të përgjithësuara të H . ■

Rrjedhim 4.6.6 Në qoftë se B_1, B_2 dhe B_3 janë bi-hiperideale të përgjithësuara të një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H , atëherë $f(B_1, B_2, B_3)$ është bi-hiperideal i përgjithësuar i H .

Rrjedhim 4.6.7 Në qoftë se Q_1, Q_2, Q_3 janë kuazi-hiperideale të një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H , atëherë $f(Q_1, Q_2, Q_3)$ është një bi-hiperideal i përgjithësuar.

Teoremë 4.6.8 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet që vijojnë janë ekuivalente:

1. H është gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe intra-i rregullt;
2. çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është idempotent;
3. $B_1 \cap B_2 \cap B_3 = f(B_1, B_2, B_3) \cap f(B_2, B_3, B_1) \cap f(B_3, B_1, B_2)$ për çdo bi-hiperideale të përgjithësuara B_1, B_2, B_3 të H ;
4. çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është gjysmëprim;
5. çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i mirëfilltë i H është prerja e gjithë bi-hiperidealeve të përgjithësuara gjysmëprim irreducible të H që përfshihen në të.

Vërtetim. (1) $\Leftrightarrow$ (2). Vërtetimi është i qartë nga Teorema 4.5.4, Lema 4.5.5 dhe Lema 4.5.6.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\Leftrightarrow$ (4) $\Leftrightarrow$ (5) Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 11[86], duke u mbështetur në Lemën 4.5.3, Teoremën 4.5.4, Lemën 4.5.5 dhe Lemën 4.5.6, Lemën 4.5.8, Pohimin 4.6.4. ■

Pohim 4.6.9 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe intra-i rregullt. Atëherë një bi-hiperideal i përgjithësuar B i H është fortësisht irreducible vetëm atëherë kur B është fortësisht prim.

Vërtetim. Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me atë të Pohimit 8[86] duke shfrytëzuar Teoremën 4.6.8. ■

Në vazhdim karakterizojmë ato gjysmëhipergrupe ternare për të cilat çdo bi-hiperideal i përgjithësuar është fortësisht irreducible dhe gjithashtu ato gjysmëhipergrupe ternare në të cilat çdo bi-hiperideal i përgjithësuar është fortësisht prim.

Teoremë 4.6.10 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është fortësisht prim vetëm atëherë kur H është i rregullt dhe intra-i rregullt dhe bashkësia $\mathcal{GB}$ e bi-hiperidealeve të përgjithësuara të H është bashkësi tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen.

Vërtetim. Supozojmë se çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është fortësisht prim, atëherë çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është gjysmëprim. Kështu, nga Teorema 4.6.8, H është i rregullt dhe intra-i rregullt. Të tregojmë se bashkësia $\mathcal{GB}$ e bi-hiperidealeve të përgjithësuara të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Nga Lema 4.6.3, $\mathcal{GB}$ është bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Le të jenë B_1 dhe B_2 dy bi-hiperideale të përgjithësuara të H , atëherë nga Teorema 4.6.8, kemi $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap B_2 \cap H = f(B_1, B_2, H) \cap f(B_2, H, B_1) \cap f(H, B_1, B_2)$.

Kështu $f(B_1, B_2, H) \cap f(B_2, H, B_1) \cap f(H, B_1, B_2) \subseteq B_1 \cap B_2$.

Përderisa çdo bi-hiperideal i përgjithësuar është fortësisht prim, atëherë $B_1 \cap B_2$ është bi-hiperideal i përgjithësuar fortësisht prim. Që këtë, ose $B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$, ose $B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$, ose $H \subseteq B_1 \cap B_2$. Tani, në qoftë se $B_1 \subseteq B_1 \cap B_2$, atëherë $B_1 \subseteq B_2$; në qoftë se $B_2 \subseteq B_1 \cap B_2$, atëherë $B_2 \subseteq B_1$; në qoftë se $H \subseteq B_1 \cap B_2$, atëherë $B_1 = H = B_2$. Pra, bashkësia $\mathcal{GB}$ e bi-hiperidealeve të përgjithësuar të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen.

E anasjella provohet në mënyrë të ngjashme si Teorema 12[86], duke shfrytëzuar Lemën 4.5.3, Lemën 4.5.6, Lemën 4.5.8, Teoremën 4.6.8. ■

Teoremë 4.6.11 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se bashkësia e bi-hiperidealeve të përgjithësuar të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen, atëherë H është njëkohësisht i rregullt dhe intra-i rregullt vetëm atëherë kur çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është prim.*

Vërtetim. Vërtetimi bëhet në mënyrë të ngjashme me atë të Teoremës 13[86], duke shfrytëzuar Lemën 4.5.3, Lemën 4.5.6, Lemën 4.5.8, Pohimin 4.5.12, Teoremën 4.6.10 dhe Teoremën 4.6.8.

Teoremë 4.6.12 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. *Bashkësia $\mathcal{GB}$ e bi-hiperidealeve të përgjithësuar të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen;*
2. *çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është fortësisht irreducible;*
3. *çdo bi-hiperideal i përgjithësuar i H është irreducible.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 14[86] duke u mbështetur në rezultatet e mësipërme. ■

Teoremë 4.6.13 *Në qoftë se H është gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe intra-i rregullt, atëherë $\mathfrak{S}(\mathcal{P})$ formon topologji në bashkësinë $\mathcal{P}$.*

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 15[86] duke shfrytëzuar Lemën 4.5.3, Lemën 4.5.6, Lemën 4.5.8, Teoremën 4.6.10 dhe Teoremën 4.6.8. ■

Në seksionet e mëposhtme, për të shmangur ndonjë keqkuptim, gjysmëhipergrupin ternar do ta shënojmë me $(H, \cdot)$ dhe $(H \cdot H)^0 \cdot H = H^0 \cdot H \cdot H^0 = H \cdot (H \cdot H)^0 = H$.

§4.7 $(m, (p, q), n)$ - Kuazi-hiperidealet në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, prezantojmë konceptin e kuazi-hiperidealeve të përgjithësuar në gjysmëhipergrupet ternare, domethënë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealeve duke shtrirë konceptin e kuazi-hiperidealeve në gjysmëhipergrupet të trajtuar në §2.2 dhe vërtetojmë disa rezultate në lidhje me to.

Përkufizim 4.7.1 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një nëngjysmëhipergrup ternar Q i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet kuazi-hiperideal i përgjithësuar (generalized quasi-hyperideal) ose $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal ($(m, (p, q), n)$ -quasi-hyperideal) i H në*

qoftë se $Q \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq Q$, ku m, n, p, q janë numra të plotë pozitivë dhe $p + q = \text{çift}$.

Vërejtje 4.7.2 Cdo kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H është $(1, (1, 1), 1)$ -kuazi-hiperideal i H . Por një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H mund të mos jetë kuazi-hiperideal i H .

Shembull 4.7.3 Le të jetë $H = N$ dhe $\cdot : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ përcaktohet si më poshtë:

$$x \cdot y \cdot z = x + y + z + 5N$$

Mund të shihet lehtë se $(H, \cdot)$ është gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $Q = \{5\} \cup \{k \in N \mid k \geq 15\} \subseteq H$. Verifikohet lehtë se Q është një $(2, (1, 1), 3)$ -kuazi-hiperideal i H , por jo një kuazi-hiperideal i H meqë $\{12\} \in Q \cdot H \cdot H \cap (H \cdot Q \cdot H \cup H \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H) \cap H \cdot H \cdot Q$, por $\{12\} \notin Q$.

Lemë 4.7.4 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Prerja joboshe e një bashkësie të çfarëdoshme nëngjysmëhipergrupesh ternare të një gjysmëhipergrupi ternar H është nëngjysmëhipergrup ternar i H .

Vërtetim. Le të jetë T_i një nëngjysmëhipergrup ternar i H për çdo $i \in I$, i tillë që $\bigcap_{i \in I} T_i \neq \emptyset$. Le të jetë $t_1, t_2, t_3 \in \bigcap_{i \in I} T_i$. Atëherë, $t_1, t_2, t_3 \in T_i$ për çdo $i \in I$. Meqenëse T_i është një nëngjysmëhipergrup ternar i H për çdo $i \in I$, atëherë $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \subseteq T_i$ për çdo $i \in I$. Si rrjedhim, $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3 \subseteq \bigcap_{i \in I} T_i$, kështu që $\bigcap_{i \in I} T_i$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . ■

Teoremë 4.7.5 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe Q_i një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H i tillë që $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$. Atëherë $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim. Eshtë e qartë se $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një gjysmëhipergrup ternar i H (nga Lema 4.7.4). Le të jetë $x \in \left[\bigcap_{i \in I} Q_i \cdot (H \cdot H)^m \right] \cap \left[H^p \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i \cdot H \cdot H^q \right] \cap \left[(H \cdot H)^n \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i \right]$. Atëherë, $x \in \bigcap_{i \in I} Q_i \cdot (H \cdot H)^m$, $x \in H^p \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i \cdot H \cdot H^q$ dhe $x \in (H \cdot H)^n \cdot \bigcap_{i \in I} Q_i$. Kjo sjell që $x \in Q_i \cdot (H \cdot H)^m$, $x \in \left[H^p \cdot Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q_i \cdot H \cdot H^q \right]$ dhe $x \in (H \cdot H)^n \cdot Q_i$ për çdo $i \in I$. Atëherë, $x \in \left[Q_i \cdot (H \cdot H)^m \right] \cap \left[H^p \cdot Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q_i \cdot H \cdot H^q \right] \cap \left[(H \cdot H)^n \cdot Q_i \right] \subseteq Q_i$ për çdo $i \in I$, meqenëse Q_i është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Në këtë mënyrë, $x \in Q_i$ për çdo $i \in I$. Si rrjedhim, $x \in \bigcap_{i \in I} Q_i$, kështu që $\bigcap_{i \in I} Q_i$ është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . ■

Vërejtje 4.7.6 Le të jetë Z^- bashkësia e gjithë numrave të plotë negativë në lidhje me hiperveprimin ternar " $\circ$ " të përcaktuar si më poshtë: $x \circ y \circ z = x \cdot y \cdot z \cdot 2N$, ku " $\cdot$ " është shumëzimi i

zakonshëm. Atëherë, $(Z^-, \circ)$ është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $Q_i = \{k \in Z^- \mid k \leq -i\}$ për çdo $i \in I$. Atëherë, Q_i është një $(2, (1,1), 3)$ - kuazi-hiperideal i Z^- për çdo $i \in I$. Por $\bigcap_{i \in I} Q_i = \emptyset$, kështu që kushti $\bigcap_{i \in I} Q_i \neq \emptyset$ është i nevojshëm.

Përkufizim 4.7.7 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, një nëngjysmëhipergrup ternar

1. R i H quhet hiperideal m -i djathtë (m -right hyperideal) i H në qoftë se $R \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R$.
2. M i H quhet hiperideal (p, q) -lateral ((p, q) -lateral hyperideal) i H në qoftë se $H^p \cdot M \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot M \cdot H \cdot H^q \subseteq M$,
3. L i H quhet hiperideal n -i majtë (n -left hyperideal) i H në qoftë se $(H \cdot H)^n \cdot L \subseteq L$, ku m, n, p, q janë numra të plotë pozitivë dhe $p + q$ është një numër i plotë çift.

Teoremë 4.7.8 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Cdo hiperideal m -i djathtë, (p, q) -lateral dhe n -i majtë i një gjysmëhipergrupi ternar H është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Por e anasjella mund të mos jetë e vërtetë.

Vërtetim. Njëra anë e njëlshmerisë është e evidente. Anasjellas, le të jetë $H = N$ dhe $\cdot : H \times H \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$ përcaktohet si më poshtë:

$$x \cdot y \cdot z = x + y + z + 5N$$

Mund të shihet lehtë se $(H, \cdot)$ është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $Q = \{5\} \cup \{k \in N \mid k \geq 27\} \subseteq H$. Verifikohet lehtë se Q është një $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal i H , por nuk është një hiperideal 2-i djathtë, hiperideal $(1,1)$ -lateral dhe hiperideal 3-i majtë i H . ■

Teoremë 4.7.9 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, janë të vërteta pohimet e mëposhtme:

1. Le të jetë R_i një hiperideal m -i djathtë i H i tillë që $\bigcap_{i \in I} R_i \neq \emptyset$. Atëherë, $\bigcap_{i \in I} R_i$ është një hiperideal m -i djathtë i H .
2. Le të jetë M_i një hiperideal (p, q) -lateral i H i tillë që $\bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset$. Atëherë $\bigcap_{i \in I} M_i$ është një hiperideal (p, q) -lateral i H .
3. Le të jetë L_i një hiperideal n -i majtë i H i tillë që $\bigcap_{i \in I} L_i \neq \emptyset$. Atëherë $\bigcap_{i \in I} L_i$ është një hiperideal n -i majtë i H .

Vërtetim. Vërtetimi është i ngjashëm me atë të Teoremës 4.7.5. ■

Teoremë 4.7.10 Le të jetë R një hiperideal m -i djathtë, M një hiperideal (p, q) -lateral dhe L një hiperideal n -i majtë i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$. Atëherë $R \cap M \cap L$ është $(m, (p, q), n)$ - kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim. Supozojmë se $Q = R \cap M \cap L$. Meqenëse çdo hiperideal m -i djathtë, (p, q) -lateral dhe n -i majtë i një gjysmëhipergrupi ternar H është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H , atëherë

R , M dhe L janë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideale të H . Është e qartë se $R \cap M \cap L$ është joboshe. Nga Teorema 4.7.5, kemi që $Q = R \cap M \cap L$ është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . ■

Lemë 4.7.11 *Le të jetë Q një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ Atëherë*

1. $R = Q \cup Q \cdot (H \cdot H)^m$ është një hiperideal m -i djathtë i H .
2. $M = Q \cup (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q)$ është një hiperideal (p, q) -lateral i H .
3. $L = Q \cup (H \cdot H)^n \cdot Q$ është një hiperideal n -i majtë i H .

Vërtetim. Është e thjeshtë të tregojmë se R është nëngjysmëhipergrup ternar i H . Të tregojmë tani se R është hiperideal m -i djathtë i H .

$$\begin{aligned} R \cdot (H \cdot H)^m &= [Q \cup Q \cdot (H \cdot H)^m] \cdot (H \cdot H)^m \\ &= Q \cdot (H \cdot H)^m \cup Q \cdot (H \cdot H)^m \cdot (H \cdot H)^m \\ &= Q \cdot (H \cdot H)^m \cup Q \cdot (H \cdot H \cdot H \cdot H)^m \\ &\subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \cup Q \cdot (H \cdot H)^m = Q \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R. \end{aligned}$$

Atëherë R është hiperideal m -i djathtë i H . Në mënyrë të ngjashme, mundemi të tregojmë se M është hiperideal (p, q) -lateral i H dhe L është hiperideal n -i majtë i H . ■

Teoremë 4.7.12 *Cdo $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal në një gjysmëhipergrup ternar të rregullt $(H, \cdot)$ është prerja e një hiperideali m -të djathtë, (p, q) -lateral dhe n -të majtë të H .*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe Q një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Atëherë, $R = Q \cup Q \cdot (H \cdot H)^m$, $M = Q \cup (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q)$ dhe $L = Q \cup (H \cdot H)^n \cdot Q$ janë përkatësisht hiperideal m -i djathtë, (p, q) -lateral dhe n -i majtë i H . Është e qartë se $Q \subseteq R$, $Q \subseteq M$ dhe $Q \subseteq L$ sjell që $Q \subseteq R \cap M \cap L$. Meqenëse H është i rregullt, atëherë $Q \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m$, $Q \subseteq H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q$ dhe $Q \subseteq (H \cdot H)^n \cdot Q$. Kështu, $R = Q \cdot (H \cdot H)^m$, $M = H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q$ dhe $L = (H \cdot H)^n \cdot Q$. Tani

$$R \cap M \cap L = Q \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq Q.$$

Që këtë, $Q = R \cap M \cap L$. ■

Themi se një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ ka vetinë e $(m, (p, q), n)$ -prerjes në qoftë se Q është prerja e një hiperideali m -të djathtë, një hiperideali (p, q) -lateral dhe një hiperideali n -të majtë të H . Provohet lehtë teorema e mëposhtme.

Teoremë 4.7.13 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe Q një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. Q ka vetinë e $(m, (p, q), n)$ -prerjes;
2. $[Q \cup Q \cdot (H \cdot H)^m] \cap [Q \cup (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q)] \cap [Q \cup (H \cdot H)^n \cdot Q] = Q$.

Nga sa thamë më sipër ka vend teorema që vijon.

Teoremë 4.7.14 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe Q një nënbashkësi e H . Q është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H vetëm atëherë kur Q është prerja e një hiperideali m -të djathtë, (p, q) -lateral dhe n -të majtë të H .*

Teoremë 4.7.15 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup. Bashkësia L e gjithë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealeve të H të tilla që çdo familje e L ka një prerje joboshe, është një hiperlatisë e plotë.*

Vërtetim. Është e qartë se L është pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Nga Teorema 4.7.5, inferiori i çdo bashkësie të $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealeve $Q_i (i \in I)$ është e qartë se është $\bigcap_{i \in I} Q_i$. Në mënyrë të ngjashme, kemi

$$\bigvee_{i \in I} Q_i = \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_R \cap \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_M \cap \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_L,$$

$$\text{ku } \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_R = \bigcup_{i \in I} Q_i \cup \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot (H \cdot H)^m, \quad \left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_M = \bigcup_{i \in I} Q_i \cup H^p \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H \cdot H^q,$$

$$\left\langle \bigcup_{i \in I} Q_i \right\rangle_L = \bigcup_{i \in I} Q_i \cup (H \cdot H)^n \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i. \text{ Nga Teorema 4.7.10 dhe Lema 4.7.11, ky është dukshëm}$$

një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal që kufizon nga lart gjithë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealet $Q_i (i \in I)$. Ky është superior i L . Me të vërtetë, për çdo $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q që përmban gjithë $Q_i (i \in I)$, kemi

$$\begin{aligned} \bigvee_{i \in I} Q_i &= \left[\bigcup_{i \in I} Q_i \cup \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot (H \cdot H)^m \right] \cap \left[\bigcup_{i \in I} Q_i \cup H^p \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H \cdot H^q \right] \cap \\ &\quad \cap \left[\bigcup_{i \in I} Q_i \cup (H \cdot H)^n \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \right] = \\ &= \bigcup_{i \in I} Q_i \cup \left[\bigcup_{i \in I} Q_i \cdot (H \cdot H)^m \cap H^p \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \cdot H \cdot H^q \cap (H \cdot H)^n \cdot \bigcup_{i \in I} Q_i \right] \\ &\subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \cap \left[H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q \right] \cap (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq Q. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

§4.8 $(m, (p, q), n)$ - Kuazi-hiperidealet minimale në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, studiojmë konceptin e kuazi-hiperidealit minimal të përgjithësuar ose $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperidealit minimal të një gjysmëhipergrupi ternar H . Një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal minimal

(minimal $(m, (p, q), n)$ -quasi-hyperideal) i H , në qoftë se Q nuk përmban në mënyrë rigoroze asnjë $(m, (p, q), n)$ - kuazi-hiperideal të H . Në mënyrë të ngjashme, përcaktojmë hiperidealin m -të djathtë minimal, hiperidealin (p, q) -lateral minimal dhe hiperidealin n -të majtë minimal të një gjysmëhipergrupi ternar. Gjithashtu, prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergrupin ternar të thjeshtë n -të majtë (the n -left simple ternary semihypergroup), gjysmëhipergrupin ternar të thjeshtë (p, q) -lateral ((p, q) -lateral simple ternary semihypergroup), gjysmëhipergrupin ternar të thjeshtë m -të djathtë (m -right simple ternary semihypergroup). Disa veti të tyre shqyrtohen nëpërmjet hiperidealeve n -të majta, (p, q) -lateral dhe m -të djathta.

Lemë 4.8.1 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe $a \in H$. Atëherë, kanë vend pohimet e mëposhtme:*

1. $a \cdot (H \cdot H)^m$ është një hiperideal m -i djathtë i H .
2. $(H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q)$ është një hiperideal (p, q) -lateral i H .
3. $(H \cdot H)^n \cdot a$ është një hiperideal n -i majtë i H .
4. $a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a$ është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim. (1), (2) dhe (3) janë evidente. (4) rrjedh nga (1), (2), (3) dhe Teorema 4.7.10. ■

Teoremë 4.8.2 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe Q një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Atëherë, Q është minimal vetëm atëherë kur Q është prerja e ndonjë hiperideali m -të djathtë minimal R , (p, q) -lateral minimal M dhe n -të majtë minimal L të H .*

Vërtetim. Supozojmë se Q është $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal minimal i H dhe le të jetë $a \in Q$. Atëherë, nga Lema e mësipërme kemi që $a \cdot (H \cdot H)^m$ është hiperideal m -i djathtë, $(H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q)$ është hiperideal (p, q) -lateral, $(H \cdot H)^n \cdot a$ është hiperideal n -i majtë dhe $a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a$ është $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Tani

$$\begin{aligned} & a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a \\ & \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq Q. \end{aligned}$$

Meqenëse Q është minimal, atëherë $a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a = Q$. Të tregojmë tani që $a \cdot (H \cdot H)^m$ është hiperideal m -i djathtë minimal i H . Le të jetë R një hiperideal m -i djathtë i H që përfshihet në $a \cdot (H \cdot H)^m$. Atëherë

$$\begin{aligned} & R \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a \\ & \subseteq a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a \subseteq Q. \end{aligned}$$

Meqenëse $R \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a$ është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H dhe Q është minimal, rrjedh që $R \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a = Q$. Kjo sjell që $Q \subseteq R$ dhe si pasojë, $a \cdot (H \cdot H)^m \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R$ sjell që $R = a \cdot (H \cdot H)^m$. Kështu, hiperideali m -i djathtë $a \cdot (H \cdot H)^m$ është minimal. Në mënyrë të ngjashme, mund të provojmë se

$(H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q)$ është hiperideal (p,q) -lateral minimal i H dhe $(H \cdot H)^n \cdot a$ është hiperideal n -i majtë minimal i H .

Anasjellas, supozojmë se $Q = R \cap M \cap L$ për ndonjë hiperideal m -të djathtë minimal R , (p,q) -lateral minimal M dhe n -të majtë minimal L . Kështu, $Q \subseteq R, Q \subseteq M$ dhe $Q \subseteq L$. Le të jetë Q' një (m,p,q,n) -kuazi-hiperideal i H që përfshihet në Q . Atëherë $Q' \cdot (H \cdot H)^m \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R$. Në mënyrë të ngjashme, $(H^p \cdot Q' \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q' \cdot H \cdot H^q) \subseteq M$ dhe $(H \cdot H)^n \cdot Q' \subseteq (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq L$. Tani, $Q' \cdot (H \cdot H)^m$ është një hiperideal m -i djathtë i H , përderisa $Q' \cdot (H \cdot H)^m \cdot (H \cdot H)^m \subseteq Q' \cdot (H \cdot H)^m$. Në mënyrë të ngjashme, $(H^p \cdot Q' \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q' \cdot H \cdot H^q)$ është një hiperideal (p,q) -lateral i H dhe $(H \cdot H)^n \cdot Q'$ është një hiperideal n -i majtë i H . Meqenëse R, M dhe L janë përkatësisht hiperideal m -i djathtë minimal, hiperideal (p,q) -lateral minimal dhe hiperideal n -i majtë minimal i H , atëherë $Q' \cdot (H \cdot H)^m = R, H^p \cdot Q' \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q' \cdot H \cdot H^q = M$ dhe $(H \cdot H)^n \cdot Q' = L$. Në këtë mënyrë $Q = R \cap M \cap L = Q' \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot Q' \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot Q' \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot Q' \subseteq Q'$, kështu që $Q = Q'$. Si rrjedhim, Q është $(m,(p,q),n)$ -kuazi-hiperideal minimal i H . ■

Vërejtje 4.8.3 Një gjysmëhipergrup ternar H mund të mos të përmbajë një $(m,(p,q),n)$ -kuazi-hiperideal minimal. Për shembull, le të jetë $(Z^-, \circ)$ gjysmëhipergrupi ternar i Vërejtjes 4.7.6. Le të jetë $Q = \{-2, -3, -4, \dots\}$. Atëherë Q është një $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal i Z^- . Le të supozojmë se Q është $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal minimal i Z^- . Le të jetë $Q' = Q \setminus \{-2\}$. Atëherë, mund të tregojmë lehtë se Q' është një $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal i Z^- . Por Q' është një nënbashkësi e mirëfilltë e Q . Ky është kontradiksion! Pra, Z^- nuk përmban një $(m,(p,q),n)$ -kuazi-hiperideal minimal.

Pohimet e mëposhtme japin kushte të nevojshme dhe të mjaftueshme për ekzistencën e një $(m,(p,q),n)$ -kuazi-hiperideali minimal të një gjysmëhipergrupi ternar. Një rrjedhim i drejtpërdrejtë i Teoremës 4.8.2 është pohimi që vijon.

Rrjedhim 4.8.4 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, H përmban të paktën një $(m,(p,q),n)$ -kuazi-hiperideal minimal vetëm atëherë kur H përmban të paktën një hiperideal m -të djathtë minimal, të paktën një hiperideal (p,q) -lateral minimal dhe të paktën një hiperideal n -të majtë minimal.

Teoremë 4.8.5 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, kanë vend pohimet e mëposhtme:

1. Një hiperideal m -i djathtë R është minimal vetëm atëherë kur $a \cdot (H \cdot H)^m = R$ për çdo $a \in R$
2. Një hiperideal (p,q) -lateral M është minimal vetëm atëherë kur $(H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) = M$ për çdo $a \in M$.
3. Një hiperideal n -i majtë L është minimal vetëm atëherë kur $(H \cdot H)^n \cdot a = L$ për çdo $a \in L$.

4. Një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q është minimal vetëm atëherë kur $a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a = Q$ për çdo $a \in Q$.

Vërtetim. (1). Le të supozojmë se hiperideali m -i djathtë R është minimal dhe $a \in R$. Atëherë $a \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R$. Nga Lema 4.8.1, kemi që $a \cdot (H \cdot H)^m$ është një hiperideal m -i djathtë i H . Meqenëse R është hiperideal m -i djathtë minimal i H , atëherë $a \cdot (H \cdot H)^m = R$.

Anasjellas, supozojmë se $a \cdot (H \cdot H)^m = R$ për çdo $a \in R$. Le të jetë R' një hiperideal m -i djathtë i H i cili përfshihet në R . Le të jetë $x \in R'$. Atëherë $x \in R$. Nga supozimi, kemi $x \cdot (H \cdot H)^m = R$ për çdo $x \in R$. $R = x \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R' \cdot (H \cdot H)^m \subseteq R'$. Kjo sjell që $R \subseteq R'$ dhe si rrjedhim, $R = R'$, kështu që R është hiperideal m -i djathtë minimal.

Në mënyrë të ngjashme vërtetohen (2), (3) dhe (4). ■

Në vazhdim, prezantojmë dhe karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare të thjeshta n -të majta, të thjeshtë (p, q) -lateral, të thjeshta m -të djathta. Disa veti të tyre shqyrtohen nëpërmjet hiperidealeve n -të majta, (p, q) -lateral dhe m -të djathta.

Përkufizim 4.8.6 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë (p, q) -lateral ((p, q) -lateral simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal (p, q) -lateral të mirëfilltë.

Përkufizim 4.8.7 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë n -i majtë (n -left simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal n -të majtë të mirëfilltë.

Përkufizim 4.8.8 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet i thjeshtë m -i djathtë (m -right simple) në qoftë se nuk përmban asnjë hiperideal m -të djathtë të mirëfilltë.

Përkufizim 4.8.9 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar pa zero. H quhet $(m, (p, q), n)$ -kuazi-i thjeshtë në qoftë se nuk përmban asnjë $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal.

Teoremë 4.8.10 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:

1. H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë n -i majtë vetëm atëherë kur $(H \cdot H)^n \cdot a = H$ për çdo $a \in H$.

2. H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë m -i djathtë vetëm atëherë kur $a \cdot (H \cdot H)^m = H$ për çdo $a \in H$.

3. H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë (p, q) -lateral vetëm atëherë kur $(H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) = H$ për çdo $a \in H$.

4. H është një gjysmëhipergrup ternar $(m, (p, q), n)$ -kuazi-i thjeshtë vetëm atëherë kur $a \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot a \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot a \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot a = H$ për çdo $a \in H$.

Vërtetim. (1) Meqenëse H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë n -i majtë, kemi që H është hiperideal n -i majtë minimal i H . Nga Teorema 4.8.5(3), kemi $(H \cdot H)^n \cdot a = H$ për çdo $a \in H$.

Anasjellas, supozojmë se $(H \cdot H)^n \cdot a = H$ për çdo $a \in H$. Nga Teorema 4.8.5(3), H është një hiperideal n -i majtë minimal i H dhe si rrjedhim, H është një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë n -i majtë.

(2), (3) dhe (4) mund të vërtetohen në mënyrë të ngjashme me (1). ■

Teoremë 4.8.11 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:*

1. *Në qoftë se një hiperideal n -i majtë L i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë n -i majtë, atëherë L është hiperideal n -i majtë minimal i H ;*
2. *Në qoftë se një hiperideal m -i djathtë R i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë m -i djathtë, atëherë R është hiperideal m -i djathtë minimal i H ;*
3. *Në qoftë se një hiperideal (p, q) -lateral M i H është gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë (p, q) -lateral, atëherë M është hiperideal (p, q) -lateral minimal i H ;*
4. *Në qoftë se një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal Q i H është gjysmëhipergrup ternar $(m, (p, q), n)$ -kuazi-i thjeshtë, atëherë Q është $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal minimal i H .*

Vërtetim. (1). Le të jetë L një gjysmëhipergrup ternar i thjeshtë n -i majtë. Nga Teorema 4.8.10(1), kemi $(L \cdot L)^n \cdot a = L$ për çdo $a \in L$. Për çdo $a \in L$, kemi $L = (L \cdot L)^n \cdot a \subseteq (H \cdot H)^n \cdot a \subseteq (H \cdot H)^n \cdot L \subseteq L$. Nga Teorema 4.8.5(3) rrjedh që L është minimal.

(2), (3) dhe (4) vërtetohen në mënyrë të ngjashme me (1). ■

§4.9 $(m, (p, q), n)$ - Bi-hiperidealet në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, përkufizojmë bi-hiperidealet e përgjithësuara në një gjysmëhipergrup ternar, domethënë shqyrtojmë $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperidealet dhe vetitë e tyre.

Përkufizim 4.9.1 *Një nëngjysmëhipergrup ternar B i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ quhet bi-hiperideal i përgjithësuar (generalized bi-hyperideal) ose $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal ($(m, (p, q), n)$ -bi-hyperideal) i H , në qoftë se $B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq B$, ku m, n, p, q janë numra të plotë pozitivë dhe p dhe q janë tek.*

Vërejtje 4.9.2 *Cdo bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H është $(1, (1, 1), 1)$ -bi-hiperideal i H , por siç ilustruhet nga shembujt e mëposhtëm, jo çdo $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H është bi-hiperideal i H .*

Shembull 4.9.3 *Le të jetë H gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 4.7.3 dhe $B = \{5, 20, 25\} \cup \{k \in N \mid k \geq 28\} \subseteq H$. Vërtetohet lehtë se B është një $(3, (1, 1), 4)$ -bi-hiperideal i H , por nuk është bi-hiperideal i H meqenëse $27 \in B \cdot H \cdot B \cdot H \cdot B$, por $27 \notin B$.*

Teoremë 4.9.4 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe B_i një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H i tillë që $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$. Atëherë $\bigcap_{i \in I} B_i$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .*

Vërtetim. Evident. ■

Vërejtje 4.9.5 Le të jetë Z^- bashkësia e gjithë numrave të plotë negativë e pajisur me hiperveprimin ternar " $\circ$ " të përcaktuar si më poshtë: $x \circ y \circ z = x \cdot y \cdot z \cdot 2N$, ku " $\cdot$ " është shumëzimi i zakonshëm. Atëherë, $(Z^-, \circ)$ është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $B_i = \{k \in Z^- \mid k \leq -i\}$ për çdo $i \in I$. Atëherë, B_i është $(3, (1,1), 4)$ -bi-hiperideal i Z^- për çdo $i \in I$. Por $\bigcap_{i \in I} B_i = \emptyset$, kështu që kushti $\bigcap_{i \in I} B_i \neq \emptyset$ është i nevojshëm.

Teoremë 4.9.6 Cdo $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .

Vërtetim. Le të jetë Q një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . Atëherë

$$Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot H \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot H \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m$$

Në mënyrë të ngjashme,

$$Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq H \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot (H^p \cdot Q \cdot H^q) \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot H \subseteq H^{p+1} \cdot Q \cdot H^{q+1}$$

Përsëri, $\{0\} \subseteq H^p \cdot Q \cdot H^q$, kështu që

$$Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^{p+1} \cdot Q \cdot H^{q+1}.$$

Gjithashtu,

$$Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq H \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot H \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq (H \cdot H)^n \cdot Q.$$

Si rrjedhim,

$$Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q \subseteq Q \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot Q \cdot H^q \cup H^{p+1} \cdot Q \cdot H^{q+1}) \cap (H \cdot H)^n \cdot Q \subseteq Q.$$

Që këtë, Q është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . ■

Vërejtje 4.9.7 Jo çdo $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H dhe kjo ilustron nga shembulli që vijon.

Shembull 4.9.8 Le të jetë $H = Z^- \setminus \{-1\}$ bashkësia e gjithë numrave të plotë negativë pa $\{-1\}$ e pajisur me hiperveprimin ternar " $\circ$ " të përcaktuar si më poshtë: $x \circ y \circ z = x \cdot y \cdot z \cdot 2N$, ku " $\cdot$ " është shumëzimi i zakonshëm. Atëherë, $(Z^- \setminus \{-1\}, \circ)$ është një gjysmëhipergrup ternar. Le të jetë $B = \{-27\} \cup \{k \in Z \mid k \leq -14000\} \subseteq H$. Vërtetohet lehtë se B është $(2, (1,1), 3)$ -bi-hiperideal i H . Kështu, $-13824 \in B \cdot (H \cdot H)^2 \cap (H \cdot B \cdot H \cup H \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H) \cap (H \cdot H)^3 \cdot B$. Por $-13824 \notin B$, kështu që B nuk është $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal i H .

Shembull 4.9.9 Le të jetë H gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 4.7.3. Le të jetë $B = \{5, 20, 25\} \cup \{k \in N \mid k \geq 28\} \subseteq H$. Vërtetohet lehtë se B është një $(2, (1,1), 3)$ -bi-hiperideal i H , por nuk është një $(2, (1,1), 3)$ -kuazi-hiperideal i H .

Teoremë 4.9.10 Një nëngjysmëhipergrup ternar B i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H vetëm atëherë kur $B = B \cdot H \cdot B$.

Vërtetim. Supozojmë se B është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H . Le të jetë $b \in B$. Atëherë ekziston $x \in H$ i tillë që $b \in b \cdot x \cdot b$. Kjo sjell që $b \in B \cdot H \cdot B$, kështu që $B \subseteq B \cdot H \cdot B$. Tani,

$$B \cdot H \cdot B \subseteq B \cdot H \cdot B \cdot H \cdot B \cdot H \cdot B \cdot H \cdot B \subseteq B \cdot (H \cdot H) \cdot (H \cdot B \cdot H) \cdot (H \cdot H) \cdot B \subseteq B.$$

Atëherë, $B = B \cdot H \cdot B$.

Anasjellas, në qoftë se $B = B \cdot H \cdot B$, atëherë

$$B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot H \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq B \cdot H \cdot B = B,$$

kështu që B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . ■

Teoremë 4.9.11 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Atëherë çdo $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H .*

Vërtetim. Le të jetë B një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Le të jetë $a \in B \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot B \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot B$. Atëherë,

$$a \in B \cdot (H \cdot H)^m, a \in (H^p \cdot B \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H^q) \text{ dhe } a \in (H \cdot H)^n \cdot B.$$

Meqenëse H është i rregullt, atëherë për çdo $a \in H$, ekziston një element x i H i tillë që $a \in a \cdot x \cdot a$. Atëherë

$$a \in a \cdot x \cdot a \in a \cdot x \cdot a \cdot x \cdot a \subseteq B \cdot (H \cdot H)^m \cdot H \cdot (H^p \cdot B \cdot H^q \cup H^q \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H^q) \cdot H \cdot (H \cdot H)^n \cdot B$$

$$= [B \cdot (H \cdot H)^m \cdot H \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot H \cdot (H \cdot H)^n \cdot B]$$

$$\cup [B \cdot (H \cdot H)^m \cdot H \cdot H^p \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H^q \cdot H \cdot (H \cdot H)^n \cdot B]$$

$$\subseteq B \cdot [(H \cdot H)^m \cdot H \cdot H^p \cdot H \cdot H^q \cdot H \cdot (H \cdot H)^n] \cdot B$$

$$\cup B \cdot [(H \cdot H)^m \cdot H \cdot H^p \cdot H \cdot H \cdot H \cdot H^q \cdot H \cdot (H \cdot H)^n] \cdot B$$

$$\subseteq B \cdot H \cdot B \cup B \cdot H \cdot B = B \cup B = B.$$

Pra, $a \in B$. Atëherë, $B \cdot (H \cdot H)^m \cap (H^p \cdot B \cdot H^q \cup H^p \cdot H \cdot B \cdot H \cdot H^q) \cap (H \cdot H)^n \cdot B \subseteq B$, kështu që B është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H . ■

Vërtetohen lehtë pohimet e mëposhtme:

Pohim 4.9.12 *Prerja e një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideali B të një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ me një nëngjysmëhipergrup ternar T të H është ose boshe ose një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i T .*

Pohim 4.9.13 *Le të jetë B një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar H dhe T_1, T_2 dy nëngjysmëhipergrupe ternare të H . Atëherë, $B \cdot T_1 \cdot T_2$, $T_1 \cdot B \cdot T_2$ dhe $T_1 \cdot T_2 \cdot B$ janë $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideale të H .*

Pohim 4.9.14 *Le të jenë B_1, B_2 dhe B_3 tre $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideale të një gjysmëhipergrupi ternar H . Atëherë, $B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .*

Pohim 4.9.15 Le të jenë Q_1, Q_2 dhe Q_3 tre $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideale të një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$. Atëherë, $Q_1 \cdot Q_2 \cdot Q_3$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .

Pohim 4.9.16 Le të jetë R një hiperideal m -i djathtë, M një hiperideal (p, q) -lateral dhe L një hiperideal n -i majtë i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$. Atëherë, gjysmëhipergrupi ternar $B = R \cdot M \cdot L$ i H është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .

Teoremë 4.9.17 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Në qoftë se B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H , atëherë $B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B = B$.

Vërtetim. Le të jetë B një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Le të jetë $a \in B$. Atëherë $a \in H$. Meqenëse H është i rregullt, atëherë ekziston $x \in H$ i tillë që $a \in a \cdot x \cdot a$. Tani $a \in a \cdot x \cdot a \subseteq a \cdot (x \cdot a) \cdot (x \cdot a \cdot x) \cdot (a \cdot x) \cdot a \subseteq B \cdot (H \cdot H) \cdot (H \cdot B \cdot H) \cdot (H \cdot H) \cdot B$. Në mënyrë të ngjashme, nga vetia e rregullsisë, është e thjeshtë të tregojmë që $a \in B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B$. Kështu, $B \subseteq B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B$. Meqenëse B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H , atëherë $B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq B$. Pra, $B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B = B$. ■

Rrjedhim 4.9.18 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Në qoftë se Q është një $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H , atëherë $Q \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot Q \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot Q = Q$.

Vërtetim. Meqenëse çdo $(m, (p, q), n)$ -kuazi-hiperideal i H është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H , rezultati i duhur rrjedh në mënyrë të drejtpërdrejtë. ■

Teoremë 4.9.19 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se A është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H dhe B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i A i tillë që $B = B \cdot H \cdot B$, atëherë B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H .

$$\begin{aligned} \text{Vërtetim. Kemi: } & B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B = \\ & = B \cdot H \cdot B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \cdot H \cdot B \\ & \subseteq B \cdot H \cdot [A \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot H \cdot H \cdot A \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot A] \cdot H \cdot B \\ & \subseteq B \cdot H \cdot A \cdot H \cdot B \subseteq B \cdot H \cdot B = B \end{aligned}$$

Kështu, B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . ■

§4.10 $(m, (p, q), n)$ -Bi-hiperidealet minimale në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, prezantojmë konceptin e bi-hiperidealit minimal të përgjithësuar ose $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperidealit minimal në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë veti të tyre.

Përkufizim 4.10.1 Një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$ quhet $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal minimal (minimal $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal) i H në qoftë se B nuk përmban asnjë $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal të H .

Lemë 4.10.2 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe $a \in H$. Atëherë kanë vend pohimet e mëposhtme:

1. $a \cdot (H \cdot H)^{m-1}$ është një hiperideal m -i djathtë i H .
2. $H^p \cdot a \cdot H^q$ është një hiperideal (p, q) -lateral i H .
3. $(H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është një hiperideal n -i majtë i H .
4. $a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot a \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal.

Vërtetim. (1), (2) dhe (3) janë evidente dhe (4) rrjedh nga (1), (2), (3). ■

Teoremë 4.10.3 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe B një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Atëherë B është minimal vetëm atëherë kur B jepet si prodhim i ndonjë hiperideali m -të djathtë minimal R , hiperideali (p, q) -lateral minimal M dhe hiperideali n -të majtë minimal L të H .

Vërtetim. Supozojmë se B është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal minimal i H . Le të jetë $a \in B$. Atëherë, nga Lemma e mësipërme, $a \cdot (H \cdot H)^{m-1}$ është një hiperideal m -i djathtë, $H^p \cdot a \cdot H^q$ është një hiperideal (p, q) -lateral, $(H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është një hiperideal n -i majtë dhe $a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot a \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Tani, $a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot a \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a \subseteq B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq B$. Meqenëse B është minimal, rrjedh që $a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot a \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a = B$. Le të tregojmë tani se $a \cdot (H \cdot H)^{m-1}$ është hiperideal m -i djathtë minimal i H . Le të jetë R një hiperideal m -i djathtë i H që përfshihet në $a \cdot (H \cdot H)^{m-1}$. Atëherë $R \cdot (H^p \cdot a \cdot H^q)^{n-1} \cdot a \subseteq a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot (H^p \cdot a \cdot H^q) \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a = B$. Meqenëse $R \cdot H^p \cdot a \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H dhe B është minimal, atëherë $R \cdot (H^p \cdot a \cdot H^q) \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot a = B$. Kjo sjell që $B \subseteq R$. Si rrjedhim, $a \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq R \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq R$, kështu që $a \cdot (H \cdot H)^{m-1}$ është minimal. Në mënyrë të ngjashme vërtetohet se $H^p \cdot a \cdot H^q$ është hiperideal (p, q) -lateral minimal i H dhe $(H \cdot H)^{n-1} \cdot a$ është hiperideal n -i majtë minimal i H .

Anasjellas, supozojmë se $B = R \cdot M \cdot L$ për ndonjë hiperideal m -të djathtë minimal R , hiperideal (p, q) -lateral minimal M dhe hiperideal n -të majtë minimal L . Kështu, $B \subseteq R$, $B \subseteq M$ dhe $B \subseteq L$. Le të jetë B_0 një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H që përfshihet në B .

Atëherë, $B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq B \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq R \cdot (H \cdot H)^{m-1} \subseteq R$. Në mënyrë të ngjashme, $H^p \cdot B_0 \cdot H^q \subseteq H^p \cdot B \cdot H^q \subseteq H^p \cdot M \cdot H^q \subseteq M$ dhe $(H \cdot H)^{n-1} \cdot B_0 \subseteq (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \subseteq (H \cdot H)^{n-1} \cdot L \subseteq L$. Tani, $B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot (H \cdot H)^m \subseteq B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1}$, kështu që $B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1}$ është një hiperideal m -i djathtë i H . Në mënyrë të ngjashme, $H^p \cdot B_0 \cdot H^q$ është një hiperideal (p, q) -lateral dhe $(H \cdot H)^{n-1} \cdot B_0$ një hiperideal n -i majtë i H . Meqenëse R, M dhe L janë përkatësisht hiperideal m -i djathtë minimal, hiperideal (p, q) -lateral minimal dhe hiperideal n -i majtë minimal të H , atëherë $B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1} = R, H^p \cdot B_0 \cdot H^q = M$ dhe $(H \cdot H)^{n-1} \cdot B_0 = L$. Në këtë mënyrë, $B = R \cdot M \cdot L = B_0 \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot B_0 \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B_0 \subseteq B_0$, kështu që $B = B_0$. Rrjedhimisht, B është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal minimal i H . ■

Përkufizim 4.10.4 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, H quhet gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë (bi-simple ternary semihypergroup) në qoftë se H është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideali i vetëm i H .*

Teoremë 4.10.5 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe B një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Atëherë B është $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal minimal i H vetëm atëherë kur B është gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë.*

Vërtetim. Supozojmë se B është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal minimal i H . Le të jetë C një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i B . Atëherë $C \cdot (B \cdot B)^{m-1} \cdot B^p \cdot C \cdot B^q \cdot (B \cdot B)^{n-1} \cdot C \subseteq C \subseteq B$. Nga Teorema 4.9.11, $B \cdot C \cdot C$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Atëherë, $(B \cdot C \cdot C) \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot (B \cdot C \cdot C) \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot B \cdot C \cdot C \subseteq B \cdot C \cdot C \subseteq B \cdot B \cdot B \subseteq B$. Meqenëse B është minimal, rrjedh se $B \cdot C \cdot C = B$. Është e lehtë të tregojmë se $C \cdot (B \cdot B)^{m-1} \cdot B^p \cdot C \cdot B^q \cdot (B \cdot B)^{n-1} \cdot C$ është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H . Meqë B është minimal, atëherë $C \cdot (B \cdot B)^{m-1} \cdot B^p \cdot C \cdot B^q \cdot (B \cdot B)^{n-1} \cdot C = B$. Kjo sjell që $B = C \cdot (B \cdot B)^{m-1} \cdot B^p \cdot C \cdot B^q \cdot (B \cdot B)^{n-1} \cdot C \subseteq C$. Kështu, $C = B$. Rrjedhimisht, B është një bi-gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë. Anasjellas, supozojmë se B është gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë. Le të jetë C një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i H i tillë që $C \subseteq B$. Atëherë, $C \cdot (B \cdot B)^{m-1} \cdot B^p \cdot C \cdot B^q \cdot (B \cdot B)^{n-1} \cdot C \subseteq C \cdot (H \cdot H)^{m-1} \cdot H^p \cdot C \cdot H^q \cdot (H \cdot H)^{n-1} \cdot C \subseteq C$. Që këtë rrjedh se C është një $(m, (p, q), n)$ -bi-hiperideal i B . Meqenëse B është gjysmëhipergrup ternar bi-i thjeshtë, rrjedh që $C = B$. Pra, B është minimal. ■

DISA REZULTATE MBI REGULLSINË E GJYSMËHIPERGRUPEVE TERNARE

§5.1 Gjysmëhipergrupet ternare të rregullta

Koncepti i rregullsisë i tipeve të ndryshme të strukturave algjebrike është paraqitur dhe karakterizuar nga autorë të ndryshëm si Neumann, Iseki, Kovacs, Lajos etj. [88-91]. Autorë të ndryshëm kanë studjuar konceptin e rregullsisë në sistemet algjebrike ternare [92-96]. Në këtë seksion ne përgjithësojmë konceptin e rregullsisë në gjysmëhipergrupet ternare, studjojmë disa veti të gjysmëhipergrupeve ternare të rregullta dhe i karakterizojmë ato nëpërmjet llojeve të ndryshme të hiperidealeve të gjysmëhipergrupeve ternare.

Përkufizim 5.1.1 *Një gjysmëhipergrup ternar H quhet i rregullt (regular) në qoftë se për çdo $a \in H$, ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a)$.*

Është e qartë se çdo hipergrup ternar është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt.

Gjysmëhipergrupet ternare të Shembullit 3.1.15 dhe 3.1.18 janë gjysmëhipergrupe ternare të rregullta.

Theksojmë se çdo hiperideal i majtë dhe i djathtë i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt mund të mos jetë një gjysmëhipergrup ternar i rregullt; ndërkaq, për një hiperideal lateral të një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt, ka vend lema e mëposhtme:

Lemë 5.1.2 *Cdo hiperideal lateral i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H është gjysmëhipergrup ternar i rregullt.*

Vërtetim. Le të jetë L një hiperideal lateral i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H . Atëherë, për çdo $a \in L$, ekziston $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a)$. Kemi $a \in f(a, x, a) \subseteq f(a, x, f(a, x, a)) \subseteq f(a, f(x, a, x), a) \subseteq f(a, L, a)$, kështu që ekziston $b \in L$ i tillë që $a \in f(a, b, a)$. Kjo sjell që L është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. ■

Vërejtje. Cdo hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt H është gjysmëhipergrup ternar i rregullt.

Në teoremën e mëposhtme karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare të rregullta.

Teoremë 5.1.3 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është i rregullt.

2. Për çdo hiperideal të djathtë R , hiperideal lateral M dhe hiperideal të majtë L të H , $f(R, M, L) = R \cap M \cap L$.

3. Për $a, b, c \in H$, $f(\langle a \rangle_r, \langle b \rangle_m, \langle c \rangle_l) = \langle a \rangle_r \cap \langle b \rangle_m \cap \langle c \rangle_l$.

4. Për $a \in H$, $f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, \langle a \rangle_l) = \langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Le të jenë R , M dhe L përkatësisht hiperideal i djathtë, hiperideal lateral dhe hiperideal i majtë i H . Atëherë, është e qartë se $f(R, M, L) \subseteq R \cap M \cap L$. Tani, për $a \in R \cap M \cap L$, kemi që $a \in f(a, x, a)$ për ndonjë $x \in H$. Kjo sjell që $a \in f(a, x, a) \subseteq f(f(a, x, a), x, f(a, x, a)) \subseteq f(R, M, L)$. Në këtë mënyrë kemi që $R \cap M \cap L \subseteq f(R, M, L)$. Pra, gjetëm që $f(R, M, L) = R \cap M \cap L$.

Është e qartë se (2) $\Rightarrow$ (3) dhe (3) $\Rightarrow$ (4).

Mbetet të tregojmë se (4) $\Rightarrow$ (1).

Le të jetë $a \in H$. Është e qartë se $a \in \langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l = f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, \langle a \rangle_l)$. Atëherë, kemi që $a \in f(f(a, H, H) \cup \{a\}, f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H) \cup \{a\}, f(H, H, a) \cup \{a\}) \subseteq f(a, H, a)$. Në këtë mënyrë gjetëm se $a \in f(a, H, a)$, kështu që ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a)$. Që këtë rrjedh se a është i rregullt dhe si rrjedhim, H është i rregullt. ■

Rrjedhim 5.1.4 Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. H është i rregullt.

2. Për çdo hiperideal të djathtë R dhe hiperideal të majtë L të H , $f(R, H, L) = R \cap L$.

3. Për $a, b \in H$, $f(\langle a \rangle_r, H, \langle b \rangle_l) = \langle a \rangle_r \cap \langle b \rangle_l$.

4. Për $a \in H$, $f(\langle a \rangle_r, H, \langle a \rangle_l) = \langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_l$.

Teoremë 5.1.5 Një gjysmëhipergrup ternar H është i rregullt vetëm atëherë kur çdo hiperideal i H është idempotent.

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe I një hiperideal i çfarëdoshëm i H . Atëherë $f(I, I, I) \subseteq f(H, H, I) \subseteq I$. Le të jetë $a \in I$. Atëherë ekziston $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a) \subseteq f(a, x, f(a, x, a))$. Meqenëse I është një hiperideal dhe $a \in I$, $f(x, a, x) \subseteq I$, kështu që $a \in f(a, x, a) \subseteq f(a, x, f(a, x, a)) \subseteq f(I, I, I)$. Si pasojë, $I \subseteq f(I, I, I)$ dhe përfundimisht $f(I, I, I) = I$. Pra, I është idempotent.

Anasjellas, supozojmë se çdo hiperideal i H është idempotent. Le të jenë A , B dhe C tre hiperideale të H . Atëherë $f(A, B, C) \subseteq f(A, H, H) \subseteq A$, $f(A, B, C) \subseteq f(H, B, H) \subseteq B$ dhe $f(A, B, C) \subseteq f(H, H, C) \subseteq C$. Kjo sjell që $f(A, B, C) \subseteq A \cap B \cap C$. Gjithashtu, $f(A \cap B \cap C, A \cap B \cap C, A \cap B \cap C) \subseteq f(A, B, C)$. Nga ana tjetër, meqenëse $A \cap B \cap C$ është një hiperideal i H , $f(A \cap B \cap C, A \cap B \cap C, A \cap B \cap C) = A \cap B \cap C$, kështu që

$A \cap B \cap C \subseteq f(A, B, C)$ dhe si rrjedhim $A \cap B \cap C = f(A, B, C)$. Atëherë, nga Teorema 3.23.3, rrjedh që H është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. ■

Teoremë 5.1.6 *Një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar H është i rregullt vetëm atëherë kur çdo hiperideal i H është gjysmëprim.*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt ndërrimtar dhe I një hiperideal i çfarëdoshëm i H i tillë që $f(A, A, A) \subseteq I$ për çdo hiperideal A të H . Nga Teorema 5.1.3 rrjedh se $f(A, A, A) = A$, prandaj $A \subseteq I$, kështu që I është një hiperideal gjysmëprim i H .

Anasjellas, supozojmë se çdo hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar ndërrimtar H është gjysmëprim. Le të jetë $a \in H$. Atëherë $f(a, H, a)$ është një hiperideal i H . Nga hipoteza, $f(a, H, a)$ është një hiperideal gjysmëprim i H . Në qoftë se $f(a, H, a) = H$, atëherë vërtetimi përfundon këtu. Le të supozojmë se $f(a, H, a) \neq H$. Atëherë

$$\begin{aligned} f(\langle a \rangle, \langle a \rangle, \langle a \rangle) &= f(f(H, H, a) \cup f(a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup \\ &\cup f(H, H, a, H, H) \cup \{a\}, f(H, H, a) \cup f(a, H, H) \cup \\ &\cup f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H) \cup \{a\}, f(H, H, a) \cup \\ &\cup f(a, H, H) \cup f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H) \cup \{a\}) \\ &\subseteq f(a, H, a) \end{aligned}$$

prandaj, $f(\langle a \rangle, \langle a \rangle, \langle a \rangle) \subseteq f(a, H, a)$. Kjo sjell që $\langle a \rangle \subseteq f(a, H, a)$ meqenëse $f(a, H, a)$ është një hiperideal gjysmëprim i H . Si rrjedhim, $a \in f(a, x, a)$ për ndonjë $x \in H$ dhe që këtë, H është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. ■

Le të jetë N hiperideali nuklear (nuclear hyperideal) i një gjysmëhipergrupi ternar (H, f) i cili është prerja e gjithë hiperidealeve të H , N_r prerja e gjithë hiperidealeve të djathta të H , N_m prerja e gjithë hiperidealeve lateral të H dhe N_l prerja e gjithë hiperidealeve të majta të H . Në qoftë se $N = \emptyset$, atëherë është e qartë se $N = N_r = N_m = N_l$.

Teoremë 5.1.7 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe $N = N_r = N_m = N_l$. Atëherë, H është i rregullt vetëm atëherë kur N është gjysmëhipergrup ternar i rregullt.*

Vërtetim. Në qoftë se H është i rregullt, atëherë është e qartë se N është gjithashtu i rregullt si hiperideal.

Anasjellas, supozojmë se N është një hiperideal i rregullt i H , kështu që për çdo hiperideal të djathtë R , hiperideal lateral M dhe hiperideal të majtë L të H ,

$$N \cup f(R, M, L) = R \cap M \cap L.$$

Meqenëse $f(N, N, N)$ është njëkohësisht hiperideal i djathtë dhe i majtë, atëherë

$$f(R, M, L) \subseteq f(N, N, N) \subseteq N.$$

Që këtë, $f(R, M, L) = R \cap M \cap L$. ■

Rrjedhim 5.1.8 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe $N = N_r = N_m = N_l$. Atëherë, H është i rregullt vetëm atëherë kur çdo hiperideal i H është i rregullt.*

Vërtetim. Në qoftë se H është i rregullt, atëherë N është një hiperideal i rregullt. Që këtë, çdo hiperideal I i cili përmban domosdoshmërisht N , është gjithashtu hiperideal i rregullt.

Anasjellas, në qoftë se çdo hiperideal i H është i rregullt atëherë, aq më tepër është i rregullt N . Si rrjedhim, nga Teorema 5.1.7, H është gjysmëhipergrup ternar i rregullt. ■

Teoremë 5.1.9 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe I një hiperideal i H . Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. I është hiperideal i rregullt i H ;
2. Për çdo $a \in H$, $I \cup f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, \langle a \rangle_l) = I \cup (\langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l)$;
3. Për çdo $a \in H \setminus I$, ose $a \in f(a, a_1, a, a_2, a)$ ose $a \in f(a, b_1, b_2, a, b_3, b_4, a)$, për $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \in H$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se I është një hiperideal i rregullt. Atëherë për çdo $a \in H$,

$$I \cup (\langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l) \subseteq \langle I \cup \langle a \rangle_r \rangle_r, \langle I \cup \langle a \rangle_m \rangle_m, \langle I \cup \langle a \rangle_l \rangle_l.$$

Për më tepër, meqenëse secila nga tre bashkësitë në anën e djathtë përmban I , kemi:

$$\begin{aligned} & I \cup (\langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l) \subseteq \\ & \subseteq \langle I \cup \langle a \rangle_r \rangle_r \cap \langle I \cup \langle a \rangle_m \rangle_m \cap \langle I \cup \langle a \rangle_l \rangle_l = \\ & = I \cup f(I \cup \langle a \rangle_r, I \cup \langle a \rangle_m, I \cup \langle a \rangle_l) = I \cup f(I, I \cup \langle a \rangle_m, I \cup \langle a \rangle_l) \cup \\ & \cup f(\langle a \rangle_r, I, I \cup \langle a \rangle_l) \cup f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, I) \cup f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, \langle a \rangle_l) = \\ & = I \cup f(\langle a \rangle_r, \langle a \rangle_m, \langle a \rangle_l) \subseteq I \cup (\langle a \rangle_r \cap \langle a \rangle_m \cap \langle a \rangle_l). \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (3). Vërejmë se

$$\begin{aligned} & \langle I \cup \langle a \rangle_r \rangle_r = \langle I \cup \langle a \rangle_r \rangle_r \cap H \cap H = I \cup f(\langle I \cup \langle a \rangle_r \rangle_r, H, H) = \\ & = I \cup f(I, H, H) \cup f(\langle a \rangle_r, H, H) \cup f(I, H, H, H, H) \cup \\ & \cup f(\langle a \rangle_r, H, H, H, H) = \\ & = I \cup f(I, H, H) \cup f(a, H, H, H) \cup f(a, H, H, H, H) \cup \\ & \cup f(I, H, H, H, H) \cup \\ & \cup f(a, H, H, H, H) \cup f(a, H, H, H, H, H) = \\ & = I \cup f(I, H, H) \cup f(a, H, H) \cup f(a, H, H, H) = \\ & = \langle I \cup f(a, H, H) \rangle_r = I \cup f(a, H, H). \end{aligned}$$

Në të njëjtën mënyrë, marrim

$$\langle I \cup \langle a \rangle_m \rangle_m = \langle I \cup f(H, a, H) \rangle_m = I \cup f(H, a, H) \cup f(H, H, a, H, H),$$

$$\langle I \cup \langle a \rangle_l \rangle_l = \langle I \cup f(H, H, a) \rangle_l = I \cup f(H, H, a).$$

Atëherë

$$\begin{aligned} & \langle I \cup f(a, H, H) \rangle_r \cap \langle I \cup f(H, a, H) \rangle_m \cap \langle I \cup f(H, H, a) \rangle_l = \\ & = I \cup f(\langle I \cup f(a, H, H) \rangle_m, \langle I \cup f(H, a, H) \rangle_m, \langle I \cup f(H, H, a) \rangle_l) = \\ & = I \cup f(a, H, H, H, a, H, H, H, a) \cup f(a, H, H, H, H, a, H, H, H, a) = \\ & = I \cup f(a, H, a, H, a) \cup f(a, H, H, a, H, H, a). \end{aligned}$$

Përfundimi është i qartë.

(3) $\Rightarrow$ (1). Le të jenë R një hiperideal i djathtë i çfarëdoshëm, M një hiperideal lateral i çfarëdoshëm, L një hiperideal i majtë i çfarëdoshëm i H , të tillë që përmbahen të gjithë në I . Supozojmë se I plotëson kushtin (3). Është e qartë se, $I \cup f(R, M, L) \subseteq R \cap M \cap L$.

Le të jetë $a \in R \cap M \cap L$. Nga (3), kemi që $a \in I$ ose $a \in f(f(a, a_1, a, a_2, a),$ ose $a \in f(a, b_1, b_2, a, b_3, b_4, a)$ për $a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4 \in H$. Vërejmë gjithashtu, se në rastin e dytë dhe të tretë kemi që:

$$\begin{aligned} & a \in f(a, a_1, a, a_1, a, a_2, a, a_2, a) = f(f(a, a_1, a_2), f(a_1, a, a_2), f(a, a_2, a)), \\ & a \in f(a, b_1, b_2, a, b_1, b_2, a, b_3, b_4, a, b_3, b_4, a) = \\ & = f(f(a, b_1, b_2), f(a, b_1, b_2), a, f(b_3, b_4, a), f(b_3, b_4, a)), \end{aligned}$$

kështu që në dy rastet e fundit kemi $a \in f(f(a, x_2, x_3), f(y_1, a, y_3), f(z_1, z_2, a))$ për $x_2, x_3, y_1, y_2, z_1, z_2 \in H$. Pra, në çdo rast kemi që $a \in I \cup f(R, M, L)$ dhe si përfundim $I \cup f(R, M, L) = R \cap M \cap L$. ■

Teoremë 5.1.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar dhe I një hiperideal i rregullt i H . Atëherë, për çdo hiperideal të djathtë R , hiperideal lateral M , dhe hiperideal të majtë L të H , në qoftë se $f(R, M, L) \subseteq I$, atëherë $R \cap M \cap L \subseteq I$.*

Vërtetim. Supozojmë se $f(R, M, L) \subseteq I$ dhe I është një hiperideal i rregullt. Atëherë

$$\begin{aligned} & R \cap M \cap L \subseteq \langle I \cup R \rangle_r \cap \langle I \cup M \rangle_m \cap \langle I \cup L \rangle_l = \\ & I \cup f(\langle I \cup R \rangle_r, \langle I \cup M \rangle_m, \langle I \cup L \rangle_l) = I \cup f(I, \langle I \cup M \rangle_m, \langle I \cup L \rangle_l) = \\ & = f(R, I, \langle I \cup L \rangle_l) \cup f(R, M, I) \cup f(R, M, L) \subseteq I. \end{aligned}$$

Rrjedhim 5.1.11 *Një hiperideal i rregullt dhe fortësisht irreducible është gjithmonë prim.*

Rrjedhim 5.1.12 *Cdo hiperideal i rregullt është prim.*

Teoremë 5.1.13 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe Q një nënbashkësi joboshe e H . Atëherë, Q është një kuazi-hiperideal vetëm atëherë kur*

$$f(Q, H, Q, H, Q) \cap f(Q, H, H, Q, H, H, Q) \subseteq Q.$$

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe Q një kuazi-hiperideal i H . Atëherë

$$f(Q, H, Q, H, Q) \cap f(Q, H, H, Q, H, H, Q) \subseteq f(H, H, Q), \quad f(Q, H, H) \text{ dhe} \\ f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)$$

dhe që këtej

$$f(Q, H, Q, H, Q) \cap f(Q, H, H, Q, H, H, Q) \subseteq \\ \subseteq f(H, H, Q) \cap (f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap f(Q, H, H) \subseteq Q.$$

Anasjellas, supozojmë se H është i rregullt dhe

$$f(Q, H, Q, H, Q) \cap f(Q, H, H, Q, H, H, Q) \subseteq Q.$$

Atëherë

$$f(Q, H, H) \cap (f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H)) \cap f(H, H, Q) = \\ = f(f(Q, H, H), f(H, Q, H) \cup f(H, H, Q, H, H), f(H, H, Q)) = \\ = f(f(Q, H, H), f(H, Q, H), f(H, H, Q)) \cup f(f(Q, H, H), f(H, H, Q, H, H), \\ f(H, H, Q)) \subseteq f(Q, H, Q, H, Q) \cup f(Q, H, H, Q, H, H, Q) \subseteq Q. \quad \blacksquare$$

Teoremë 5.1.14 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar i rregullt dhe Q_1, Q_2, Q_3 tre kuazi-hiperideale të H . Atëherë $f(Q_1, Q_2, Q_3)$ është një kuazi-hiperideal.*

Vërtetim.

$$f(f(Q_1, Q_2, Q_3), H, f(Q_1, Q_2, Q_3), H, f(Q_1, Q_2, Q_3)) \cup f(f(Q_1, Q_2, Q_3), H, H, \\ f(Q_1, Q_2, Q_3), H, H, f(Q_1, Q_2, Q_3)) = \\ = f(f(Q_1, f(Q_2, Q_3, H), Q_1, f(Q_2, Q_3, H), Q_1), Q_2, Q_3) \cup \\ \cup f(f(Q_1, f(Q_2, Q_3, H), H, Q_1, f(Q_2, Q_3, H), H, Q_1), Q_2, Q_3) \subseteq f(Q_1, Q_2, Q_3) \quad \blacksquare$$

Rrjedhim 5.1.15 *Familja e gjithë kuazi-hiperidealeve të një gjysmëhipergrupi ternar të rregullt është gjysmëhipergrup ternar.*

§5.2 Gjysmëhipergrupet ternare plotësisht të rregullta dhe intra të rregullta

Në këtë seksion studiojmë disa veti të gjysmëhipergrupeve ternare plotësisht të rregullta dhe intra të rregullta dhe i karakterizojmë ato nëpërmjet llojeve të ndryshme të hiperidealeve të gjysmëhipergrupeve ternare.

Përkufizim 5.2.1 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një element $a \in H$ quhet i rregullt i majtë (përkatësisht i djathtë) (left (resp. right) regular) në qoftë se ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(x, a, a)$ (përkatësisht $a \in f(a, a, x)$).*

Në qoftë se të gjitha elementet e një gjysmëhipergrupi ternar H janë të rregullta të majta (përkatësisht të djathta), atëherë H quhet i rregullt i majtë (përkatësisht i djathtë) (left (resp. right) regular).

Përkufizim 5.2.2 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar. Një element $a \in H$ quhet plotësisht i rregullt (completely regular) në qoftë se është i rregullt i majtë, i rregullt i djathtë dhe i rregullt.*

Në qoftë se të gjitha elementët e H janë plotësisht të rregullta, atëherë H quhet plotësisht i rregullt. Gjysmëhipergrupi ternar i Shembullit 3.1.15 është një gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt.

Përkufizim 5.2.3 *Një hiperideal i mirëfilltë A i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet hiperideal plotësisht gjysmëprim (completely semiprime) i H në qoftë se nga $f(x, x, x) \subseteq A$ rrjedh që $x \in A$ për çdo element $x \in A$.*

Teoremë 5.2.4 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) është i rregullt i majtë (përkatësisht i djathtë) vetëm atëherë kur çdo hiperideal i majtë (përkatësisht i djathtë) i H është plotësisht gjysmëprim.*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar i rregullt i majtë dhe L një hiperideal i majtë i çfarëdoshëm i H . Supozojmë se $f(a, a, a) \subseteq L$ për $a \in H$. Meqenëse H është i rregullt i majtë, atëherë ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(x, a, a) \subseteq f(x, f(x, a, a), a) \subseteq f(x, x, f(a, a, a)) \subseteq f(H, H, L) \subseteq L$. Si rrjedhim, L është plotësisht gjysmëprim.

Anasjellas, supozojmë se çdo hiperideal i majtë i H është plotësisht gjysmëprim. Për çdo $a \in H$, $f(H, a, a)$ është një hiperideal i majtë i H . Atëherë, nga hipoteza, $f(H, a, a)$ është një hiperideal plotësisht gjysmëprim i H . Dimë që $f(a, a, a) \subseteq f(H, a, a)$. Meqenëse $f(H, a, a)$ është plotësisht gjysmëprim, rrjedh që $a \in f(H, a, a)$. Pra, ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(x, a, a)$. Rrjedhimisht, a është i rregullt i majtë. Meqenëse a është një element i çfarëdoshëm, rrjedh që H është i rregullt i majtë. ■

Në mënyrë të ngjashme, vërtetohet teorema për rregullsinë e djathtë.

Pohim 5.2.5 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) është plotësisht i rregullt vetëm atëherë kur $a \in f(a, a, H, a, a)$ për çdo $a \in H$.*

Vërtetim. Supozojmë se H është një gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt. Le të jetë $a \in H$. Atëherë, nga përkufizimi, kemi që $a \in f(a, a, H)$ dhe $a \in f(H, a, a)$, domethënë $a \in f(a, a, H) \cap f(H, a, a)$. Meqenëse H është plotësisht i rregullt, atëherë ekziston një element $x \in H$ i tillë që $a \in f(a, x, a)$. Pra, kemi që

$$a \in f(a, x, a) \subseteq f(f(a, a, H), x, f(H, a, a)) \subseteq f(a, a, f(H, x, H), a, a) \subseteq f(a, a, H, a, a).$$

Anasjellas, supozojmë se për çdo $a \in H$, $a \in f(a, a, H, a, a)$. Atëherë

1. $a \in f(a, a, H, a, a) \subseteq f(a, f(a, H, a), a) \subseteq f(a, H, a)$, domethënë H është i rregullt.
2. $a \in f(a, a, H, a, a) \subseteq f(f(a, a, H), a, a) \subseteq f(H, a, a)$, domethënë H është i rregullt i majtë.
3. $a \in f(a, a, H, a, a) \subseteq f(a, a, f(H, a, a)) \subseteq f(a, a, H)$, domethënë H është i rregullt i djathtë.

Si rrjedhim, H është plotësisht i rregullt. ■

Teoremë 5.2.6 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) është plotësisht i rregullt vetëm atëherë kur çdo bi-hiperideal i H është plotësisht gjysmëprim.*

Vërtetim. Supozojmë se H është gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt. Le të jetë B një bi-hiperideal i çfarëdoshëm i H dhe $f(b, b, b) \subseteq B$ për $b \in B$. Meqenëse H është plotësisht i rregullt, nga Pohimi 5.2.5 rrjedh që $b \in f(b, b, H, b, b)$. Kjo sjell që ekziston $x \in H$ i tillë që

$$\begin{aligned} b &\in f(b, b, x, b, b) \subseteq f(b, f(b, b, x, b, b), x, f(b, b, x, b, b), b) = \\ &= f(b, b, b, f(x, b, b, x), b, f(b, b, x, b, b), x, b, b, b) = \\ &= f(b, b, b, f(x, b, b, x), b, b, b, f(x, b, b, x), b, b, b) \subseteq f(B, H, B, H, B) \subseteq B. \end{aligned}$$

Kjo tregon se B është plotësisht gjysmëprim.

Anasjellas, supozojmë se çdo bi-hiperideal i H është plotësisht gjysmëprim. Meqenëse çdo hiperideal i majtë dhe i djathtë i një gjysmëhipergrupi ternar H është një bi-hiperideal i H , atëherë çdo hiperideal i majtë dhe i djathtë i H është plotësisht gjysmëprim. Si rrjedhim, nga Teorema 5.2.4 kemi që H është njëkohësisht i rregullt i majtë dhe i djathtë.

Le të jetë $a \in H$. Shqyrtojmë $f(a, H, a)$. Le të jetë $x, y, z \in f(a, H, a)$ dhe $h_1, h_2 \in H$. Për $h_0, h'_0, h''_0 \in H$ kemi që:

$$\begin{aligned} f(x, h_1, y, h_2, z) &\subseteq f(f(a, h_0, a), h_1, f(a, h'_0, a), h_2, f(a, h''_0, a)) \subseteq \\ &\subseteq f(a, f(h_0, a, h_1, a, h'_0, a, h_2, a, h''_0), a) \subseteq f(a, H, a). \end{aligned}$$

Kjo sjell që $f(f(a, H, a), H, f(a, H, a), H, f(a, H, a)) \subseteq f(a, H, a)$, domethënë $f(a, H, a)$ është një bi-hiperideal i H . Meqenëse $f(a, a, a) \subseteq f(a, H, a)$ dhe $f(a, H, a)$ është plotësisht gjysmëprim, rrjedh që $a \in f(a, H, a)$ për çdo $a \in H$. Pra, H është i rregullt. Kjo përfundon vërtetimin. ■

Teoremë 5.2.7 *Në qoftë se (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt, atëherë çdo bi-hiperideal i H është idempotent.*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt dhe B një bi-hiperideal i H . Meqenëse H është gjysmëhipergrup ternar plotësisht i rregullt, do të jetë gjithashtu dhe një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Le të jetë $b \in B$. Atëherë, ekziston $x \in H$ i tillë që $b \in f(b, x, b)$. Kjo sjell që $b \in f(B, H, B)$ dhe që këtej $B \subseteq f(B, H, B)$. Gjithashtu, $f(B, H, B) \subseteq f(B, H, B, H, B) \subseteq B$. Pra, gjetëm që $B = f(B, H, B)$. Përsëri, nga Pohimi 3.24.5, kemi që $b \in f(b, b, H, b, b) \subseteq f(B, B, H, B, B)$. Kjo sjell që $B \subseteq f(B, B, H, B, B) = f(B, f(B, H, B), B) = f(B, B, B) \subseteq B$. Rrjedhimisht, $f(B, B, B) = B$. ■

Përkufizim 5.2.8 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) quhet intra i rregullt (intra-regular) në qoftë se për çdo element $a \in H$, ekzistojnë elementet $x, y \in H$ të tilla që $a \in f(x, a, a, a, y)$.*

Teoremë 5.2.9 *Në qoftë se (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt, atëherë për çdo hiperideal të majtë L , hiperideal lateral M dhe hiperideal të djathtë R të H , $L \cap M \cap R \subseteq f(L, M, R)$.*

Vërtetim. Supozojmë se H është një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt. Le të jenë L , M dhe R përkatësisht një hiperideal i majtë, një hiperideal lateral dhe një hiperideal i djathtë i H . Tani, për $a \in L \cap M \cap R$, kemi që $a \in f(x, a, a, a, y)$ për $x, y \in H$. Kjo sjell që $a \in f(x, a, a, a, y) \subseteq f(f(x, x, a, a, a), f(y, x, a, a, a, y, x), f(a, a, a, y, y)) \subseteq f(L, M, R)$. Si rrjedhim, $L \cap M \cap R \subseteq f(L, M, R)$. ■

Pohim 5.2.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt. Atëherë, një nënbashkësi joboshe I e H është hiperideal i H vetëm atëherë kur I është hiperideal lateral i H .*

Vërtetim. Është e qartë se, në qoftë se I është hiperideal i H , atëherë I është hiperideal lateral i H .

Anasjellas, le të jetë I një hiperideal lateral i një gjysmëhipergrupi ternar intra të rregullt. Le të jetë $a \in I$ dhe $s, t \in H$. Atëherë $a \in H$, kështu që ekzistojnë elementet $x, y \in H$ të tilla që $a \in f(x, a, a, a, y)$. Kemi $f(s, t, a) \subseteq f(s, t, f(x, a, a, a, y)) \subseteq f(H, I, H) \subseteq I$ dhe $f(a, s, t) \subseteq f(f(x, a, a, a, y), s, t) \subseteq f(H, I, H) \subseteq I$. Kjo sjell që I është njëkohësisht hiperideal i majtë dhe hiperideal i djathtë i H . Si rrjedhim, I është hiperideal i H . ■

Lemë 5.2.11 *Cdo hiperideal lateral i një gjysmëhipergrupi ternar intra të rregullt (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt.*

Vërtetim. Le të jetë L një hiperideal lateral i një gjysmëhipergrupi ternar intra të rregullt H . Atëherë, për çdo $a \in L$, ekzistojnë $x, y \in H$ të tilla që $a \in f(x, a, a, a, y)$. Tani,

$$\begin{aligned} a \in f(x, a, a, a, y) &\subseteq f(x, f(x, a, a, a, y), f(x, a, a, a, y), f(x, a, a, a, y), y) \\ &\subseteq f(f(x, x, a, a, a, y, y), f(a, a, a), f(y, x, a, a, a, y, y)) \subseteq f(L, f(a, a, a), L) \end{aligned}$$

Që këtë rrjedh se ekzistojnë $u, v \in L$ të tilla që $a \in f(u, f(a, a, a), v)$. Rrjedhimisht, L është gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt. ■

Nga Pohimi 3.24.10 marrim rrjedhimin që vijon:

Rrjedhim 5.2.12 *Cdo hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar intra të rregullt H është gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt.*

Teoremë 5.2.13 *Le të jetë I një hiperideal i një gjysmëhipergrupi ternar intra të rregullt H dhe J një hiperideal i I . Atëherë J është hiperideal i gjithë gjysmëhipergrupit ternar H .*

Vërtetim. Mjafton të tregojmë se J është hiperideal lateral i H . Le të jetë $a \in J \subseteq I$ dhe $s, t \in H$. Atëherë $f(s, a, t) \subseteq I$. Duhet të tregojmë tani se $f(s, a, t) \subseteq J$. Nga Rrjedhimi 5.2.12, kemi që I është një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt. Pra, ekzistojnë $u, v \in I$ të tilla që $f(s, a, t) \subseteq f(u, f(s, a, t), f(s, a, t), f(s, a, t), v) \subseteq f(f(u, s, a, t, s), a, f(t, s, a, t, v)) \subseteq f(I, J, I) \subseteq J$

Si rrjedhim, J është hiperideal lateral i H . ■

Teoremë 5.2.14 *Një gjysmëhipergrup ternar (H, f) është intra i rregullt vetëm atëherë kur çdo hiperideal i H është plotësisht gjysmëprim.*

Vërtetim. Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar intra i rregullt dhe I një hiperideal i H . Le të jetë $f(a, a, a) \subseteq I$ për $a \in H$. Meqenëse H është intra i rregullt, ekzistojnë $x, y \in H$ të tilla që $a \in f(x, f(a, a, a), y) \subseteq I$. Atëherë, I është plotësisht gjysmëprim.

Anasjellas, supozojmë se çdo hiperideal i H është plotësisht gjysmëprim. Le të jetë $a \in H$. Atëherë $f(a, a, a) \subseteq \langle f(a, a, a) \rangle$. Kjo sjell që $a \in \langle f(a, a, a) \rangle$, meqenëse $\langle f(a, a, a) \rangle$ është plotësisht gjysmëprim. Tani,

$$\begin{aligned} \langle f(a, a, a) \rangle &= f(H, H, f(a, a, a)) \cup f(f(a, a, a), H, H) \cup f(H, f(a, a, a), H) \\ &\quad \cup f(H, H, f(a, a, a), H, H) \cup f(a, a, a) \end{aligned}$$

Pra, kemi rastet e mëposhtme:

Në qoftë se $a \in f(H, H, f(a, a, a))$, atëherë $f(a, a, a) \subseteq f(H, H, f(a, a, a), a, a)$. Që këtëj $a \in f(H, H, H, H, f(a, a, a), a, a) \subseteq f(H, H, H, a, a, a, H) \subseteq f(H, f(a, a, a), H)$.

Në qoftë se $a \in f(f(a, a, a), H, H)$, atëherë $f(a, a, a) \subseteq f(a, a, f(a, a, a), H, H)$. Që këtëj $a \in f(a, a, f(a, a, a), H, H, H, H) \subseteq f(H, a, a, a, H, H, H) \subseteq f(H, f(a, a, a), H)$.

Në qoftë se $a \in f(H, f(a, a, a), H)$, vërtetimi përfundon këtu.

Në qoftë se $a \in f(H, H, f(a, a, a), H, H)$, atëherë $f(a, a, a) \subseteq f(a, H, H, f(a, a, a), H, H, a)$.

Që këtëj

$$\begin{aligned} a &\in f(H, H, a, H, H, f(a, a, a), H, H, a, H, H) \subseteq \\ &\subseteq f(H, H, H, f(a, a, a), H, H, H) \subseteq f(H, f(a, a, a), H). \end{aligned}$$

Në qoftë se $a \in f(a, a, a)$, atëherë

$$a \in f(a, a, a) \subseteq f(f(a, a, a), f(a, a, a), f(a, a, a)) \subseteq f(H, f(a, a, a), H).$$

Në këtë mënyrë, arrijmë në përfundimin se në çdo rast H është intra i rregullt. ■

§5.3 Përgjithësim i rregullsisë së hipersistemeve algjebrike

Në këtë seksion përgjithësojmë konceptin e rregullsisë në hipersistemet algjebrike duke dhënë një përgjithësim të unifikuar të karakterizimeve të Kovacs, Iseki dhe Lajos etj. Gjithashtu, përgjithësojmë konceptin e idealit duke futur konceptin e j -hiperidealit dhe të hiperidealit të një hipersistemi algjebrik. Rezulton që përshkrimi i rregullsisë nëpërmjet hiperidealeve është një çështje e brendshme e hiperveprimeve shoqërimtare në përgjithësi. Teorema kryesore përgjithëson në hipersistemet algjebrike disa rezultate që kanë vend në gjysmëgrupet dhe unazat e rregullta dhe shpreh një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm me anë të hiperidealeve kryesore. Për më tepër, janë përfutur dy teorema të tjera: njëra ka të bëjë me një kusht të nevojshëm dhe të mjaftueshëm që një hipersistem algjebrik ndërrimtar, shoqërimtar të jetë i rregullt; tjetra ka të bëjë me elementet nilpotent në një hipersistem algjebrik.

Fillimisht japim disa përkufizime bazë që lidhen me disa koncepte të njohura në lidhje me atë që ne kuptojmë me një hipersistem algjebrik dhe hiperstrukturë m -are.

Në përgjithësi, një pasqyrim $f : H \times H \times \dots \times H \rightarrow \mathcal{P}^*(H)$, ku H shfaqet m herë, quhet *hiperveprim (algjebrik) m -ar* (*m -ary (algebraic) hyperoperation*), dhe m quhet *ariteti (arity)* i këtij hiperveprimi. Një sistem algjebrik (H, f) , ku f është një hiperveprim m -ar i përcaktuar në H , quhet *hipergrupoid m -ar* (*m -ary hypergroupoid*) ose *hipersistem m -ar* (*m -ary hypersystem*). Meqenëse mundemi të identifikojmë bashkësinë $\{x\}$ me elementin x , çdo grupoid (binar) m -ar është një hipergrupoid (binar) m -ar.

Le të jetë f një hiperveprim m -ar në H dhe $A_1, A_2, \dots, A_m$ nënbashkësi joboshe të H . Përcaktojmë $f(A_1, A_2, \dots, A_m) = \{f(x_1, x_2, \dots, x_m) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, m\}$.

Do të përdorim simbolet e shkurtuara si më poshtë: vargu $x_i, x_{i+1}, \dots, x_j$ do paraqitet me simbolin x_i^j ; për $j < i$, x_i^j simboli bosh. Me këtë marrëveshje, $f(x_1, \dots, x_i, y_{i+1}, \dots, y_j, z_{j+1}, \dots, z_m)$

do të shkruhet si $f(x_1^i, y_{i+1}^j, z_{j+1}^m)$. Në rastin kur $y_{i+1} = \dots = y_j = y$, shprehja e fundit do të shkruhet në trajtën $f(x_1^i, y^{(j-i)}, z_{j+1}^m)$.

Në mënyrë të ngjashme, për nënbashkësitë $A_1, A_2, \dots, A_m$ të H përcaktojmë

$$f(A_1^m) = f(A_1, A_2, \dots, A_m) = \{f(x_1^m) \mid x_i \in A_i, i = 1, \dots, m\}.$$

Një hiperveprim m -ar f quhet (i, j) -shoqërimtar ((i, j) -associative) në qoftë se

$$f(x_1^{i-1}, f(x_i^{m+i-1}), x_{m+i}^{2m-1}) = f(x_1^{j-1}, f(x_j^{m+j-1}), x_{m+j}^{2m-1}),$$

ka vend për i, j të fiksuara të tilla që $1 \leq i < j \leq m$ dhe për çdo $x_1, x_2, \dots, x_{2m-1} \in H$.

Theksojmë se të qenët (i, k) -shoqërimtar rrjedh nga të qenët (i, j) - dhe (j, k) -shoqërimtar.

Në qoftë se kushti i mësipërm plotësohet për çdo $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, atëherë themi se f është *shoqërimtar (associative)*.

Hiperveprimi m -ar f quhet ndërrimtar (*commutative*) në qoftë se për çdo $x_1, \dots, x_m \in H$ dhe për çdo $\sigma \in \mathbb{S}_m$, $f(x_1, x_2, \dots, x_m) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(m)})$.

Me një *hipersistem algjebrik (algebraic hypersystem)* $(H, f_1, f_2, \dots, f_m)$ ose shkurt H , kuptojmë një bashkësi H të mbyllur në lidhje me një bashkësi hiperveprimesh m_i -are f_i dhe që shpesh plotësojnë një bashkësi të fiksuar ligjesh, për shembull, ligjin e shoqërimit.

Le të jetë H një hipersistem algjebrik. H quhet i rregullt (*regular*) në lidhje me hiperveprimin f vetëm atëherë kur për çdo $a \in H$, ekzistojnë $x_2, x_3, \dots, x_m; y_1, y_3, \dots, y_m; \dots; z_1, z_2, \dots, z_{m-1} \in H$ të tilla që $a \in f(f(a, x_2, \dots, x_m), f(y_1, a, y_3, \dots, y_m), \dots, f(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, a))$.

Një nënbashkësi S e H formon një nënhipersistem (*subhypersystem*) në qoftë se S është e mbyllur në lidhje me të njëjtat hiperveprime dhe plotëson të njëjtat ligje në H .

Le të jetë H një hipersistem algjebrik. Një j -hiperideal $j=1,2,\dots,m$ në lidhje me hiperveprimin m -ar përkufizohet si një nënhipersistem I_j i tillë që për çdo $x_1, x_2, \dots, x_m \in H$, në qoftë se $x_j \in I_j$, atëherë $f(x_1, x_2, \dots, x_m) \subseteq I_j$. j -hiperideali në lidhje me f i përfshirë nga një element $a \in H$ (në përgjithësi quhet j -hiperideal kryesor) shënohet me

$$(a)_j = f(H, H, \dots, \overset{j}{a}, \dots, H) \cup \{a\}.$$

Një nënhipersistem I i cili është j -hiperideal për çdo $j=1, \dots, m$ quhet thjesht hiperideal (hyperideal).

Teoremë 5.3.1 *Le të jetë H një hipersistem algjebrik i cili është shoqërimtar në lidhje me një hiperveprim m -ar f . Atëherë kushtet e mëposhtme janë të njëvlershme:*

1. H është i rregullt në lidhje me hiperveprimin f .

2. $f(I_1, I_2, \dots, I_m) = \bigcap_{j=1}^m I_j$ për çdo bashkësi j -hiperidealesh I_j në lidhje me hiperveprimin

3. $f((a_1)_1, (a_2)_2, \dots, (a_m)_m) = \bigcap_{j=1}^m (a_j)_j$ për çdo bashkësi elementesh $a_1, a_2, \dots, a_m \in H$.

4. $f((a)_1, (a)_2, \dots, (a)_m) = \bigcap_{j=1}^m (a)_j$ për çdo element $a \in H$.

Vërtetim. " $(1) \Rightarrow (2)$ ". Le të jetë H i rregullt në lidhje me hiperveprimin m -ar f dhe le të jetë $a \in \bigcap_{j=1}^m I_j$ për çdo bashkësi prej m j -hiperidealesh I_j në lidhje me hiperveprimin. Atëherë, nga rregullsia, ekzistojnë $x_2, \dots, x_m; y_1, y_3, \dots, y_m, \dots; z_1, \dots, z_{m-1} \in H$ të tillë që

$$a \in f(f(a, x_2, \dots, x_m), f(y_1, a, \dots, y_m), \dots, f(z_1, \dots, z_{m-1}, a)).$$

Duke qenë I_j një j -hiperideal për çdo $j=1, \dots, m$, kemi që $f(a, x_2, \dots, x_m) \subseteq I_1, f(y_1, a, \dots, y_m) \subseteq I_2, \dots$, dhe $f(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, a) \subseteq I_m$ dhe që këtëj

$$\bigcap_{j=1}^m I_j \subseteq f(I_1, I_2, \dots, I_m).$$

Anasjellas, në qoftë se $a \in f(I_1, I_2, \dots, I_m)$, atëherë $a \in f(i_1, i_2, \dots, i_m)$ për $i_j \in I_j, j=1, \dots, m$ dhe si rrjedhim, $a \in I_j$ për çdo $j=1, \dots, m$. Në këtë mënyrë u vërtetua (2).

Eshtë e qartë se " $(2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4)$ ".

"(4) $\Rightarrow$ (1)". Le të jetë $f((a)_1, (a)_2, \dots, (a)_n) = \bigcap_{j=1}^m (a)_j$ për çdo $a \in H$. Meqenëse për çdo

$a \in H, a \in \bigcap_{j=1}^m (a)_j$, atëherë $a \in f(b_1, b_2, \dots, b_m)$, ku ose $b_k = a$ ose $b_k \in f(c_1, c_2, \dots, c_m)$ me $c_k = a$. Kështu, për çdo rast kemi:

$$a \in f(b_1, b_2, \dots, b_m) = f(f(a, x_2, \dots, x_m), f(y_1, a, \dots, y_m), \dots, f(z_1, z_2, \dots, z_{m-1}, a))$$

për $x_2, \dots, x_m; y_1, y_3, \dots, y_m; \dots; z_1, \dots, z_{m-1} \in H$. Kjo tregon që H është i rregullt në lidhje me hiperveprimin. ■

Teoremë 5.3.2 *Një hipersistem algjebrik H i cili është shoqërimtar dhe ndërrimtar në lidhje me një hiperveprim m -ar f , është i rregullt në lidhje me të njëjtin hiperveprim në qoftë se çdo hiperideal I i H është idempotent, domethënë $f(I, I, \dots, I) = I$.*

Vërtetim. Në qoftë se H është ndërrimtar në lidhje me f , atëherë $f(a, H, \dots, H) = f(H, a, \dots, H) = \dots = f(H, H, \dots, a)$ dhe që këtë, çdo j -hiperideal është gjithashtu një k -hiperideal për çdo $j, k = 1, \dots, m$. Kështu, nga rregullsia

$$f(I, I, \dots, I) = I \cap I \cap I \cap \dots \cap I = I \text{ për çdo hiperideal } I \text{ në } H.$$

Anasjellas, supozojmë se çdo hiperideal në H është idempotent. Në qoftë se $I_1, I_2, \dots, I_m$ janë hiperideale të H , atëherë $\bigcap_{j=1}^m I_j$ është gjithashtu një hiperideal dhe si rrjedhim,

$$\bigcap_{j=1}^m I_j = f\left(\bigcap_{j=1}^m I_j, \bigcap_{j=1}^m I_j, \dots, \bigcap_{j=1}^m I_j\right) \subseteq f(I_1, I_2, \dots, I_m),$$

duke qenë se I_j përmban prerjen për çdo j . Për më tepër, meqenëse çdo $I_j, j = 1, \dots, m$ është gjithashtu një j -hiperideal, atëherë $f(I_1, I_2, \dots, I_m) \subseteq \bigcap_{j=1}^m I_j$. Që këtë rrjedh përfundimi i dëshiruar. ■

Nga sa kemi përmendur në fillim të këtij seksioni, vërejmë se në rastin kur hiperveprimi m -ar f është një hiperveprim m -ar shoqërimtar në H , mund të paraqesim shkurt

$$\begin{aligned} f(a, a, \dots, a) &= f(a^m), \\ f(f(a^m), a, \dots, a) &= f(a^{2m-1}), \\ f(f(a^m), f(a^m), \dots, a) &= f(a^{3m-2}), \\ &\dots, \end{aligned}$$

$$f(f(a^m), f(a^m), \dots, f(a^m)) = f(a^{m^2}) = f(a^{(m+1)m-m}).$$

Kështu, eksponentet e lejueshme të kompozimeve të rangut më të lartë se 2 janë secili të formës $km - k + 1$ për ndonjë numër të plotë. Duke proceduar në mënyrë induktive, supozojmë se $k_1 m - k_1 + 1, k_2 m - k_2 + 1, \dots, k_m m - k_m + 1$ janë eksponente të lejueshme të njohura që më parë, atëherë eksponenti

$$\sum_{i=1}^m (k_i m - k_i + 1) = (\sum_{i=1}^m k_i - 1)m - \sum_{i=1}^m k_i$$

i $f(f(a^{k_1 m - k_1 + 1}), f(a^{k_2 m - k_2 + 1}), \dots, f(a^{k_m m - k_m + 1}))$ është gjithashtu dukshëm i së njëjtës formë. Që këtë, çdo eksponent i lejueshëm i një hiperveprimi m -ar është i formës $km - k + 1$.

Një element $a \in H$ i tillë që

$$f(a, x_1, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, a, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, \dots, x_{m-1}, a) = \{a\},$$

për çdo $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in H$, quhet *element zero* (*zero element*). Elementi zero shënohet me 0

Element *nilpotent* (*nilpotent*) $a \in H$ quhet një element i tillë që $f(a^{km-k+1}) = \{0\}$ për ndonjë numër të plotë k më të madh se 0 .

Teoremë 5.3.3 *Një hipersistem algjebrik H i cili është ndërrimtar, shoqërimtar, i rregullt dhe ka një element 0 në lidhje me një hiperveprim m -ar f , nuk përmban element tjetër nilpotent përveç 0 .*

Vërtetim. Për çdo $0 \neq a \in H$, le të shënojmë me $[a]$ nënhipersistemin e H të përfshuar nga a , i cili mund të përcaktohet në mënyrë induktive si më poshtë:

$$1. a \in [a]$$

$$2. f(a^m) \subseteq [a]$$

$$3. \text{sa herë që } f(a^{n_1}), \dots, f(a^{n_m}) \subseteq [a], \text{ atëherë edhe } f(a^{n_1 + \dots + n_m}) \subseteq [a].$$

Për të vërtetuar teoremën mjafton të tregojmë që $0 \notin [a]$. E vërtetojmë me induksion.

(1) Nga supozimi $a \neq 0$.

(2) $f(a^m) \neq \{0\}$, sepse në qoftë se $f(a^m) = \{0\}$, atëherë nga vetia e shoqërimit, e ndërrimit dhe rregullsia e hiperveprimi të dhënë, ekzistojnë $x_1, \dots, x_{m-1} \in H$ të tilla që

$$\begin{aligned} a \in f(a, x_1, a, \dots, f(\dots, x_{m-1}, a)) &= f(f(a, a, \dots, a), x_1, \dots, x_{m-1}) = f(f(a^m), x_1, \dots, x_{m-1}) \\ &= f(0, x_1, \dots, x_{m-1}) = \{0\} \end{aligned}$$

në kundërshtim me (1).

(3) Le të tregojmë tani se në qoftë se $f(a^{n_1}), \dots, f(a^{n_m})$ janë të gjithë elemente jozero të $[a]$ atëherë $f(f(a^{n_1}), f(a^{n_2}), \dots, f(a^{n_m})) = f(a^{n_1 + n_2 + \dots + n_m}) \neq \{0\}$. Supozojmë se $f(a^{n_1 + n_2 + \dots + n_m}) = \{0\}$. Atëherë nga shënimi i mësipërm, kemi që $n_i = k_i m - k_i + 1$ për $i = 1, 2, \dots, m$.

Meqenëse f është ndërrimtar, mund të supozojmë pa humbur përgjithësimin, se $n_1 = \max_i n_i$.

Atëherë

$$\begin{aligned} mn_1 &= \sum_{i=1}^m n_i + (mn_1 - \sum_{i=1}^m n_i) = \sum_{i=1}^m n_i + \sum_{i=1}^m (n_i - n_i) = \sum_{i=1}^m n_i + \sum_{i=1}^m [(k_1 - k_i)m \\ &\quad - (k_1 - k_i)] = \sum_{i=1}^m n_i + (\sum_{i=1}^m (k_1 - k_i)m - \sum_{i=1}^m (k_1 - k_i) - m + 2) + (m - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m n_i + \{[\sum_{i=1}^m (k_1 - k_i) - 1]m - [\sum_{i=1}^m (k_1 - k_i) - 2]\} + (m + 2) \\
&= \sum_{i=1}^m n_i + p + (m - 2),
\end{aligned}$$

ku p është një eksponent i lejueshëm. Kështu, nga vetia e shoqërimit, e ndërrimit dhe rregullsia e hiperveprimit f , ekzistojnë $x_1, x_2, \dots, x_{m-1} \in H$ të tilla që

$$\begin{aligned}
\{0\} &\neq f(a^{n_1}) = f(f(a^{n_1}), x_1, f(a^{n_1}), \dots, f(\dots, x_{m-1}, f(a^{n_1}))) = f(f(a^{mn_1}), x_1, \dots, x_{m-1}) \\
&= f(f(a^{n_1+n_2+\dots+n_m+p+(m-2)}), x_1, \dots, x_{m-1}) = f(f(a^{n_1+n_2+\dots+n_m}), \\
&\quad f(f(a^p), a, a, \dots, a, x_1), x_2, \dots, x_{m-1}) \\
&= f(0, f(f(a^p), a, a, \dots, a, x_1), x_2, \dots, x_{m-1}) = \{0\}
\end{aligned}$$

Kontradiksion! Në këtë mënyrë, çdo element i $[a]$ është jozero dhe marrim rezultatin e kërkuar. ■

DISA REZULTATE MBI ZBATIMIN E TEORISË SË BASHKËSIVE FUZZY DHE TEORISË SË BASHKËSIVE SOFT NË HIPERSTRUKTURA

§6.1 Disa përkufizime bazë të teorisë së bashkësive fuzzy

Konceptet "fuzzy" rrjedhin nga fenomenet e ndryshme fuzzy që shfaqen në natyrë dhe në jetën tonë. Për shembull, shiu është një fenomen i zakonshëm natyror, i cili nuk mund të përshkruhet me saktësi, pasi diku mund të bjerë shi me intensitete të ndryshme, nga një sasi e vogël në një rrebesh të rrëmbyeshëm. Por fenomeni mund të karakterizohet nga një funksion i cili lidh një numër real me një interval mbyllur $[0; 1]$ për çdo lloj të shiut: nëse nuk bie shi funksioni merr vlerën 0 dhe sa më i madh është intensiteti i shiut, aq më afër 1 është vlera e funksionit.

Koncepti i bashkësisë fuzzy është prezantuar nga L.A. Zadeh në vitin 1965 në artikullin e tij klasik [97], kur ai propozoi idenë e një logjike shumë-vlerëshe, e cila shtrin konceptin tradicional të një logjike bivalente, e cila bëhet një rast i veçantë i teorisë së re. Teoria e bashkësive fuzzy bazohet në parimin e quajtur nga L.A. Zadeh "parimi i papajtueshmërisë", domethënë "sa më afër studiohet një fenomen, aq më shumë i paqartë bëhet përkufizimi i tij".

Pas prezantimit të konceptit të bashkësive fuzzy nga Zadeh, një sërë kërkuesish i drejtuan kërkimet e tyre drejt përgjithësimeve të koncepteve të bashkësive fuzzy duke përfutur një sërë zbatimesh në inteligjencën artificiale, teorinë e kodimit, shkencën e kompjuterave, inxhinjeri, logjikë, shkencat e informacionit, kërkime operacionale, robotikë dhe shumë degë të tjera të matematikës së pastër dhe asaj të aplikuar. Teoria e bashkësive fuzzy ka rezultuar të jetë një mjet i dobishëm për të përshkruar situata në të cilat të dhënat janë jo të sakta ose jo të qarta. Të dhënat e pasigurta në këto aplikime mund të shkaktohen nga rastësia e të dhënave, informacione jo të plota, kufizim i instrumenteve matëse, përditësim i vonuar i të dhënave e kështu me radhë. Për shkak të rëndësisë së këtyre aplikimeve dhe rritjes së shpejtë të sasisë së të dhënave jo të sigurta të grumbulluara dhe akumuluar, kërkimi mbi teknika efektive dhe eficiente kushtuar modelimit të të dhënave jo të sigurta ka tërhequr dhe vazhdon të tërheqë interesin në vitet e fundit në një masë të madhe.

Ka një numër të madh kërkimesh dhe aplikimesh në literaturë që lidhet me mjete speciale si teoria e probabilitetit, teoria e bashkësive (intuitionistic) fuzzy, teoria e rough bashkësive, teoria e vague bashkësive dhe matematika e intervaleve. Megjithatë, të gjitha këto kanë avantazhet e tyre ashtu siç kanë dhe kufizimet e tyre kur merren me pasiguritë. Një problem kryesor që ka dalë nga këto teori është papajtueshmëria e tyre me mjetet e parametrizimit. Teoria e bashkësive soft [111] u propozua për here të pare nga një kërkues rus Molodtsov, në 1999 për të tejkaluar këto

vështirësi. Bashkësitë fuzzy operojnë me situata të tilla që atribuojnë një shkallë (gradë) përkatësie në bashkësi të çdo objekti të caktuar. Në jetën tone të përditshme, ne zakonisht dëshirojmë të kërkojmë mendime nga personat profesional me kualifikimet më të mira, për shembull, mjekët më të mirë mund të ofrojnë diagnostifikimet më të mira, pilotët më të mirë mund të ofrojnë sugjerimet më të mira për fluturimin me avionë etj. Prandaj është e dëshirueshme që të përfshijmë njohuritë e këtyre ekspertëve në disa sisteme automatike në mënyrë që ajo të bëhet e dobishme për njerëzit e tjerë për të marrë vendimet e duhura të cilat janë (pothuajse) po aq të mira sa vendimet e marra nga ana e ekspertëve të lartë. Me këtë qëllim në mendje, detyra jonë është të hartojmë një sistem që do të siguronte këshillën më të mirë nga ekspertët më të mirë të fushës. Megjithatë, një nga pengesat kryesore të këtij korporatizimi është se zakonisht ekspertët nuk janë në gjendje të përshkruajnë njohuritë e tyre duke përdorur terma ekzakte dhe preçize.

Për shembull, për të përshkruar madhësinë e një lloji të caktuar të një tumori, një mjek rrallë do të përdorte numra të saktë. Në vend të kësaj ai do të thoshte diçka të tillë si: madhësia është midis 1.4 cm dhe 1.6 cm. Gjithashtu, një ekspert zakonisht do të përdorte disa fjalë nga një gjuhë natyrore, p.sh., madhësia e tumorit është përafërsisht 1.5 cm, me një gabim prej rreth 0.1 cm. Kështu, në rrethana të tilla, mënyra për të formalizuar pohimet e bëra nga ana e ekspertit është një nga objektivat kryesore të logjikës fuzzy.

Koncepti i bashkësisë fuzzy përfton një kuadër natyral për të përgjithësuar disa prej koncepteve të strukturave klasike algjebrike dhe të teorisë abstrakte të bashkësisë. Gjysmëgrupet fuzzy u shqyrtuan për herë të parë nga Kuroki [98]. Lidhja e parë midis bashkësive fuzzy dhe strukturave algjebrike është shqyrtuar nga A. Rosenfeld në 1971 [99], kur ai përkufizoi konceptin e nëngrupit fuzzy të një grupi $(G, \cdot)$, me zbatime në matematikën ekonomike [108]. Në 1971, Rosenfeld [34] përkufizoi konceptin e grupit fuzzy. Qysh atëherë shumë artikuj janë publikuar në fushën e agjebres fuzzy. Kohët e fundit, teoria e bashkësive fuzzy është zhvilluar më së miri edhe në kontekstin e teorisë së hiperstrukturave algjebrike. Shumë kërkues janë marrë me shtrirjen e koncepteve të algjebres abstrakte në kuadrin e teorisë fuzzy. Studimi i hiperstrukturave fuzzy është një tematikë kërkimi me interes në teorinë e bashkësive fuzzy dhe është zbatuar në teorinë e hiperstrukturave algjebrike fuzzy. Hiperalgjebtrat fuzzy janë prezantuar kohë e fundit. Lidhjet midis bashkësive fuzzy dhe hiperstrukturave janë shqyrtuar nga Corsini, Davvaz, Zahedi, Leoreanu-Fotea, Ameri, Borzoei, Hasankhani, Tofan, Kehagias, si dhe shumë të tjerë ([101]). Në [24], Davvaz prezantoi konceptin e hiperidealeve fuzzy në një gjysmëhipergrup. Një sërë artikujsh janë shkruar rreth bashkësive fuzzy në një sërë hiperstrukturash algjebrike [11]. Marrëdhëniet midis bashkësive fuzzy dhe hiperstrukturave algjebrike janë shqyrtuar nga Corsini, Davvaz, Leoreanu, Zhan, Zahedi, Ameri, Cristea dhe shumë kërkues të tjerë. Në [102], Yaqoob, Aslam dhe Hila kanë studiuar nëngjysmëhipergrupet ternare fuzzy, rough dhe rough fuzzy (hiperidealet e majta, hiperidealet e djathta, hiperidealet lateral, hiperidealet, bi-hiperidealet) të gjysmëhipergrupeve ternare. Qysh nga prezantimi i konceptit të bashkësisë fuzzy, disa koncepte janë shtrirë dhe përgjithësuar, duke zëvendësuar bashkësitë klasike me bashkësitë fuzzy.

Një pasqyrim $f : X \rightarrow [0,1]$, ku X është një bashkësi joboshe çfarëdo quhet *bashkësi fuzzy* në X . Një nënbashkësi fuzzy $f : X \rightarrow [0,1]$ është joboshe në qoftë se f nuk është pasqyrimi konstant i cili merr vlerën 0. Për nënbashkësitë fuzzy f dhe g të X , me $f \leq g$ kuptojmë që për çdo $a \in X$, $f(a) \leq g(a)$. Funkzioni karakteristik f_X i X është një funksion i cili jep $f_X(a) = 1$ për çdo $a \in X$. Me $\min\{f, g, h\}$ dhe $\sup\{f, g, h\}$ do të kuptojmë nënbashkësitë e mëposhtme fuzzy të X : $\min\{f, g, h\} = \min\{f(a), g(a), h(a)\}$, $\sup\{f, g, h\} = \sup\{f(a), g(a), h(a)\}$,

për çdo $a \in X$. Në qoftë f, g dhe h janë nënbashkësi fuzzy të një gjysmëhipergrupi ternar H dhe x një element i H , atëherë

$$(f \circ g \circ h)(x) = \begin{cases} \sup_{x \in a \cdot b \cdot c} \min\{f(a), g(b), h(c)\}, & \text{nqs } x \in a \cdot b \cdot c \\ 0, & \text{të tjerat} \end{cases}$$

Lemë 6.1.1 Për çdo nënbashkësi joboshe X, Y, Z të një gjysmëhipergrupi ternar $(H, \cdot)$, kemi:

1. $f_X \circ f_Y \circ f_Z = f_{X \cdot Y \cdot Z}$
2. $\min\{f_X, f_Y, f_Z\} = f_{X \cap Y \cap Z}$.

Vërtetim. Evident. ■

Përkufizim 6.1.2 Le jetë f një nënbashkësi fuzzy e X dhe $t \in [0;1]$. Përcaktojmë $f_t = \{x \in X : f(x) \geq t\}$. f_t quhet t -prerje ose bashkësi niveli (t -cut or a level set).

Përkufizim 6.1.3[102] Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi fuzzy f e H quhet

1. nëngjysmëhipergrup ternar fuzzy (fuzzy ternary subsemihypergroup) i H në qoftë se $\forall x, y, z \in H$, $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \geq \min\{f(x), f(y), f(z)\}$.
2. hiperideal i majtë fuzzy (fuzzy left hyperideal) i H në qoftë se $\forall x, y, z \in H$, $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \geq f(z)$.
3. hiperideal i djathtë fuzzy (fuzzy right hyperideal) i H në qoftë se $\forall x, y, z \in H$, $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \geq f(x)$.
4. hiperideal lateral fuzzy (fuzzy lateral hyperideal) i H në qoftë se $\forall x, y, z \in H$, $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \geq f(y)$.
5. hiperideal fuzzy (fuzzy hyperideal) i H në qoftë se $\forall x, y, z \in H$, $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \geq \max\{f(x), f(y), f(z)\}$.

Në [102], është vërtetuar teorema e mëposhtme:

Teoremë 6.1.4[102, Teoremë 28] Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe A një nënbashkësi jo boshe e H . Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:

1. A është një nëngjysmëhipergrup ternar i H vetëm atëherë kur f_A është nëngjysmëhipergrup ternar fuzzy i H .
2. A është një hiperideal i majtë (hiperideal i djathtë, hiperideal lateral, hiperideal) i H vetëm atëherë kur f_A është hiperideal i majtë fuzzy (hiperideal i djathtë fuzzy, hiperideal lateral fuzzy, hiperideal fuzzy) i H .

§6.2 Hiperidealet fuzzy të pastra dhe fuzzy dobësisht të pastra në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, ne studiojmë gjysmëhipergrupet ternare nëpërmjet hiperidealeve fuzzy duke fuzzyfikuar disa rezultate të përftuara për hiperidealet në gjysmëhipergrupet ternare në kapitullin e kaluar; prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të hiperidealeve fuzzy siç janë ato të hiperidealeve fuzzy të pastra, fuzzy dobësisht të pastra në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të

tyre. Ne identifikojmë ato gjysmëhipergrupe ternare për të cilat çdo hiperideal fuzzy është idempotent; gjithashtu, karakterizojmë gjysmëhipergrupet ternare për të cilat çdo hiperideal i dyanshëm fuzzy është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë.

Përkufizim 6.2.1 Një hiperideal fuzzy i dyanshëm λ i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet hiperideal fuzzy i pastër (pure fuzzy hyperideal) i H në qoftë se $\mu \wedge \lambda = \mu \circ \lambda \circ \lambda$ për çdo hiperideal të djathtë fuzzy μ të H .

Pohim 6.2.2 Le të jetë I një hiperideal i dyanshëm i një gjysmëhipergrupi ternar H . Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. I është i pastër i djathtë në H ,
2. Funkzioni karakteristik i I , i shënuar me δ_I është hiperideal fuzzy i pastër i H .

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se I është i pastër i djathtë në H . Meqenëse I është hiperideal i H , është e qartë se δ_I është një hiperideal fuzzy i H . Për të vërtetuar se δ_I është fuzzy i pastër, të tregojmë se për çdo hiperideal të djathtë fuzzy γ të H , $\gamma \wedge \delta_I = \gamma \circ \delta_I \circ \delta_I$. Le të jetë $a \in H$. Atëherë

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \delta_I \circ \delta_I)(a) &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \gamma(x) \wedge \delta_I(y) \wedge \delta_I(z) \} \leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \bigwedge_{t \in x \cdot y \cdot z} \{ \gamma(t), \delta_I(t), \delta_I(t) \} \} \\ &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \gamma(a) \wedge \delta_I(a) \wedge \delta_I(a) \} = \gamma(a) \wedge \delta_I(a) \wedge \delta_I(a) = (\gamma \wedge \delta_I \wedge \delta_I)(a). \end{aligned}$$

Kjo sjell që $(\gamma \circ \delta_I \circ \delta_I)(a) \leq (\gamma \wedge \delta_I)(a)$, kështu që $(\gamma \circ \delta_I \circ \delta_I) \leq \gamma \wedge \delta_I$. Kemi $(\gamma \wedge \delta_I \wedge \delta_I)(a) = (\gamma(a) \wedge \delta_I(a) \wedge \delta_I(a)) = 0$ në qoftë se $a \notin I$. Kështu $(\gamma \wedge \delta_I \wedge \delta_I)(a) = 0 \leq (\gamma \circ \delta_I \circ \delta_I)(a)$. Le të shqyrtojmë rastin kur $a \in I$. Meqenëse I është i pastër i djathtë, atëherë për çdo $a \in I$, ekzistojnë $b, c \in I$ të tilla që $a \in a \cdot b \cdot c$. Meqenëse $b, c \in I, \delta_I(b) = 1, \delta_I(c) = 1$. Si rrjedhim,

$$\begin{aligned} (\gamma \wedge \delta_I \wedge \delta_I)(a) &= (\gamma(a) \wedge \delta_I(a) \wedge \delta_I(a)) = (\gamma(a) \wedge \delta_I(b) \wedge \delta_I(c)) \\ &\leq \bigvee_{a \in d \cdot b \cdot c} (\gamma(d) \wedge \delta_I(b) \wedge \delta_I(c)) = (\gamma \circ \delta_I \circ \delta_I)(a) \\ \gamma \wedge \delta_I \wedge \delta_I &\leq \gamma \circ \delta_I \circ \delta_I. \end{aligned}$$

Kështu, $\gamma \wedge \delta_I \circ \delta_I = \gamma \circ \delta_I \circ \delta_I$. Kjo sjell që $\gamma \wedge \delta_I = \gamma \circ \delta_I \circ \delta_I$. Anasjellas, le të supozojmë se δ_I është hiperideal fuzzy i pastër në H . Të tregojmë se I është i pastër i djathtë në H , domethënë që për çdo hiperideal të djathtë J të H , $J \cap I = I \cdot I \cdot I$. Meqenëse J është një hiperideal i djathtë i H , funksioni karakteristik δ_J i J është hiperideal i djathtë fuzzy i H . Meqenëse δ_I është fuzzy i pastër, kemi që $\delta_I \wedge \delta_I = \delta_I \circ \delta_I \circ \delta_I$. Kjo sjell që $\delta_{J \cap I} = \delta_{J \cdot I \cdot I}$, kështu që I është i pastër i djathtë. ■

Pohim 6.2.3 Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Janë të vërteta pohimet e mëposhtme:

1. Hiperidealet fuzzy φ dhe f_H të H , të përcaktuara përkatësisht si

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & n.q.s. \ x \neq 0 \\ 1, & n.q.s. \ x = 0 \end{cases}$$

dhe $f_H(x) = 1$ për çdo $x \in H$, janë hiperideale fuzzy të pastra të H .

2. Në qoftë se $\{\lambda_i : i \in I\}$ është një familje hiperidealesh fuzzy të pastra të H , atëherë i tillë është dhe $\bigvee_{i \in I} \lambda_i$.

3. Në qoftë se λ_1 dhe λ_2 janë hiperideale fuzzy të pastra të H , atëherë i tillë është edhe $\lambda_1 \wedge \lambda_2$.

Vërtetim. (1) Të tregojmë se për çdo hiperideal të djathtë fuzzy γ të H , kemi $\gamma \wedge \varphi = \gamma \circ \varphi \circ \varphi$ dhe $\gamma \wedge f_H = \gamma \circ f_H \circ f_H$. Për $a \in H$, kemi

$$\begin{aligned} (\gamma \circ \varphi \circ \varphi)(a) &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(x) \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z)) \leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left(\bigwedge_{t \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(t), \varphi(t), \varphi(t)) \right) \\ &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(a) \wedge \varphi(a) \wedge \varphi(a)) = \gamma(a) \wedge \varphi(a) \wedge \varphi(a) = (\gamma \wedge \varphi \wedge \varphi)(a) = (\gamma \wedge \varphi)(a). \end{aligned}$$

Kjo sjell që $(\gamma \circ \varphi \circ \varphi) \leq \gamma \wedge \varphi$. Në qoftë se $a \neq 0$, atëherë

$$\begin{aligned} (\gamma \wedge \varphi)(a) &= (\gamma \wedge \varphi \wedge \varphi)(a) = (\gamma(a) \wedge \varphi(a) \wedge \varphi(a)) \\ &= (\gamma(a) \wedge 0 \wedge 0) = 0 \leq (\gamma \circ \varphi \circ \varphi)(a) \\ (\gamma \wedge \varphi)(a) &\leq (\gamma \circ \varphi \circ \varphi)(a). \end{aligned}$$

Në qoftë se $a = 0$, atëherë

$$(\gamma \wedge \varphi)(0) = (\gamma(0) \wedge \varphi(0)) \leq \bigvee_{0 \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(x) \wedge \varphi(y) \wedge \varphi(z)) = ((\gamma \circ \varphi \circ \varphi)) = 0.$$

Kjo sjell që $(\gamma \wedge \varphi) \leq (\gamma \circ \varphi \circ \varphi)$. Si rrjedhim, $\gamma \wedge \varphi = \gamma \circ \varphi \circ \varphi$. Le të shqyrtojmë

$$\begin{aligned} (\gamma \circ f_H \circ f_H)(a) &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(x) \wedge f_H(y) \wedge f_H(z)) \leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left(\bigwedge_{t \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(t), f_H(t), f_H(t)) \right) \\ &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(a) \wedge f_H(a) \wedge f_H(a)) = \gamma(a) \wedge f_H(a) \wedge f_H(a) \\ &= (\gamma \wedge f_H \wedge f_H)(a) = (\gamma \wedge f_H)(a). \end{aligned}$$

Kjo sjell që $\gamma \circ f_H \circ f_H \leq \gamma \wedge f_H$. Gjithashtu,

$$\begin{aligned} (\gamma \wedge f_H)(a) &= (\gamma \wedge f_H \wedge f_H)(a) = (\gamma(a) \wedge f_H(a) \wedge f_H(a)) \\ &\leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} (\gamma(x) \wedge f_H(y) \wedge f_H(z)) = (\gamma \circ f_H \circ f_H)(a). \end{aligned}$$

Pra, $\gamma \wedge f_H = \gamma \circ f_H \circ f_H$.

(2) Le të jetë $\{\lambda_i : i \in I\}$ një familje hiperidealesh fuzzy të pastra të H . Të tregojmë se $\bigvee_{i \in I} \lambda_i$ është gjithashtu një hiperideal fuzzy i pastër i H , pra të tregojmë se për çdo hiperideal të djathtë fuzzy μ të H , $\mu \wedge (\bigvee_{i \in I} \lambda_i) = \mu \circ (\bigvee_{i \in I} \lambda_i) \circ (\bigvee_{i \in I} \lambda_i)$. Tani, për çdo $a \in H$, kemi që

$$\begin{aligned}
 \left[\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right] &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left[\mu(x) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(y) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(z) \right] \\
 &\leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left[\bigwedge_{t \in x \cdot y \cdot z} \left(\mu(t), \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(t), \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(t) \right) \right] \\
 &= \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left[\mu(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \right] = \mu(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \\
 &= \left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a).
 \end{aligned}$$

Kjo sjell që $\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \leq \mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)$. Gjithashtu,

$$\begin{aligned}
 \left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a) &= \left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a) \\
 &= \left[\mu(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(a) \right] \\
 &= \bigvee_{i \in I} [\mu(a) \wedge \lambda_i(a) \wedge \lambda_i(a)] = \bigvee_{i \in I} [(\mu \circ \lambda_i \circ \lambda_i)(a)].
 \end{aligned}$$

Kemi,

$$(\mu \circ \lambda_i \circ \lambda_i)(a) = \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} [\mu(x) \wedge \lambda_i(y) \wedge \lambda_i(z)]$$

$$\leq \bigvee_{a \in x \cdot y \cdot z} \left[\mu(x) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(y) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right)(z) \right] = \left[\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a). \text{ Kjo sjell që}$$

$$\left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a) \leq \left[\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right](a).$$

Kjo sjell që

$$\left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right] \leq \left[\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right].$$

Si rrjedhim,

$$\left[\mu \wedge \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right] = \left[\mu \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \circ \left(\bigvee_{i \in I} \lambda_i \right) \right].$$

(3) Le të jenë λ_1 dhe λ_2 hiperideale fuzzy të pastra të H . Atëherë, $\mu \wedge \lambda_1 = \mu \circ \lambda_1 \circ \lambda_1$ dhe $\mu \wedge \lambda_2 = \mu \circ \lambda_2 \circ \lambda_2$ për çdo hiperideale fuzzy të djathta të H . Të tregojmë se $\mu \wedge (\lambda_1 \wedge \lambda_2) = \mu \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2)$.

Meqenëse λ_2 është një hiperideal fuzzy i pastër i H , rrjedh se $\lambda_1 \wedge \lambda_2 = \lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_2$. Atëherë,
 $\mu \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) = \mu \circ (\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_2) \circ (\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_2)$.

Meqenëse $\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_2$ është një hiperideal fuzzy i dyanshëm i H , atëherë

$$\mu \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) = \mu \wedge (\lambda_1 \circ \lambda_2 \circ \lambda_2) = \mu \wedge (\lambda_1 \wedge \lambda_2).$$

Kështu, kemi që $\mu \wedge (\lambda_1 \wedge \lambda_1) = \mu \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2) \circ (\lambda_1 \wedge \lambda_2)$. Pra, $(\lambda_1 \wedge \lambda_2)$ është hiperideal fuzzy i pastër i H . ■

Teoremë 6.2.4 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është dobësisht i rregullt i djathtë.
2. Cdo hiperideal i djathtë fuzzy i H është idempotent.
3. $\lambda \wedge \mu = \mu \circ \lambda \circ \lambda$ për çdo hiperideal të djathtë fuzzy μ dhe për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm λ të H .

4. $\lambda \wedge \mu = \mu \circ \lambda \circ \lambda$ për çdo hiperideal të djathtë fuzzy μ dhe për çdo hiperideal fuzzy λ të H .

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë δ një hiperideal i djathtë fuzzy i H . Të provojmë se $\delta \circ \delta \circ \delta = \delta$.
 Le të jetë $x \in H$. Atëherë

$$(\delta \circ \delta \circ \delta)(x) = \bigvee_{x \in a \cdot b \cdot c} (\delta(a) \wedge \delta(b) \wedge \delta(c)) \leq \bigvee_{x \in a \cdot b \cdot c} \left(\bigwedge_{t \in a \cdot b \cdot c} (\delta(t), \delta(b), \delta(c)) \right)$$

ku $a, b, c, d, e, f \in H$ dhe H është dobësisht i rregullt i djathtë. Kështu,
 $x \in (x \cdot a \cdot b) \cdot (x \cdot c \cdot d) \cdot (x \cdot e \cdot f)$, prandaj $\delta(x) \leq \bigvee_{x \in w \cdot y \cdot z} (\delta(w) \wedge \delta(y) \wedge \delta(z)) = (\delta \circ \delta \circ \delta)(x)$.

Pra, $\delta \leq \delta \circ \delta \circ \delta$ dhe përfundimisht $\delta = \delta \circ \delta \circ \delta$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë $x \in H$. Të tregojmë se $x \in (x \cdot H \cdot H)^3$. Le të jetë $A = x \cup x \cdot H \cdot H$ hiperideali i djathtë i përfshirë nga x . Le të jetë δ_A funksioni karakteristik i A i cili është dhe një hiperideal i djathtë fuzzy i H , kështu që nga (2), $\delta_A = \delta_A \circ \delta_A \circ \delta_A = \delta_A^3$. Kjo sjell që

$A = A^3$. Meqenëse $x \in A$, rrjedh që $x \in A^3 = (x \cup x \cdot H \cdot H)^3$. Kjo sjell që

$$\begin{aligned} x &\in (x \cup x \cdot H \cdot H)^3 = (x \cup x \cdot H \cdot H) \circ (x \cup x \cdot H \cdot H) \circ (x \cup x \cdot H \cdot H) \\ &= x \cdot x \cdot x \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot x \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \\ &\quad \cup x \cdot x \cdot x \cdot H \cdot H \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot x \cdot H \cdot H \\ &= (x \cdot H \cdot H)^3. \end{aligned}$$

Kjo sjell që $x \in (x \cdot H \cdot H)^3$, kështu që H është dobësisht i rregullt i djathtë.

(1) $\Rightarrow$ (4). Le të jetë λ një hiperideal fuzzy dhe μ një hiperideal i djathtë fuzzy i H . Të tregojmë se $\lambda \wedge \mu = \mu \circ \lambda \circ \lambda$. Tani të tregojmë se $\mu \wedge \lambda \leq \mu \circ \lambda \circ \lambda$. Le të jetë $x \in H$. Meqenëse H është dobësisht i rregullt i djathtë, atëherë ekzistojnë $t_1, t_2, t_3, s_1, s_2, s_3 \in H$ të tilla që $x \in (x \cdot t_1 \cdot s_1) \cdot (x \cdot t_2 \cdot s_2) \cdot (x \cdot t_3 \cdot s_3)$. Kështu

$$\begin{aligned} (\mu \wedge \lambda)(x) &= (\mu(x) \wedge \lambda(x) \wedge \lambda(x)) \leq \bigwedge_{h_1 \in x \cdot t_1 \cdot s_1, h_2 \in x \cdot t_2 \cdot s_2, h_3 \in x \cdot t_3 \cdot s_3} (\mu(h_1), \lambda(h_2), \lambda(h_3)) \\ &\leq \bigvee_{x \in a \cdot b \cdot c} (\mu(a) \wedge \lambda(b) \wedge \lambda(c)) = (\mu \circ \lambda \circ \lambda)(x). \end{aligned}$$

Kjo sjell që $(\mu \wedge \lambda) \leq (\mu \circ \lambda \circ \lambda)$, kështu që $(\mu \wedge \lambda) = (\mu \circ \lambda \circ \lambda)$. Pra, λ është fuzzy i pastër.

(4) $\Rightarrow$ (1). Të tregojmë se H është dobësisht i rregullt i djathtë. Le të jetë $x \in H$ dhe le të jetë $A = \{x\} \cup H \cdot H \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cup H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H$ hiperideali i dyanshëm i përfshirë nga x . Le të jetë δ_A funksioni karakteristik i A . Atëherë δ_A është hiperideal fuzzy i H , δ_A është fuzzy i pastër. Kështu, nga Pohimi 6.2.2, A është i pastër i djathtë në H . Meqenëse $x \in A$ dhe A është i pastër i djathtë në H , atëherë ekzistojnë $y, z \in A$ të tilla që $x \in x \cdot y \cdot z$. Kjo do të thotë se

$$\begin{aligned} x &\in x \cdot A \cdot A = x \cdot \{ \{x\} \cup H \cdot H \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cup H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \} \cdot \{ \{x\} \\ &\quad \cup H \cdot H \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cup H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \} \\ &= x \cdot x \cdot x \cup x \cdot x \cdot x \cdot H \cdot H \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \\ &\quad \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot H \cdot H \cdot x \\ &\quad \cup x \cdot x \cdot H \cdot H \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot x \cdot H \cdot H \\ &\quad \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cup x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H \cdot x \cdot H \cdot H. \end{aligned}$$

Llogaritjet rutinë tregojnë se $x \in (x \cdot H \cdot H)^3$. Si rrjedhim, H është gjysmëhipergrup ternar dobësisht i rregullt i djathtë.

(1) $\Rightarrow$ (3). Evident. ■

Teoremë 6.2.5 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. H është dobësisht i rregullt i djathtë.
2. Cdo hiperideal fuzzy i dyanshëm λ i H është fuzzy i pastër.
3. Cdo hiperideal fuzzy λ i H është fuzzy i pastër.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Teorema 6.2.4 dhe Pohimi 6.2.2 ■

Përkufizim 6.2.6 *Një hiperideal i dyanshëm λ i një gjysmëhipergrupi ternar H quhet fuzzy dobësisht i pastër i majtë (left weakly pure fuzzy), fuzzy dobësisht i pastër i djathtë (right weakly pure fuzzy), në qoftë se përkatësisht $\lambda \wedge \mu = \lambda \circ \lambda \circ \mu$, $\lambda \wedge \mu = \mu \circ \lambda \circ \lambda$ për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm μ të H .*

Pohim 6.2.7 *Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. Cdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është fuzzy dobësisht i pastër i majtë.
2. Cdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është idempotent.
3. Cdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është fuzzy dobësisht i pastër i majtë. Le të jetë λ një hiperideal fuzzy i dyanshëm i H . Atëherë, për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm μ të H , kemi që $\lambda \wedge \mu = \lambda \circ \lambda \circ \mu$. Në fakt, $\lambda = \lambda \wedge \lambda = \lambda \circ \lambda \circ \lambda$, kështu që çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është idempotent.

(2) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është idempotent. Le të jetë λ një hiperideal fuzzy i dyanshëm i H , atëherë për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm μ të H , gjithmonë kemi që $\lambda \circ \lambda \circ \mu \leq \lambda \wedge \mu$. Nga ana tjetër, $(\lambda \wedge \mu) = (\lambda \wedge \mu) \circ (\lambda \wedge \mu) \circ (\lambda \wedge \mu) \leq \lambda \circ \lambda \circ \mu$, kështu që kemi $\lambda \wedge \mu = \lambda \circ \lambda \circ \mu$. Pra, λ është është fuzzy dobësisht i pastër i majtë.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supozojmë se çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është idempotent. Le të jetë λ një hiperideal fuzzy i dyanshëm i H , atëherë për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm μ të H , kemi që $\mu \circ \lambda \circ \lambda \leq \mu \wedge \lambda$. Nga ana tjetër $(\mu \wedge \lambda) = (\mu \wedge \lambda) \circ (\mu \wedge \lambda) \circ (\mu \wedge \lambda) \leq \mu \circ \lambda \circ \lambda$, kështu që $\mu \wedge \lambda = \mu \circ \lambda \circ \lambda$. Pra, λ është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë.

(3) $\Rightarrow$ (2). Supozojmë se çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë. Le të jetë λ hiperideal fuzzy i dyanshëm i H . Atëherë, λ është fuzzy dobësisht i pastër i djathtë, kështu që për çdo hiperideal fuzzy të dyanshëm μ të H , kemi që $\lambda \wedge \mu = \mu \circ \lambda \circ \lambda$. Në fakt, $\lambda = \lambda \wedge \lambda = \lambda \circ \lambda \circ \lambda$, prandaj çdo hiperideal fuzzy i dyanshëm i H është idempotent. ■

§6.3 Bi-hiperidealet fuzzy në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion, prezantojmë konceptin e bi-hiperidealit fuzzy në gjysmëgrupet ternare dhe përfshihen disa veti të tyre.

Përkufizim 6.3.1 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi fuzzy f e H quhet bi-hiperideal fuzzy (fuzzy bi-hyperideal) i H në qoftë se:

1. $\inf_{t \in a \cdot b \cdot c} f(t) \geq \min\{f(a), f(b), f(c)\}$ dhe
2. $\inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} f(t) \geq \min\{f(a), f(b), f(c), f(d), f(e)\}$ për çdo $a, b, c, d, e \in H$.

Pohim 6.3.2 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një nënbashkësi fuzzy f e H është një bi-hiperideal fuzzy i H vetëm atëherë kur $f \circ f \circ f \leq f$ dhe $f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f \leq f$.

Vërtetim. Supozojmë se f është një bi-hiperideal fuzzy i H . Në qoftë se $(f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f)(a) = 0$, atëherë është e qartë se $f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f \leq f$. Ndryshe, ekzistojnë elementet x, y, z dhe p, q, r të H të tilla që $a \in x \cdot y \cdot z$ dhe $x \in p \cdot q \cdot r$. Meqenëse f është bi-hiperideal fuzzy i H , kemi që $\inf_{t \in p \cdot q \cdot r \cdot y \cdot z} f(t) \geq \min\{f(p), f(r), f(z)\}$. Që këtë,

$$\begin{aligned} (f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f)(a) &\leq \sup_{a \in x \cdot y \cdot z} \min\{(f \circ f_H \circ f)(x), f_H(y) \circ f(z)\} \\ &\leq \sup_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \sup_{x \in p \cdot q \cdot r} \{ \min\{ \min\{f(p), f_H(q), f(r)\}, f_H(y), f(z) \} \} \} \\ &\leq \sup_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \sup_{x \in p \cdot q \cdot r} \{ \min\{ \min\{f(p), 1, f(r)\}, 1, f(z) \} \} \} \\ &\leq \sup_{a \in x \cdot y \cdot z} \{ \sup_{x \in p \cdot q \cdot r} \{ \min\{ \min\{f(p), f(r)\}, f(z) \} \} \} \\ &\leq \sup_{a \in (p \cdot q \cdot r) \cdot y \cdot z} \{ \min\{ \min\{f(p), f(r)\}, f(z) \} \} \leq \sup_{a \in (p \cdot q \cdot r) \cdot y \cdot z} \{ \inf_{t \in p \cdot q \cdot r \cdot y \cdot z} f(t) \} = f(a) \end{aligned}$$

dhe si rrjedhim, $f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f \leq f$.

Anasjallas, supozojmë se $f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f \leq f$. Le të jenë $a, b, c, d, e \in H$ të tilla që $x \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$. Atëherë, kemi që:

$$\begin{aligned}
 \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} & \geq f(x) \geq (f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f)(x) \\
 & \geq \sup_{x \in a' \cdot b' \cdot c'} \{ \min \{ (f \circ f_H \circ f)(a'), f_H(b'), f(c') \} \} \\
 & \geq \min \{ \inf_{s \in a \cdot b \cdot c} \{ (f \circ f_H \circ f)(s), f_H(d), f(e) \} \} \\
 & \geq \sup_{a \cdot b \cdot c \subseteq x_1 \cdot y_1 \cdot z_1} \{ \min \{ \min \{ f(x_1), f_H(y_1), f(z_1) \}, f_H(d), f(e) \} \} \\
 & \geq \min \{ \min \{ f(a), f_H(b), f(c) \}, f_H(d), f(e) \} \\
 & = \min \{ \min \{ f(a), 1, f(c) \}, 1, f(e) \} = \min \{ f(a), f(c), f(e) \}.
 \end{aligned}$$

Pra, f është një bi-hiperideal fuzzy i H . ■

Kohët e fundit, në [102], Yaqoob, Aslam dhe Hila kanë vërtetuar lemën dhe teoremën e mëposhtme :

Lemë 6.3.3 [102, Teoremë 35] *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Nënbashkësia jo boshe B e H është një bi-hiperideal i H vetëm atëherë kur funksioni karakteristik f_B i B është bi-hiperideal fuzzy i H .*

Teoremë 6.3.4 [102, Teoremë 37] *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe f një nënbashkësi fuzzy e H . Atëherë, f është një bi-hiperideal fuzzy i H vetëm atëherë kur për çdo $t \in [0, 1]$, nga $f_t \neq \emptyset$ rrjedh që f_t është një bi-hiperideal i H .*

Lemë 6.3.5 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Prerja e çdo bashkësie bi-hiperidealesh fuzzy të H është bi-hiperideal fuzzy i H .*

Vërtetim. Elementet $a, b, c \in H$. Atëherë

1.

$$\begin{aligned}
 \inf_{t \in a \cdot b \cdot c} (f \cap g)(t) & \geq \inf_{t \in a \cdot b \cdot c} f(t) \cap \inf_{t \in a \cdot b \cdot c} g(t) \\
 & \geq \min \{ \min \{ f(a), f(b), f(c) \}, \min \{ g(a), g(b), g(c) \} \} \\
 & = \min \{ \min \{ f(a), g(a) \}, \min \{ f(b), g(b) \}, \min \{ f(c), g(c) \} \} \\
 & = \min \{ (f \cap g)(a), (f \cap g)(b), (f \cap g)(c) \}.
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} (f \cap g)(t) & \geq \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} f(t) \cap \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} g(t) \\
 & \geq \min \{ \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} f(t), \inf_{t \in a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e} g(t) \} \\
 & \geq \min \{ \min \{ f(a), f(c), f(e) \}, \min \{ g(a), g(c), g(e) \} \} \\
 & = \min \{ \min \{ f(a), g(a) \}, \min \{ f(c), g(c) \}, \min \{ f(e), g(e) \} \} \\
 & = \min \{ (f \cap g)(a), (f \cap g)(c), (f \cap g)(e) \}.
 \end{aligned}$$

Kështu, $f \cap g$ është një bi-hiperideal fuzzy i H . ■

Vërejtje 6.3.6 *Bashkimi i çdo bashkësie bi-hiperidealesh fuzzy të një gjysmëhipergrupi ternar H mund të mos jetë një bi-hiperideal fuzzy i H . Kjo bëhet e qartë nga shembulli që vijon.*

Shembull 6.3.7 Le të jetë $H = \{0, a, b, c, d, e, g\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$ për çdo $x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela e mëposhtme:

$*$	0	a	b	c	d	e	g
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	$\{a, b\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, g\}$
b	0	b	b	d	d	g	g
c	0	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$	c	$\{c, d\}$
d	0	d	d	d	d	d	d
e	0	e	$\{e, g\}$	c	$\{c, d\}$	e	$\{e, g\}$
g	0	g	g	d	d	g	g

Atëherë, (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Është e qartë se $B_1 = \{0\}$, $B_2 = \{0, c, d\}$, $B_3 = \{0, c, d, e, g\}$, $B_4 = \{0, b, d, g\}$ janë bi-hiperideale të H dhe se funksionet karakteristike të B_2 dhe B_4 janë bi-hiperideale fuzzy të H . Por, meqenëse $B_2 \cup B_4 = \{0, b, c, d, g\}$ nuk është bi-hiperideal, funksioni i tij karakteristik nuk është bi-hiperideal fuzzy i H . ■

Pohim 6.3.8 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. H është i rregullt.
2. $u = u \circ f_H \circ u$ për çdo bi-hiperideal fuzzy u të H .

Vërtetim. Supozojmë se H është i rregullt dhe u është një bi-hiperideal fuzzy i çfarëdoshëm i H . Le të jetë $a \in H$. Meqenëse H është i rregullt, ekziston $x \in H$ i tillë që $a \in a \cdot x \cdot a$. Atëherë, kemi që

$$\begin{aligned} (u \circ f_H \circ u)(a) &= \sup_{a \in b \cdot c \cdot d} \{\min\{u(b), f_H(c), u(d)\}\} \\ &\geq \min\{u(a), f_H(x), u(a)\} = \min\{u(a), 1, u(a)\} = u(a). \end{aligned}$$

Që këtë rrjedh se $u \circ f_H \circ u \geq u$ (i). Meqenëse $u \leq u \circ f_H \circ u$, kemi që $u \circ f_H \circ u \leq (u \circ f_H \circ u) \circ f_H \circ u \leq u$, meqenëse u është një bi-hiperideal fuzzy i H . Pra $u \circ f_H \circ u \leq u$ (ii). Nga (i) dhe (ii) rrjedh se $u = u \circ f_H \circ u$.

Anasjellas, supozojmë se B është një bi-hiperideal i çfarëdoshëm i H . Le të jetë a një element çfarëdo i B , atëherë nga Teorema 6.1.4(1), f_B është një bi-hiperideal fuzzy i H . Si rrjedhim, nga supozimi i mësipërm, $f_B = f_B \circ f_H \circ f_B$ dhe $(f_B \circ f_H \circ f_B)(a) = f_B(a) = 1$. Kështu, $a \in B \cdot H \cdot B$, pra $B \subseteq B \cdot H \cdot B$. Gjithashtu $B \cdot H \cdot B \subseteq (B \cdot H \cdot B) \cdot H \cdot B \subseteq B$, meqenëse B është bi-hiperideal i H . Si rrjedhim, $B = B \cdot H \cdot B$. Kështu, H është një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. ■

Lemë 6.3.9 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar, f, g nënbashkësi fuzzy të çfarëdoshme të H dhe h një bi-hiperideal fuzzy i H . Atëherë kompozimet $f \circ g \circ h, g \circ f \circ h$ dhe $g \circ h \circ f$ janë bi-hiperideale fuzzy të H .

Vërtetim. Kemi

$$\begin{aligned}
 (f \circ g \circ h)^3 &= (f \circ g \circ h) \circ (f \circ g \circ h) \circ (f \circ g \circ h) \\
 &= f \circ (g \circ h \circ f) \circ (g \circ h \circ f) \circ g \circ h \\
 &\leq f \circ (f_H \circ f_H \circ f) \circ (f_H \circ f_H \circ f) \circ g \circ h \\
 &= f \circ (f_H \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f_H) \circ (f \circ g \circ h) \\
 &\leq f \circ (f_H \circ f_H \circ f_H \circ f_H \circ f_H) \circ f \circ g \circ h \\
 &\leq (f \circ f_H \circ f) \circ g \circ h \leq f \circ g \circ h \quad \text{meqë } f \circ f_H \circ f = f.
 \end{aligned}$$

Që këtëj $f \circ g \circ h$ është një nëngjysmëhipergrup fuzzy i H . Të tregojmë tani se $f \circ g \circ h$ është bi-hiperideal fuzzy i H .

$$\begin{aligned}
 (f \circ g \circ h) \circ f_H \circ (f \circ g \circ h) &\circ f_H \circ (f \circ g \circ h) \\
 &\leq f \circ (f_H \circ f_H \circ f_H) \circ f \circ (f_H \circ f_H \circ f_H) \circ (f \circ g \circ h) \\
 &\leq (f \circ f_H \circ f \circ f_H \circ f) \circ g \circ h \\
 &\leq f \circ g \circ h \quad \text{meqenëse } f \text{ është një bi-hiperideal fuzzy i } H.
 \end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme mundemi të tregojmë se $g \circ f \circ h$ dhe $g \circ h \circ f$ janë bi-hiperideale fuzzy të H . ■

Rrjedhim 6.3.10 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrp ternar. Prodhimi i çdo tre bi-hiperidealeve fuzzy të gjysmëhipergrupit ternar H është një bi-hiperideal fuzzy i H .*

Le të jetë $a \in H$ dhe $t \in (0, 1]$. Një nënbashkësi fuzzy a_t e H quhet pikë fuzzy (fuzzy point) në H në qoftë se

$$a_t(x) = \begin{cases} t & \text{në qoftë se } x = a, \\ 0 & \text{të tjerat} \end{cases}$$

për çdo $x \in H$. Në qoftë se f është një nënbashkësi fuzzy e H , atëherë themi që pika fuzzy a_t përmbahet në (contained in) f dhe shënojmë $a_t \in f$, në qoftë se $t \leq f(a)$. Eshtë e qartë se

$$f = \bigcup_{a_t \in f} a_t. \text{ Gjithashtu, } a_t \circ f = \bigcup_{b_s \in f} a_t \circ b_s \text{ dhe } f \circ a_t = \bigcup_{b_s \in f} b_s \circ a_t. \text{ Le të jenë } a_t, b_r \text{ dhe } c_s \text{ pika}$$

fuzzy të H . Atëherë $a_t \circ b_r \circ c_s = (a \cdot b \cdot c)_{\min\{t, r, s\}}$. ■

Përkufizim 6.3.11 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe f një nënbashkësi fuzzy e H . Shënojmë $B(f)$ prerjen e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të H që përmbajnë f . Atëherë $B(f)$ është një bi-hiperideal i H dhe quhet bi-hiperideal fuzzy i përfshirë nga f (the fuzzy bi-hyperideal generated by f).*

Përkufizim 6.3.12 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe a_t një pikë fuzzy e H . Atëherë, bi-hiperideali fuzzy i përfshirë nga a_t dhe që shënohet $B(a_t)$ përcaktohet për çdo $x \in H$ si më poshtë*

$$B(a_t)(x) = \begin{cases} t & \text{në qoftëse } x \in B(a), \\ 0 & \text{të tjerat} \end{cases}$$

ku $B(a) = \{a\} \cup a \cdot H^1 \cdot a$, dhe $H^1 = \begin{cases} H & \text{në qoftëse } H \text{ ka element identik,} \\ H \cup \{1\} & \text{të tjera.} \end{cases}$ ■

§6.4 Bi-hiperidealet fuzzy gjysmëprim, fortësisht prim dhe prim në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të bi-hiperidealeve fuzzy siç janë bi-hiperidealet fuzzy prim, gjysmëprim dhe fortësisht prim në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre.

Le të jetë H një gjysmëhipergrup ternar. Nënbashkësia jo boshe T e H quhet *nënbashkësi prim* (*prime subset*) e H në qoftë se për çdo $x, y, z \in H, x \cdot y \cdot z \subseteq T$ sjell që $x \in T$ ose $y \in T$ ose $z \in T$. Një nëngjysmëhipergrup ternar T i H quhet *nëngjysmëhipergrup ternar prim* (*prime ternary subsemihypergroup*) i H në qoftë se T është një nënbashkësi prim e H . Hiperidealet e majta prim (*prime left hyperideals*), hiperidealet e djathta prim (*prime right hyperideals*), hiperidealet lateral prim (*prime lateral hyperideals*) dhe hiperidealet prim (*prime hyperideals*) të H përcaktohen në mënyrë analoge. Një nënbashkësi fuzzy f e H quhet *nënbashkësi fuzzy prim* (*prime fuzzy subset*) e H në qoftë se $\inf_{t \in x \cdot y \cdot z} f(t) \leq \max\{f(x), f(y), f(z)\}$ për çdo $x, y, z \in H$.

Një nëngjysmëhipergrup ternar fuzzy f i H quhet *nëngjysmëhipergrup ternar fuzzy prim* (*prime fuzzy ternary subsemihypergroup*) i H në qoftë se f është një nënbashkësi fuzzy prim e H . Hiperidealet e majta fuzzy prim (*prime fuzzy left hyperideals*), hiperidealet e djathta fuzzy prim (*prime fuzzy right hyperideals*), hiperidealet lateral fuzzy prim (*prime fuzzy lateral hyperideals*) dhe hiperidealet fuzzy prim (*prime fuzzy hyperideals*) të H përcaktohen në mënyrë analoge [102].

Përkufizim 6.4.1 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Bi-hiperideali fuzzy f i H quhet *prim* (*prime*) në qoftë se $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \leq f$ sjell që $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$, për çdo bi-hiperideale fuzzy f_1, f_2, f_3 të H .

Përkufizim 6.4.2 (Përkufizim ekuivalent) Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Bi-hiperideali fuzzy f i H quhet *bi-hiperideal fuzzy prim* (*prime fuzzy bi-hyperideal*) i H në qoftë se f është një nënbashkësi fuzzy prim e H .

Përkufizim 6.4.3 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal fuzzy f i H quhet *fortësisht prim* (*strongly prime*) në qoftë se $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$ sjell që $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$, për çdo bi-hiperideale fuzzy f_1, f_2, f_3 të H .

Përkufizim 6.4.4 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal fuzzy f i H quhet gjysmëprim (semiprime) në qoftë se $f_1 \circ f_1 \circ f_1 \leq f$ sjell që $f_1 \leq f$ për çdo bi-hiperideal fuzzy f_1 të H .*

Përkufizim 6.4.5 *Le të jetë $(H, \cdot)$ gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal fuzzy f i H quhet idempotent në qoftë se $f \circ f \circ f = f$.*

Në [102] është vërtetuar lema që vijon.

Lemë 6.4.6 [102, Teoremë 36] *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe A një nënbashkësi jo boshe e H . Atëherë, A është bi-hiperideal prim i H vetëm atëherë kur f_A (funksioni karakteristik i A) është bi-hiperideal fuzzy prim i H .*

Lemë 6.4.7 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe A një nënbashkësi jo boshe e H . Atëherë, A është bi-hiperideal fortësisht prim i H vetëm atëherë kur f_A (funksioni karakteristik i A) është bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H .*

Vërtetim. Vërtetimi është evident nga Lema 6.4.6. ■

Lemë 6.4.8 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe A një nënbashkësi jo boshe e H . Atëherë, A është bi-hiperideal gjysmëprim i H vetëm atëherë kur f_A (funksioni karakteristik i A) është bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H .*

Vërtetim. Vërtetimi është evident nga Lema 6.4.6. ■

Pohim 6.4.9 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Cdo bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H është bi-hiperideal fuzzy prim i H .*

Vërtetim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H dhe f_1, f_2, f_3 tre bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \leq f$. Atëherë, $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$ sjell që $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Pra, f është një bi-hiperideal fuzzy prim i H . ■

Pohim 6.4.10 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Cdo bi-hiperideal fuzzy prim i H është bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H .*

Vërtetim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy prim i H , ndërsa f_1 ndonjë bi-hiperideal fuzzy i H i tillë që $f_1 \circ f_1 \circ f_1 \leq f$. Kjo sjell që $f_1 \leq f$. Pra, f është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H . ■

Vërejtje 6.4.11 *E anasjella e dy pohimeve të mësipërme nuk është e vërtetë.*

Shembull 6.4.12 *Marrim në konsideratë gjysmëhipergrupin ternar $H = \{0, a, b, c, d, e, g\}$ të shembullit 6.3.7. Është e qartë se $B_1 = \{0\}, B_2 = \{0, c, d\}, B_3 = \{0, c, d, e, g\}, B_4 = \{0, b, d, g\}$ janë bi-hiperideale të H . Të gjitha bi-hiperidealet janë prim dhe si rrjedhim, edhe gjysmëprim. Bi-hiperideali prim $\{0\}$ nuk është bi-hiperideal fortësisht prim, kështu që $f_{\{0\}}$ është një bi-hiperideal fuzzy prim i H , por jo një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i tij.*

Shembull 6.4.13 *Le të jetë $0 \in H$ dhe $|H| > 3$. Atëherë H është një gjysmëhipergrup ternar me zero në lidhje me hiperveprimin ternar të përcaktuar si më poshtë:*

$$a \cdot b \cdot c = \begin{cases} \{0, a\} & \text{në qoftë se } a = b = c; \\ 0, & \text{të tjera.} \end{cases}$$

Meqenëse për gjithë nënbashkësitë A, B, C të H që përmbajnë $\{0\}$ kemi $A \cdot H \cdot A \cdot H \cdot A = A$ dhe $A \cdot B \cdot C = A \cap B \cap C$, të gjitha këto nënbashkësi janë bi-hiperideale gjysmëprim. Një bi-hiperideal gjysmëprim B i H i tillë që $|H \setminus B| \geq 3$ nuk është bi-hiperideal prim meqenëse për tre elemente të ndryshme midis tyre $a, b, c \in H \setminus B$, kemi që $(B \cup \{a\}) \cdot (B \cup \{b\}) \cdot (B \cup \{c\}) = (B \cup \{a\}) \cap (B \cup \{b\}) \cap (B \cup \{c\}) = B$, por $(B \cup \{a\}) \not\subseteq B$ dhe $(B \cup \{b\}) \not\subseteq B$ dhe $(B \cup \{c\}) \not\subseteq B$. Në fakt, $\{0\}$ është një bi-hiperideal gjysmëprim i H por nuk është bi-hiperideal prim i tij. Që këtë, f_B (dhe $f_{\{0\}}$) është bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim, por jo bi-hiperideal fuzzy prim i H .

Lemë 6.4.14 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Minimumi i një familje bi-hiperidealesh fuzzy prim të H është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H .*

Vërtetim. Le të jetë $\{f_i : i \in I\}$ një bashkësi bi-hiperidealesh fuzzy prim të H . Atëherë $\inf_{i \in I} f_i$ është bi-hiperideal fuzzy i H , në bazë të Lemës 6.1.1(1). Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i H i tillë që $f \circ f \circ f \leq \inf_{i \in I} f_i$. Kjo sjell që $f \circ f \circ f \leq f_i$ për çdo $i \in I$. Që këtë, $f \leq f_i$ për çdo $i \in I$, meqenëse çdo f_i është një bi-hiperideal fuzzy prim i H . Pra, $f \leq \inf_{i \in I} f_i$ dhe si rrjedhim $\inf_{i \in I} f_i$ është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H . ■

§6.5 Bi-hiperidealet fuzzy irreducible dhe fortësisht irreducible në gjysmëhipergrupet ternare

Në këtë seksion prezantojmë dhe studiojmë disa klasa të tjera të bi-hiperidealeve fuzzy siç janë bi-hiperidealet fuzzy irreducible dhe fortësisht irreducible në gjysmëhipergrupet ternare dhe shqyrtojmë disa veti të tyre. Është topologjizuar hapësira e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të mirëfillta fortësisht prim në një gjysmëhipergrup ternar. Ne karakterizojmë ato gjysmëhipergrupe ternare për të cilat çdo bi-hiperideal është fortësisht irreducible dhe gjithashtu, ato në të cilat çdo bi-hiperideal është fortësisht prim. Në fakt, vërtetohet se në rastin e bashkësisë së bi-hiperidealeve fuzzy tërësisht të renditur të një gjysmëhipergrupi H , konceptet e bi-hiperidealeve fuzzy prim irreducible dhe bi-hiperidealeve fuzzy prim fortësisht irreducible përputhen.

Përkufizim 6.5.1 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Një bi-hiperideal fuzzy f i H quhet bi-hiperideal fuzzy irreducible (irreducible fuzzy bi-hyperideal) në qoftë se për çfarëdo*

bi-hiperideale fuzzy f_1, f_2, f_3 të H , $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f$ sjell që $f_1 = f$ ose $f_2 = f$ ose $f_3 = f$

Përkufizim 6.5.2 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Bi-hiperideali fuzzy f i H quhet bi-hiperideal fuzzy fortësisht irreducible (strongly irreducible fuzzy bi-hyperideal) në qoftë se për çfarëdo bi-hiperideale fuzzy f_1, f_2, f_3 të H , $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f$ sjell që $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$.

Vërejtje 6.5.3 Cdo bi-hiperideal fortësisht irreducible i një gjysmëhipergrupi ternar H është bi-hiperideal irreducible, por në përgjithësi, e anasjella nuk është e vërtetë.

Shembull 6.5.4 Marrim në konsideratë gjysmëhipergrupin ternar $H = \{0, a, b, c, d, e, g\}$ të shembullit 2.7. Është e qartë se $H, B_1 = \{0\}, B_2 = \{0, d\}, B_3 = \{0, d, g\}, B_4 = \{0, c, d\}, B_5 = \{0, c, d, e, g\}, B_6 = \{0, b, d, g\}$ janë bi-hiperideale të H . Nga shembulli duket qartë se B_2, B_3 janë irreducible por jo fortësisht irreducible. Kështu, të njëjtën gjë japin funksionet karakteristike të tyre si për bi-hiperidealet fuzzy fortësisht irreducible dhe për ato irreducible.

Pohim 6.5.5 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Cdo bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim fortësisht irreducible i H është bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H .

Vërtetim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim fortësisht irreducible i H dhe f_1, f_2, f_3 tre bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që

$$\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f \quad (1)$$

Duhet të tregojmë se ka vend një nga mosbarazimet e mëposhtme: $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Meqenëse $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f_1, \min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f_2, \min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f_3$ rrjedh që $\min\{f_1, f_2, f_3\}^3 \leq f_1 \circ f_2 \circ f_3$ dhe $\min\{f_1, f_2, f_3\}^3 \leq f_2 \circ f_3 \circ f_1$ dhe $\min\{f_1, f_2, f_3\}^3 \leq f_3 \circ f_1 \circ f_2$, prandaj, $\min\{f_1, f_2, f_3\}^3 \leq \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$ (nga (1)). Meqenëse f është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H , rrjedh që $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f$. Pra, $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$ meqë f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht irreducible i H , kështu që f është bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H . ■

Pohim 6.5.6 Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar dhe f një bi-hiperideal fuzzy i H i tillë që $f(a) = \alpha$, ku $a \in H, \alpha \in [0, 1]$. Atëherë, ekziston një bi-hiperideal fuzzy g i H i tillë që $f \leq g$ dhe $g(a) = \alpha$.

Vërtetim. Le të jetë $X = \{h : h \text{ është një bi-hiperideal fuzzy i } H, h(a) = \alpha \text{ dhe } f \leq h\}$, atëherë $X \neq \emptyset$ meqë $f \in X$. Bashkësia X është një bashkësi pjesërisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Në qoftë se $Y = \{h_i : h_i \text{ është një bi-hiperidealfuzzy i } H, h_i(a) = \alpha \text{ dhe } f \leq h_i \text{ për çdo } i \in I\}$ është

një nënbashkësi e X tërësisht e renditur, atëherë $\inf_{i \in I} h_i$ është bi-hiperideal fuzzy i H i tillë që $f \leq \inf_{i \in I} h_i$. Me të vërtetë, në qoftë se $a, b, c, x, y \in H$, atëherë

$$\inf_{t \in a \cdot b \cdot c} \left(\inf_{i \in I} h_i \right)(t) = \inf_{i \in I} \left(\inf_{t \in a \cdot b \cdot c} h_i(t) \right) \geq \inf_{i \in I} \min\{h_i(a), h_i(b), h_i(c)\}$$

meqenëse h_i është një bi-hiperideal fuzzy i H

$$= \min\left\{\left(\inf_{i \in I} h_i(a)\right), \left(\inf_{i \in I} h_i(b)\right), \left(\inf_{i \in I} h_i(c)\right)\right\} = \min\left\{\left(\inf_{i \in I} h_i\right)(a), \left(\inf_{i \in I} h_i\right)(b), \left(\inf_{i \in I} h_i\right)(c)\right\}.$$

Gjithashtu

$$\inf_{t \in a \cdot x \cdot b \cdot y \cdot c} \left(\inf_{i \in I} h_i \right)(t) = \inf_{i \in I} \left(\inf_{t \in a \cdot x \cdot b \cdot y \cdot c} h_i(t) \right) \geq \inf_{i \in I} \min\{h_i(a), h_i(b), h_i(c)\}$$

meqenëse h_i është një bi-hiperideal fuzzy i H

$$= \min\left\{\left(\inf_{i \in I} h_i(a)\right), \left(\inf_{i \in I} h_i(b)\right), \left(\inf_{i \in I} h_i(c)\right)\right\} = \min\left\{\left(\inf_{i \in I} h_i\right)(a), \left(\inf_{i \in I} h_i\right)(b), \left(\inf_{i \in I} h_i\right)(c)\right\}.$$

Që këtëj, $\inf_{i \in I} h_i$ është bi-hiperideal fuzzy i H . Meqenëse $f \leq h_i$ për çdo $i \in I$, atëherë

$$f \leq \inf_{i \in I} h_i. \text{ Gjithashtu } \left(\inf_{i \in I} h_i\right)(a) = \inf_{i \in I} h_i(a) = \alpha. \text{ Kështu, } \inf_{i \in I} h_i \in X \text{ dhe } \inf_{i \in I} h_i \text{ janë kufij të}$$

sipërm të Y , prandaj nga lema e Zorn, ekziston një bi-hiperideal fuzzy g i H që është maksimal dhe gëzon vetinë $f \leq g$ dhe $g(a) = \alpha$. Le të tregojmë se g është një bi-hiperideal fuzzy irreducible i H . Supozojmë se për çdo bi-hiperideal fuzzy g_1, g_2, g_3 të H , kemi $\min\{g_1, g_2, g_3\} = g$. Që këtëj rrjedh se $g \leq g_1$ dhe $g \leq g_2$ dhe $g \leq g_3$. Pretendojmë që $g = g_1$ ose $g = g_2$ ose $g = g_3$. Në rast të kundërt, supozojmë se $g \neq g_1, g \neq g_2$ dhe $g \neq g_3$. Kjo sjell që $g < g_1, g < g_2$ dhe $g < g_3$, kështu që $g_1(a) \neq \alpha, g_2(a) \neq \alpha$ dhe $g_3(a) \neq \alpha$, meqë $g(a) = \alpha$. Që këtëj rrjedh se $\min\{g_1, g_2, g_3\}(a) = \min\{g_1(a), g_2(a), g_3(a)\} \neq \alpha$, gjë që bie në kundërshtim me faktin që $\min\{g_1(a), g_2(a), g_3(a)\} = g(a) = \alpha$, kështu që ose $g = g_1$ ose $g = g_2$ ose $g = g_3$. Si rrjedhim, g është një bi-hiperideal fuzzy irreducible i H . ■

Teoremë 6.5.7 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Pohimet që vijojnë janë ekuivalente:*

1. *Cdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent.*
2. *$\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$ për çdo tre bi-hiperideale fuzzy f_1, f_2, f_3 të H .*
3. *Cdo bi-hiperideal fuzzy i H është gjysmëprim.*
4. *Cdo bi-hiperideal fuzzy i mirëfilltë i H është prerja e bi-hiperidealeve fuzzy gjysmëprim irreducible të H që e përmbajnë atë.*

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jenë f_1, f_2, f_3 tre bi-hiperideale fuzzy të H . Nga Lema 6.1.1, $\min\{f_1, f_2, f_3\}$ është gjithashtu një bi-hiperideal fuzzy i H , kështu që nga hipoteza, kemi që

$\min\{f_1, f_2, f_3\} = \min\{f_1, f_2, f_3\}^3 \leq f_1 \circ f_2 \circ f_3$. Në mënyrë të ngjashme, $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f_2 \circ f_3 \circ f_1$ dhe $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f_3 \circ f_1 \circ f_2$. Kjo sjell që $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\}$. Nga Lema 6.3.5, $f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2$ janë bi-hiperideale fuzzy të H . Gjithashtu, nga Lema 6.1.1, $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\}$ është një bi-hiperideal fuzzy i H . Kështu, nga hipoteza, kemi që

$$\begin{aligned} \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} &= \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\}^3 \\ &\leq (f_1 \circ f_2 \circ f_3) \circ (f_3 \circ f_1 \circ f_2) \circ (f_2 \circ f_3 \circ f_1) \leq f_1 \circ (f_H \circ f_H \circ f_H) \circ f_1 \circ (f_H \circ f_H \circ f_H) \circ f_1 \\ &\leq f_1 \circ f_H \circ f_1 \circ f_H \circ f_1 \leq f_1. \end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme, $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f_2$ dhe $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f_3$. Si rrjedhim, $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq \min\{f_1, f_2, f_3\}$, kështu që $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} = \min\{f_1, f_2, f_3\}$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i H . Atëherë, nga hipoteza $f = \min\{f, f, f\} = \min\{f \circ f \circ f, f \circ f \circ f, f \circ f \circ f\} = f \circ f \circ f$.

(1) $\Rightarrow$ (3). Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i H i tillë që $f_1 \circ f_1 \circ f_1 \leq f$ për çdo bi-hiperideal fuzzy f_1 të H . Atëherë, nga hipoteza do të kemi $f_1 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \leq f$. Që këtëj, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H .

(3) $\Rightarrow$ (4). Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i mirëfilltë i H dhe $\{f_i : i \in I\}$ bashkësia e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy irreducible të H të tilla që $f \leq f_i$ për çdo $i \in I$. Kjo sjell që $f \leq \inf_{i \in I} f_i$. Le të jetë $a \in H$. Nga pohimi 6.5.6, ekziston një bi-hiperideal fuzzy irreducible f_α i H i tillë që $f \leq f_\alpha$ dhe $f(a) = f_\alpha(a)$. Që këtëj rrjedh se $f_\alpha \in \{f_i : i \in I\}$. Pra, $\inf_{i \in I} f_i \leq f_\alpha$, kështu që $\inf_{i \in I} f_i(a) \leq f_\alpha(a) = f(a)$ për çdo $a \in H$. Rrjedhimisht, $\inf_{i \in I} f_i \leq f$, kështu që $\inf_{i \in I} f_i = f$. Nga hipoteza, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është gjysmëprim. Si rrjedhim, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është minimumi i gjithë bi-hiperidealeve fuzzy gjysmëprim irreducible të H në të cilët ai përmbahet.

(4) $\Rightarrow$ (1). Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i H . Atëherë, nga përkufizimi i bi-hiperidealit fuzzy kemi që $f^3 = f \circ f \circ f \leq f$. Gjithashtu, nga Lema 6.3.5, $f^3 = f \circ f \circ f$ është një bi-hiperideal fuzzy i H . Nga hipoteza, $f^3 = \inf_{i \in I} f_i$, ku çdo f_i është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim irreducible i H i tillë që $f^3 \leq f_i$ për çdo $i \in I$. Meqenëse çdo f_i është një bi-hiperideal fuzzy gjysmëprim i H , rrjedh që $f \leq f_i$ për çdo $i \in I$. Pra $f \leq \inf_{i \in I} f_i = f \circ f \circ f$, kështu që $f^3 = f$. ■

Pohim 6.5.8 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent, atëherë një bi-hiperideal fuzzy f i H është fortësisht irreducible vetëm atëherë kur f është fortësisht prim.*

Vërtetim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy fortësisht irreducible i H dhe f_1, f_2, f_3 tre bi-hiperideale fuzzy të çfarëdoshme të H të tilla që $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$. Nga Teorema 6.5.7 kemi që $\min\{f_1, f_2, f_3\} = \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$. Por, f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht irreducible i H , kështu që kemi $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Që këtëj f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H . Anasjellas, supozojmë se f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H dhe se f_1, f_2, f_3 janë bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f$. Nga Teorema 6.5.7, kemi që $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} = \min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f$. Por f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H , kështu që kemi $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Që këtëj rrjedh se f është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht irreducible i H . ■

Në vazhdim karakterizojmë ato gjysmëhipergrupe ternare në të cilat çdo bi-hiperideal fuzzy është fortësisht prim dhe ato gjysmëhipergrupe ternare në të cilat çdo bi-hiperideal fuzzy është fortësisht irreducible.

Teoremë 6.5.9 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Cdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht prim vetëm atëherë kur çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent dhe bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen.*

Vërtetim. Supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht prim. Që këtëj, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është gjysmëprim. Nga Teorema 6.5.7, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent. Në vazhdim do tregojmë se bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Për këtë, le të jenë f_1, f_2 dy bi-hiperideale fuzzy të H , atëherë nga Teorema 6.5.7, kemi që $\min\{f_1, f_2\} = \min\{f_1, f_2, f_H\} = \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_H, f_2 \circ f_H \circ f_1, f_H \circ f_1 \circ f_2\}$. Që këtëj, $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_H, f_2 \circ f_H \circ f_1, f_H \circ f_1 \circ f_2\} \leq \min\{f_1, f_2\}$. Nga hipoteza, f_1 dhe f_2 janë bi-hiperideale fuzzy fortësisht prim të H , prandaj i tillë është dhe $\min\{f_1, f_2\}$. Atëherë, ose $f_2 \leq \min\{f_1, f_2\}$, ose $f_H \leq \min\{f_1, f_2\}$, kështu që $f_1 \leq f_2$ ose $f_2 \leq f_1$. Si rrjedhim, bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Anasjellas, le të supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent dhe bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen. Të tregojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht prim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i çfarëdoshëm i H dhe f_1, f_2, f_3 bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$. Nga Teorema 6.5.7 kemi që $\min\{f_1, f_2, f_3\} = \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$ (i).

Meqë bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen, për f_1, f_2, f_3 ekzistojnë mundësitë e mëposhtme:

- (ii) $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ (iii) $f_1 \leq f_3 \leq f_2$ (iv) $f_2 \leq f_3 \leq f_1$
 (v) $f_2 \leq f_1 \leq f_3$ (vi) $f_3 \leq f_1 \leq f_2$ (vii) $f_3 \leq f_2 \leq f_1$.

Në këto raste kemi:

- (ii) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_1$ (iii) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_1$ (iv) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_2$
 (v) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_2$ (vi) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_3$ (vii) $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_3$. Si

rrjedhim, nga (i), $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$, kështu që f është fortësisht prim. ■

Teoremë 6.5.10 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Në qoftë se bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur, atëherë çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent vetëm atëherë kur çdo bi-hiperideal fuzzy i H është prim.*

Vërtetim. Supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i çfarëdoshëm i H dhe f_1, f_2, f_3 tre bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \leq f$. Meqenëse bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur, atëherë për f_1, f_2, f_3 kemi gjashtë mundësitë që vijojnë:

- (i) $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ (ii) $f_1 \leq f_3 \leq f_2$ (iii) $f_2 \leq f_3 \leq f_1$
 (iv) $f_2 \leq f_1 \leq f_3$ (v) $f_3 \leq f_1 \leq f_2$ (vi) $f_3 \leq f_2 \leq f_1$.

Për (i) dhe (ii) kemi $f_1^3 = f_1 \circ f_1 \circ f_1 \leq f_1 \circ f_2 \circ f_3 \leq f$. Meqë f_1 është idempotent, rrjedh që $f_1 \leq f$. Në mënyrë të ngjashme, për rastet e tjera të mundshme kemi $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Anasjellas, le të supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është prim, atëherë, nga Pohimi 6.4.10, është gjysmëprim. Si rrjedhim, nga Teorema 6.5.7, çdo bi-hiperideal fuzzy i H është idempotent. ■

Pohim 6.5.11 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Në qoftë se bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur, atëherë konceptet e bi-hiperidealit fuzzy prim dhe bi-hiperidealit fuzzy fortësisht prim përputhen.*

Vërtetim. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy prim i H dhe f_1, f_2, f_3 bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $\min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$. Meqenëse bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të një gjysmëhipergrupi ternar H është tërësisht e renditur, atëherë për f_1, f_2, f_3 kemi mundësitë e mëposhtme:

- (i) $f_1 \leq f_2 \leq f_3$ (ii) $f_1 \leq f_3 \leq f_2$ (iii) $f_2 \leq f_3 \leq f_1$
 (iv) $f_2 \leq f_1 \leq f_3$ (v) $f_3 \leq f_1 \leq f_2$ (vi) $f_3 \leq f_2 \leq f_1$.

Për (i) dhe (ii) kemi $f_1^3 = \min\{f_1^3, f_1^3, f_1^3\} \leq \min\{f_1 \circ f_2 \circ f_3, f_2 \circ f_3 \circ f_1, f_3 \circ f_1 \circ f_2\} \leq f$. Meqenëse f është një bi-hiperideal fuzzy prim i H , rrjedh që $f_1 \leq f$. Në mënyrë të ngjashme, për rastet e tjera kemi që $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$. Kjo tregon se f është një bi-hiperideal fuzzy

fortësisht prim i H . Kështu, çdo bi-hiperideal fuzzy prim i H është një bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H . Gjithashtu, nga Pohimi 6.4.9, çdo bi-hiperideal fuzzy fortësisht prim i H është një bi-hiperideal fuzzy prim i H . Në këtë mënyrë, konceptet e bi-hiperidealit fuzzy prim dhe të bi-hiperidealit fuzzy fortësisht prim përputhen. ■

Teoremë 6.5.12 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar i rregullt. Pohimet që vijojnë janë ekuivalente:*

1. *Bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive.*
2. *Cdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht irreducible.*
3. *Cdo bi-hiperideal fuzzy i H është irreducible.*

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të jetë bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive. Supozojmë se f është një bi-hiperideal fuzzy i çfarëdoshëm i H dhe f_1, f_2, f_3 janë bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $\min\{f_1, f_2, f_3\} \leq f$. Meqë bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive, rrjedh që $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f_1$ ose f_2 ose f_3 . Pra, $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$, kështu që f është fortësisht irreducible. Vërtetiam se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht irreducible.

(2) $\Rightarrow$ (3). Supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është fortësisht irreducible. Le të jetë f një bi-hiperideal fuzzy i çfarëdoshëm i H dhe f_1, f_2, f_3 bi-hiperideale fuzzy të H të tilla që $\min\{f_1, f_2, f_3\} = f$. Kjo sjell që $f \leq f_1$ ose $f \leq f_2$ ose $f \leq f_3$. Nga ana tjetër, nga hipoteza kemi që $f_1 \leq f$ ose $f_2 \leq f$ ose $f_3 \leq f$, prandaj $f_1 = f$ ose $f_2 = f$ ose $f_3 = f$. Si rrjedhim, f është një bi-hiperideal fuzzy irreducible i H . Pra çdo bi-hiperideal fuzzy i H është irreducible.

(3) $\Rightarrow$ (1). Supozojmë se çdo bi-hiperideal fuzzy i H është irreducible. Të tregojmë se bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive. Le të jenë f_1 dhe f_2 dy bi-hiperideale fuzzy të H , atëherë nga Lema 6.1.1, $\min\{f_1, f_2\}$ është gjithashtu një bi-hiperideal fuzzy i H , pra dhe një bi-hiperideal fuzzy irreducible i H . Meqenëse $\min\{f_1, f_2, f_H\} = \min\{f_1, f_2\}$, rrjedh që $f_1 = \min\{f_1, f_2\}$ ose $f_2 = \min\{f_1, f_2\}$ ose $f_H = \min\{f_1, f_2\}$. Që këtë rrjedh se $f_1 \leq f_2$ ose $f_2 \leq f_1$ ose $f_1 = f_2 = f_H$. Pra, bashkësia e bi-hiperidealeve fuzzy të H është tërësisht e renditur në lidhje me përfshirjen e bashkësive. ■

Përkufizim 6.5.13 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar, B bashkësia e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të H dhe P bashkësia e gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të mirëfillta fortësisht prim të H . Për çdo $f \in B$ përcaktojmë $\theta_f = \{g \in P : f \not\leq g\}$, $\tau(P) = \{\theta_f : f \in B\}$.*

Teoremë 6.5.14 *Le të jetë $(H, \cdot)$ një gjysmëhipergrup ternar. Atëherë, $\tau(P)$ formon një topologji.*

Vërtetim. Meqenëse $\{0\}$ është një bi-hiperideal i H , atëherë nga Lema 6.3.3, $f_{\{0\}}$ është një bi-hiperideal fuzzy i H . Atëherë $\theta_{f_{\{0\}}} = \{g \in P : f_{\{0\}} \not\leq g\} = \Phi \in \tau(P)$. Gjithashtu H është një bi-

hiperideal i H , prandaj nga Lema 6.3.3, f_H është një bi-hiperideal fuzzy i H . Atëherë $\theta_{f_H} = \{g \in P : f_H \not\leq g\} = P \in \tau(P)$. Kështu $\Phi, P \in \tau(P)$. Do të tregojmë se pretja e një numri të fundëm elementesh të $\tau(P)$ i përket $\tau(P)$. Për këtë, le të jenë $\theta_{f_1}, \theta_{f_2} \in \tau(P)$, atëherë kemi për të treguar që $\theta_{f_1} \cap \theta_{f_2} \in \tau(P)$. Për këtë, të tregojmë që $\theta_{f_1} \cap \theta_{f_2} = \theta_{\min\{f_1, f_2\}} \in \tau(P)$. Le të jetë $g \in \theta_{f_1} \cap \theta_{f_2}$. Atëherë $g \in \theta_{f_1}$ dhe $g \in \theta_{f_2}$. Kështu, $g \in P$ dhe $f_1 \not\leq g$ dhe $f_2 \not\leq g$, nga përkufizimi i θ_{f_1} dhe θ_{f_2} . Pra, $\min\{f_1, f_2\} \not\leq g$, kështu që $g \in \theta_{\min\{f_1, f_2\}}$. Pra, $\theta_{f_1} \cap \theta_{f_2} \subseteq \theta_{\min\{f_1, f_2\}}$. Le të jetë tani $g \in \theta_{\min\{f_1, f_2\}}$. Atëherë, kemi $g \in P$ dhe $\min\{f_1, f_2\} \not\leq g$, nga përkufizimi i $\theta_{\min\{f_1, f_2\}}$. Si rrjedhim, $f_1 \not\leq g$ dhe $f_2 \not\leq g$, kështu që $g \in \theta_{f_1}$ dhe $g \in \theta_{f_2}$ dhe që këtij, $g \in \theta_{f_1} \cap \theta_{f_2}$. Kështu $\theta_{\min\{f_1, f_2\}} \subseteq \theta_{f_1} \cap \theta_{f_2}$. Pra, $\theta_{f_1} \cap \theta_{f_2} = \theta_{\min\{f_1, f_2\}} \in \tau(P)$. Tregojmë tani që bashkimi i çdo numri elementesh të $\tau(P)$ i përket $\tau(P)$. Për këtë, le të jetë $\{\theta_{f_\alpha} : \alpha \in I\} \subseteq \tau(P)$. Atëherë, duhet të tregojmë që $\bigcup_{\alpha} \theta_{f_\alpha} \in \tau(P)$. Kjo rrjedh nga

$$\bigcup_{\alpha} \theta_{f_\alpha} = \{g \in P : f_\alpha \not\leq g \text{ për ndonjë } \alpha \in I\} = \{g \in P : \bigwedge_{\alpha} f_\alpha \not\leq g\} = \theta_{\bigwedge_{\alpha} f_\alpha} \in \tau(P)$$

ku $\bigwedge_{\alpha} f_\alpha$ është minimumi i gjithë bi-hiperidealeve fuzzy të H të cilat janë më të mëdha ose të barabarta me $\bigwedge_{\alpha} f_\alpha$. ■

§6.6 Disa përkufizime bazë të teorisë së bashkësive soft

Disa probleme të vështira në ekonomi, inxhinieri, mjedis, shkenca sociale, mjekësi dhe shumë fusha të tjera përfshijnë të dhëna të pasigurta. Ne zakonisht ndeshemi me të dhëna që janë të paqarta dhe përmbajnë shumë lloje pasigurish. Siç u theksua dhe në seksionin e parë të këtij kapitulli, ka disa teori të njohura të zhvilluara për të kapërcyer vështirësitë që lindin për shkak të pasigurisë. Për shembull, teoria e probabilitetit, teoria e bashkësive fuzzy [97], teoria e bashkësive rough [112] dhe mjete të tjera matematike. Por të gjitha këto teori kanë vështirësitë e tyre të trashëguara siç janë vënë në dukje edhe nga Molodtsov [111]. Në teorinë e probabilitetit, ne duhet të bëjmë një sasi të madhe eksperimentesh në mënyrë që të kontrollohen mostrat. Në shkencat shoqërore dhe ekonomi, nuk është gjithmonë e mundur për të bërë kaq shumë eksperimente. Molodtsov mendon se vështirësitë në teorinë e bashkësive fuzzy, e cila konsiderohet si përqasja më e përshtatshme për t'u marrë me pasiguritë, lindin për shkak të pamjaftueshmërisë së mjeteve të parametrizimit të kësaj teorie.

Në 1999, Molodtsov prezantoi konceptin e bashkësive soft si një mjet i ri matematik për t'u marrë me pasiguritë dhe që është i lirë nga vështirësitë që ndikonin në metodat ekzistuese. Teoria e bashkësive soft ka potencial të pasur për aplikime në shumë drejtime, disa prej të cilave janë

demonstruar nga Molodtsov në artikullin e tij pioner [111]. Molodtsov gjithashtu tregoi se si Teoria e Bashkësive Soft (TBS) është e lirë nga sindroma e pamjaftueshmërisë së parametrizimit të Teorisë së Bashkësive Fuzzy (TBF), Teoria e Bashkësive Rough (TBR), Teoria e Probabilitetit dhe Teoria e Lojës. TBS është një kuadër shumë i përgjithshëm. Shumë prej modeleve të përdorura shfaqen si raste të veçanta të TBS. Zbatimet e TBS në disiplina të tjera dhe në problemet e jetës reale janë në vrullin e tyre. Për momentin, hulumtimet në TBS janë në progres. Aspektet teorike dhe të aplikimeve të TBS janë shqyrtuar në një sërë artikujsh, si [113-116]. Maji dhe të tjerë [113] zbatuan bashkësitë soft në një problem të vendim-marrjes dhe studiuan një sërë veprimesh në TBS. Pei dhe të tjerë [114] shqyrtuan marrëdhëniet midis bashkësive soft dhe sistemeve të informacionit. Roy dhe të tjerë [115] zbatuan teorinë e bashkësive fuzzy soft në problemin e vendim-marrjes. Maji dhe të tjerë [116] studiuan një sërë veprimesh në TBS. Ali dhe të tjerë [117] gjithashtu studiuan disa koncepte të reja si prerjen e kufizuar, bashkimin e kufizuar, diferencën e kufizuar dhe prerjen e zgjeruar të dy bashkësive soft. Struktura algjebrike e bashkësive soft është studiuar nga shumë autorë. Për shembull, Aktas dhe Cagman [118] prezantuan konceptet bazë të TBS dhe krahasuan bashkësitë soft me konceptet përkatëse të bashkësive fuzzy dhe bashkësive rough. Ata shqyrtuan konceptin dhe vetitë e grupeve soft. Aplikime të tjera të TBS në struktura të ndryshme algjebrike mund të gjenden në [123-134] etj. Kohët e fundit, Leoreanu-Fotea dhe Corsini [119] dhe më pas Davvaz e të tjerë [120-122] prezantuan dhe analizuan një sërë tipe të hiperstrukturave soft: hipergrupoidet soft, gjysmëhipergrupet soft, hipergrupet soft dhe poligrupet soft.

Në seksionet e mëposhtme ne prezantojmë dhe iniciojmë studimin e gjysmëhipergrupeve ternare soft duke përdorur TBS. Konceptet e gjysmëhipergrupeve ternare soft, nëngjysmëhipergrupeve ternare soft, hiperidealet e majta (djathta, lateral) soft, hiperidealet soft, kuazi-hiperidealet dhe bi-hiperidealet soft janë prezantuar dhe janë studiuar vetitë e tyre.

Le të jetë U një bashkësi univers fillestar dhe E një bashkësi parametrash. Bashkësia fuqi e U shënohet me $\mathcal{P}(U)$ dhe A është një nënbashkësi e E .

Përkufizim 6.6.1 Çifti (F, A) quhet bashkësi soft mbi U , ku $F : A \rightarrow \mathcal{P}(U)$ është një pasqyrim.

Me fjalë të tjera, një bashkësi soft mbi U është një familje e parametrizuar e nënbashkësive të universit U . Për $a \in A$, $F(a)$ mund të konsiderohet si bashkësia e elementeve të a -përafrimit të bashkësisë soft (F, A) . Vërejmë se bashkësia soft nuk është një bashkësi, siç vuri në dukje Molodtsov në një sërë shembujsh [111].

Le të shqyrtojmë shembullin e mëposhtëm [116].

Shembull 6.6.2[116] Le të shqyrtojmë një bashkësi soft (F, E) , e cila përshkruan "atraktivitetin e shtëpive", të shqyrtuara për blerje. Supozojmë se janë gjashtë shtëpi në universin U , të dhëna nga $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ dhe $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ është një bashkësi e parametrave vendim-marrëse, ku $e_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ janë përkatësisht parametrat "e shtrenjtë", "e bukur", "e drunjte", "e lirë" dhe "me gjelbërim rrotull". Shqyrtojmë një pasqyrim $F : E \rightarrow \mathcal{P}(U)$. P.sh. supozojmë se $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$, $F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$, $F(e_5) = \{h_1\}$. Bashkësia soft (F, E) është një familje e parametrizuar $\{F(e_i), i = 1, \dots, 5\}$ e nënbashkësive të bashkësisë U dhe mund të shihet si një grumbull përafrimesh: $(F, E) = \{\text{shtëpi të shtrenja} =$

$\{h_2, h_4\}$, shtëpi të bukura $= \{h_1, h_3\}$, shtëpi të drunjtë $= \{h_3, h_4, h_5\}$, shtëpi të lira $= \{h_1, h_3, h_5\}$, shtëpi me gjelbërim rrotull $= \{h_1\}$. Çdo përafrim ka dy pjesë : një predikat dhe një bashkësi vlerash përafrimi.

Në [129], për një bashkësi soft (F, A) , bashkësia $Supp(F, A) = \{x \in A \mid F(x) \neq \emptyset\}$ quhet suport (support) i bashkësisë soft (F, A) . Në qoftë se $Supp(F, A) \neq \emptyset$, atëherë (F, A) quhet jo-null.

Përkufizim 6.6.3 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Prerje e zgjeruar (extended intersection) e (F, A) dhe (G, B) , që shënohet $(F, A) \bigcap_E (G, B)$ është bashkësia soft (K, C) , që plotëson kushtet : (i) $C = A \cup B$; (ii) për çdo $e \in C$,

$$K(e) = \begin{cases} F(e) & \text{n.q.s. } e \in A \setminus B, \\ G(e) & \text{n.q.s. } e \in B \setminus A, \\ F(e) \cap G(e) & \text{n.q.s. } e \in A \cap B. \end{cases}$$

Përkufizim 6.6.4 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Prerje e kufizuar (restricted intersection) e (F, A) dhe (G, B) , që shënohet $(F, A) \bigcap_R (G, B)$ është bashkësia soft (K, C) , që plotëson kushtet : (i) $C = A \cap B$; (ii) për çdo $e \in C$, $K(e) = F(e) \cap G(e)$. Shënojmë $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (K, C)$.

Përkufizim 6.6.5 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Bi-prerje (bi-intersection) e (F, A) dhe (G, B) është një bashkësi soft (K, C) , ku $C = A \cap B$ dhe $K : C \rightarrow \mathcal{P}(U)$ është një pasqyrim i dhënë nga $K(x) = F(x) \cap G(x)$ për çdo $x \in C$. Shënojmë $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (K, C)$.

Përkufizim 6.6.6 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Bashkim i zgjeruar (extended union) i (F, A) dhe (G, B) , që shënohet $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është bashkësia soft (K, C) , që plotëson kushtet e mëposhtme : (i) $C = A \cup B$; (ii) për çdo $e \in C$,

$$K(e) = \begin{cases} F(e) & \text{n.q.s. } e \in A \setminus B, \\ G(e) & \text{n.q.s. } e \in B \setminus A, \\ F(e) \cup G(e) & \text{n.q.s. } e \in A \cap B. \end{cases}$$

Përkufizim 6.6.7 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Bashkimi i kufizuar (restricted union) i (F, A) dhe (G, B) , që shënohet $(F, A) \bigcup_R (G, B)$, është bashkësia soft (K, C) që plotëson kushtet e mëposhtme : (i) $C = A \cap B$; (ii) për çdo $e \in C$, $K(e) = F(e) \cup G(e)$. Shënojmë $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (K, C)$.

Përkufizim 6.6.8 Le të jetë $(F_i, A_i)_{i \in I}$ një familje joboshe e bashkësive soft mbi një univers të përbashkët U . Bashkim i këtyre bashkësive soft është bashkësia soft (G, B) e tillë që $B = \bigcup_{i \in I} A_i$ dhe për çdo $x \in B$, $G(x) = \bigcup_{i \in I(x)} F_i(x)$, ku $I(x) = \{i \in I \mid x \in A_i\}$. Shënojmë $\bigcup_{i \in I} (F_i, A_i) = (G, B)$.

Përkufizim 6.6.9 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Atëherë $(F, A) \text{ AND } (G, B)$ që shënohet $(F, A) \wedge (G, B)$ përkufizohet nga $(F, A) \wedge (G, B) = (K, A \times B)$, ku $K(x, y) = F(x) \cap G(y)$ për çdo $(x, y) \in A \times B$.

Përkufizim 6.6.10 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Atëherë $(F, A) \text{ OR } (G, B)$ që shënohet $(F, A) \vee (G, B)$ përkufizohet nga $(F, A) \vee (G, B) = (K, A \times B)$, ku $K(x, y) = F(x) \cup G(y)$ për çdo $(x, y) \in A \times B$.

Përkufizim 6.6.11 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi një univers të përbashkët U . Themë që (F, A) është një nënbashkësi soft e (G, B) , që shënohet $(F, A) \subseteq (G, B)$, në qoftë se plotëson: (i) $A \subseteq B$; (ii) $F(a) \subseteq G(a)$ për çdo $a \in A$.

Themë që (F, A) dhe (G, B) janë soft të barabarta (soft equal) dhe shënohet $(F, A) = (G, B)$ në qoftë se $(F, A) \subseteq (G, B)$ dhe $(G, B) \subseteq (F, A)$.

§6.7 Gjysmëhipergrupet ternare soft dhe hiperidealet soft

Më poshtë do të shqyrtojmë bashkësitë soft mbi një gjysmëhipergrup ternar (H, f) .

Përkufizim 6.7.1 Hipershumëzimi i kufizuar i bashkësive soft $(F_1, B_1), (F_2, B_2), (F_3, B_3)$ mbi një gjysmëhipergrup ternar H , që shënohet $\hat{f}((F_1, B_1), (F_2, B_2), (F_3, B_3))$, përkufizohet si një bashkësi soft

$$(K, D) = \hat{f}((F_1, B_1), (F_2, B_2), (F_3, B_3)),$$

ku $D = \bigcap \{B_i \mid i = 1, 2, 3\} \neq \emptyset$ dhe $K : D \rightarrow \mathcal{P}(H)$ përcaktuar nga $K(d) = f(F_1(d), F_2(d), F_3(d))$ për çdo $d \in D$.

Përkufizim 6.7.2 Le të jetë (F, A) një bashkësi soft jo-null mbi një gjysmëhipergrup ternar (H, f) . Atëherë (F, A) quhet një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H në qoftë se $F(x)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H për çdo $x \in \text{Supp}(F, A)$, d.m.th.

$$\bigwedge f((F, A), (F, A), (F, A)) \subseteq (F, A).$$

Një bashkësi soft (H, E) mbi H quhet bashkësi soft absolute (absolute soft set) mbi H , në qoftë se për çdo $e \in E$, $H(e) = H$.

Pohim 6.7.3 Një bashkësi soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H vetëm atëherë kur për çdo $a \in A$, $F(a) \neq \emptyset$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H .

Vërtetim. Le të jetë (F, A) një hipergrup ternar soft mbi H dhe $a \in A$ të tilla që $F(a) \neq \emptyset$. Nga përkufizimi

$$\bigwedge f((F, A), (F, A), (F, A)) = (K, A \cap A \cap A) = (K, A)$$

ku K përcaktohet nga

$$K(a) = f(F(a), F(a), F(a)) \text{ për çdo } a \in A.$$

Meqë $\bigwedge f((F, A), (F, A), (F, A)) \subseteq (F, A)$, rrjedh që $K(a) \subseteq F(a)$ për çdo $a \in A$, kështu që $f(F(a), F(a), F(a)) \subseteq F(a)$. Kjo do të thotë që $F(a)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H .

Anasjellas, le të jetë $F(a) \neq \emptyset$ një nëngjysmëhipergrup ternar i H për çdo $a \in A$. Kemi $f(F(a), F(a), F(a)) \subseteq F(a)$, domethënë $K(a) \subseteq F(a)$. Kështu, $(K, A) \subseteq (F, A)$, e cila sjell që

$$\bigwedge f((F, A), (F, A), (F, A)) \subseteq (F, A)$$

Pra, (F, A) është një gjysmëhipergrup ternar mbi H . ■

Shembull 6.7.4 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, g\}$ dhe $f(x, y, z) = (x * y) * z$ për çdo $x, y, z \in H$, ku $*$ përcaktohet nga tabela :

*	a	b	c	d	e	g
a	a	{a, b}	c	{c, d}	e	{e, g}
b	b	b	d	d	g	g
c	c	{c, d}	c	{c, d}	c	{c, d}
d	d	d	d	d	d	d
e	e	{e, g}	c	{c, d}	e	{e, g}
g	g	g	d	d	g	g

Atëherë (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Përcaktojmë $F : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ nga $F(a) = \{a, b\}, F(b) = \{b, d, g\}, F(c) = \{c, d\}, F(d) = \{d\}, F(e) = \{a, b, e, g\}, F(g) = \{d, g\}$. Është e qartë se për çdo $x \in H$, $F(x)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Pra, (F, H) është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Vërejmë se jo çdo bashkësi soft mbi një gjysmëhipergrup

ternar H , është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Le të jetë $G: H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ i përcaktuar nga $G(a) = \{a, b, c\}, G(b) = \{b, d, g\}, G(c) = \{c, d\}, G(d) = \{d\}, G(e) = \{a, b, e, g\}, G(g) = \{d, e, g\}$.

Atëherë (G, H) është një bashkësi soft mbi H , por ajo nuk është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H , sepse $G(a)$ dhe $G(g)$ nuk janë nëngjysmëhipergroupe ternare të H .

Pohim 6.7.5 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe ternare soft mbi H të tilla që $A \cap B = \emptyset$. Atëherë $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .*

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(K, C) = (F, A) \bigcup_E (G, B)$, ku $C = A \cup B$ dhe $A \cap B = \emptyset$. Atëherë për çdo $c \in C$, ose $c \in A \setminus B$ ose $c \in B \setminus A$. Në qoftë se $c \in A \setminus B$, atëherë $K(c) = F(c)$ dhe në qoftë se $c \in B \setminus A$, atëherë $K(c) = G(c)$. Kështu, në të dy rastet $K(c)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Pra, (K, C) është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . ■

Pohim 6.7.6 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe ternare soft mbi H të tilla që $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të supozojmë se $A \cap B \neq \emptyset$. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \bigcup_E (G, B)$ ku

$$K(c) = \begin{cases} F(c) & \text{n.q.s. } c \in A \setminus B, \\ G(c) & \text{n.q.s. } c \in B \setminus A, \\ F(c) \cup G(c) & \text{n.q.s. } c \in A \cap B. \end{cases}$$

Për të treguar se (K, C) është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H , duhet të tregojmë se

$$\hat{f}((K, C), (K, C), (K, C)) \subseteq (K, C).$$

Kemi

$$\hat{f}((K, C), (K, C), (K, C)) = (P, C).$$

dhe

$$P(c) = f(K(c), K(c), K(c)) \text{ për çdo } c \in C.$$

Për $c \in C$, kemi

$$P(c) = f(K(c), K(c), K(c)) = f((F, A) \bigcup_E (G, B), (F, A) \bigcup_E (G, B), (F, A) \bigcup_E (G, B))$$

$$\subseteq \begin{cases} F(c) & \text{n.q.s. } c \in A \setminus B, \\ G(c) & \text{n.q.s. } c \in B \setminus A, \\ F(c) \cap G(c) & \text{n.q.s. } c \in A \cap B. \end{cases}$$

Atëherë $P(c) \subseteq K(c)$ për çdo $c \in C$. Pra, $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . ■

Pohim 6.7.7 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe ternare soft mbi H të tilla që $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të supozojmë se $A \cap B \neq \emptyset$. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$ ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe $K(c) = F(c) \cap G(c)$ për çdo $c \in C$. Për të treguar që (K, C) është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H , duhet të tregojmë që

$$\bigwedge f((K, C), (K, C), (K, C)) \subseteq (K, C) .$$

Kemi

$$\bigwedge f((K, C), (K, C), (K, C)) = (P, C) .$$

dhe

$$P(c) = f(K(c), K(c), K(c)) \text{ për çdo } c \in C .$$

Për $c \in C$, kemi

$$P(c) = f(K(c), K(c), K(c)) = f(F(c) \cap G(c), F(c) \cap G(c), F(c) \cap G(c)) \subseteq F(c) \cap G(c) = K(c) .$$

Atëherë $P \subseteq K$. Pra, $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . ■

Pohim 6.7.8 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe ternare soft mbi H . Atëherë $(F, A) \wedge (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të jetë $(F, A) \wedge (G, B) = (K, A \times B) = (K, C)$ ku $K(a, b) = F(a) \cap G(b)$ për çdo $(a, b) \in A \times B$. Duhet të tregojmë se $(K, A \times B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Kemi

$$(P, C) = \bigwedge f((K, A \times B), (K, A \times B), (K, A \times B))$$

ku $C = A \times B$ dhe $P(a, b) = f(K(a, b), K(a, b), K(a, b))$ për çdo $(a, b) \in C$. Për $(a, b) \in C$, kemi

$$P(a, b) = f(K(a, b), K(a, b), K(a, b)) = f(F(a) \cap G(b), F(a) \cap G(b), F(a) \cap G(b)) \subseteq F(a) \cap G(b) = K(a, b) .$$

Atëherë $P \subseteq K$. Pra, $(F, A) \wedge (G, B)$ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . ■

Përkufizim 6.7.9 *Le të jenë $(F_1, A_1), (F_2, A_2), (F_3, A_3)$ tre gjysmëhipergroupe ternare soft mbi gjysmëhipergrupin ternar (H, f) . Përkufizojmë*

$$f^*((F_1, A_1), (F_2, A_2), (F_3, A_3)) = (K, A_1 \times A_2 \times A_3)$$

të jetë një bashkësi soft, ku $K(a_1, a_2, a_3) = f((F_1(a_1), F_2(a_2), F_3(a_3)))$.

Pohim 6.7.10 *Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergrup ternar ndërrimtar. Në qoftë se $(F_1, A_1), (F_2, A_2), (F_3, A_3)$ janë gjysmëhipergroupe ternare soft mbi H , atëherë*

$$f^*((F_1, A_1), (F_2, A_2), (F_3, A_3)) \text{ është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi } H .$$

Vërtetim. Le të jetë $f^*((F_1, A_1), (F_2, A_2), (F_3, A_3)) = (K, A_1 \times A_2 \times A_3)$ ku

$$K(a_1, a_2, a_3) = f(F_1(a_1), F_2(a_2), F_3(a_3))$$

për çdo $(a_1, a_2, a_3) \in A_1 \times A_2 \times A_3$. Kemi

$$(P, C) = \bigwedge f((K, A_1 \times A_2 \times A_3), \dots, (K, A_1 \times A_2 \times A_3))$$

ku $C = A_1 \times A_2 \times A_3$ dhe

$$P(a_1, a_2, a_3) = f(K(a_1, a_2, a_3), K(a_1, a_2, a_3), K(a_1, a_2, a_3))$$

për çdo $(a_1, a_2, a_3) \in C$. Për $(a_1, a_2, a_3) \in C$, meqë H është ndërrimtar, kemi

$$P(a_1, a_2, a_3) = f(K(a_1, a_2, a_3), K(a_1, a_2, a_3), K(a_1, a_2, a_3))$$

$$= f(f(F_1(a_1), F_2(a_2), F_3(a_3)), f(F_1(a_1), F_2(a_2), F_3(a_3))) \\ \subseteq f(F_1(a_1), F_2(a_2), F_3(a_3)) = K(a_1, a_2, a_3).$$

Atëherë $P \subseteq K$. Kjo përfundon vërtetimin. ■

Përkufizim 6.7.11 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi H të tilla që (F, A) është një gjysmëhipergrup ternar soft dhe $(G, B) \subseteq (F, A)$. Atëherë (G, B) quhet nëngjysmëhipergrup ternar soft (hiperideal) i (F, A) në qoftë se $G(b)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar (hiperideal) i $F(b)$ për çdo $b \in B$.

Pohim 6.7.12 Le të jetë (F, A) një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H dhe le të jetë $\{(K_i, A_i) \mid i \in I\}$ një familje joboshe e nëngjysmëhipergrupeve ternare soft të (F, A) . Atëherë pohimet e mëposhtme janë vërteta:

1. $\bigcap_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar soft i (F, A) .
2. $\bigwedge_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar soft i $\bigwedge_{i \in I} (F, A)$.
3. $\bigcup_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup ternar soft i (F, A) në qoftë se bashkësia $\{A_i \mid i \in I\}$ është e tillë që elementet e saj janë dy nga dy jo-prerëse (pairwise disjoint).

Vërtetim. Evident. ■

Përkufizim 6.7.13 Një bashkësi soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H quhet hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) soft mbi H , në qoftë se $\bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$. Një bashkësi soft (F, A) mbi H quhet hiperideal soft mbi H , në qoftë se është hiperideal i majtë soft, hiperideal i djathtë soft dhe hiperideal lateral soft mbi H .

Pohim 6.7.14 Një bashkësi soft (F, A) mbi H është një hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) soft mbi H vetëm atëherë kur për çdo $a \in A, F(a) \neq \emptyset$ është një hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) i H .

Vërtetim. Le të supozojmë se (F, A) është një hiperideal i majtë soft mbi H . Tregojmë që $F(a) \neq \emptyset$ është një hiperideal i majtë mbi H . Nga përkufizimi kemi

$$\bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) = (K, E \cap E \cap A) = (K, A),$$

ku $f(H(a), H(a), F(a)) = K(a)$, për çdo $a \in A$. Kjo do të thotë, $f(H, H, F(a)) = K(a)$. Meqë

$$\bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A), \text{ ku } (K, A) \subseteq (F, A), \text{ kemi, } (K(a) \subseteq F(a) \text{ për çdo } a \in A.$$

Pra, $f(H, H, F(a)) \subseteq F(a)$. Kjo tregon që $F(a)$ është një hiperideal i majtë i H .

Anasjellas, le të supozojmë që $F(a) \neq \emptyset$ është një hiperideal i majtë i H . Do të tregojmë që (F, A) është një hiperideal i majtë soft mbi H . Nga përkufizimi

$$\bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) = (K, E \cap E \cap A) = (K, A)$$

ku $f(H(a), H(a), F(a)) = K(a)$, për çdo $a \in A$. Kjo do të thotë, $f(H, H, F(a)) = K(a)$. Por $f(H, H, F(a)) \subseteq F(a)$. Kjo sjell që $K(a) \subseteq F(a)$ dhe kështu $(K, A) \subseteq (F, A)$. Pra,

$f((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$. Atëherë, (F, A) është një hiperideal i majtë soft mbi H . ■

Hiperideali soft mbi H i përkufizuar si më sipër është i ndryshëm nga hiperideali soft i një gjysmëhipergrupi ternar soft. Shembulli i mëposhtëm e tregon këtë.

Shembull 6.7.15 Le të jetë $H = \{a, b, c, d, e, f\}$ dhe $f(x, y, z) = (x \circ y) \circ z$ për çdo $x, y, z \in H$ me hiperveprim $\circ$ të dhënë nga tabela e mëposhtme:

$\circ$	0	a	b	c	d	e	f
0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	{a, b}	c	{c, d}	e	{e, f}
b	0	b	b	d	d	f	f
c	0	c	{c, d}	c	{c, d}	c	{c, d}
d	0	d	d	d	d	d	d
e	0	e	{e, f}	c	{c, d}	e	{e, f}
f	0	f	f	d	d	f	f

Atëherë (H, f) është një gjysmëhipergrup ternar. Le të shqyrtojmë bashkësinë soft (F, H) , ku $F : H \rightarrow \mathcal{P}(H)$ është përkufizuar nga

$$F(0) = \{0\}, F(a) = \{0, d\}, F(b) = \{0, b, d, f\}, F(c) = \{0, c, d\}, F(d) = \{0, d, f\}, F(e) = \{0, e, f\}, F(f) = \{0, a, b\}$$

Është e qartë se (F, H) është një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Le të shqyrtojmë bashkësinë soft $(G, \{b\})$ në të cilin $G : \{b\} \rightarrow \mathcal{P}(H)$ përkufizohet nga $G(b) = \{0, d\}$. Meqë $\{b\} \subseteq H$ dhe $G(b)$ është një hiperideal i $F(b)$, atëherë $(G, \{b\})$ është një hiperideal soft i (F, H) . Por $G(b) = \{0, d\}$ nuk është një hiperideal i H , kështu $(G, \{b\})$ nuk është një hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.7.16 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft çfarëdo mbi një gjysmëhipergrup ternar H , me $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një hiperideal soft mbi H që përfshihet tek (F, A) dhe (G, B) .

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.7.17 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft çfarëdo mbi një gjysmëhipergrup ternar H . Atëherë $(F, A) \cup_E (G, B)$ është një hiperideal soft mbi H që përmban (F, A) dhe (G, B) .

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(K, C) = (F, A) \cup_E (G, B)$, ku $C = A \cup B$ për çdo $c \in C = A \cup B$, ose $c \in A \setminus B$ ose $c \in B \setminus A$ ose $c \in A \cap B$. Në qoftë se $c \in A \setminus B$, atëherë $K(c) = F(c)$, në qoftë se $c \in B \setminus A$, atëherë $K(c) = G(c)$ dhe në qoftë se $c \in A \cap B$, atëherë $K(c) = F(c) \cup G(c)$, në të gjitha rastet $K(c)$ është një hiperideal i H . Pra, (K, C) është hiperideal soft mbi H . Meqë $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ dhe $F(c) \subseteq K(c), G(c) \subseteq K(c)$ për çdo $c \in C$. Atëherë, nga përkufizimi i nënbashkësive soft $(F, A) \subseteq (K, C)$ dhe $(G, B) \subseteq (K, C)$. ■

Pohim 6.7.18 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft çfarëdo mbi një gjysmëhipergrup ternar H . Atëherë $(F, A) \wedge (G, B)$ është një hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.7.19 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft çfarëdo mbi një gjysmëhipergrup ternar H . Atëherë $(F, A) \vee (G, B)$ është një hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.7.20 *Le të jetë (F, A) një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H dhe le të jetë $\{(K_i, A_i) \mid i \in I\}$ një familje jo-boshe e hiperidealeve soft të (F, A) . Atëherë kanë vend pohimet e mëposhtme :*

1. $\cap_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një hiperideal soft i (F, A) .
2. $\wedge_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një hiperideal soft i $\wedge_{i \in I} (F, A)$.
3. $\cup_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një hiperideal soft i (F, A) .
4. $\vee_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një hiperideal soft i $\vee_{i \in I} (F, A)$.

Vërtetim. Evident. ■

§6.8 Kuazi-hiperidealet dhe bi-hiperidealet soft mbi gjysmëhipergrupet ternare

Përkufizim 6.8.1 *Një bashkësi soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H quhet kuazi-hiperideal soft mbi H në qoftë se*

1. $\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$
2. $\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$

ku (H, E) është bashkësi soft absolute mbi H .

Pohim 6.8.2 *Një bashkësi soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H është kuazi-hiperideal soft mbi H vetëm atëherë kur për çdo $a \in A, F(a) \neq \emptyset$ është kuazi-hiperideal i H .*

Vërtetim. Le të supozojmë se një bashkësi soft (F, A) mbi H është kuazi-hiperideal soft mbi H . Tregojmë që $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H . Nga përkufizimi i shumëzimit të kufizuar,

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) = (G, A \cap E \cap E) = (G, A) \quad (1)$$

$$\hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) = (S, E \cap A \cap E) = (S, A) \quad (2)$$

$$\hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) = (I, E \cap E \cap A) = (I, A) \quad (3)$$

$$\hat{f}((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) = (J, E \cap E \cap A \cap E \cap E) = (J, A) \quad (4)$$

Nga ekuacionet (1), (2), (3) rrjedh që

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) = (G, A) \cap_R (S, A) \cap_R (I, A) \quad (5)$$

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) = (K, A) \quad (6)$$

Por (F, A) është një kuazi-hiperideal mbi H . Pra

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A) .$$

Nga ekuacioni (6), $(K, A) \subseteq (F, A)$, që do të thotë, $K(a) \subseteq F(a)$ për çdo $a \in A$. Nga ekuacioni (6) rrjedh që $\forall a \in A$,

$$f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), F(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) = K(a)$$

Nga kjo rrjedh që $\forall a \in A$,

$$f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), F(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) \subseteq F(a) \quad (7)$$

Në mënyrë të ngjashme, nga ekuacionet (1), (3), (4), kemi

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) = (P, A) \quad (8)$$

Meqë (F, A) është kuazi-hiperideal mbi H , kemi

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$$

Pra, $(P, A) \subseteq (F, A)$, që do të thotë, për çdo $a \in A$, $P(a) \subseteq F(a)$. Nga ekuacioni (8), kemi për çdo $a \in A$, $f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) = P(a)$.

Nga kjo rrjedh që

$$f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) \subseteq F(a) \quad (9)$$

Nga ekuacionet (7) dhe (9), është e qartë se $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H .

Anasjellas, le të jetë $F(a) \neq \emptyset$ një kuazi-hiperideal i H për çdo $a \in A$. Do të tregojmë që (F, A) është kuazi-hiperideal soft mbi H . Nga ekuacionet (1), (2), (3) kemi

$$\begin{aligned} & \hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \\ & = (G, A) \cap_R (S, A) \cap_R (I, A) = (K, A) \end{aligned}$$

Nga përkufizimi, $\forall a \in A$, kemi

$$f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), F(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) = K(a) .$$

Por $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H . Pra,

$$K(a) = f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), F(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) \subseteq F(a) ,$$

dhe kështu $(K, A) \subseteq (F, A)$. Pra,

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)) \cap_R \hat{f}((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A) \quad (10)$$

Nga ekuacionet (1), (3) dhe (4) kemi që për çdo $a \in A$,

$$\begin{aligned} & \bigwedge f((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) \\ & = (G, A) \cap_R (I, A) \cap_R (J, A) = (P, A) \end{aligned}$$

dhe gjithashtu

$$f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) = P(a).$$

Meqë $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H , kemi

$$P(a) = f(F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a), H(a), H(a)) \cap f(H(a), H(a), F(a)) \subseteq F(a)$$

dhe kështu $(P, A) \subseteq (F, A)$. Pra, kemi

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A), (H, E), (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A) \quad (11)$$

Nga ekuacionet (10) dhe (11), (F, A) është kuazi-hiperideal mbi H . ■

Pohim 6.8.3 *Le të jenë (R, A) , (L, B) dhe (M, C) përkatësisht hiperideal i djathtë soft, i majtë soft dhe lateral soft mbi H . Atëherë $(R, A) \cap_R (M, C) \cap_R (L, B)$ është një kuazi-hiperideal mbi H .*

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.8.4 *Le të jenë (R, A) , (L, B) dhe (M, C) përkatësisht hiperideal i djathtë soft, i majtë soft dhe lateral soft mbi H të tilla që $A \cap B \cap C = \emptyset$. Atëherë $(R, A) \cap_E (M, C) \cap_E (L, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, D) = (R, A) \cap_E (M, C) \cap_E (L, B)$, ku $D = A \cup B \cup C, A \cap B \cap C = \emptyset$, dhe

$$S(d) = \begin{cases} R(d) & \text{n.q.s. } d \in A \setminus B \cap C \\ M(d) & \text{n.q.s. } d \in C \setminus A \cap B, \\ L(d) & \text{n.q.s. } d \in B \setminus A \cap C. \end{cases}$$

për çdo $d \in D$. Në secilin rast, $S(d)$ është kuazi-hiperideal i H . Meqë çdo hiperideal i majtë, i djathtë dhe lateral i një gjysmëhipergrupi ternar H është kuazi-hiperideal i H , kështu, nga përkufizimi, $(S, D) = (R, A) \cap_E (M, C) \cap_E (L, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.8.5 *Çdo hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) soft mbi një gjysmëhipergrup ternar H është kuazi-hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Le të jetë (L, A) një hiperideal i majtë soft mbi H . Atëherë $L(a)$ është hiperideal i majtë i H . Meqë çdo hiperideal i majtë i H është kuazi-hiperideal i H , prandaj $L(a)$ është kuazi-hiperideal i H . Pra, (L, A) është kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

E anasjella e pohimit të mësipërm nuk është e vërtetë në përgjithësi dhe këtë e tregon shembulli i mëposhtëm.

Shembull 6.8.6 *Le të shqyrtojmë gjysmëhipergrupin ternar (H, f) të Shembullit 6.7.15. Le të shqyrtojmë $A = \{b\}$ dhe $G: \{b\} \rightarrow \mathcal{P}(H)$ të përcaktuar nga $G(b) = \{0, b, d, f\}$. Atëherë, mund të verifikohet lehtë se (G, B) është kuazi-hiperideal soft mbi H . Por ai nuk është hiperideal i majtë soft dhe hiperideal lateral soft mbi H .*

Pohim 6.8.7 Çdo hiperideal i majtë (i djathtë, lateral) soft mbi një gjysmëhipergrup ternar H është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.8.8 Çdo kuazi-hiperideal soft është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.8.9 Le të jenë (R, A) , (L, B) dhe (M, C) përkatësisht hiperideal i djathtë soft, i majtë soft dhe lateral soft mbi H . Atëherë $(R, A) \wedge (M, C) \wedge (L, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, D) = (R, A) \wedge (M, C) \wedge (L, B)$, ku $D = A \times C \times B$ dhe për çdo $(a, c, b) \in A \times C \times B$, $S(a, c, b) = R(a) \cap M(c) \cap L(b)$ është kuazi-hiperideal i H . Meqë prerja e hiperidealit të majtë, të djathtë dhe lateral është kuazi-hiperideal i H , atëherë $(R, A) \wedge (M, C) \wedge (L, B)$ është kuazi-hiperideal mbi H . ■

Pohim 6.8.10 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy kuazi-hiperideale soft mbi një gjysmëhipergrup ternar H . Kanë vend pohimet e mëposhtme :

1. $(F, A) \cap_R (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .
2. $(F, A) \cap_E (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .
3. $(F, A) \wedge (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .
4. $(F, A) \cup_E (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H , kur $A \cap B = \emptyset$.

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.8.11 Le të jenë (F, A) një kuazi-hiperideal soft dhe (G, B) një gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft i (G, B) .

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$, ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe $S(c) = F(c) \cap G(c)$ për çdo $c \in C$, meqë $S(c) \subseteq F(c)$ dhe $S(c) \subseteq G(c)$. Tregojmë që $S(c)$ është kuazi-hiperideal i $G(c)$. Meqë $S(c) \subseteq G(c)$,

$$\begin{aligned} & f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \\ & \subseteq f(G(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), G(c)) \\ & \subseteq f(G(c), G(c), G(c)) \subseteq G(c) \end{aligned}$$

sepse $G(c)$ është nëngjysmëhipergrup ternar i H . Nga kjo rrjedh që

$$f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \subseteq G(c) \quad (1).$$

Gjithashtu $S(c) \subseteq F(c)$. Kështu

$$\begin{aligned} & f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \\ & \subseteq f(F(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), F(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), F(c)) \\ & \subseteq f(F(c), H(c), H(c)) \cap f(H(c), F(c), H(c), H(c)) \cap f(H(c), H(c), F(c)) \subseteq F(c) \end{aligned}$$

sepse $F(c)$ është kuazi-hiperideal i H . Kështu

$$f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \subseteq F(c) \quad (2).$$

Nga ekuacionet (1) dhe (2), kemi

$$\begin{aligned} & f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \\ & \subseteq F(c) \cap G(c) = S(c). \quad (3) \end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme, mund të tregojmë që

$$f(S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c), G(c), G(c)) \cap f(G(c), G(c), S(c)) \subseteq S(c) . (4).$$

Nga ekuacionet (3) dhe (4), $S(c)$ është kuazi-hiperideal i $G(c)$. Kështu $(F, A) \cap_R (G, B)$ është kuazi-hiperideal soft i (G, B) . ■

Përkufizim 6.8.12 *Një bashkësi soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H quhet bi-hiperideal soft mbi H në qoftë se*

1. (F, A) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H .

2. $\bigwedge f((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$ ku (H, E) është bashkësi soft absolute mbi H .

Pohim 6.8.13 *Një bashkësi soft (F, A) mbi gjysmëhipergrupin ternar H është bi-hiperideal soft mbi H vetëm atëherë kur për çdo $a \in A$, $F(a) \neq \emptyset$ është bi-hiperideal i H .*

Vërtetim. Le të jetë (F, A) një bi-hiperideal soft mbi gjysmëhipergrupin ternar H . Atëherë nga përkufizimi, (F, A) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Nga Pohimi 6.7.3, për çdo $a \in A$, $F(a) \neq \emptyset$ është nëngjysmëhipergrup ternar i H . Për më tepër, meqë (F, A) është bi-hiperideal soft mbi H , kemi $\bigwedge f((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$ ku (H, E) është bashkësi soft absolute mbi H . Nga kjo rrjedh që $\bigwedge f(F(a), H, F(a), H, F(a)) \subseteq F(a)$, e cila tregon që $F(a)$ është bi-hiperideal i H .

Anasjellas, le të supozojmë se (F, A) është bashkësi soft mbi H e tillë që për çdo $a \in A$, $F(a)$ është bi-hiperideal i H , kur $F(a) \neq \emptyset$. Atëherë është e qartë se çdo $F(a) \neq \emptyset$ është një nëngjysmëhipergrup ternar i H . Pra, nga Pohimi 6.7.3, (F, A) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Për më tepër, meqë $F(a) \neq \emptyset$ është bi-hiperideal i H , atëherë për çdo $a \in A$, $\bigwedge f(F(a), H, F(a), H, F(a)) \subseteq F(a)$. Pra, $\bigwedge f((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$. Kjo tregon që (F, A) është bi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.8.14 *Çdo kuazi-hiperideal soft mbi një gjysmëhipergrup ternar soft H është bi-hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Evident. ■

Pohim 6.8.15 *Le të jenë (F, A) bi-hiperideal soft mbi H dhe (G, B) gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është bi-hiperideal soft i (G, B) .*

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$ ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe S përcaktohet nga $S(c) = F(c) \cap G(c)$ për çdo $c \in C$. Do të tregojmë që (S, C) është bi-hiperideal soft i (G, B) . Kemi

$$\begin{aligned} \bigwedge f((S, C), (S, C), (S, C)) &= \bigwedge f(((F, A) \cap_R (G, B)), ((F, A) \cap_R (G, B)), ((F, A) \cap_R (G, B))) \\ &\subseteq \bigwedge f((F, A), (F, A), (F, A)) \subseteq (F, A). \end{aligned}$$

sepse (F, A) është bi-hiperideal soft mbi H . Nga kjo rrjedh që

$$\hat{f}((S, C), (S, C), (S, C)) \subseteq (F, A) \quad (1)$$

Gjithashtu,

$$\begin{aligned} \hat{f}((S, C), (S, C), (S, c)) &= \hat{f}(((F, A) \cap_R (G, B)), ((F, A) \cap_R (G, B)), ((F, A) \cap_R (G, B))) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) \subseteq (G, B). \end{aligned}$$

sepse (G, B) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Nga kjo rrjedh që

$$\hat{f}((S, C), (S, C), (S, C)) \subseteq (G, B) \quad (2)$$

Nga ekuacionet (1) dhe (2), kemi

$$\hat{f}((S, C), (S, C), (S, C)) \subseteq (F, A) \cap_R (G, B) = (S, C).$$

Nga kjo rrjedh që (S, C) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Gjithashtu,

$$\begin{aligned} \hat{f}((S, C), (G, B), (S, C), (S, C)) &= \hat{f}(((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B))) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) \subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) \subseteq (G, B), \end{aligned}$$

dhe kështu

$$\hat{f}((S, C), (G, B), (S, C), (S, C)) \subseteq (G, B). \quad (3)$$

Gjithashtu

$$\begin{aligned} &\hat{f}((S, C), (G, B), (S, C), (S, C)) \\ &= \hat{f}(((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B))) \\ &\subseteq \hat{f}((F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A) \end{aligned}$$

sepse (F, A) është bi-hiperideal soft mbi H . Nga kjo rrjedh që

$$\hat{f}((S, C), (G, B), (S, C), (S, C)) \subseteq (F, A). \quad (4)$$

Nga ekuacionet (3) dhe (4), kemi

$$\hat{f}((S, C), (G, B), (S, C), (S, C)) \subseteq (F, A) \cap_R (G, B) = (S, C).$$

Pra, (S, C) është bi-hiperideal soft i (G, B) . ■

Përkufizim 6.8.15 Një hiperideal soft (F, A) mbi një gjysmëhipergrup ternar H është

idempotent soft në qoftë se $\hat{f}((F, A), (F, A), (F, A)) = (F, A)$.

Teoremë 6.8.16 *Le të jenë (F, A) një bi-hiperideal soft mbi H dhe (G, B) një bi-hiperideal soft i (F, A) i tillë që $\hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) = (G, B)$. Atëherë (G, B) është bi-hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Nga kushti, kemi $\hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) \subseteq (G, B)$. Nga kjo rrjedh që (G, B) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Meqë $(G, B) \subseteq (F, A)$ dhe $\hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) = (G, B)$, kemi

$$\begin{aligned} & \hat{f}((G, B), (H, E), (G, B), (H, E), (G, B)) \\ &= \hat{f}(\hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)), (H, E), (G, B), (H, E), \hat{f}((G, B), (G, B), \dots, (G, B))) \\ &= \hat{f}((G, B), (G, B), \hat{f}((G, B)), (H, E), (G, B), (H, E), (G, B)), (G, B), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), \hat{f}((F, A)), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)), (G, B), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), (F, A), (G, B), (G, B)) \text{ meqë } (F, A) \text{ është bi-hiperideal soft i } H \\ &= \hat{f}((G, B), (G, B), \dots, (F, A), (G, B), \hat{f}((G, B), (G, B), (G, B))) \\ &= \hat{f}((G, B), \hat{f}((G, B), (F, A), (G, B), (G, B), (G, B), (G, B)), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), \hat{f}((G, B), (F, A), (G, B), (G, B)), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((G, B), (G, B), (G, B)) = (G, B) \text{ sepse } (G, B) \text{ është bi-hiperideal soft i } (F, A). \end{aligned}$$

Nga kjo rrjedh $\hat{f}((G, B), (H, E), (G, B), (H, E), (G, B)) \subseteq (G, B)$. Pra, (G, B) është bi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.8.17 *Le të jetë (F, A) një nënbashkësi soft jo-boshe mbi një gjysmëhipergrup ternar H . Në qoftë se $(G_i, B_i), i = 1, 2, 3$ janë përkatësisht hiperideale i majtë soft, i djathtë soft dhe lateral soft mbi H të tilla që*

$$\hat{f}((G_1, B_1), (G_2, B_2), (G_3, B_3)) \subseteq (F, A) \subseteq (G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3),$$

atëherë (F, A) është bi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Nga përkufizimi

$$\begin{aligned} \hat{f}((F, A), (F, A), (F, A)) &\subseteq \hat{f}((G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3), (G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3), \\ &\quad (G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3)) \\ &\subseteq \hat{f}((G_1, B_1), (G_2, B_2), (G_3, B_3)) \subseteq (F, A). \end{aligned}$$

Nga kjo rrjedh $\hat{f}((F, A), (F, A), (F, A)) \subseteq (F, A)$. Kështu (F, A) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Le të shqyrtojmë

$$\begin{aligned} & \hat{f}((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq \hat{f}((G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3), (H, E), \\ & (G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3), (H, E), (G_1, B_1) \cap_R (G_2, B_2) \cap_R (G_3, B_3)) \\ & \subseteq \hat{f}((G_1, B_1), (H, E), (G_2, B_2), (H, E), (G_3, B_3)) \subseteq \hat{f}((G_1, B_1), (G_2, B_2), (G_3, B_3)) \subseteq (F, A) \end{aligned}$$

sepse (G_2, B_2) është hiperideal lateral soft mbi H . Nga kjo rrjedh që

$$\hat{f}((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A) . \text{ Pra, } (F, A) \text{ është bi-hiperideal soft mbi } H. \blacksquare$$

Pohim 6.8.18 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft jo-boshe mbi një gjysmëhipergrup ternar soft H . Atëherë bashkësia soft $(S, C) = \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B))$ është bi-hiperideal soft mbi H .*

Vërtetim. Nga përkufizimi, kemi

$$\begin{aligned} & \hat{f}((S, C), (S, C), (S, C)) \\ &= \hat{f}(\hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)), \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)), \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B))) \\ &= \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E), (G, B), (F, A)), \hat{f}((H, E), (G, B), (F, A)), (H, E), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), (H, E), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), (G, B)) \subseteq \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)) = (S, C) . \end{aligned}$$

Nga kjo rrjedh $\hat{f}((S, C), (S, C), (S, C)) \subseteq (S, C)$. Kështu (S, C) është gjysmëhipergrup ternar soft mbi H . Gjithashtu kemi

$$\begin{aligned} & \hat{f}((S, C), (H, E), (S, C), (H, E), (S, C)) \\ &= \hat{f}(\hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)), (H, E), \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)), (H, E), \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B))) \\ &= \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E), (G, B), (H, E)), \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)), \hat{f}((H, E), (F, A), (H, E)), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), (G, B)) \\ &\subseteq \hat{f}((F, A), \hat{f}((H, E)), (H, E), (H, E)), (G, B)) \subseteq \hat{f}((F, A), (H, E), (G, B)) = (S, C) . \end{aligned}$$

Nga kjo rrjedh $\hat{f}((S, C), (H, E), (S, C), (H, E), (S, C)) \subseteq (S, C)$. Pra, (S, C) është bi-hiperideal soft mbi H . $\blacksquare$

§6.9 Struktura e gjysmëhipergroupeve m -are soft dhe hiperidealet soft

Konceptet bazë mbi gjysmëhipergрупet m -are janë prezantuar në Seksionin §5.4. Më poshtë do të shqyrtojmë bashkësitë soft mbi gjysmëhipergрупin m -ar (H, f) .

Përkufizim 6.9.1 *Hipershumëzimi i kufizuar (restricted hyperproduct) i bashkësive soft $(F_1, B_1), \dots, (F_m, B_m)$ mbi H , që shënohet $\bigwedge f((F_1, B_1), \dots, (F_m, B_m))$, përkufizohet si një bashkësi soft $(K, D) = \bigwedge f((F_1, B_1), \dots, (F_m, B_m))$, ku $D = \bigcap \{B_i \mid i = 1, \dots, m\} \neq \emptyset$ dhe $K: D \rightarrow \mathcal{P}(H)$ i përcaktuar nga $K(d) = f(F_1(d), \dots, F_m(d))$, $\forall d \in D$.*

Përkufizim 6.9.2 *Le të jetë (F, A) një bashkësi soft jo-null mbi H . Atëherë, (F, A) quhet gjysmëhipergрупi m -ar soft mbi H , në qoftë se $F(x)$ është nëngjysmëhipergруп m -ar i H për çdo $x \in \text{Supp}(F, A)$, d.m.th. $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$.*

Pohim 6.9.3 *Një bashkësi soft (F, A) mbi H është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H vetëm atëherë kur për çdo $a \in A$, $F(a) \neq \emptyset$ është nëngjysmëhipergруп m -ar i H .*

Vërtetim. Le të jenë (F, A) gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H dhe $a \in A$ të tilla që $F(a) \neq \emptyset$. Nga përkufizimi, $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) = (K, A \cap \dots \cap A) = (K, A)$, ku K përcaktohet nga $K(a) = f(F(a), \dots, F(a))$, $\forall a \in A$. Meqë $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$, atëherë $(K, A) \subseteq (F, A)$. Kjo do të thotë, $K(a) \subseteq F(a)$, $\forall a \in A$ dhe kështu $f(F(a), \dots, F(a)) \subseteq F(a)$. Nga kjo rrjedh që $F(a)$ është një nëngjysmëhipergруп m -ar i H .

Anasjellas, le të supozojmë se $F(a) \neq \emptyset$ është gjysmëhipergруп m -ar i H për çdo $a \in A$. Duhet të tregojmë që (F, A) është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . Nga përkufizimi, kemi $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) = (K, A \cap \dots \cap A) = (K, A)$ dhe $K(a) = f(F(a), \dots, F(a))$ për çdo $a \in A$. Meqë $F(a)$ është nëngjysmëhipergруп m -ar i H , kemi $f(F(a), \dots, F(a)) \subseteq F(a)$, domethënë $K(a) \subseteq F(a)$. Kështu, $(K, A) \subseteq (F, A)$. Nga kjo rrjedh $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$. Pra, (F, A) është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . ■

Pohim 6.9.4 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe m -are soft mbi H të tilla që $A \cap B = \emptyset$. Atëherë $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është një gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \bigcup_E (G, B)$, ku $C = A \cup B$ dhe $A \cap B = \emptyset$. Atëherë $\forall c \in C$, ose $c \in A \setminus B$ ose $c \in B \setminus A$. Në qoftë se $c \in A \setminus B$, atëherë $K(c) = F(c)$ dhe në qoftë se $c \in B \setminus A$, atëherë $K(c) = G(c)$. Kështu, në të dy rastet $K(c)$ është nëngjysmëhipergруп m -ar i H . Pra, (K, C) është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . ■

Pohim 6.9.5 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe m -are soft mbi H të tilla që $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \bigcup_E (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të supozojmë se $A \cap B \neq \emptyset$. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \bigcup_E (G, B)$ ku $K(C)$ plotëson kushtin (ii) e Përkufizimit 6.6.6. Për të treguar që (K, C) është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H , duhet të tregojmë $\bigwedge f((K, C), \dots, (K, C)) \subseteq (K, C)$. Kemi $\bigwedge f((K, C), \dots, (K, C)) = (P, C)$ dhe $P(c) = f(K(c), \dots, K(c))$ për çdo $c \in C$. Për $c \in C$, kemi

$$P(c) = f(K(c), \dots, K(c)) = f((F, A) \cup_E (G, B), \dots, (F, A) \cup_E (G, B))$$

$$\subseteq \begin{cases} F(c) & n.q.s. \ c \in A \setminus B, \\ G(c) & n.q.s. \ c \in B \setminus A, \\ F(c) \cup G(c) & n.q.s. \ c \in A \cap B. \end{cases}$$

Atëherë $P(c) \subseteq K(c)$ për çdo $c \in C$. Pra, $(F, A) \cup_E (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . ■

Pohim 6.9.6 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe m -are soft mbi H të tilla që $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të supozojmë që $A \cap B \neq \emptyset$. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$ ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe $K(c) = F(c) \cap G(c)$ për çdo $c \in C$. Për të treguar që (K, C) është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H , duhet të tregojmë që $\bigwedge f((K, C), (K, C), \dots, (K, C)) \subseteq (K, C)$.

Kemi $\bigwedge f((K, C), \dots, (K, C)) = (P, C)$ dhe $P(c) = f(K(c), \dots, K(c))$ për çdo $c \in C$. Për $c \in C$, kemi $P(c) = f(K(c), \dots, K(c)) = f(F(c) \cap G(c), \dots, F(c) \cap G(c)) \subseteq F(c) \cap G(c) = K(c)$. Atëherë $P \subseteq K$ dhe $(F, A) \cap_R (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . ■

Pohim 6.9.7 *Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy gjysmëhipergroupe m -are soft mbi H . Atëherë $(F, A) \wedge (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H .*

Vërtetim. Le të jetë $(F, A) \wedge (G, B) = (K, A \times B) = (K, C)$ ku $K(a, b) = F(a) \cap G(b)$, $\forall (a, b) \in A \times B$. Duhet të tregojmë që $(K, A \times B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . Kemi $\bigwedge f((K, A \times B), \dots, (K, A \times B))$, ku $C = A \times B$ dhe $P(a, b) = f(K(a, b), \dots, K(a, b))$, $\forall (a, b) \in C$. Për $(a, b) \in C$, kemi $P(a, b) = f(K(a, b), \dots, K(a, b)) = f(F(a) \cap G(b), \dots, F(a) \cap G(b)) \subseteq F(a) \cap G(b) = K(a, b)$. Atëherë $P \subseteq K$ dhe $(F, A) \wedge (G, B)$ është gjysmëhipergруп m -ar soft mbi H . ■

Përkufizim 6.9.8 *Le të jenë $(F_1, A_1), \dots, (F_m, A_m)$ m bashkësi soft mbi H . Përkufizojmë $f^*((F_1, A_1), (F_2, A_2), \dots, (F_m, A_m)) = (K, A_1 \times A_2 \times \dots \times A_m)$ të jetë një bashkësi soft ku $K(a_1, a_2, \dots, a_m) = f((F_1(a_1), F_2(a_2), \dots, F_m(a_m)))$. Le të jetë (H, f) një gjysmëhipergруп m -ar*

ndërrimtar. Në qoftë se $(F_1, A_1), (F_2, A_2), \dots, (F_m, A_m)$ janë gjysmëhipergrupe m -are soft mbi H , atëherë $f^*((F_1, A_1), (F_2, A_2), \dots, (F_m, A_m))$ është gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H .

Vërtetim. Le të jetë $f^*((F_1, A_1), \dots, (F_m, A_m)) = (K, A_1 \times \dots \times A_m)$ ku $K(a_1, \dots, a_m) = f(F_1(a_1), \dots, F_m(a_m))$, $\forall (a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m$. Kemi

$(P, C) = \bigwedge (K, A_1 \times \dots \times A_m), \dots, (K, A_1 \times \dots \times A_m)$, ku $C = A_1 \times \dots \times A_m$ dhe $P(a_1, \dots, a_m) = f(K(a_1, \dots, a_m), \dots, K(a_1, \dots, a_m))$, $\forall (a_1, \dots, a_m) \in C$. Për $(a_1, \dots, a_m) \in C$, meqë H është ndërrimtar, kemi $P(a_1, \dots, a_m) = f(K(a_1, \dots, a_m), \dots, K(a_1, \dots, a_m))$
 $= f(f(F_1(a_1), \dots, F_m(a_m)), \dots, f(F_1(a_1), \dots, F_m(a_m))) \subseteq f(F_1(a_1), \dots, F_m(a_m)) = K(a_1, \dots, a_m)$.

Atëherë $P \subseteq K$. Kjo përfundon vërtetimin. ■

Përkufizim 6.9.9 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy bashkësi soft mbi H të tilla që (F, A) është gjysmëhipergrup m -ar dhe $(G, B) \subseteq (F, A)$. Atëherë (G, B) quhet nëngjysmëhipergrup(hiperideal) m -ar soft i (F, A) në qoftë se $G(b)$ është nëngjysmëhipergrup(hiperideal) m -ar i $F(b)$ për çdo $b \in B$. Le të jetë (F, A) gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H dhe le të jetë $\{(K_i, A_i) \mid i \in I\}$ një familje jo-boshe e nëngjysmëhipergrupeve m -are soft të (F, A) . Atëherë kanë vend pohimet e mëposhtme :

1. $\bigcap_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup m -ar soft i (F, A) .
2. $\bigwedge_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup m -ar soft i $\bigwedge_{i \in I} (F, A)$.
3. $\bigcup_{i \in I} (K_i, A_i)$ është një nëngjysmëhipergrup m -ar soft i (F, A) në qoftë se bashkësia $\{A_i \mid i \in I\}$ është e tillë që elementet e saj janë dy nga dy jo-prerëse (pairwise disjoint).

Përkufizim 6.9.10 Një bashkësi soft (F, A) mbi H quhet j -hiperideal soft mbi H , $j = 1, 2, \dots, m$ në qoftë se $\bigwedge_{j=1}^m f((H, E), \dots, (F, A), \dots, (H, E)) \subseteq (F, A)$. Një bashkësi soft (F, A) mbi H quhet hiperideal soft mbi H , në qoftë se ai është j -hiperideal soft mbi H për çdo $j = 1, 2, \dots, m$.

Hiperideali soft mbi H i përkufizuar më sipër është i ndryshëm nga hiperideali soft i një gjysmëhipergrupi m -ar soft.

Pohim 6.9.11 Një bashkësi soft (F, A) mbi H është j -hiperideal soft mbi H ku $j \in \{1, 2, \dots, m\}$, vetëm atëherë kur për çdo $a \in A$, $F(a) \neq \emptyset$ është j -hiperideal i H .

Vërtetim. Le të supozojmë se (F, A) është j -hiperideal soft mbi H . Duhet të tregojmë se $F(a) \neq \emptyset$ është j -hiperideal i H . Nga përkufizimi kemi

$$\bigwedge_{j=1}^m f((H, E), \dots, (F, A), \dots, (H, E)) = (K, E \cap \dots \cap A \cap \dots \cap E) = (K, A), \text{ ku}$$

$$f(H(a), \dots, F(a), \dots, H(a)) = K(a), \quad \forall a \in A. \text{ Kjo do të thotë, } f(H, \dots, F(a), \dots, H) = K(a).$$

Meqë $\bigwedge_{j=1}^m f((H, E), \dots, (F, A), \dots, (H, E)) \subseteq (F, A)$, ku $(K, A) \subseteq (F, A)$. Kështu kemi, $(K(a) \subseteq F(a)$, $\forall a \in A$. Pra, $f(H, \dots, F(a), \dots, H) \subseteq F(a)$. Kjo tregon që $F(a)$ është j -hiperideal i H .

Anasjellas, le të supozojmë se $F(a) \neq \emptyset$ është j -hiperideal i H . Kemi

$$\bigwedge f((H, E), \dots, (F, A), \dots, (H, E)) = (K, E \cap \dots \cap A \dots \cap E) = (K, A)$$

ku $f(H(a), \dots, F(a), \dots, H(a)) = K(a)$, $\forall a \in A$. Kjo do të thotë se, $f(H, \dots, F(a), \dots, H) = K(a)$.

Por $f(H, \dots, F(a), \dots, H) \subseteq F(a)$. Nga kjo rrjedh $K(a) \subseteq F(a)$ dhe kështu $(K, A) \subseteq (F, A)$. Pra

$$\bigwedge f((H, E), \dots, (F, A), \dots, (H, E)) \subseteq (F, A). \text{ Pra, } (F, A) \text{ është } j\text{-hiperideal soft mbi } H. \blacksquare$$

Pohim 6.9.12 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft mbi një gjysmëhipergrup m -ar H , me $A \cap B \neq \emptyset$. Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është hiperideal soft mbi H që përfshihet në (F, A) dhe (G, B) .

Pohim 6.9.13 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft mbi H . Atëherë $(F, A) \cup_E (G, B)$ është hiperideal soft mbi H që përmban (F, A) dhe (G, B) .

Vërtetim. Le të jetë $(K, C) = (F, A) \cup_E (G, B)$, ku $C = A \cup B$ për çdo $c \in C = A \cup B$, ose $c \in A \setminus B$ ose $c \in B \setminus A$ ose $c \in A \cap B$. Në qoftë se $c \in A \setminus B$, atëherë $K(c) = F(c)$ në qoftë se $c \in B \setminus A$, atëherë $K(c) = G(c)$, dhe në qoftë se $c \in A \cap B$, atëherë $K(c) = F(c) \cup G(c)$, në të gjitha rastet $K(c)$ është një hiperideal i H . Pra, (K, C) është hiperideal soft mbi H . Meqë $A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ dhe $F(c) \subseteq K(c), G(c) \subseteq K(c)$ për çdo $c \in C$. Prandaj, $(F, A) \subseteq (K, C)$ dhe $(G, B) \subseteq (K, C)$. $\blacksquare$

Pohim 6.9.14 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy hiperideale soft mbi një gjysmëhipergrup m -ar H . Atëherë $(F, A) \wedge (G, B)$ dhe $(F, A) \vee (G, B)$ janë hiperideale soft mbi H .

Pohim 6.9.15 Le të jetë (F, A) një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H dhe le të jetë $\{(K_i, A_i) \mid i \in I\}$ një familje jo-boshe e hiperidealeve soft të (F, A) . Atëherë kanë vend pohimet e mëposhtme:

1. $\cap_{i \in I} (K_i, A_i)$ është hiperideal soft i (F, A) .
2. $\bigwedge_{i \in I} (K_i, A_i)$ është hiperideal soft i $\bigwedge_{i \in I} (F, A)$.
3. $\cup_{i \in I} (K_i, A_i)$ është hiperideal soft i (F, A) .
4. $\bigvee_{i \in I} (K_i, A_i)$ është hiperideal soft i $\bigvee_{i \in I} (F, A)$.

§6.10 Kuazi-hiperidealet soft dhe bi-hiperidealet soft mbi gjysmëhipergrupet m -are

Përkufizim 6.10.1 Një bashkësi soft mbi një gjysmëhipergrup m -ar H quhet kuazi-hiperideal soft mbi H në qoftë se

$$1. \quad \bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$$

$$2. \bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge_{2m-1} f((H, E), \dots, (H, E), \underbrace{(F, A), (H, E), \dots, (H, E)}_j) \cap_R \dots \subseteq (F, A)$$

ku (H, E) është bashkësi soft absolute mbi H dhe $3 \leq j \leq 2m-3$.

Pohim 6.10.2 Një bashkësi soft (F, A) mbi H është kuazi-hiperideal soft mbi H vetëm atëherë kur $\forall a \in A, F(a) \neq \emptyset$ është kuazi-hiperideal i H .

Vërtetim. Le të supozojmë se një bashkësi soft (F, A) mbi H është një kuazi-hiperideal soft mbi H . Tregojmë që $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H . kemi

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) = (G, A \cap E \cap \dots \cap E) = (G, A) \quad (1)$$

$$\bigwedge f((H, E), (F, A), \dots, (H, E)) = (S, E \cap A \cap \dots \cap E) = (S, A) \quad (2)$$

....

$$\bigwedge f((H, E), \dots, (H, E), (F, A)) = (I, E \cap E \cap \dots \cap A) = (I, A) \quad (m)$$

$$\begin{aligned} \bigwedge f(\underbrace{((H, E), \dots, (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E))}_{2m-1}^j) &= \\ = (J, E \cap E \cap \dots \cap A \cap E \cap \dots \cap E) &= (J, A) \end{aligned} \quad (m+1)$$

Nga ekuacionet (1), (2), ..., (m) rrjedhin

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R$$

$$\bigwedge f((H, E), (H, E), \dots, (F, A)) = (G, A) \cap_R (S, A) \cap_R \dots \cap_R (I, A) \quad (m+2)$$

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), \dots, (F, A)) = (K, A) \quad (m+3)$$

Por (F, A) është kuazi-hiperideal soft mbi H . Kështu

$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$. Nga ekuacioni (m+3), $(K, A) \subseteq (F, A)$, që do të thotë, $K(a) \subseteq F(a)$, $\forall a \in A$. Nga ekuacioni (m+3) rrjedh që $\forall a \in A$, $f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) = K(a)$. Nga kjo rrjedh $\forall a \in A$, $f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) \subseteq F(a)$ (m+4)

Në mënyrë të ngjashme, nga ekuacionet (1), (m), (m+1), kemi

$$\begin{aligned} \bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots & \\ \cap_R \bigwedge f(\underbrace{((H, E), (H, E), \dots, (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E), (H, E))}_{2m-1}^j) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), \dots, (F, A)) &= (P, A) \end{aligned} \quad (m+5)$$

ku $3 \leq j \leq 2m-3$. Meqë (F, A) është kuazi-hiperideal soft mbi H , kemi

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge_{2m-1} f((H, E), \dots, (H, E), \underbrace{(F, A), (H, E), \dots, (H, E)}_j) \cap_R \dots$$

$$\cap_R \bigwedge f((H, E), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$$

Pra, $(P, A) \subseteq (F, A)$, që domethënë se për çdo $a \in A$, $P(a) \subseteq F(a)$. Nga ekuacioni (m+5), kemi që për çdo $a \in A$,

$$f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(\underbrace{H(a), \dots, H(a), F(a), H(a), \dots, H(a)}_{2m-1}^j) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) = P(a)$$

ku $3 \leq j \leq 2m-3$. Nga kjo rrjedh

$$f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(\underbrace{H(a), \dots, H(a), F(a), H(a), \dots, H(a)}_{2m-1}^j) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) \subseteq F(a) \quad (m+6)$$

Nga (m+4) dhe (m+6), është e qartë se $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H .

Anasjellas, le të jetë $F(a) \neq \emptyset$ një kuazi-hiperideal i H për çdo $a \in A$. Nga ekuacionet (1), (2), ..., (m) kemi

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \bigwedge f((H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), (H, E), \dots, (F, A)) = (G, A) \cap_R (S, A) \cap_R \dots \cap_R (I, A) = (K, A).$$

Nga përkufizimi, $\forall a \in A$, kemi $f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) = K(a)$.

Por $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H . Pra,

$K(a) = f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap \dots \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) \subseteq F(a)$ dhe kështu $(K, A) \subseteq (F, A)$. Pra

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A) \quad (m+7)$$

Nga ekuacionet (1), (m), dhe (m+1) kemi për çdo $a \in A$,

$$\begin{aligned} & \bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \\ & \bigwedge f(\underbrace{(H, E), (H, E), \dots, (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E), (H, E)}_{2m-1}^j) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge f((H, E), \dots, (F, A)) \\ & = (G, A) \cap_R (I, A) \cap_R \dots \cap_R (J, A) = (P, A) \end{aligned}$$

dhe

$$f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap f(\underbrace{H(a), \dots, H(a), F(a), H(a), \dots, H(a)}_{2m-1}^j) \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) = P(a),$$

ku $3 \leq j \leq m$. Meqë $F(a)$ është kuazi-hiperideal i H , kështu kemi

$$P(a) = f(F(a), H(a), \dots, H(a)) \cap f(\underbrace{H(a), \dots, H(a), F(a), H(a), \dots, H(a)}_{2m-1}^j) \cap f(H(a), \dots, H(a), F(a)) \subseteq F(a)$$

dhe kështu $(P, A) \subseteq (F, A)$. Pra kemi

$$\bigwedge f((F, A), (H, E), \dots, (H, E)) \cap_R \dots \cap_R \bigwedge_{2m-1} \underbrace{f((H, E), \dots, (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (H, E))}_{j} \cap_R \dots \subseteq (F, A) \quad (m+8)$$

Nga (m+7) dhe (m+8), (F, A) është kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.3 Le të jenë (F_j, A_j) j -hiperideale soft përkatësisht për $j = 1, 2, \dots, m$ mbi H . Atëherë $(F_1, A_1) \cap_R (F_2, A_2) \cap_R \dots \cap_R (F_m, A_m)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H . Le të jenë (F_j, A_j) j -hiperideale soft përkatësisht për $j = 1, 2, \dots, m$ mbi H , përkatësisht të tilla që $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m = \emptyset$. Atëherë $(F_1, A_1) \cap_E (F_2, A_2) \cap_E \dots \cap_E (F_m, A_m)$ është kuazi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, A) = (F_1, A_1) \cap_E (F_2, A_2) \cap_E \dots \cap_E (F_m, A_m)$, ku $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$, $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_m = \emptyset$ dhe $\forall a \in A$

$$S(a) = \begin{cases} F_1(a) & \text{n.q.s } a \in A_1 \setminus A_2 \cap \dots \cap A_m, \\ \dots \\ F_j(a) & \text{n.q.s } a \in A_j \setminus A_1 \cap \dots \cap A_{j-1} \cap A_{j+1} \cap \dots \cap A_m, \\ \dots \\ F_m(a) & \text{n.q.s } a \in A_m \setminus A_1 \cap \dots \cap A_{m-1}. \end{cases}$$

Në secilin rast, $S(a)$ është një kuazi-hiperideal i H . Meqë çdo j -hiperideal ($j = 1, 2, \dots, m$) i H është kuazi-hiperideal i H , kështu nga përkufizimi, $(S, A) = (F_1, A_1) \cap_E \dots \cap_E (F_m, A_m)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.4 Çdo j -hiperideal soft ($j = 1, 2, \dots, m$) mbi një gjysmëhipergrup m -ar H është një kuazi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Le të jenë (F_j, A_j) j -hiperideale soft ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$) mbi H . Atëherë $F_j(a)$ është një j -hiperideal i H . Meqë çdo j -hiperideal i H është një kuazi-hiperideal i H , atëherë $F_j(a)$ është një kuazi-hiperideal i H . Atëherë (F_j, A_j) është një kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.5 Çdo j -hiperideal soft ($j = 1, 2, \dots, m$) mbi H është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H dhe çdo kuazi-hiperideal soft është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Le të jenë (F_j, A_j) j -hiperideale soft përkatësisht për $j = 1, 2, \dots, m$ mbi H . Atëherë $(F_1, A_1) \wedge \dots \wedge (F_m, A_m)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Le të jetë $(S, A) = (F_1, A_1) \wedge \dots \wedge (F_m, A_m)$, ku $A = A_1 \times \dots \times A_m$ dhe $\forall (a_1, \dots, a_m) \in A_1 \times \dots \times A_m$, $S(a_1, \dots, a_m) = A_1(a_1) \cap \dots \cap A_m(a_m)$ është një kuazi-hiperideal i H . Meqë prerja e j -hiperidealeve për $j = 1, 2, \dots, m$, është një kuazi-hiperideal i H , atëherë $(F_1, A_1) \wedge \dots \wedge (F_m, A_m)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.6 Le të jenë (F, A) dhe (G, B) dy kuazi-hiperideale soft mbi një gjysmëhipergrup m -ar H . Atëherë kanë vend pohimet e mëposhtme :

1. $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H .
2. $(F, A) \cap_E (G, B)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H

3. $(F, A) \wedge (G, B)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H

4. $(F, A) \cup_E (G, B)$ është një kuazi-hiperideal soft mbi H , kur $A \cap B = \emptyset$.

Pohim 6.10.7 Le të jenë (F, A) një kuazi-hiperideal soft dhe (G, B) një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një kuazi-hiperideal soft i (G, B) .

Vërtetim. Le të jetë $(S, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$, ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe $S(c) = F(c) \cap G(c)$ për çdo $c \in C$, meqë $S(c) \subseteq F(c)$ dhe $S(c) \subseteq G(c)$. Meqë $S(c) \subseteq G(c)$, $f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), S(c)) \subseteq f(G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c)) \subseteq f(G(c), \dots, G(c)) \subseteq G(c)$.

Nga kjo rrjedh qe

$$f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), S(c)) \subseteq G(c) \quad (1)$$

Gjithashtu $S(c) \subseteq F(c)$. So $f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), S(c))$

$$\subseteq f(F(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), F(c))$$

$$\subseteq f(F(c), H(c), \dots, H(c)) \cap \dots \cap f(H(c), \dots, H(c), F(c)) \subseteq F(c). \text{ Kështu}$$

$$f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), S(c)) \subseteq F(c) \quad (2)$$

Nga ekuacionet (1) dhe (2), kemi

$$f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \dots \cap f(G(c), \dots, G(c), S(c)) \subseteq F(c) \cap G(c) = S(c). \quad (3)$$

Në mënyrë të ngjashme, mund të tregojmë që

$$f(S(c), G(c), \dots, G(c)) \cap \underbrace{f(G(c), \dots, G(c), S(c), G(c), \dots, G(c))}_{2m-1} \cap f(G(c), G(c), \dots, S(c)) \subseteq S(c) \quad (4)$$

ku $3 \leq j \leq 2m-3$. Nga ekuacioni (3) dhe (4), $S(c)$ është një kuazi-hiperideal i $G(c)$. Kështu $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një kuazi-hiperideal i (G, B) . ■

Përkufizim 6.10.8 Një bashkësi soft (F, A) mbi H quhet bi-hiperideal soft mbi H në qoftë se

1. (F, A) është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H .

2. $\bigwedge_{2m-1} f((F, A), (H, E), (F, A), \dots, (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$ ku (H, E) është bashkësi soft absolute mbi H .

Pohim 6.10.9 Një bashkësi soft (F, A) mbi gjysmëhipergrupin m -ar H është bi-hiperideal soft mbi H vetëm atëherë kur $\forall a \in A, F(a) \neq \emptyset$ është një bi-hiperideal i H .

Vërtetim. Le të jetë (F, A) një bi-hiperideal soft mbi një gjysmëhipergrup m -ar H . Atëherë nga përkufizimi, (F, A) është gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Nga Pohimi 6.9.3, për çdo $a \in A, F(a) \neq \emptyset$ është një nëngjysmëhipergrup m -ar i H . Për më tepër, meqë (F, A) është një bi-

hiperideal soft mbi H , kemi $\bigwedge_{2m-1} f((F, A), (H, E), (F, A), \dots, (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$, ku (H, E) është

bashkësi soft absolute mbi H . Nga kjo rrjedh $\bigwedge_{2m-1} f(F(a), H, F(a), \dots, H, F(a)) \subseteq F(a)$, e cila tregon që $F(a)$ është një bi-hiperideal i H .

Anasjellas, le të supozojmë se (F, A) është një bashkësi soft mbi H e tillë që $\forall a \in A, F(a)$ është një bi-hiperideal i H , kur $F(a) \neq \emptyset$. Atëherë është e qartë se çdo $F(a) \neq \emptyset$ është një nënjysmëhipergrup m -ar i H . Pra, nga Pohimi 6.9.3, (F, A) është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Për më tepër, meqë $F(a) \neq \emptyset$ është një bi-hiperideal i H , atëherë për çdo $a \in A$, $\bigwedge_{2m-1} f(F(a), H, F(a), \dots, H, F(a)) \subseteq F(a)$. Kështu $\bigwedge_{2m-1} f((F, A), (H, E), (F, A), \dots, (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$.

Kjo tregon që (F, A) është një bi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.10 Çdo kuazi-hiperideal soft mbi H është një bi-hiperideal soft mbi H . Le të jenë (F, A) një bi-hiperideal soft mbi H dhe (G, B) një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Atëherë $(F, A) \cap_R (G, B)$ është një bi-hiperideal soft i (G, B) .

Vërtetim. Nga përkufizimi, $(S, C) = (F, A) \cap_R (G, B)$ ku $C = A \cap B \neq \emptyset$ dhe S përkufizohet nga $S(c) = F(c) \cap G(c)$, $\forall c \in C$. Kemi $\bigwedge f((S, C), (S, C), \dots, (S, C)) =$

$$= \bigwedge f(((F, A) \cap_R (G, B)), \dots, ((F, A) \cap_R (G, B))) \subseteq \bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A). \text{ Nga kjo rrjedh } \bigwedge f((S, C), (S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (F, A) \quad (1)$$

Gjithashtu,

$$\bigwedge f((S, C), \dots, (S, C)) = \bigwedge f(((F, A) \cap_R (G, B)), \dots, ((F, A) \cap_R (G, B))) \subseteq \bigwedge f((G, B), \dots, (G, B)) \subseteq (G, B) \text{ sepse } (G, B) \text{ është një gjysmëhipergrup } m\text{-ar soft mbi } H. \text{ Nga kjo rrjedh që } \bigwedge f((S, C), (S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (G, B) \quad (2)$$

Nga ekuacionet (1) dhe (2), kemi $\bigwedge f((S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (F, A) \cap_R (G, B) = (S, C)$. Nga kjo rrjedh (S, C) është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Gjithashtu,

$$\begin{aligned} & \bigwedge_{2m-1} f((S, C), (G, B), (S, C), \dots, (S, C)) \\ &= \bigwedge f(((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), \dots, ((F, A) \cap_R (G, B))) \\ &\subseteq \bigwedge_{2m-1} f((G, B), (G, B), \dots, (G, B)) \subseteq \bigwedge_m f((G, B), (G, B), \dots, (G, B)) \subseteq (G, B) \text{ dhe kështu} \\ & \bigwedge_{2m-1} f((S, C), (G, B), (S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (G, B). \quad (3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Gjithashtu, } \bigwedge_{2m-1} f((S, C), (G, B), (S, C), \dots, (S, C)) \\
 &= \bigwedge_{2m-1} f(\underbrace{((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), ((F, A) \cap_R (G, B)), (G, B), \dots, ((F, A) \cap_R (G, B))}_{2m-1}) \\
 &\subseteq \bigwedge_{2m-1} f(\underbrace{(F, A), (H, E), \dots, (F, A)}_{2m-1}) \subseteq (F, A), \text{ sepse } (F, A) \text{ është një bi-hiperideal soft mbi } H.
 \end{aligned}$$

$$\text{Nga kjo rrjedh } \bigwedge_{2m-1} f((S, C), (G, B), (S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (F, A). \quad (4)$$

Nga ekuacionet (3) dhe (4), kemi

$$\bigwedge_{2m-1} f((S, C), (G, B), (S, C), \dots, (S, C)) \subseteq (F, A) \cap_R (G, B) = (S, C).$$

Atëherë (S, C) është një bi-hiperideal soft i (G, B) . ■

Përkufizim 6.10.11 Një hiperideal soft (F, A) mbi H është idempotent soft në qoftë se

$$\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) = (F, A).$$

Teoremë 6.10.12 Le të jenë (F, A) një bi-hiperideal soft mbi H dhe (G, B) një bi-hiperideal soft i (F, A) të tillë që $\bigwedge f((G, B), \dots, (G, B)) = (G, B)$. Atëherë (G, B) është një bi-hiperideal soft mbi H .

$$\begin{aligned}
 & \text{Vërtetim. Nga kushti, kemi } \bigwedge f((G, B), \dots, (G, B)) \subseteq (G, B). \text{ Nga kjo rrjedh që } (G, B) \text{ është një} \\
 & \text{gjysmëhipergrup } m\text{-ar soft mbi } H. \text{ Meqë } (G, B) \subseteq (F, A) \text{ dhe } \bigwedge f((G, B), \dots, (G, B)) = (G, B), \text{ kemi} \\
 & \bigwedge_{2m-1} f(\underbrace{((G, B), (H, E), (G, B), (H, E), \dots, (G, B))}_{2m-1}) \\
 &= \bigwedge f(\bigwedge_{2m-1} f((G, B), \dots, (G, B)), (H, E), (G, B), (H, E), \dots, \bigwedge_{2m-1} f((G, B), \dots, (G, B))) \\
 &= \bigwedge f((G, B), \dots, \bigwedge_{2m-1} f(\underbrace{((G, B), (H, E), (G, B), (H, E), \dots, (G, B))}_{2m-1}), \dots, (G, B)) \\
 &\subseteq \bigwedge f((G, B), \dots, \bigwedge_{2m-1} f(\underbrace{((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (F, A))}_{2m-1}), \dots, (G, B)) \\
 &\subseteq \bigwedge f((G, B), (G, B), \dots, (F, A), \dots, (G, B), (G, B)) \\
 &= \bigwedge f((G, B), (G, B), \dots, (F, A), \dots, (G, B), \bigwedge_{2m-1} f((G, B), \dots, (G, B)))
 \end{aligned}$$

$$= \bigwedge f(((G, B), f((G, B), \dots, (F, A), \dots, (G, B), \dots, (G, B))), (G, B))$$

$$\subseteq \bigwedge f((G, B), \dots, (G, B)) = (G, B). \text{ Nga kjo rrjedh qe } \bigwedge_{2m-1} f((G, B), (H, E), (G, B), (H, E), \dots, (G, B)) \subseteq (G, B).$$

Atëherë (G, B) është një bi-hiperideal soft mbi H . ■

Pohim 6.10.13 *Le të jetë (F, A) një nënbashkësi soft joboshe mbi H . Në qoftë se (G_j, B_j) janë përkatësisht j -hiperideale soft ($j \in \{1, 2, \dots, m\}$), respektivisht mbi H të tilla që*

$$\bigwedge f((G_1, B_1), \dots, (G_j, B_j), \dots, (G_m, B_m)) \subseteq (F, A) \subseteq (G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m),$$

atëherë (F, A) është një bi-hiperideal soft mbi H .

Vërtetim. Nga përkufizimi $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq \bigwedge f((G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m), \dots, (G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m)) \subseteq \bigwedge f((G_1, B_1), \dots, (G_j, B_j), \dots, (G_m, B_m)) \subseteq (F, A)$. Nga kjo rrjedh që $\bigwedge f((F, A), \dots, (F, A)) \subseteq (F, A)$. Pra, (F, A) është një gjysmëhipergrup m -ar soft mbi H . Le të shqyrtojmë përsëri

$$\bigwedge_{2m-1} f((F, A), (H, E), (F, A), (H, E), \dots, (F, A)) \subseteq \bigwedge f((G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m), (H, E), (G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m), (H, E), \dots, (G_1, B_1) \cap_R \dots \cap_R (G_m, B_m)) \subseteq$$

$$\bigwedge f((G_1, B_1), (H, E), (G_2, B_2), \dots, (G_j, B_j), \dots, (H, E), (G_m, B_m)) \subseteq \bigwedge f((G_1, B_1), \dots, (G_j, B_j), \dots, (G_m, B_m)) \subseteq (F, A)$$

Nga kjo rrjedh që $\bigwedge f((F, A), (H, E), (F, A), \dots, (H, E), (F, A)) \subseteq (F, A)$. Pra, (F, A) është një bi-hiperideal soft mbi H . ■

§6.11 Nënhapësirat fuzzy të hapësirave hipervektoriale

Në këtë seksion, studiojmë nënhiperhapësirat e një hapësire hipervektoriale duke shqyrtuar disa veti të tyre. Nga ky këndvështrim, ne prezantojmë konceptin e një nënhiperhapësire fuzzy normale të hapësirës hipervektoriale. Duke përdorur këtë koncept, ndërtojmë nënhiperhapësira fuzzy të reja; gjithashtu, tregojmë se nën disa kondita të caktuara, një nënhiperhapësirë fuzzy e një hapësire hipervektoriale është dy-vlerëshe dhe merr vlerat 0 dhe 1.

Hapësira hipervektoriale janë prezantuar nga Scafati Tallini [136].

Përkufizim 6.11.1 [136] *Le të jetë K një fushë dhe $(V, +)$ një grup Abelian. Hapësirë hipervektoriale mbi K (hypervector space over K) quhet katërshja $(V, +, \circ, K)$, ku " $\circ$ " është një pasyrim:*

$$\circ : K \times V \rightarrow P^*(V)$$

i tillë që për çdo $a, b \in K$ dhe $x, y \in V$ kanë vend kushtet e mëposhtme:

1. $a \circ (x + y) \subseteq a \circ x + a \circ y$,
2. $(a + b) \circ x \subseteq a \circ x + b \circ x$,
3. $a \circ (b \circ x) = (ab) \circ x$,
4. $a \circ (-x) = (-a) \circ x = -(a \circ x)$,
5. $x \in 1 \circ x$.

Vërejtje 6.11.2 (i) Në anën e djathtë të ligjit distributiv nga e djathta (H1), shuma mendohet në kuptimin e Frobenius, domethënë konsiderojmë bashkësinë e gjithë shumave të një elementi të $a \circ x$ me një element të $a \circ y$. Në mënyrë të ngjashme, i njëjti arsyetim dhe për ligjin distributiv nga e majta (H2).

(ii) Themi se $(V, +, \circ, K)$ është *distributive e majtë (left distributive)* në qoftë se

$$\forall a, b \in K, \forall x \in V, (a + b) \circ x \supseteq a \circ x + b \circ x$$

dhe *distributive fortësisht e majtë (strongly left distributive)* në qoftë se

$$\forall a, b \in K, \forall x \in V, (a + b) \circ x = a \circ x + b \circ x.$$

Në mënyrë të ngjashme, përcaktojmë përkatësisht, hapësirat hipervektoriale *distributive të djathta (the right distributive)* dhe *distributive fortësisht të djathta (strongly right distributive)*. Hapësira hipervektoriale $(V, +, \circ, K)$ quhet *fortësisht distributive (strongly distributive)* në qoftë se është njëkohësisht distributive fortësisht e majtë dhe distributive fortësisht e djathtë.

(iii) Ana e majtë e ligjit të shoqërimit (H3) nënkupton bashkimin e gjithë bashkësive $a \circ y$, ku y përshkon bashkësinë $b \circ x$, domethënë,

$$a \circ (b \circ x) = \bigcup_{y \in b \circ x} a \circ y.$$

(iv) Le të jetë $\Omega_V = 0 \circ 0$, ku 0 është zeroja e $(V, +)$. Në [20], tregohet se në qoftë se V është distributive fortësisht e majtë ose distributive fortësisht e djathtë, atëherë Ω është një nëngrup i $(V, +)$.

Disa shembuj dhe rezultate mbi hapësirat hipervektoriale mund të gjenden në [137-160].

Gjatë gjithë punimit, supozojmë se V është hapësirë hipervektoriale mbi fushën K .

Përkufizim 6.11.3 Një nënbashkësi joboshe W e V quhet *nënhiperhapësirë (sub-hyperspace)*, në qoftë se vetë W është një hapësirë hipervektoriale në lidhje me hiperveprimet në V , domethënë,

$$\begin{aligned} W &\neq \emptyset, \\ \forall x, y \in W &\Rightarrow x - y \in W, \\ \forall a \in K, \forall x \in W &\Rightarrow a \circ x \subseteq W. \end{aligned}$$

Në këtë rast, shkruajmë $W \leq V$.

Le të jetë X një bashkësi e zakonshme. Me *bashkësi fuzzy* μ (fuzzy set μ) në X , nënkuptojmë një funksion $\mu : X \rightarrow [0, 1]$ që merr vlerën $\mu(x)$ për $x \in X$. Në qoftë se $t \in [0, 1]$, atëherë $\mu_t = \{x \in X : \mu(x) \geq t\}$ quhet *nënbashkësi nivel (level subset)* i μ . Shënojmë $FS(X)$ bashkësinë e bashkësive fuzzy të X . Në qoftë se $\mu \in FS(X)$ dhe $A \subseteq X$, atëherë me $\mu(A)$, nënkuptojmë

$$\mu(A) = \bigwedge_{a \in A} \mu(a).$$

Përkufizim 6.11.4 *Le të jetë K një fushë dhe $v \in FS(K)$. Supozojmë se kanë vend relacionet e mëposhtme:*

1. $v(a+b) \geq v(a) \wedge v(b)$, $\forall a, b \in K$,
2. $v(-a) \geq v(a)$, $\forall a \in K$,
3. $v(ab) \geq v(a) \wedge v(b)$, $\forall a, b \in K$,
4. $v(a^{-1}) \geq v(a)$, $\forall a \in K \setminus \{0\}$.

Atëherë, v quhet fushë fuzzy (fuzzy field) në K dhe e shënojmë me v_K .

Përkufizim 6.11.5 [139] *Le të jetë V një hapësirë hipervektoriale mbi një fushë K dhe v një fushë fuzzy e K . Një bashkësi fuzzy μ e V quhet hapësirë hipervektoriale fuzzy e V mbi fushën fuzzy v_K (fuzzy hypervector space of V over the fuzzy field v_K), në qoftë se për çdo $x, y \in V$ dhe $a \in K$, plotësohen kushtet e mëposhtme:*

1. $\mu(x+y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$,
2. $\mu(-x) \geq \mu(x)$,
3. $\bigwedge_{y \in a \circ x} \mu(y) \geq v(a) \wedge \mu(x)$,
4. $v(1) \geq \mu(0)$.

Në qoftë se konsiderojmë $v = \chi_K$, funksioni karakteristik i K , atëherë μ quhet nënhiperhapësirë fuzzy (fuzzy sub-hyperspace) e V .

Është e qartë se në qoftë se μ është nënhiperhapësirë fuzzy e V , atëherë $\mu(0) \geq \mu(x)$ për çdo $x \in V$. Gjithashtu, μ është nënhiperhapësirë fuzzy e V vetëm atëherë kur μ_t është nënhiperhapësirë e V për çdo $t \in [0,1]$.

Lemë 6.11.6 *Në qoftë se μ është nënhiperhapësirë fuzzy e V , atëherë bashkësia $V_\mu = \{x \in V \mid \mu(x) = \mu(0)\}$ është nënhiperhapësirë e V .*

Vërtetim: Le të jetë $x, y \in V_\mu$. Atëherë $\mu(x) = \mu(y) = \mu(0)$. Meqenëse μ është nënhiperhapësirë fuzzy, rrjedh se

$$\mu(x-y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) = \mu(0) \wedge \mu(0) = \mu(0).$$

Nga ana tjetër, $\mu(x-y) \leq \mu(0)$, kështu që kemi $\mu(x-y) = \mu(0)$ dhe si rrjedhim, $x-y \in V_\mu$.

Gjithashtu, për çdo $x \in V_\mu$ dhe $a \in F$, marrim $\bigwedge_{y \in a \circ x} \mu(y) \geq \mu(x) = \mu(0)$. Nga ana tjetër,

$$\bigwedge_{y \in a \circ x} \mu(y) \leq \mu(0).$$

Që këtë kemi $\bigwedge_{y \in a \circ x} \mu(y) = \mu(0)$ që tregon se $a \circ x \subseteq V_\mu$. Rrjedhimisht, bashkësia V_μ është një nënhiperhapësirë e V . ■

Përkufizim 6.11.7 *Një nënhiperhapësirë fuzzy μ e V quhet normale (normal) në qoftë se ekziston $x \in V$ i tillë që $\mu(x) = 1$. Theksojmë se në qoftë se një nënhiperhapësirë fuzzy e V është normale, atëherë $\mu(0) = 1$. Pra, μ është një nënhiperhapësirë fuzzy normale vetëm atëherë kur $\mu(0) = 1$.*

Teoremë 6.11.8 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy e V dhe $\tilde{\mu}$ një bashkësi fuzzy në V e përcaktuar nga $\tilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0)$ për çdo $x \in V$. Atëherë, $\tilde{\mu}$ është një nënhiperhapësirë fuzzy normale e V që përmban μ .*

Vërtetim: Le të jetë $x, y \in V$ dhe $a \in K$. Atëherë,

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(x - y) &= \mu(x - y) + 1 - \mu(0) \geq (\mu(x) \wedge \mu(y)) + 1 - \mu(0) = \\ &= (\mu(x) + 1 - \mu(0)) \wedge (\mu(y) + 1 - \mu(0)) = \tilde{\mu}(x) \wedge \tilde{\mu}(y).\end{aligned}$$

Gjithashtu, kemi

$$\bigwedge_{z \in a \circ x} \tilde{\mu}(z) = \bigwedge_{z \in a \circ x} \mu(z) + 1 - \mu(0) \geq \mu(x) + 1 - \mu(0) = \tilde{\mu}(x).$$

Është e qartë se, $\tilde{\mu}(0) = 1$ dhe $\mu \subseteq \tilde{\mu}$. Në këtë mënyrë përfundon vërtetimi i teoremës. ■

Rrjedhim 6.11.9 *Në qoftë se μ është një nënhiperhapësirë fuzzy e V e tillë që $\tilde{\mu}(x) = 0$ për $x \in V$, atëherë $\mu(x) = 0$.*

Lemë 6.11.10 *Le të jetë χ_W funksioni karakteristik i një nënbashkësie $W \subseteq V$. Atëherë W është nënhiperhapësirë e V vetëm atëherë kur χ_W është nënhiperhapësirë fuzzy e V .*

Vërtetim: Vërtetimi rrjedh nga diskutimi pas Përkufizimit 6.11.5.

Teoremë 6.11.11 *Për çdo nënhiperhapësirë W të V , funksioni karakteristik χ_W është nënhiperhapësirë fuzzy normale e V dhe $V_{\chi_W} = W$.*

Vërtetim: Evident. ■

Teoremë 6.11.12 *Një nënhiperhapësirë fuzzy μ e V është normale vetëm atëherë kur $\tilde{\mu} = \mu$.*

Vërtetim: Në qoftë se $\tilde{\mu} = \mu$, atëherë është e qartë se μ është një nënhiperhapësirë fuzzy normale e V . Supozojmë se μ është nënhiperhapësirë fuzzy normale e V dhe le të jetë $x \in V$. Atëherë, $\tilde{\mu}(x) = \mu(x) + 1 - \mu(0) = \mu(x)$, kështu që $\tilde{\mu} = \mu$. ■

Teoremë 6.11.13 *Në qoftë se μ është një nënhiperhapësirë fuzzy e V , atëherë $\tilde{(\tilde{\mu})} = \tilde{\mu}$.*

Vërtetim: Evident. ■

Teoremë 6.11.14 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy e V . Në qoftë se ekziston një nënhiperhapësirë fuzzy ν e V e tillë që $\tilde{\nu} \subseteq \mu$, atëherë μ është nënhiperhapësirë fuzzy normale e V .*

Vërtetim: Supozojmë se ekziston një nënhiperhapësirë fuzzy ν e V e tillë që $\tilde{\nu} \subseteq \mu$. Atëherë, $1 = \tilde{\nu}(0) \leq \mu(0)$ dhe rrjedhimisht $\mu(0) = 1$. ■

Rrjedhim 6.11.15 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy e V . Në qoftë se ekziston një nënhiperhapësirë fuzzy ν e V e tillë që $\tilde{\nu} \subseteq \mu$, atëherë $\tilde{\mu} = \mu$.*

Vërtetim: Vërtetimi përftohet menjëherë nga Teorema 6.11.14 dhe përkufizimi i $\tilde{\mu}$. ■

Teoremë 6.11.16 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy e V dhe $f : [0, \mu(0)] \rightarrow [0, 1]$ një pasqyrim rritës. Përcaktojmë një bashkësi fuzzy $\mu' : V \rightarrow [0, 1]$ me $\mu'(x) = f(\mu(x))$ për çdo $x \in V$. Atëherë μ' është nënhiperhapësirë fuzzy e V . Në fakt, në qoftë se $f(t) \geq t$ për çdo $t \in [0, \mu(0)]$, atëherë $\mu \subseteq \mu'$.*

Vërtetim: Le të jetë $x, y \in V$. Atëherë

$$\mu'(x - y) = f(\mu(x - y)) \geq f(\mu(x) \wedge \mu(y)) = f(\mu(x)) \wedge f(\mu(y)) = \mu'(x) \wedge \mu'(y).$$

Gjithashtu, në qoftë se $a \in K$ dhe $x \in V$, atëherë $\bigwedge_{z \in a \circ x} \mu'(z) = f(\bigwedge_{z \in a \circ x} \mu(z)) \geq f(\mu(x)) = \mu'(x)$.

Pra, μ' është nënhiperhapësirë fuzzy e V . Supozojmë se $f(t) \geq t$ për çdo $t \in [0, \mu(0)]$. Atëherë, $\mu'(x) = f(\mu(x)) \geq \mu(x)$ për çdo $x \in V$, domethënë $\mu \subseteq \mu'$. ■

Teoremë 6.11.17 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy normale jo kostante e V që është maksimale në bashkësinë pjesërisht të renditur të nënhiperhapësirave fuzzy normale të V në lidhje me përfshirjen e bashkësive fuzzy. Atëherë, μ është një nënhiperhapësirë fuzzy dyvlerëshe dhe merr vlerat 0 dhe 1.*

Vërtetim: Dimë se $\mu(0) = 1$. Le të jetë $x \in V$ i tillë që $\mu(x) \neq 1$. Mjafton të tregojmë se $\mu(x) = 0$. Supozojmë se ekziston $x' \in V$ i tillë që $0 < \mu(x') < 1$. Përcaktojmë një bashkësi fuzzy $\nu : V \rightarrow [0, 1]$ me $\nu(x) = \frac{1}{2}(\mu(x) + \mu(x'))$ për çdo $x \in V$. Atëherë, është e qartë se ν është e përcaktuar mirë. Le të jetë $x, y \in V$. Atëherë,

$$\begin{aligned} \nu(x - y) &= \frac{1}{2}(\mu(x - y) + \mu(x')) \geq \frac{1}{2}((\mu(x) \wedge \mu(y)) + \mu(x')) = \\ &= \left(\frac{1}{2}(\nu(x) + \mu(x'))\right) \wedge \left(\frac{1}{2}(\mu(y) + \mu(x'))\right) = \nu(x) \wedge \nu(y). \end{aligned}$$

Gjithashtu, në qoftë se $a \in K$ dhe $x \in V$, atëherë

$$\bigwedge_{z \in a \circ x} \nu(z) = \frac{1}{2}(\bigwedge_{z \in a \circ x} \mu(z) + \mu(x')) \geq \frac{1}{2}(\mu(x) + \mu(x')) = \nu(x).$$

Pra, ν është një nënhiperhapësirë fuzzy e V . Tani, kemi që

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(x) &= \nu(x) + 1 - \nu(0) = \\ &= \frac{1}{2}(\mu(x) + \mu(x')) + 1 - \frac{1}{2}(\mu(0) + \mu(x')) = \frac{1}{2}(\mu(x) + 1). \end{aligned}$$

Që këtë, $\tilde{\nu}(0) = \frac{1}{2}(\mu(0) + 1) = 1$. Pra, $\tilde{\nu}$ është nënhiperhapësirë fuzzy normale e V .

Gjithashtu, $\tilde{\nu}(0) = 1 > \tilde{\nu}(x') = \frac{1}{2}(\mu(x') + 1) > \mu(x')$. Dimë se $\tilde{\nu}$ është jokostante, kështu që nga $\tilde{\nu}(x') > \mu(x')$ rrjedh se μ nuk është maksimale. Ky është kontradiksion! Rrjedhimisht, μ merr vetëm vlerat 0 dhe 1. ■

Teoremë 6.11.18 *Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy e V dhe le të jetë $\bar{\mu}$ një bashkësi fuzzy në V e përcaktuar nga $\bar{\mu}(x) = \mu(x)\mu(0)$ për çdo $x \in V$. Atëherë, $\bar{\mu}$ është nënhiperhapësirë fuzzy normale e V që përmban μ .*

Vërtetim: Për çdo $x, y \in V$, kemi

$$\mu(x - y) = \mu(x - y)\mu(0) \geq (1\mu(0))(\mu(x) \wedge \mu(y)) = (\mu(x)\mu(0)) \wedge (\mu(y)\mu(0)) = \bar{\mu}(x) \wedge \bar{\mu}(y).$$

Gjithashtu, në qoftë se $a \in K$ dhe $x \in V$, kemi

$$\bigwedge_{z \in a \circ x} \bar{\mu}(z) = \left(\bigwedge_{z \in a \circ x} \mu(z)\mu(0) \right) \geq (\mu(x)\mu(0)) = \bar{\mu}(x).$$

Pra, $\bar{\mu}$ është një nënhiperhapësirë fuzzy e V . Është e qartë se $\bar{\mu}(0) = 1$ dhe $\mu \subseteq \bar{\mu}$. ■

Rrjedhim 6.11.19 Në qoftë se μ është një nënhiperhapësirë fuzzy e V e tillë që $\bar{\mu}(x) = 0$ për ndonjë $x \in V$, atëherë $\mu(x) = 0$.

Vërtetim: Evident. ■

Teoremë 6.11.20 Le të jetë μ një nënhiperhapësirë fuzzy jokonstante e V e tillë që $\bar{\mu}$ është maksimale në bashkësinë pjesërisht të renditur të nënhiperhapësirave fuzzy normale të V në lidhje me përfshirjen e bashkësive fuzzy. Atëherë

1. μ është normale.
2. μ merr vetëm vlerat 0 dhe 1.
3. $\chi_{V_\mu} = \mu$.
4. V_μ është një nënhiperhapësirë maksimale e V .

Vërtetim: Meqenëse μ është jokonstante, atëherë $\tilde{\mu}$ është maksimale jokonstante. Gjithashtu, $\tilde{\mu}$ është normale, prandaj nga Teorema 6.11.17, $\tilde{\mu}$ merr vetëm vlerat 0 dhe 1. Në qoftë se $\tilde{\mu}(x) = 1$, atëherë $\mu(x) = \mu(0)$ dhe në qoftë se $\tilde{\mu}(x) = 0$, atëherë $\mu(x) = \mu(0) - 1$. Nga Rrjedhimi 6.11.9, kemi që $\mu(x) = 0$. Kjo sjell që $\mu(0) = 1$, prandaj μ është normale dhe gjithashtu nga Teorema 6.11.12, $\tilde{\mu} = \mu$. Kjo vërteton (1) dhe (2).

(3) Është e qartë se $\chi_{V_\mu} \subseteq \mu$ dhe χ_{V_μ} merr vetëm vlerat 0 dhe 1. Le të jetë $x \in V$ dhe $\mu(x) = 0$, atëherë $\mu \subseteq \chi_{V_\mu}$. Në qoftë se $\mu(x) = 1$, atëherë $x \in V_\mu$, kështu që $\chi_{V_\mu}(x) = 1$. Në çdo rast $\mu \subseteq \chi_{V_\mu}$.

(4) Meqenëse μ është konstante, V_μ është një nënhiperhapësirë e mirëfilltë e V . Le të jetë W një nënhiperhapësirë e V e tillë që $V_\mu \subseteq W$. Atëherë, kemi që $\mu = \chi_{V_\mu} \subseteq \chi_W$. Meqenëse μ dhe χ_W janë normale dhe $\mu = \tilde{\mu}$ është maksimale në bashkësinë pjesërisht të renditur të nënhiperhapësirave fuzzy normale në lidhje me përfshirjen e bashkësive fuzzy, kemi që $\mu = \chi_W$ ose $\chi_W(x) = 1$, për çdo $x \in V$, kështu që $W = V$. Në qoftë se $\mu = \chi_W$, atëherë nga Teorema 6.11.8, $V_\mu = V_{\chi_W} = W$. Si rrjedhim, V_μ është një nënhiperhapësirë maksimale e V . ■

REFERENCA

- [1] F. Marty, *Sur une generalization de la notion de group*, 8th Congres Math. Scandinaves, Stockholm, (1934), 45-49.
- [2] M. Koskas, *Groupoides, demi-groupoides et hypergroups*, J. Math. Pures Appl., 49 (9), (1970), 155-192.
- [3] P. Corsini, *Prolegomena of Hypergroup Theory*, Aviani Editore, 1993.
- [4] T. Vougiouklis, *The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield*, Proc. of the 4th AHA, Xanthi 1990, World Scientific (1991), 203-211.
- [5] T. Vougiouklis, *Hyperstructures and their Representations*, Monographs in Mathematics, Hadronic Press, Inc., Palm Harbor, USA (1994).
- [6] T. Vougiouklis, *Some remarks on hyperstructures*, *Contemporary Mathematics*, Amer. Math. Society, 184 (1995), 427-431.
- [7] P. Corsini and V. Leoreanu, *Applications of Hyperstructure Theory*, Kluwer Academic Publishers, (2003).
- [8] W. Prenowitz and J. Jantosciak, *Join Geometries*, Springer-Verlag, UTM., (1979).
- [9] B. Davvaz and V. Leoreanu-Fotea, *Hyperring theory and applications*, International Academic Press, USA, 2007.
- [10] H.S. Wall, *Hypergroups*, Amer. J. Math., 59 (1937) 77-98.
- [11] B. Davvaz and T. Vougiouklis, *n-ary hypergroups*, Iran. J. Sci. Tec., Tran. A. 30 (2006) 165-174.
- [12] A.V. Kelarev, J. L. Yearwood, and M. A. Mammadov, “*A formula for multiple classifiers in data mining based on Brandt semigroups*,” Semigroup Forum, vol. 78 (2009), no. 2, 293–309.
- [13] A.V. Kelarev, J. L. Yearwood, and P. W. Vamplew, “*A polynomial ring construction for the classification of data*” Bulletin of the Australian Mathematical Society, vol. 79(2009), no. 2, 213–225.
- [14] A.V. Kelarev, J. L. Yearwood, and P. Watters, “*Rees matrix constructions for clustering of data*,” Journal of the Australian Mathematical Society, vol. 87 (2009), no. 3, 377–393.
- [15] A.V. Kelarev, J.L. Yearwood, P. Watters, X. Wu, J.H. Abawajy and L. Pan, “*Internet security applications of the Munn rings*,” Semigroup Forum, vol. 81(2010), no. 1, 162–171.
- [16] A.V. Kelarev, J. L. Yearwood and P. A. Watters, “*Optimization of classifiers for data mining based on combinatorial semigroups*,” Semigroup Forum, vol. 82 (2011), no. 2, 242–251.
- [17] P. Bonansinga and P. Corsini, *On semihypergroup and hypergroup homomorphisms*, Boll. Un. Mat. Ital. B (6) **1(2)** (1982), 717-727.
- [18] S. Chaopraknoi and N. Triphop, *Regularity of semihypergroups of infinite matrices*, Thai J. Math. **4(3)** (2006), 7-11.
- [19] B. Davvaz and N.S. Poursalavati, *Semihypergroups and S-hypersystems*, Pure Math. Appl. **11(1)** (2000), 43-49.

REFERENCA

- [20] B. Davvaz, Wieslaw A. Dudek and T. Vougiouklis, *A Generalization of n -ary algebraic systems*, Commun. Algebra **37** (2009), 1248-1263.
- [21] B. Davvaz, W.A. Dudek and S. Mirvakili, *Neutral elements, fundamental relations and n -ary hypersemigroups*, Int. J. Algebra Comput. **19(4)** (2009), 567–583.
- [22] B. Davvaz and V. Leoreanu-Fotea, *Binary relations on ternary semihypergroups*, Commun. Algebra **38(10)** (2010), 3621-3636.
- [23] D. Fasino and D. Freni, *Existence of proper semihypergroups of type U on the right*, Discrete Math. **307(22)** (2007), 2826--2836.
- [24] V. Leoreanu, *About the simplifiable cyclic semihypergroups*, Ital. J. Pure Appl. Math. **7** (2000), 69-76.
- [25] H. Olaru, C. Pelea and I. Purdea, *On the completeness of the semihypergroups associated to binary relations* Stud. Univ. Babes-Bolyai Math. **52(2)** (2007), 73-85.
- [26] B. Davvaz, *Some results on congruences on semihypergroups*. Bull. Malaysian Math. Sc. Soc. (Second Series) **23** (2000), 53–58.
- [27] A. Hasankhani, *Ideals in a semihypergroup and Green's relations*. Ratio Mathematica **13** (1999), 29–36.
- [28] M. Gutan, "On the transitivity of the relation β in semihypergroups." Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **45(2)** (1996), 189-200.
- [29] D. Freni, "Minimal order semihypergroups of type U on the right, II." Journal of Algebra **340(1)** (2011), 77-89.
- [30] C. Gutan, "Simplifiable semihypergroups, Algebraic hyperstructures and applications (Xanthi, 1990), 103-111, World Sci." Publ., Teaneck, NJ (1991).
- [31] D. Fasino, D. Freni. "Fundamental relations in simple and 0-simple semihypergroups of small size." Arabian Journal of Mathematics **1(2)** (2012), 175-190.
- [32] K. Hila, S. Abdullah, "On topological structure on semihypergroups", Proceedings of the International Conference on Topology and its Applications (ICTA2011) (Islamabad, Pakistan, July 4-10, 2011). Cambridge Scientific Publishers (2012), Edit. A. V. Arhangel'skii, M. ud D. Khan, L. D.R. Kocinac, pp. 221-229. ISBN 978-1-908106-17-9
- [33] K. Hila, J. Dine, *On hyperideals in left almost semihypergroups*, ISRN ALGEBRA, Vol. 2011, Article ID 953124, 9 pages. doi:10.5402/2011/953124, 2011.
- [34] D. Heidari, S. O. Dehkordi and B. Davvaz, *Γ -semihypergroups and their properties*, U.P.B. Sci. Bull., Series A, **72(1)**(2010), 195-208.
- [35] S. Mirvakili, S. M. Anvariye h and B. Davvaz, " *Γ -semihypergroups and regular relations*", Journal of Mathematics, Volume 2013 (2013), Article ID 915250, 7 pages.
- [36] K. Hila, B. Davvaz, and J. Dine. "Study on the structure of Γ -semihypergroups.", Communications in Algebra **40(8)** (2012), 2932-2948.
- [37] S. M. Anvariye h, S. Mirvakili, B. Davvaz, *On Γ -hyperideals in Γ -semihypergroups*, Carpathian J. Math. **26** (2010), No. 1, 11-23.
- [38] S. Abdullah, K. Hila and M. Aslam "On bi- Γ -hyperideals of Γ -semihypergroups" UPB Sci. Bull. Ser. A **74**, no. 4 (2012), 79-90.

- [39] D. Heidari, and B. Davvaz. " Γ -hypergroups and Γ -semihypergroups associated to binary relations", IJST 2 (2011): 69-80.
- [40] R. A. Good and D. R. Hughes, *Associated groups for a semigroup*, Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 624-625
- [41] O. Steinfeld, *On the ideals quotients and prime ideals*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 4(1953), 289-298.
- [42] O. Steinfeld, *Über die Quasiideale von Halbgruppen*, Publ. Math. Debrecen 4(1956) 262-275 (Mr 18, 790).
- [43] O. Steinfeld, *Quasi-ideals in rings and semigroups*, Akademiai Kiado, Budapest, 1978.
- [44] K. Hila, *On regular, semiprime and quasi-reflexive Γ -semigroup and minimal quasi-ideals*, Lobachevskii J. Math., Vol. 29(2008), No. 3, 141-152.
- [45] C. Dönges, *On quasi-ideals of semirings*, Internal. J. Math. & Math. Sci. 17 (1994), 47-58.
- [46] R. Chinram, *A note on (m,n) -quasi-ideals in rings*, Far East Journal of Mathematical Sciences 20(2) (2008), 299-308.
- [47] R. Chinram, *A note on (m,n) -quasi-ideals in semirings*, Int. J. Pure Appl. Math. 49(1) (2008), 45-52.
- [48] K. Iseki, *A characterization of regular semigroups*, Proc. Japan Acad., 32 (1956), 676-677.
- [49] S. Lajos, *Notes on (m,n) -ideals III*, Proc. Japan Acad. 41 (1965), 383-385.
- [50] S. Lajos, *Notes on (m,n) -ideals II*, Proc. Japan Acad. 40 (1964), 631-632.
- [51] S. Lajos, *Notes on (m,n) -ideals I*, Proc. Japan Acad. 39 (1963), 419-421.
- [52] M. Ghadiri, B. Davvaz and R. Nekouian, *H_v -Semigroup structure on F_2 -offspring of a gene pool*, Int. J. Biomath. 5(4) (2012), 1250011 (13 pages).
- [53] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad, M.M. Heidari, *Inheritance examples of algebraic hyperstructures*, Inf. Sci. 224 (2013) 180-187.
- [54] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad and A. Benvidi, *Chemical hyperalgebra: Dismutation reactions*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 67 (2012), 55-63.
- [55] B. Davvaz, A. Dehghan Nezhad and A. Benvidi, *Chain reactions as experimental examples of ternary algebraic hyperstructures*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 65(2) (2011), 491-499.
- [56] B. Davvaz and A. Dehghan Nezhad, *Dismutation reactions as experimental verifications of ternary algebraic hyperstructures*, MATCH Commun. Math. Comput. Chem. 68 (2012), 551-559.
- [57] B. Davvaz, R. M. Santilli and T. Vougiouklis, *Studies of multivalued hyperstructures for the characterization of matter-antimatter systems and their extension*, Algebras Groups Geom. 28 (2011), 105-116.
- [58] A. Dehghan Nezhad, S.M. Moosavi Nejad, M. Nadjafikhah and B. Davvaz, *A physical example of algebraic hyperstructures: Leptons*, Indian J. Phys. 86(11) (2012)
- [59] A. Cayley, Camb. Math. J. 4(1) (1845).
- [60] M. Kapranov, I. M. Gelfand, A. Zelevinskii, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser, Berlin (1994).

- [61] L. Vainerman, R. Kerner, *On special classes of n -algebras*. J. Math. Phys. **37(5)**, 2553-2565 (1996).
- [62] L. Takhtajan, *On foundation of the generalized Nambu mechanics*. Comm. Math. Phys. **160(2)**, 295–315 (1994).
- [63] R. Kerner, *Ternary algebraic structures and their applications in physics*. Univ. P. & M. Curie preprint, Paris (2000) ArXiv math-ph/0011023.
- [64] R. Kerner, *The cubic chessboard*. Class. Quantum Grav. **14(1A)**, A203–A225 (1997).
- [65] V. Abramov, R. Kerner, B. Le Roy, *Hypersymmetry: a Z_3 -graded generalization of supersymmetry*. J. Math. Phys. **38(3)**, 1650–1669 (1997).
- [66] Y. L. Daletskii, L.A. Takhtajan, *Leibniz and Lie algebra structures for Nambu algebra*. Lett. Math. Phys. **39(2)**, 127–141 (1997).
- [67] Dörnte, *Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff*, Math. Z., 1929, V.29, 1–19.
- [68] E. Kasner, *An extension of the group concept*, Bull. Amer. Math. Soc. **10** (1904) 290-291.
- [69] J. W. Grzymala-Busse, *Automorphisms of polyadic automata*, J. Assoc. Comput. Mach. **16** (1969), 208-219.
- [70] D. Nikshych and L. Vainerman, *Finite quantum groupoids and their applications*, Univ. California, Los Angeles 2000.
- [71] Z. Stojaković and W. A. Dudek, *Single identities for varieties equivalent to quadruple systems*, Discrete Math. **183** (1998), 277-284.
- [72] R. Kerner, *Ternary algebraic structures and their applications in physics*. Univ. P. & M. Curie preprint, Paris (2000) ArXiv math-ph/0011023.
- [73] A.P. Pojidaev, *Enveloping algebras of Filippov algebras*, Comm. Algebra **31** (2003) 883-900.
- [74] L. Vainerman, R. Kerner, *On special classes of n -algebras*. J. Math. Phys. **37(5)**, 2553-2565 (1996).
- [75] C. F. Laywine and G. L. Mullen, *Discrete Mathematics Using Latin Squares*, Wiley, New York 1998.
- [76] D. H. Lehmer, *A ternary analogue of abelian groups*, Amer. J. Math. (1932), 329-338.
- [77] J. Los, *On the extending of models I*, Fundamenta Mathematicae **42** (1995), 38-54.
- [78] F. M. Sioson, *Ideal theory in ternary semigroups*, Math. Japonica **10** (1965), 63-64.
- [79] W. A. Dudek, *On divisibility in n -semigroups*, Demonstratio Math. **13** (1980), 355-367.
- [80] W. A. Dudek, I. Grodzinska *On ideals in regular n -semigroups*, Mat. Bilten **3(4)** (1980), 29-30.
- [81] V. N. Dixit and S. Dewan, *A note on quasi and bi-ideals in ternary semigroups*, Int. J. Math. and Math. Sci. Vol **18(3)** (1995), 501-508.
- [82] V. Leoreanu-Fotea and B. Davvaz, *n -hypergroups and binary relations*, European Journal of Combinatorics, **29(5)** (2008) 1207-1218.
- [83] M. L. Santiago and S. Sri Bala, *Ternary semigroups*, Semigroup Forum **81(2)**(2010), 380-388.

REFERENCA

- [84] M. K. Dubey and Anuradha, *On generalized quasi-ideals and bi-ideals in ternary semigroups*, J. Math. Applic., accepted.
- [85] M. Shabir and Sh. Bashir, *Prime ideals in ternary semigroups*, Asian-European J. Math. **2**(1) (2009), 141-154.
- [86] M. Shabir and M. Bano, *Prime bi-ideals in ternary semigroups*, Quasigroups and Related Systems **16**(2008), 239-256.
- [87] Sh. Bashir and M. Shabir, *Pure ideals in ternary semigroups*, Quasigroups and Related Systems **17**(2009), 149-160.
- [88] S. Lajos, *A remark on regular semigroups*, Proc. Japan Acad. **37** (1961), 29-30.
- [89] J. von Neumann, *On regular rings*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **22**(1936), 707-713.
- [90] K. Iseki, *A characterization of regular semigroups*, Proc. Japan Acad. **32**, 676-677 (1995).
- [91] L. Kovacs, *A note on regular rings*, Publ. Math. Debrecen **4**, 465-468 (1956).
- [92] T. Dutta, S. Kar and B. Maity, *On ideals in regular ternary semigroups*, Discussiones Mathematicae, General Algebra and Applications **28**(2008), 147-159.
- [93] M.L. Santiago, *Regular ternary semigroups*, Bull. Calcutta Math. Soc. **82**(1990), no. 1, 67-71.
- [94] T. K. Dutta and S. Kar, *On regular ternary semirings*, Kyungpook Mathematical Journal **46**(3) (2006), 357-365.
- [95] T. K. Dutta and S. Kar, *On regular ternary semirings*; Advances in Algebra, Proceedings of the ICM Satellite Conference in Algebra and Related Topics, World Scientific (2003), 343-355.
- [96] T. Vasile, *Regular ternary rings*, An. Stiin. Univ. Al. I. Cuza. Ia si Sec. Ia Mat. **33**(2)(1987), 89-92.
- [97] L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, **8**(1965), 338-353.
- [98] N. Kuroki, *Fuzzy bi-ideals in Semigroups*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **28** (1979), 17-21.
- [99] A. Rosenfeld, *Fuzzy groups*, J. Math. Anal. Appl. **35** (1971) 512-517.
- [100] B. Davvaz, *Fuzzy hyperideals in semihypergroups*, Italian J. Pure Appl. Math. **8** (2000), 67-74.
- [101] B. Davvaz, *A survey of fuzzy algebraic hyperstructures*, Algebra Groups and Geometries, Vol. **27**(1) (2010), 37-62.
- [102] N. Yaqoob, M. Aslam and K. Hila, *Rough fuzzy hyperideals in ternary semihypergroups*, Advances in Fuzzy Systems, Vol. 2012, Article ID 595687, 9 pages, 2012.
- [103] A. M. Revzi and J. Mehmood, *On prime fuzzy bi-ideals in ternary semigroups*, Matematicki Vesnik **64**(2) (2012), 79-96.
- [104] M. Shabir, Y. B. Jun and M. Bano, *On prime fuzzy bi-ideals of semigroups*, Iranian J. Fuzzy Systems Vol. **7**, No. 3, (2010), 115-128.
- [105] Sh. Bashir, M. Shabir, N. Rehman, *Pure fuzzy ideals in ternary semigroups*, Int. J. Algebra Statistics, Vol. 1:2(2012), 107.
- [106] L.A. Zadeh, *The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning I*, Inform. Sci. **8** (1975), 199-249.

REFERENCA

- [107] P. Corsini, M. Shabir and T. Mamood, *Semisimple semihypergroups in terms of hyperideals and fuzzy hyperideals*, Iranian J. Fuzzy Systems Vol. **8**, No. 1, (2011).
- [108] J.J. Buckley, *The Fuzzy Mathematics of Finance*, Fuzzy Sets Syst. 21(1987), 257-273.
- [109] Corsini, P, Leoreanu-Fotea, V: *Fuzzy sets and join spaces associated with rough sets*. Rend. Circ. Mat. Palermo 2(51), 527-536 (2002)
- [110] J. N. Mordeson, D. S. Malik, and N. Kuroki, *Fuzzy Semigroups*, Springer, 2003.
- [111] D. Molodtsov, "Soft set theory—first results," Computers & Mathematics with Applications, vol. 37, no. 4-5, 19–31, 1999.
- [112] Z. Pawlak, Rough sets, *Int. J. Comput. Inform. Sci.* **11** (1982) 341-356.
- [113] P.K. Maji, A.R. Roy, R. Biswas, *An application of soft sets in a decision making problem*, Comput. Math. Appl. **44** (2002) 1077-1083.
- [114] D.W. Pei, D. Miao, *From soft sets to information systems*, IEEE International conference on granular Computing (2005) 617-621.
- [115] A.R. Roy, P.K. Maji, *A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems*, J. Comput. Appl. Math. **203** (2007) 412-418.
- [116] P.K. Maji, R. Biswas, A.R. Roy, *Soft set theory*, Comput. Math. Appl. **45** (2003) 555-562.
- [117] M.I. Ali, F. Feng, X. Liub, W.K. Minc, M. Shabir, *On some new operations in soft set theory*, Comput. Math. Appl. **57** (2009) 1547-1553.
- [118] H. Aktas, N. Cagman, *Soft sets and soft groups*, Inform. Sci. **177** (2007) 2726-2735.
- [119] V. Leoreanu Fotea, P. Corsini, *Soft hypergroups*, Critical Review. A publication of Society for Mathematics of Uncertainty, Creighton University - USA, July 2010, vol. IV, 81-97
- [120] S. Yamaka, O. Kazanci, B. Davvaz, *Soft hyperstructure*, Comp. Math. Appl. **62** (2011), 797-803
- [121] S.M. Anvariye, S. Mirvakili, O. Kazanci, B. Davvaz, *Algebraic hyperstructure of soft sets associated to semihypergroups*, South. Asian Bull. Math. **35** (2011), 911-925.
- [122] J. Wanga, M. Yin, W. Gua, *Soft polygroup*, Comp. Math. Appl. **62** (2011), 3529-3537.
- [123] M.I. Ali, M. Shabir, K.P. Shum, *On soft ideals over semigroups*, South. Asian Bull. Math. **34** (2010), 595-610.
- [124] Y.B. Yun, K.J. Lee, A. Khan, *Soft ordered semigroups*, Math. Log. Quart. **56(1)** (2010), 42-50.
- [125] Y.B. Jun, *Soft BCK/BCI-algebras*, Comp. Math. Appl. **56** (2008), 1408-1413.
- [126] Y.B. Jun, C.H. Park, *Applications of soft sets in ideal theory of BCK/BCI-algebras*, Inform. Sci. **178** (2008), 2466-2475.
- [127] C.H. Park, Y.B. Jun, M.A. Qztürk, *Soft WS-algebras*, Commun. Korean Math. Soc. **23(3)** (2008), 313-324.
- [128] Y.B. Jun, K.J. Lee, C.H. Park, *Soft set theory applied to ideals in d-algebras*, Comp. Math. Appl. **57(3)** (2009), 367-378.
- [129] F. Feng, Y.B. Jun, X. Zhao, *Soft semirings*, Comp. Math. Appl. **56(10)** (2008), 2621-2628.
- [130] Q. Sun, Z. Zhang, J. Liu, *Soft sets and soft modules*, Lecture Notes in Computer Science **5009** (2008), 403-409.

REFERENCA

- [134] U. Acar, F. Koyuncu, B. Tanay, *Soft sets and soft rings*, Comp. Math. Appl. **59**(2010), 3458-3463.
- [135] M. Shabir, A. Ahmad, *On soft ternary semigroups*, Annals Fuzzy Math. Inform., Vol. 3 (2012), No. 1, 39-59.
- [136] M. Scafati Tallini, *Hypervector Spaces*, Proceedings of the Fourth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Xanthi, Greece, 167-174 (1990).
- [137] R. Ameri & O.R. Dehghan, (2008). *Fuzzy Hypervector Spaces*, Advances in Fuzzy Systems, Vol. 2008, Article ID 295649, 9 pages.
- [138] R. Ameri & O.R. Dehghan, (2008). *On Dimension of Hypervector Spaces*, European Journal of Pure and Applied Mathematics 1(2), 32-50.
- [139] R. Ameri, (2005). *Fuzzy Hypervector Spaces over Valued Fields*, Iranian Journal of Fuzzy Systems, 2, 37-47.
- [140] R. Ameri & O.R. Dehghan, (2010). *Fuzzy basis of fuzzy hypervector spaces*, Iranian Journal of Fuzzy Systems 7(3), 97-113.
- [150] R. Ameri & O.R. Dehghan, (2011). *Fuzzy hypervector spaces based on fuzzy singletons*, Computers Math. Applic. 61(10), 2933-2943.
- [151] M. Scafati Tallini, (1991). *Matroidal Hypervector Spaces*, Journal of Geometry 42, 132-140.
- [152] M. Scafati Tallini, (1994). *Weak Hypervector Spaces and Norms in such Spaces*, Proceedings of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Jasi, Rumania, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, USA, 199-206 (1994).
- [153] M. Scafati Tallini, (2003). *Characterization of remarkable hypervector spaces*, Proceedings of the 8th International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Samothraki, Greece, September 1-9, 2002. Xanthi: Spanidis Press. 231-237 (2003).
- [154] M. Scafati Tallini, (1991). *Spazi ipervettoriali fortemente distributivi a sinistra*, Rend, Mat. Univ. Roma, (VII) 11, 1-16.
- [155] M. Scafati Tallini, (1993). *La categoria degli spazi ipervettoriali*, Quaderno Sem Mat. Univ: Roma, no. 110, 1-17.
- [156] M. Scafati Tallini, (1993). *Spazi ipervettoriali deboli e norme in tali spazi*, Quaderno Sem Mat. Univ: Roma, 1-17.
- [157] M. Scafati Tallini, (1994). *La categoria degli spazi ipervettoriali*, Rivista di Mat. Pura e Applicata, Univ. Udine, no. 15, 97-109.
- [158] M. Scafati Tallini, (1996). *Strutture algebriche multivoche e strutture geometriche*, Quaderno Sem. Mat. Univ. Roma, 1-23.
- [159] M. Scafati Tallini, (1996). *Sottospazi, spazi quozienti, omomorfismi tra spazi ipervettoriali*, Rivista di Mat. Pura e Applicata Univ. Udine, no. 18, 71-84.
- [160] T. Vougiuklis, (1994). *Hv-Vector Spaces*, Proceedings of the Fifth International Congress on Algebraic Hyperstructures and Applications, Jasi, Rumania, Hadronic Press, Palm Harbor, Florida, USA, 181-190 (1994).

