UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANES

FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE FIZIKE

DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE

---

**PROGRAMI ANALIZE**

**DISERTACION**

# REZULTATE
# NË ZBATIMIN E KONVERGJENCËS STATISTIKORE
# NË TEORINË E MASËS DHE INTEGRIMIT

**Punoi** | **Udheheqes shkencor**
**Anita Çaushi** | **Prof. Dr. Agron Tato**

**TIRANE 2014**

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANES

FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE FIZIKE

DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE

# PROGRAMI ANALIZE

## DISERTACION

# REZULTATE
# NË ZBATIMIN E KONVERGJENCËS STATISTIKORE
# NË TEORINË E MASËS DHE INTEGRIMIT

**Mbrohet më datë....31../...10.../2014 para jurisë**

**1. Prof. Dr. Shpëtim LEKA,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,Kryetar**

**2. Prof. Dr. Xhezair TELITI....................................Anëtar(oponent)**

**3. Prof. Dr. Kristaq KIKINA........................................Anëtar**

**4. Prof. as. Dr. Luigj GJOKA.......................................Anëtar(oponent)**

**5. Prof. As. Dr. Kristaq GJINO.....................................Anëtar**

# MIRËNJOHJE

Kjo mirënjohje i shkon personave që më mbështetën në realizimin e këtij studimi.

Në rradhë të parë falenderoj familjen time që në çdo moment më ka përkrahur si në aspektin moral ashtu edhe në atë financiar.Ishte pikërisht familja, ajo që më nxiti akoma më shumë për të realizuar ëndrrën time.

Gjithashtu, ky falenderim i shkon udhëheqësit të kësaj teme disertacioni pedagogut Prof. Dr. Agron Tato i cili më ka mbështetur gjatë gjithë periudhës tre vjeçare që ky studim të jetë sa më i kompletuar në çdo aspekt. Ai më ka përkrahur dhe më ka ndihmuar si në dhënien e informacioneve të duhura ashtu edhe në shpjegimin e këtyre të dhënave sa më qartë.

Dua të falenderoj të gjithë miqtë , kolegët dhe drejtuesit e Departamentit të Inxhinierisë Matematike që më kanë inkurajuar dhe mbështetur gjatë kësaj pune të lodhshme.

**PERMBAJTJA**

# Hyrje

Ideja e konvergjencës statistikore është e hershme dhe për herë të parë është paraqitur në një botim të vitit 1935 në një monografi të Zygmund[35]. Në trajtë formale ajo është futur nga Steinhaus[31] dhe Fast[13] dhe më vonë është riformuluar nga Schoenberg[29]. Studimi i saj, fillimisht, ka dalë si nevojë e zgjidhjes së problemeve me shumimin e serive.

Konvergjenca statistikore ndonëse është formuluar rreth 70 vjet më parë, vetëm në dhjetvjeçarin e fundit është bërë një fushë aktive kërkimi. Shumë matematikanë kanë studjuar vetitë e saj dhe e kanë zbatuar këtë koncept në fusha të ndryshme të matematikës si në teorinë e masës [24], në seritë trigonometrike[35], në teorinë e përafrimit [11] në hapësirat lokalisht konvekse[22], në bashkësinë e funksioneve aditivë të fundmë[5] në studimin e nënbashkësive të kompaktifikimit StoneChech[6]dhe në hapësirat e Banahut[4].

Në një farë kuptimi puna jonë është vazhdim i rezultateve të marra nga [5] dhe [6]. Ne e kemi konsideruar këtë lloj konvergjence si një përpjekje në studimin e cilësisë së divergjencave të vargjeve

Një shtysë për këtë punim ka qenë dhe artikulli i Burgin dheDuman[3] i cili i kushtohet lidhjeve ndërmjet konvergjencës statistikore dhe sistemeve ergodike. Autorët provojnë se konvergjenca statistikore sjellë konvergjencën sipas të mesmes duke dhënë të njëtin rezultat të pritjes matematike dhe të dispersionit.Kjo na bindi se studimi i konvergjencës statistikore ka vlerë si teorike edhe praktike.

Disertacioni përbëhet nga tri kapituj që lidhen me tre zbatime të konvergjencës staistikore në teorinë moderne të masës. Kapitulli i parë ka të bëjë me matshmërinë e funksioneve me vlera në hapësirat vektoriale dhe në hapësirën e Banahut.Kjo matshmëri në përputhje me terminologjinë e njohur është quajtur matshmëri e fortë.

Matshmëria e funksioneve është bazuar në konvergjencën statistikore të vargjeve të funksioneve të thjeshtë me vlera në një hapësirë vektoriale të normuar. Më tej është dhënë një lidhje ndërmjet konvergjencës statistikore pothuajse kudo të vargjeve në këto hapësira me konvergjencën statistikore sipas masës të futur rishtas duke marrë si rezultat që konvergjenca statistikore pothuajse kudo sjellë konvergjencën statistikore sipas masës. Janë dhënë dhe shembuj që tregojnë se e kundërta nuk ka vend gjithmonë. Një pohim i ngjashëm në dukje me atë klasike është edhe teorema Egorov por tani ajo lidh dy konvergjenca statistikore në hapësirat e normuara, atë ndërmjet konvergjencës së fortë dhe konvergjencës së fortë uniformisht. Kemi futur dhe konceptin e matshmërisë statistikore të dobët dhe është vërtetuar një teoremë komplekse e ngjashme me teoremën Pettis që lidh konvergjencën statistikore të fortë me atë të dobët. Një shembull tregon që këto dy matshmëri nuk përputhen. Duhet një hapësirë të normuar separable që të dy konceptet të përputhen.

Kapitulli i dytë i kushtohet integrimit statistikor të funksioneve vektorial duke na dhënë një integral më të gjerë të tipit të Bohnerit duke e përmbajtur rastin e njohur si rast të veçantë. Integrali statistikor i Bohnerit mbështetet tek kuptimi i vargu Koshi që për rastin e konvergjencës statistikore ka një formulim të veçatë të dhënë nga Fridy[13]. Në rastin e hapësirave të normuar të plota, është përgjithsuar një teoremë e vërtetuar nga Gokhan e tj.[18] për funksionet realë dhe është treguar se në këtë rast  edhe vargjet Koshi të llojit statistikor janë konvergjent në hapësirat e Banahut. Janë formuluar dhe vërtetuar një numër pohimesh që sigurojnë korrektesën e përkufizimit të futur dhe është dhënë një kundërshemull që tregon se ka funksione që kanë integral statistikor të Bohnerit por jo integralin e zakonshëm të tij. Një numër vetish të integralit statistikor të Bohnerit të kujtojnë vetitë e njohura të integralit sidomos në rastin e normës së funksioneve. Këto veti tregojnë dhe mundësitë e mëdha që ka ky integral për zbatime. Ndonëse dihen vështirësitë në trajtimin e integraleve të funksioneve me vlera në një hapësirë vektoriale është provuar se funksioni është i integrueshëm statistikisht sipas Bohnerit atëherë dhe vetëm atëherë kur norma e funksionit si një funksion real është e tillë. Një punë e madhe është dashur për të formuluar dhe vërtetuar teoremat mbi kalimin në limit të integralit statistikor që ne i kemi emruar teoremat Fatu dhe Lebeg.Kjo është realizuar duke shfrytëzuar integrimin e normës së funksionit gjë që i ka bërë formulimet të dallojnë nga ato klasike. Na u desh të gjejmë një teoremë të Kadec[21] që të marrim vërtetimin e një teoreme që të kujton teoremën Beppo-Levi.

Edhe kapitulli i tretë i është kushtuar zbatimeve të konvergjencës statistikore në integrim por tashmë në integrimin e dobët, konkretisht, janë shtrirë në rastin statistikor integralet e Dunfordit dhe Pettis-t duke patur përparësi këtë të fundit.Futjen e këtyre integraleve e bën të mundur teorema e formuluar e Pettis-it për lidhjen ndërmjet matshmërisë së dobët dhe të fortë në rastin statistikor. Është ecur në rrugën e zakonshme duke future më parë integralin statistikor të Dunfordit dhe duke rivërtetuar për rastin statistikor pohimet më të rëndësishme që lidhen me të në rastin klasik. Integrali staistikor i Pettis-it fillimisht është dhënë si rast i veçantë i integralit të Dunfordit për bashkësitë reflektive. Më pas  është dhënë një shembull voluminos që tregon ata nuk përputhen në rastin e përgjithshëm.  Një krahasim ndërmjet integralit statistikor të Bohnerit dhe integralit staistikor të Pettis-it tregon se funksioni i integreushëm statistikisht sipas Bohnerit është i integrueshëm statistikisht edhe sipas Pettis-it. Ndonëse është provuar më parë se në kushte të caktuara integrali i Dunfordit është aditiv i numërueshëm me anë të një shembulli është treguar se për një hapësirë të normuar çfarëdo kjo veti nuk ka vend.

Integrali i Pettis-it prej shumë vjetësh ka qenë jashtë interesit të matematikanëve për shkak të formulimit statik të tij. Qysh në 1981 Geitz[17] arriti të gjejë një përcaktin të tij si limit vargjesh nga hapësira duale, por kjo bëhej  e mundur vetëm për hapësirat e matshme perfekte. Musial[25] katër vjet më vonë  arriti që të formulojë integralin Pettis me ndihmën e vargjeve në rastin e zakonshëm dhe kjo risolli në vëmendje këtë integral që ka zbatime të shumta teorike sidomos në teorinë e probabilitetit dhe teorinë e masës. Ne kemi mundur të riformulojmë integralin statistikor të Pettis-it sipas këtyre ideve dhe shpresojmë te jemi të parët.Kështu është gjetur një konditë e nevojshme dhe e mjaftueshme që funksioni të jetë staistikisht i integrueshëm Pettis siaps vargjeve të matshëm dobët.Në pjesën e fundit është bërë një studim i vetive të integralit Pettis duke u bazuar në konvergjencën e pakushtëzuar të serive.Është treguar se integrali statistikor i Pettis-t është aditiv i numërueshëm dhe ai përputhet me të Dunfordit nëse hapësira nuk ka ndonjë hapësirë homeomorfike me $c_o$.

## Përkufizime dhe kuptime bazë

Terminologjia e pwrdorur wshtw adoptuar nga ajo mw e pwrhapura qe vihet re tek [14], [15] [16], [33]dhe [4].

Le të jetë A një nënbashkesi e bashkësisë së renditur ℕ me densitet $\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A_n|}{n}$ , ku $A_n$ = {k < n ; k∈A} dhe me |A| shënojmë kardinalin e bashkësisë A. Duket qartë se bashkësitë e fundme kanë densitet zero dhe δ(A′)= 1-δ(A) ku A'=ℕ \ A. Nëse P(k)={k ; k∈A} dhe δ(A)=1, pra thuhet se P përmban pothuajse të gjitha k, shkurt p.p.gj.k.Vargu x është statistikisht konvergjent tek një element L, të një hapësire vektoriale të normuar në qoftë se për çdo ε >0

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : \|x_k - L\| \ge \varepsilon\}| = 0$$

Pra, $\|x_k - L\| < \varepsilon$ p.p.gj.k

Në këtë rast mund të shkruajmë st-lim $x_k$ =L.

Vargu x është varg statistikisht - Koshi, nëqoftëse për cdo ε>0, ekziston një numër N=N(ε) ∈ℕ të tillë që

$$\|x_k - x_N\| < \varepsilon \text{ p.p.gj.k.}$$

Të përgjithsojmë më tej konvergjencën pikësore në konvergjencën pikësore statistikore të funksioneve.

Le të kemi një varg $\{f_k\}$ termat e të cilit janë funksione me vlera në një hapësirë vektoriale. Për cdo x nga bashkësia e përcaktimit merret vargu i vektorëve $(f_k(x))$. Le të jetë S bashkësia e atyre x-ve, ku $\{f_k(x)\}$ konvergjon. Funksioni f i përcaktuar si

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \ ; x\in S$$

quhet funksion limit i vargut $\{f_k\}$, pra vargu $\{f_k\}$ konvergjon në mënyrë pikësore të f ne S.

Kjo do te thotë se për çdo $x \in S$ dhe për cdo $\varepsilon>0$, ekziston N(e varur nga x dhe $\varepsilon$) e tillë që

$k > N$ sjell $\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon$.

Vargu i funksioneve $\{f_k(x)\}$ konvergjon **statistikisht në mënyrë pikësore** te f në një bashkësi S, në qoftë se për çdo $\varepsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : \|f_k(x) - f(x)\| \ge \varepsilon, \forall x \in S\}| = 0 ,$$

pra per çdo $x \in S$,

$$\|f_k(x)-f(x)\|<\varepsilon.$$

pothuajse për të gjithë k.

Në këtë rast shkruajmë st-lim $f_k(x)=f(x)$ ose $f_k \xrightarrow{st} f$ në S.

Pra, për cdo $\delta>0$,ekziston nje N(natyror)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n : \|f_k(x) - f(x)\| \ge \varepsilon, \forall x \in S\}| < \delta \qquad (1)$$

per cdo $n>N = (N(\varepsilon,\delta,x))$ dhe per cdo $\varepsilon>0$.

Duket qartë se nëse mosbarazimi (1) ka kuptim për një numër të fundmë k, atëherë lim $f_k(x)=f(x)$ $\lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)$ në S dhe prej këndej marrim se kur ky limit ekziston rrjedh ekziston st-$\lim_{n\to\infty} f_k(x) = f(x)$ .E anasjellta nuk është e vertetë siç tregon shembulli i mëposhtëm:

Është një varg shumë i njohur i ndërtuar në mënyrë të tillë

$$x_k = \begin{cases} x & \text{kur } k=m^2 \\ 0 & \text{kur } k \ne m^2 \end{cases}$$

k=1,2,... Ky varg është divergjent në kuptimin e zakonshëm por konvergjon në zero në mënyrë statistikore.

Duke patur parasysh një rezultat të Salat[28] në të cilin ai përcakton se vargu $(x_n)$ është statistikisht konvergjent tek L, atëherë dhe vetëm atëherë kur ekziston një bashkësi

$$K = \{n_1 < n_2 < \ldots\} \subset \mathbb{N}$$

e tillë që $\delta(K) = 1$ dhe $\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = L$.

Duket qartë që bashkësia K është plotësisht e renditur. Vargun e ri $\left(x_{n_k}\right)$ e quajmë *nënvargesencial* të vargut ($x_n$) dhe pohimi i Salat mund të riformulohet:

Vargu ($x_n$) është statistikisht konvergjent tek numri L, atëherë dhe vetëm atëherë kur në të gjendet nënvargu esencial $\left(x_{n_k}\right)$që konvergjon  në mënyrë të zakonshme tek L. Këtë fakt do ta shënojmë $\lim_{K} x_n = L$ .

Në këtë mënyrë, përkufizimet e mësipërme mund të përdoren edhe në formulimin e mëposhtëm:

Vargu $\{f_n(x)\}$, ku $f_n : S \to X$ (X një hapësirë vektoriale e normuar) është statistikisht konvergjent tek funksioni f(x), atëherë dhe vetëm atëherë kur gjendet nënvargu i tij esencial $(f_{n_k})$ konvergjent tek f(x).

Një familje *H* e funksioneve numerikë të integrueshëm quhet *uniformisht e integrueshme* në qoftë se

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |h|\, d\mu = 0$$

uniformisht për $h \in H$.

Në qoftë se $\Sigma_0$është një nënalgjebër e sigma-algjebrës $\Sigma$, atëherë me $E(h \mid \Sigma_0)$ shënojmë pritjen matematike të kushtëzuar të h në lidhje me $\Sigma_0$.

Shënojmë ($S, \sum, \mu$) hapësirën e masës probabilitare, ku S është një bashkësi dhe $\Sigma$është një sigma algebër e Borel.

# KAPITULLI I

# INTEGRALI STATISTIKOR I TIPIT TE BOHNERIT

Integrali iBohnerit[2](1933) ishte një alternalivë tjetër për të dhënë integrimin e funksioneve të matshëm dhe të kufizuar krahas integrimit sipas Lebegut. Karakteristikë e tij është përcaktimi e funksioneve tëmatshëm si limite të vargut të funksioneve të thjeshtë. Kjo në fakt çoi në identifikimin e masës së bashkësive me matshmërinë e funksioneve karakteristikë të tyre që janë elementi bazë në ndërtimin e funksionev të thjeshtë. Kuptimet kryesore të kapitullit janë matshmëria e funksioneve si ajo e fortë dhe e dobët dhe bëhet lidhja ndërmjet tyre.Kjo lidhje rezulton të jetë e ngjashme me përkufizimet e zakonshme të matshmërive në hapësirat e Banahut. Vend të rëndësishëm zënë teoremat e modifikuara Egorov dhe ajo e Pettis-it.

## 4. Funksionet statistikisht të matshëm

Në vijim $(S,\sum,\mu)$ është një hapësirë në masë probabilitare, S një bashkësi çfarëdo $\Sigma$ sigma algjebra e Borelit.

**Përkufizim 1.1**. Një funksion $f : S \rightarrow X$, ku X një hapësirë vektoriale e normuar quhet *funksion i thjeshtë sipas $\mu$*, në qoftë se për një varg bashkësish të matshme$\{E_i\}$, ku $E_i \in S$, $E_i \cap E_j = \varnothing$ për i≠j, S = $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ dhe f(s) = $x_i$ për s ∈ $E_i$, i =1,2,..n., ai paraqitet në trajtën f = $\sum_{i=1}^{n} x_i \chi_{E_i}$ , ku $\chi_{E_i}$ është funksioni karakteristik i $E_i$.

Shënojmë T(μ,X) - bashkësinë e funksioneve të thjeshtë të përcaktuar në S. Dimë që T(μ,X) formon një hapësirë vektoriale në lidhje me mbledhjen e funksioneve të thjeshtë dhe shumëzimin me një numër real. Funksionet e thjeshtë janë të matshme.

**Përkufizim1.2**.Le të kemi një varg funksionesh të thjeshtë me vlera reale $f_n : S \to \mathbb{R}$. Funksioni f : S →ℝ quhet *statistikisht i matshëm sipas μ* në bashkësinë S, në qoftë se për çdo δ>0 dhe për çdo ε>0 ekziston N natyrore N(ε, δ) që

$$\frac{1}{n} | \{k \leq n : |\mathrm{f}_k(s) - f(s)| \geq \varepsilon\} | < \delta$$

për n>N(ε,δ).

**Përkufizim 1.3.**Funksioni f:S→X quhet **st - i matshëm fortësisht[1] sipas μ** në bashkësinë S në qoftë se gjendet një varg funksionesh të thjeshtë ($f_n$)∈ T(μ,X) i tillë që për çdo s ∈ S në dhe për cdo ε>0:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} | \{k \leq n : \|\mathrm{f}_k(s) - f(s)\| \geq \varepsilon, \forall s \in S\} | = 0 . \qquad (1)$$

.pothuajse kudo sipas μ në bashkësinë S.

**Pohim 1.4**.

Kombinimi linear i funksioneve st-të matshme fortësisht është funksion st- i matshëm.

**Vërtetim**. Le të jetë ($f_n$) dhe ($g_n$) dy vargje nga T(μ,X) të përcaktuar në S dhe që st-lim $f_n$(x) = f(x) dhe st-lim $g_n$(x) = g(x) dhe α,β ∈ℝ

Shqytojmë rastin jotrivial kur α ≠ 0 dhe β ≠ 0. Le të jetë ε>0, vëmë re se

$\{k \leq n : \|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x)\| \geq \varepsilon \forall x \in S\} \subseteq \{k \leq n : \|f_n(x) - f(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{2|\alpha|} \forall x \in S\} \cup \{k \leq n : \|g_n(x) - g(x)\| \geq \frac{\varepsilon}{2|\beta|} \forall x \in S\}$

Duke pasur parasysh se

[1] Meqenëse në literaturë, (shih P. Sh. Shcwabick[30]) funksionet e matshme në hapësirat vektoriale të normuara quhen fortësisht të matshme do ta respektojmë këtë rregullë gjatë gjithë punimit.

$$\|\alpha f_n(x) + \beta g_n(x) - (\alpha f(x) + \beta g(x)\| \le |\alpha|\, \|f_n(x) - f(x)\| + |\beta| . \|g_n(x) - g(x)\|$$

marrim që st – lim $(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) = \alpha f(x) + \beta g(x)$. □

## 5. Konvergjenca e vargjeve statistikisht të matshëm

**Përkufizim1.5 .** Vargu { $f_n(s)$ } është *statistikisht konvergjent* pothuajse kudo tek f(x) në S, në qoftë se ekziston një nënvarg esencial $\{f_{n_k}(s)\}$ i cili të konvergjojëpothuajse kudo tek f(s).

**Përkufizim 1.6**. Le të jetë $(S, \Sigma, \mu)$ një hapësirë e matshme me një mase jonegative $\mu$. Pa humbur përgjithësinë mund të supozojmë se masa $\mu$ është e plotë në $\Sigma$.

Vargu i funksioneve të matshëm fort { $f_n$ } në S me vlera në hapësirën separabël të Banahut X quhet *statistikisht konvergjent sipas masës*$\mu$ tek funksioni f(s) në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\sigma > 0$ gjendet një nënvarg esencial $\{f_{n_k}(s)\}$ i vargut $\{f_n(s)\}$ që

$$\mu\{s : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \ge \sigma\} < \varepsilon$$

Ose

$$\lim_K \mu\{s : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \ge \sigma\} = 0$$

E shënojmë $f_n(s) \xrightarrow{st-\mu} f(s)$ .

Duke u mbështetur tek koncepti i futur nga Fridy[14] japim përkufizimin:

**Përkufizim 1.7.**Vargu i funksioneve fortësisht të matshëm $\{f_n(s)\}$ me vlera në hapësirën separabël të Banahut X quhet *statistikisht themelor* sipas masës në një nënbashkësi A⊂X, në qoftë se gjendet një numër N(ε,s)∈ℕ dhe një nënvarg esencial $\{f_{n_k}(s)\}$ i tillë që për çdo σ>0

$$\lim_K \mu\{s : \| f_{n_k}(s) - f_N(s) \| \ge \sigma\} = 0 \ .$$

**Teoremë 1.8.**

Në qoftë se $\{f_n(s)\}$ një varg statistikisht konvergjent në S me vlera në hapësirën separabël të Banahut X ai është statistikisht themelor.

**Vërtetim.**Shënojmë $\{f_{n_k}(\mathrm{s})\}$ një nënvarg esencial të vargut $\{f_n(\mathrm{s})\}$ .Le të zgjedhim një numër natyror N i tillë që dhe të shqyrtojmë mosbarazimin

$$\| f_{n_k}(s) - f_N \| \leq \| f_{n_k}(s) - f(s) \| + \| f_N(s) - f(s) \|$$

Prej këndej mund të shkruajmë

$$\{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_N \| \geq \sigma\} \subset \{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} \cup \{s : \| f_N(s) - f(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

Ose

$$\mu\{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_N \| \geq \sigma\} \leq \mu\{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} + \mu\{s : \| f_N(s) - f(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

Mosbarazim që provon teoremën.

**Teoremë 1.9.**

Limiti i vargut statistikisht konvergjent sipas masës është i vetëm me afërsinë e ekuivalencës.

**Vërtetim**. Le të supozojmë se se vargu $\{f_n(\mathrm{s})\}$ konvergjent sipas masës ka dy limite të ndryshëm $f_1(x)$ dhe $f_2(x)$. Për çdo $\varepsilon$ dhe $\sigma>0$ gjende nënëvargu esencial i tillë që

$$\mu\{s : \| f_{n_k}(s) - f_1(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\mu\{s : \| f_{n_k}(s) - f_2(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ kur } n_k \to \infty.$$

Duke shfrytëzuar mosbarazimin

$$\| f_1(s) - f_2(\mathrm{s}) \| \leq \| f_{n_k}(s) - f_1(s) \| + \| f_{n_k}(s) - f_2(s) \|$$

Dhe përfshirjen

$$\{\mathrm{s} : \| f_1(s) - f_2(\mathrm{s}) \| \geq \sigma\} \subset \{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_1(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} \cup \{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_2(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

Do të marrim

$$\mu\{\mathrm{s} : \| f_1(s) - f_2(\mathrm{s}) \| \geq \sigma\} \leq \mu\{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_1(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} + \mu\{\mathrm{s} : \| f_{n_k}(s) - f_2(s) \| \geq \frac{\sigma}{2}\} < \varepsilon \ .$$

Ky mosbarazim ka vend për çdo $\varepsilon>0$, si rrjedhojë

$$\mu\{s : \| f_1(s) - f_2(s) \| \geq \sigma\} = 0 \ .$$

Ky barazim tregon se $f_1(s)$ dhe $f_2(s)$ mund të jenë të ndryshëm vetëm në një bashkësi me masë zero.

Pohimi i mëposhtëm është ekuivalenti i teoremës që i atribohet Lebegut për funksionet me vlera në $\mathbb{R}$. Këtu, konvergjenca është shtrirë duke u zëvendësuar me kuptimin e konvergjencës staistikore.Një rol kyç në vërtetim luajnë nënvargjet esencial.

**Teoremë 1.10.**

Le të jetë $\{f_n(s)\}$ një varg një varg statistikisht konvergjent funksionesh fortësisht të matshëm me vlera në një hapësirë të normuar X i cili konvergjon pothuajse kudo tek një funksion f(s) në një bashkësi me masë të fundme A. Atëherë vargu $\{f_n(s)\}$ konvergjon sipas masës në këtë bashkësi.

**Vërtetim**. Shënojmë $\{f_{n_k}(s)\}$ një nënvarg esencial të vargut $\{f_n(s)\}$. Për σ>0 çfarëdo ndërtojmë bashkësinë

$$A_{n_k} = \{s : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \geq \sigma\} \cap \mathrm{A} \quad n_k \in K \ .$$

Shënojmë $B_{n_p} = \bigcup_{k=p}^{\infty} A_{n_k}$ dhe $C = \bigcap_{p=1}^{\infty} B_{n_p}$

Në bazë të faktit që funksionet $f_n(s)$, f(s) janë statistikisht të matshëm fortësisht del se bashkësitë $A_{n_k}, B_{n_p}$ dhe C janë të matshme prandaj bëjnë pjesë në Σ. Duke shftytëzuar vetinë e vazhdueshmërisë së masës do të marrim që

$$\lim_{K} \mu(B_{n_p}) = \mu(C) \ .$$

Është e qartë se për çdo s ∈ C nënvargu esencial $\{f_{n_k}(s)\}$ nuk është konvergjent e aq më tepër vargu $\{f_n(s)\}$. Vërtet, në qoftë se vargu $\{f_{n_k}(s)\}$ do të ishte konvergjent tek ndonjë funksionf në pikën s, pra $f_{n_k}(s) \to f(s)$ atëherë për çdo σ> 0 gjendet një indeks natyror $n_0$ i tillë që $\| f_{n_p}(s) - f(s) \| < \sigma$ për do $n_p \geq n_0$ . Kjo do të thotë që pika s nuk i përket asnjërës nga bashkësitë $A_{n_p}$ për $n_p \geq n_0$. Si rrjedhim, pika s nuk bën pjesë tek ndonjë bashkësi $B_{n_k}$ për këto $n_k$, kjo do të thotë se s nuk bën pjesë në C. Si përfundim asnjë nga pikat e konvergjencës së nënvargut $\{f_{n_k}(s)\}$ nuk bën pjesë në bashkësinë C. Me fjalë të tjera, C është nënbashkësi e pikave të divergjencës të këtij nënvargu.

Në saje të kushtit vargu $\{f_n(\text{s})\}$ është statistikisht konvergjent pothuajse kudo në A. Kjo do të thotë se në saje të plotshmërisë së σ-algjebrës Σ që

$$\mu(C) = \lim_{K} \mu(B_{n_k}) = 0 \ .$$

Meqenëse për do k kemi që $A_{n_k} \subset B_{n_k}$ do të kemi që $\mu(A_{n_k}) \le \mu(B_{n_k})$ që nga

$$\lim_{K} \mu(\mathrm{A}_{n_k}) = 0$$

Ose

$$\lim_{K} \mu\{(s : \| f_{n_k}(s) - f(s) \| \ge \sigma) \cap \mathrm{A}\} = 0$$

Që do të thotë se vargu $\{f_n(\text{s})\}$ është statistikisht konvergjent sipas masës.

Pohimi i anasjellë nuk është gjithmonë i vertetë.Një kundërshembull jepet tek Shembull 1.12.

Le të modifikojmë një shembull të dhën nga Pugachev[27] për të treguar se teorema nuk qëndron në rastin e bashkësive me masë të pafundme.

**Shembull 1.11.**

Ndërtojmë vargun

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{n} & \text{për n prim} \\ \dfrac{nx}{n^2 + x^2} & \text{për numrat e tjerë} \end{cases}$$

Vargu $\{f_n(\text{x})\}$ është statistikisht konvergjent në zero për pothuajse çdo x∈ℝ.Ndërkaq, ai nuk konvergjon sipas masës sepse masa e bashkësive $\{x \in \mathbb{R} : | f_n(x) | \ge \varepsilon\}$ rritet pambarimisht kur n shkon në infinit. Pra, ky varg funksionesh, megjithëse konvergjon pothuajse kudo në ℝ, ai nuk konvergjon sipas masës.

Shembulli i mëposhtëm tregon se konvergjenca statistikore sipas masës nuk sjell konvergjencën statistikore pothuajse kudo.

**Shembull 1.12.**

Për n, k $\in\mathbb{N}$ ndërtojmë vargun

$$f_{kn}(x)=\begin{cases} 2 & \text{për k prim dhe } x\in\,]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \\ 1 & \text{për çdo k dhe } x\in\,]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \\ 0 & \text{për çdo k kur } x\in E\backslash]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \end{cases}$$

Vëmë re se vargu konvergjon statistikisht sipas masës në zero sepse masa e bashkësive ku $f_{kn}(x)$ është i ndryshëm nga zero shkon në zero, shohim se $\mu\{x : |f_{kn}(x)|\geq\sigma\}=\mu(\,]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]\,)=\frac{1}{n}$ shkon në zero kur $n\to\infty$. Ndërkaq, për çdo $x_0\in E=]0,1]$ gjendet intervali $]\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]$ për të cilin $x_0\in]\frac{k_0-1}{n},\frac{k_0}{n}]$, ku vlera e termit të vargut është 1 ose 2.

Në qoftë se limiti (1) nuk varet nga pika $s\in S$ por vetëm nga N ($\varepsilon$ ) do të fitojmë një konvergjencë më të fortë.

**Përkufizim 1.13:** Funksioni $f:S\to X$ quhet*uniformisht st-i matshëm fortësisht sipas $\mu$* në bashkësinë S, në qoftë se për çdo $\delta>0$ dhe për çdo $\varepsilon>0$ ekziston N natyrore $N(\varepsilon, \delta)$ që

$$\frac{1}{n}|\{k\leq n : ||f_k(s)-f(s)||\geq\varepsilon\}|<\delta$$

për $n> N(\varepsilon, \delta)$ dhe pothuajse për çdo $s\in S$. Thuhet në këtë rast se vargu konvergjon statistikisht pothuajse uniformisht sipas $\mu$ tek funksioni f me bashkësinë S.

Do të modifikojmë disa teknika të zhvilluara nga [ 30] për të vërtetuar pohimin e mëposhtëm që është një shtrirje e teoremës së njohur Egorov për konvergjencën e zakonshme.

**Teoremë 1.14.(Teorema Egorov**). [8]

Në qoftëse funksioni $f:S\to X$ është st -i matshëm fortësisht sipas $\mu$, atëherë funksioni f është st-i matshëm fortësisht uniformisht sipas $\mu$ pothuajse kudo në S.

**Vërtetim**: Meqenëse funksioni $f:S\to X$ është st-i matshem fortësisht sipas $\mu$, atëherë gjendet bashkësia e matshme $Z\in\sum$ me $\mu(Z)=0$ dhe vargu i funksioneve të thjeshtë $(f_n)$ i tillë që për çdo S $\in S/Z$ vargu $(f_n(x)$ ) konvergjon statistikisht në mënyrë pikësore tek f(s), pra

$$\lim_n\frac{1}{n}|\{k\leq n : ||f_k(s)-f(s)||\geq\frac{1}{k}\}|=0$$

Shënojmë $A_n \subset \mathbb{N}$ bashkësinë e indekseve k për të cilët plotësohet mosbarazimi

$\| f_k(s) - \mathrm{f(s)} \| \geq \frac{1}{k}$ .

Shqyrtojmë bashkësitë

$$E_{k,n} = \{ s \in S \setminus Z : \|f_n(s) - f(s)\| < \frac{1}{k},\ \forall n \in A_n^{'} \} \text{ ku } A_n^{'} = \mathbb{N} \setminus A_n$$

Duket qartë se $E_{k,n} \supset E_{k,n+1}$

meqenëse vargu $(f_n(s))$ konvergjon tek f(s) për çdo $s \in S \setminus Z$ dhe për çdo k do të kemi

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_{k,n} \subset S \setminus Z \text{ ose } \bigcap_{n=1}^{\infty} (S \setminus E_{k,n}) \subset Z$$

që nga marrim se për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $k \in \mathbb{N}$ gjendet një numër natyror $n_k$ që

$$\mu(S \setminus E_{k,n_k}) < \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Shënojmë $A_\varepsilon = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}$

$$\mu(S \setminus A_\varepsilon) = \mu(S \setminus \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{k,n_k}) = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} (S \setminus E_{k,n_k}) \leq \varepsilon$$

Kjo tregon se$\|f_n(s) - f(s)\| < \frac{1}{k}$, për të gjithë $k \in A_{n_k}^{'}$ pra ne $S \setminus A_\varepsilon$ vargu $(f_n)$ konvergjon statistikisht uniformisht tek f(s).

### 6. Funksionet statistikisht të matshëm dobët

**Perkufizim 1.15.**Funksioni f : S→X është *statistikisht i matshëm dobët* në qoftë se funksioni scalar x*f është staistikisht i matshëm për çdo funksion x* nga hapësira duale X*.

**Teorem 1.16.(Pettis)[9]**

Le të jetë X një hapësirë e Banahut.Funksioni f : S→X është statistikisht i matshëm fortësisht, atëherë dhe vetëm atëherë kur plotësohen dy konditat e mëposhtme

1) Funksioni f është me vlera separable pothuajse kudo sipas $\mu$.

2) Funksioni f është statistikisht i matshëm dobët.

**Vërtetim**.Të tregojmë në fillim se funksioni f është pothuajse kudo separabël. Meqenëse funksioni f(x) është statistikisht i matshëm fortësisht atëherë gjendet vargu i funksioneve të thjeshtë $(f_n)$ dhe një bashkësi $B \subset S$ për të cilën $\mu(B)=0$ e tillë që

$\|f_n(s) - f(s)\| < \varepsilon$ pothuasje për çdo n dhe $s \in S \backslash B$.

Shënojmë $A_k = \{k \leq n : \|f_k(s) - f(s)\| \geq \varepsilon\}$. Në saje të teoremës Egorov( Teorem 1.14) për çdo $n \notin A_k$ gjendet një nënbashkësi $E_n \subset S$ me masë $\mu(E_n) < \varepsilon$ e tillë që vargu i funksioneve të thjeshtë $(f_n(s))$ të konvergjojë statistikisht dhe uniformisht tek f(x) në $S \backslash E_n$.

$$\|f_n(s) - f(s)\| < \varepsilon \text{ pothuajse për çdo n.} \qquad (2)$$

Përderisa $f_n$ janë funksione të thjeshtë vlerat e tyre $f_n(S)$ janë të fundme për çdo $n \in \mathbb{N}$. Kjo sjell që bashkësia $\bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} f_n(S)$ të jetë e numërueshme. Duke marrë parasysh se

$$f\Big(\bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} (S \backslash E_n)\Big) = \bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} f(S \backslash E_n)$$

Do të kemi që

$$f\Big(\bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} (S \backslash E_n)\Big) \subset \overline{\bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} f_n(S \backslash E_n)}$$

bashkësia $\overline{\bigcup_{n \notin \bigcup_k A_k} f_n(S \backslash E_n)}$ është e numërueshme si mbyllje e një bashkësie të numërueshme.

Në qoftë se ne marrim $\mu(E_n) < \frac{1}{n}$ për $n \notin A_k$ do të kemi që $\bigcap_n E_n = S \backslash \bigcup_n (S \backslash E_n)$ për $n \notin A_k$ dhe

$$\mu\Big(\bigcap_n E_n\Big) = \mu\Big(S \backslash \bigcup_n (S \backslash E_n)\Big) = 0 .$$

Duke shënuar $N = \bigcap_n E_n$ për $n \notin A_k$ provojmë separabilitetin e bashkësisë $\{f(s); s \in S \backslash N\}$.

Me qëllim që të tregojmë se funksioni f është statistikisht i matshëm dobët shqyrtojmë për çdo $x^*\in X^*$ barazimin (2) që sjell

$$|x^*(f_n(s))-x^*(f(s)|<\varepsilon \text{ a.a. } n \text{ , pothuasje kudo në S.}$$

Meqenëse funksionet $f_n$ janë të thjeshtë dhe të gjithë funksionet $x^*$ janë të vazhdueshëm do të kemi që funksinet $x^*(f_n)$ janë gjithashtu të thjeshtë dhe konvergjojnë pothuajse kudo dhe p.p. gj n tek funksioni $x^*f$. Kështu është provuar se $x^*(f)$ është statistikisht i matshëm dhe prej këndej del se funksioni f është statistikisht i matshëm dobët.

Le të provojmë tani pohimin e anasjellë. Funksionii dhënë është me vlera separable pothuajse kudo sipas $\mu$ kështu që ekziston një bashkësi B me masë zero e tillë që $f(S\backslash N)$ është bashkësi separabël. Kjo do të thotë se gjendet një bashkësi e numërueshme $\{x_n\in X : n\in\mathbb{N}\}$ e dendur në $f(S\backslash N)$. Duke zbatuar teoremën e Hani-Banahut do të gjendët vargu $x_n^*\in X^*$ e tillë që $x_n^*(x_n)=\|x_n\|$ dhe $\|x_n^*\|=1$. Kjo sjell që $\|f(s)\|=\sup_n|x_n^*(f(s))|$ për çdo $s\in S\backslash B$. Kjo provon se $\|f(s)\|$ është staistikisht e matshme. Për të njëjtën arsye funksioni $\|f(x)-x_n\|$ është statiistikisht i matshëm. Më tej ne ndjekim fjalë për fjalë vërtetimin ([30] Theorem 1. 1.1.6 )

Le të modifikojmë tani një shembull të ndërtuar nga Geitz [17] dhe ta përdorim për rastin e konvergjencës staistikore . ([17], Example 5]

**Shembull 1.17.**

Le të jetë $\mu$ një masë e Lebegut në [0,1] dhe ndërtojmë funksionin $f : [0,1]\to L_\infty(\mu)$

$$f(t) = \chi_{[0,t[}.$$

Të tregojmë se ky funksion f është statistikisht i matshëm dobët por nuk është statistikisht i matshëm (fortësisht). Le të jetë $\pi_n$ një copëtim në n pjesë me anë numrash dyjorë i segmentit [0,1]. Për çdo pikë t që i përket intervalit dyjoror $[(i-1)/2^n, i/2^n]$ në $\pi_n$ le të jetë $f_n(t)$ një varg funksionesh i tillë që

$$f_n(t)=\begin{cases}0 & \text{për } n \text{ prim}\\ \chi_{[0,\frac{1}{2^n}[} & \text{për n të tjerë}\end{cases}$$

Ky është një varg funksionesh të thjeshtë që çon [0,1] tek $L_\infty(\mu)$. Është e qartë se vargu nuk konvergjon statistikisht tek f(t) , kjo do të thotë se ai nuk është staistikisht i matshëm. Çdo element x* të $L_{\infty}^{*}(\mu)$ mund ta identifikojmë me një masë additive të kufizuar , $\beta$ i cili do të jetë zero në mbashkësitë me $\mu$-masë zero. Kjo sjell që për çdo $t$ në $[(i-1)/2^n, i/2^n]$

$$x^*f_n(t)=(\beta\ [0,i/2^n[)\ \text{pothuajse për çdo n.}$$

dhe

$$x^*(f(t))=(\beta\ [0,t[).$$

Për një *t* të fiksuar, le të jetë $E_{t,n}$ një element i copëtimit $\pi_n$ që përmban t. Do të kemi

$$|x^*f(t)-x^*f_n(t)|\leq|\beta|(E_{t,n})\ \text{p. p.gj.n.}$$

Në saje të kufizueshmërisë së $\beta$ kjo sjell që $\lim_{n\to\infty}|\beta|(E_{t,n})=0$ për pothuajse çdo n dhe për një bashkësi të numërueshme nga*t*.

Marrim kështu që

$$\lim_{n\to\infty} x^* f_n = x^* f$$

Pothuajse kudo dhe pothujse për çdo n, ashtu sikurse për çdo x* nga $L_{\infty}^{*}(\mu)$.

Me ndihmën e nënvargjeve esencialë mund të gjendet një zbërthim i funksioneve të matshëm fortësisht si shumë e një funksioni të matshëm dhe të një nënserie konvergjente.

**Pohim 1.18**

Në qoftë se $f:S\to X$ është një funksion statistikisht i matshëm fortësisht atëherë gjendet një funksion i kufizuar f i matshëm fortësisht $g:S\to X$ dhe funksionii matshëm fortësisht $h:S\to X$ i formës

$$h(t)=\sum_{K} x_n \chi_{E_n}(t), x_n \in X, t\in S, n\in K, \delta(k)=1$$

ku $E_n\subset S, n\in N$ janë bashkësi të matshme dy nga dy joprerëse, për të cilët te ketë vend barazimi

$$f=g+h,$$

**Vërtetim.** Duke përdorur teoremën e Pettis-it, (Teorema 1.14) ne mund të supozojmë se bashkësia e vlerave $f(S)$ të funksionit *f* është një nënbashkësi separabël $X$ dhe le të jetë

$\{x_n, n \in N\}$ një nënbashkësi të shumtën e numërueshmë dhe e kudo e dendur në $f(S)$.
Përcaktojmë

$$E_n = \left\{ t \in S; f(t) \in (x_n + B(X)) \setminus \bigcup_{k=1}^{n} (x_k + B(X)) \right\}.$$

Atëherë $S \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} E_{n,} E_n \cap E_m = \varnothing$ për $m, n \in N, m \neq n$. Shënojmë

$$h(t) = \sum_K x_n \chi_{E_n}(t) \text{ ku } n \in K, \delta(K) = 1$$

për $t \in S$. Duke konsideruar këtë funksion si st-limit i shumës së pjesshme të serisë, pra
$h = st - \lim \sum_{k=1}^{n} x_k \chi_{E_k}(t) = \sum_K x_k \chi_{E_k}(t)$ marrim që ai është statistikisht i matshëm fortësisht dhe në qoftë se $t \in E_n \cap S$ atëherë

$$f(t) - h(t) = f(t) - x_n \in B(X)$$

dmth $\|f(t) - h(t)\|_X \leq 1$.

Duke shënuar $g(t) = f(t) - h(t)$ do të kemi që $\|g(t)\|_X \leq 1$ dhe $f(t) = g(t) + h(t), t \in S$ .

Rëndësinë e kërkesës që hapësira e dhënë X të jetë separabël e tregon teorema e mëposhtme. Në këtë rast të dy matshmëritë përputhen.

**Pohim 1.19.**

Në qoftë se X është një hapësirë e Banahut separable, atëherë $f : S \to X$ është statistikisht i matshëm fortësisht atëherë dhe vetëm atëherë kur funksioni f është statistikisht i matshëm dobët.

**Vërtetim**: Kur hapësira X është separable është e qartë se çdo nenbashkësi në të është e tillë kështu që bashkësia e vlerave $\{f(t); t \in S\} \subset X$ e funksionit $f$ është si rrjedhim separable dhe pohimi rrjedh menjëherë nga teorema e Pettis-it (teorema 1.14).

# Kreu II

## Konvergjenca statistikore dhe integrali i Bohnerit

Integrali i Bohnerit është ekuivalenti i integralit të Lebegut të dhënë në trajtë limite. Ne kemi shfrytëzuar pikërisht këtë trajtë limite që bën të mundur përdorimin e konvergjencës statistikore e cila na çoi drejt një integrali tjetër që e quajtëm integral statistikor të Bohnerit.

## 1. Integrali statistikor i funksioneve të thjeshtë

**Përkufizim 2.1**. Integral të funksionit të thjeshtë $f:S\to X$, quhet elementii hapësirës vektoriale të normuar i barabartë me $\sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i)$ , simbolikisht

$$\int_S f(s)d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu(E_i)$$

Në qoftë se E është një bashkësi e matshme dhe $E \subset S$, atëherë integral të funksionit f në bashkësinë E quhet integralii funksionit të thjeshtë $f\,\chi_E$ , simbolikisht

$$\int_E f(s)d\mu = \int_S (f.\chi_E)(s)d\mu$$

Përcaktojmë funksionin

$$\|\,*\,\|_T : T(\mu,E)\to\mathbb{R}\ ; \| f \|_T = \int_S \| f(s) \| \, d\mu\ ,$$

Provohet lehtë që $\|f\|_T$ është gjysmë normë.

Duke ndjekur përkufizimin e vargjeve Koshi të dhënë fillimisht nga Fridy [13] dhe shtrirjen e tyre nga [18], vargjet Koshi nga $T(\mu,X)$ do t`i quajmë vargje st-Koshi, me fjalë të tjera, një varg funksionesh të thjeshtë $(f_n)$ nga $T(\mu,X)$ quhet st-Koshi në qoftëse për çdo $\varepsilon>0$ ekziston një numër natyror $N(=N(\varepsilon,x))$ i tillë që

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |\{k \le n \ : \|f_k(x) - f_N(x)\| \ge \varepsilon \ \ \forall x \in S\}|=0$$

Në bashkësinë e vargjenve st-Koshi përcaktojmë relacionin e ekuivalencës

$$(f_n)\sim(g_n) \Leftrightarrow st-\lim \| f_n-g_n\| = 0.$$

Duke përdorur teknika të ngjashme të shtrijmë një rezultat të [18] në rastin e hapësirave të Banahut.

**Teoremë 2.2.[18],[8]**

Le të jetë vargu i funksioneve $(f_k)$ të përcaktuar në S dhe vlera në hapësirën e Banahut X. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

a) vargu $(f_k)$ konvergjon statistikisht në mënyrë pikësore në S;

b) vargu $(f_k)$ është statistikisht varg Koshi në S.

**Vërtetim.** Provojmë se nga a rrjedh b) ne realizojmë një adoptim të vërtetimit të faktit që një varg konvergjent është varg Koshi. Supozojmë se $st-\lim f_k(s)=f(s)$ në S dhe le të jetë $\varepsilon>0$. Atëherë $\lim_n \frac{1}{n}|\{k\leq n \ : \ \|f_k(s)-f(s)\|\geq\varepsilon\}|=0$

ose $\|f_N(s)-f(s)\|<\frac{\varepsilon}{2}$ p.p.k dhe zgjedhim një indeks N të tillë që $\|f_N(s)-f(s)\|<\frac{\varepsilon}{2}$. Vërtetimi rrjedh nga mosbarazimi

$$\|f_k(s)-f_N(s)\|\leq\|f_k(s)-f(s)\|+\|f_N(s)-f(s)\|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{p.p.gj.k}$$

për çdo $s\in S$. Përderisa $(f_k)$ është $\mu$-statististikisht varg Koshi.

Le të supozojmë se ka vend b) dhe zgjedhim një indeks N të tillë që rruzullii mbyllur $B(f_N(s), 1)$ të përmbajmë $f_k(s)$ p.p.gj.k. për çdo $s\in S$. Shfytëzojmë përsëri b) duke zgjedhur një indeks M të tillë që rruzulli $B'(f_M(s),\frac{1}{2})$ të përmbajë $f_k(s)$ p.p.k. dhe çdo $s\in S$. Shënojmë $B_1=B\cap B'$ dhe marrim që $B_1$ përmban $f_k(s)$ p.p. gj.k. dhe për çdo $s\in S$. Kanë vend përfshirjet

$\{ k\leq n : f_k(s)\}\notin B_1\}\subset\{ k\leq n : f_k(s)\}\notin B\}\cup\{ k\leq n : f_k(s)\}\notin B'\}$

Që nga

$$\lim_n \frac{1}{n}|\{k\leq n : f_k(s)\notin B_1 \text{ for every } s\in S\}|$$

$$\leq\lim_n \frac{1}{n}|\{k\leq n : f_k(s)\notin B \text{ for every } s\in S\}|$$

$$+\lim_n \frac{1}{n}|\{k\leq n : f_k(s)\notin B' \text{ for every } s\in S\}|=0$$

Këtu $B_1$ është një rruzull i mbyllur me rreze më të vogël ose të barabartë me 1 që përmban $f_k(s)$ p.p.gj.k.për çdo $s\in S$. Le të ndërtojmë një procedurë iterative. Zgjedhim një indeks N(2) të tillë që rruzullii mbyllur $B''(f_{N(2)}, \frac{1}{2^2})$ të përmbajë $f_k(s)$ p.p. gj.k. dhe me po të njëjtin argument rruzullii mbyllur $B_2=B_1\cap B''$ përmban $f_k(s)$ për çdo $s\in S$, dhe rrezja e $B_2$ është më e vogël ose e barabartë me $\frac{1}{2}$. Duke vazhduar në këtë mënyrë, do të ndërtohet vargu $(B_m)_{m=1}^{\infty}$ i rruzujve të mbyllur të tillë që për çdo m të kemi $B_m\supseteq B_{m+1}$ dhe rrezja e $B_m$ është më e vogël ose e barabartë se $2^{1-m}$, dhe $f_k(s)\in B_m$ p.p.gj.k. dhe për çdo $s\in S$. Kështu, në saje të plotëshmërisë së hapësirës X, gjendet një funksion f(s), i përcaktuar në S i tillë që $\{f\}$ i vetëm në $\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ .

**Lemë 2.3.**

Në qoftëse vargu $(f_n)$ është varg st-Koshi në hapësirën e Banahut, atëherë ekziston st-$\lim_k \int_S f_k(s)d\mu$ .

**Vërtetim**: Shtyrtojmë mosbarazimin $\|f_k(s)- f_N(s)\|<\frac{\varepsilon}{\mu(S)}$ pothuajse p.p.gj.k dhe N natyror

Që nga

$$\| \int_S f_k(s)d\mu - \int_S f_N(s)d\mu \| \leq \int_S \| f_k(s) - f_N(s) \| \, d\mu =$$

$$\| f_k(s) - f_N(s) \| \, \mu(S) < \varepsilon$$

pothuajse për të gjithë k dhe N natyror.

Kjo tregon se vargu ($\int_S f_n(s)d\mu$) është një varg st-Koshi ne X sipas normës dhe sii tillë është st-konvergjent.

Le të jetë X një hapësirë separabile e Banahut.

## 2.Integrali statistikor i Bohnerit për funksionet me vlera në hapësirën vektoriale

**Përkufizim 2.3.[8]** Funksioni f : S→X quhet funksion *st-i integrueshëm Bohner* në qoftë se gjendet një varg funksionesh të thjeshtë st- Koshi $(f_k)$ i tillë që

i) konvergjon statistikisht pothuajse kudo siapas μ tek funksioni f;

ii) $st-\lim_k \int_s \| f_k(s) - f_N(s) \| \, d\mu = 0$ pothuajse kudo

$$st-\lim_n \int_S f_n(s)d\mu$$

quhet*st-integrali i Bohnerit* dhe shënohet me ($B_s$) $\int_s f(x)d\mu$

Vargu ($f_n$) i funksioneve të thjeshtë quhet varg përcaktues i f.

**Teoremë 2.4.**

Në qoftë se ($f_n$) dhe ($g_n$) janë vargje st-Koshi dhe janë përcaktues të të njëjtit funksion f dhe atëherë

$$\text{st-lim} \int_S f_n(s)d\mu = \text{st-lim} \int_S g_n(s)d\mu$$

**Vërtetim:** Nga mosbarazimi

$$\|f_n(s)-g_n(s)\|\leq\|f_n(s)-f(s)\|+\|f(s)-g_n(s)\|$$

Del se vargjet ($f_n$) dhe ($g_n$) janë ekuivalente

$$\text{st-lim}\|f_n - g_n\| = 0$$

Pra, për çdo $\varepsilon>0$ $\|f_k(s) - g_k(s)\|<\varepsilon$ p.p.gj.k

Në sajë te përkufizimit të integralit,

$$\| \int_S f_n(s) - (st - \lim \int_S f_n(s)d\mu)) \| < \varepsilon \text{ dhe} \| \int_S g_n(s) - (st - \lim \int_S g_n(s)d\mu)) \| < \varepsilon$$

p.p.gj.k dhe $s\in S$.

Shqyrtojmë diferencën

$\| (st - \lim \int_S f_n(s)d\mu) - (st - \lim \int_S g_n(s)d\mu) \| \leq$

$\| (st - \lim \int_S f_n(s)d\mu) - \int_S g_n(s)d\mu) \| + \| \int_S f_n(s)d\mu - \int_S g_n(s)d\mu \| +$

$\| \int_S g_n(s)d\mu) - (st - \lim \int_S g_n(s)d\mu) \| < 3\varepsilon$

e cila sjell vërtetimin.

Duket qartë që integralii zakonshëm i Bohnerit është st-integral. E kundërta nuk ka vend si tregon shembulli i mëposhtëm. Ky shembull dëshmon se integrali i ri është më i gjerë se integrali i zakonshëm i Bohnerit.

**Shembull 2.5.**

Të jetë vargu $(f_n)$ i përcaktuar nga formula

$$f_k(x) = \begin{cases} (k+1)(-x)^k & \textit{për } k \in [2^p, 2^p + p[, p = 1,2,... \\ 0 & \textit{në rast të kundërt} \end{cases}$$

Në qoftëse $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ , k=1,2,... atëherë

$$\frac{1}{n} | \{k \leq n : \mathrm{f}_k(x) \neq 0 \text{ kur } \mathrm{x} \in R \setminus [-1,1] | \leq \frac{p(p+1)}{2^{p+1}}$$

që nga del se st-lim$f_k(x) = 0$ që nga $Bs - \int_{R\setminus[-1,1]} f_k(x) d\mu = 0$ ,

ndërkaq shohim që për integralin e zakonshëm

$$\int_1^B (k+1)(-x)^k dx = (-1)^k (B^{k+1} - 1) \to \pm\infty$$

limiti nuk ekziston.

## 3.Vetitë e integralit statistikor

Pohimi i mëposhtëm tregon se mund të merren në parim vetitë më themelore të integrimit si hapësira vektoriale e funksioneve të integrueshëm dhe vetia e aditivitetit edhe për integralin statistikor. Vlen për t'u përmendur sidomos një formë e mosbarazimit të Chebishev-it.

**Teoremë 2.6.**

Në qoftë se f është st-e integrueshme atëherë ||f|| është iintegrueshëm.

**Vërtetim.**Nga përkufizimiiintegrueshmërisë gjendet vargu i funksioneve të thjeshta $f_k$ që konvergjon pothuajse kudo për p.p.gj.k. tek funksioni f dhe se

$$\int_S \| f_k(s) - f_N(s) \| \, d\mu < \varepsilon \text{ p.p. gj.k.}$$

Duke u nisur nga mosbarazimi $|\|f_k\|-\|f\|| \leq \|f_k - f\|$, meqenëse st-lim $f_k(s)=f(s)$ p.p.gj.k. rrjedh se st-lim$\|f_k(s)\|=\|f(s)\|$ p.p.gj.k.

Mosbarazimi

$$\int_S ||| f_k || - || f_N ||| \, d\mu \le \int_S || f_k - f_N || d\mu$$

Tregon se funksioni ||f|| është iintegrueshëm.

Barazimi $st - \lim_n \int_S f_n d\mu = (Bs) \int_S fd\mu$, ku ($f_n$) është vargu i funksioneve të thjeshtë përcaktues për funksionin f dhe vetitë e njohura të integralit të Bohnerit në rastin klasik kanë vend vetitë e mëposhtme:

(I) (Bs) $\int_S (\alpha f(s) + \beta g(s)) d\mu = (Bs)\alpha \int_S f(s) d\mu + (Bs)\beta \int_S g(s) d\mu$

(II)Në qoftë se $A=A_1 \cup A_2$ dhe $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ dhe ($f_n(s)$) një varg funksionesh të thjeshtë përcaktues të funksionit f(s)atëherë duke shënuar $f_n^k = f_n \chi_{A_i}$ i=1,2 ka vend barazimi

$$\int_A f_n(s) d\mu = \int_{A_1} f_n(s) d\mu + \int_{A_2} f_n(s) d\mu$$
.

Duke kaluar në limitin statistikor marrim

$$(Bs)\int_A f(s) d\mu = (Bs)\int_{A_1} f(s) d\mu + (Bs)\int_{A_2} f(s) d\mu$$

(III) $(Bs) || \int_S fd\mu || \le (Bs)\int_S || f || d\mu$

Kjo veti rrjdh nga mosbarazimii vërtetë për funksionet e thjshtë

$$|| \int_S f_k d\mu || \le \int_S || f_k || d\mu$$

Dhe vetia e izotonisë .

(IV) Duke zbatuar vetinë (III) për funksione statistikisht të kufizuar [14], ku $||f(s)|| \le K$ p.p.gj.k, do të kemi që

$$(Bs) || \int_S f || \, d\mu \le (Bs)\int_S || f || \, d\mu \le K\mu(S)$$

Duke marrë një nënbashkësi të C të S që $\mu(C) < \delta = \frac{\varepsilon}{K}$ për çdo $\varepsilon > 0$ do të kemi që

$(Bs) || \int_C f || d\mu < \varepsilon$.

(V) Duke u nisur nga mosbarazimi për funksionet e thjeshtë $||f_k|| \le ||g_k||$ p.p.gj.k marrim

$$\int_S \| f_k \| d\mu \le \int_S \| g_k \| d\mu \text{ p.p.gj.k}$$

Dhe duke zbatuar vetinë izotonisë, do të kemi

$$(Bs)\int_S \| f \| d\mu \le (Bs)\int_S \| g \| d\mu$$

(VI) Në qoftë se $A_1$ dhe $A_2$ bëjnë pjesë në $\mathcal{A}$ dhe $A_1 \subset A_2$ atëherë

$$(Bs)\int_{A_1} \| f \| d\mu \le (Bs)\int_{A_2} \| f \| d\mu$$

Mosbarazimi rrjedh nga vetia

$$(Bs)\int_{A_1} \| f \| d\mu = (Bs)\int_{A_2} \| f \chi_{A_1} \| d\mu \le (Bs)\int_{A_2} \| f \| d\mu$$

(VII) Mosbarazimii Çebishevit.

Le të jenë $f_k$ dhe f funksione të integrueshme dhe për çdo $\varepsilon>0$ kemi $\|f_k-f\| \ge \varepsilon$ në bashkësinë $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ dhe $A_\varepsilon \subset \mathcal{A}$ atëhërë nga vetia (V)

$$(Bs)\int_A \| f_k - f \| d\mu \ge (Bs)\int_{A_\varepsilon} \| f_k - f \| d\mu \ge \varepsilon \mu(A_\varepsilon)$$

Që nga rrjedh se për çdo ε dhe A

$$\mu(\left\{ x : \| f_k - f \| \ge \varepsilon \right\} \le \frac{1}{\varepsilon}(Bs)\int_A \| f_k - f \| d\mu$$

Më poshtë rrsdhisim një numër vetish që kanë vend për konvergjencën statistikore duke zëvendësuar pohime të ngjashme për konvergjencën e zakonshme.

**Lema 2.7.**

Le të jetë $(f_n)$ një varg st-Koshii funksioneve të thjeshtë të përcaktuar në S. Në këto kushte gjendet një nënvarg $(g_k)$ i vargut $(f_n)$ i cili konvergjon në mënyrë pikësore pothuajse kudo tek një funksion $f : S \to X$ dhe për çdo $\varepsilon>0$ gjendet bashkësia e matshme $E \subset S$ që $\mu(E)<\varepsilon$ e tillë që ky nënvarg të konvergjojë statistikisht dhe uniformisht tek f(x) në S\E.

**Vërtetim.** Përderisa vargu $(f_n)$ është një varg st-Koshi gjendet një $N_k$ natyror që për $n>N_k$ të kemi që

$$\|f_n(x) - f_N(x)\|_1 < \frac{1}{2^{2k+1}} \text{ . p.p.gj.n}$$

Pa prishur përgjithësinë mund të supozojmë se $N_k<N_{k+1}$. Shënojmë $g_k = f_{N_k}$ atëherë

$$\| f_{N_k} - f_N \| < \frac{1}{2^{2k+1}} .$$

Do të kemi

$$\| g_m - g_n \|_1 \leq \| g_m - f_N \|_1 + \| f_N - g_n \| < \frac{1}{2^{2k}}$$

Për $m \geq n$.

Më tej, ndërtojmë për çdo $t \in S$ serinë

$$g_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (g_{k+1}(t) - g_k(t))$$

dhe të tregojmë se ajo konvergjon absolutisht pothuajse për të gjitha $t \in S$ tek një element në X dhe që kjo konvegjencë është uniforme me përjashtim të një bashkësie me masë sado të vogël.

Për $n \in \mathbb{N}$ shënojmë

$$M_n = \{ t \in S ; \| g_{n+1}(t) - g_n(t) \|_X \geq \frac{1}{2^n} \}.$$

Kjo do të sjellë

$$\frac{1}{2^n} \mu(M_n) = \int_{M_n} \frac{1}{2^n} d\mu \leq \int_{M_n} \| g_{n+1}(t) - g_n(t) \|_X \, d\mu \leq$$

$$\int_S \| g_{n+1}(t) - g_n(t) \|_X \, d\mu = \| g_{n+1}(t) - g_n(t) \|_1 < \frac{1}{2^{2n}}$$

Kjo sjell

$$\mu(M_n) < \frac{1}{2^n} .$$

Le të përcaktojmë $Z_n = M_n \cup M_{n+1} \cup \ldots$ atëherë $Z_{n+1} \subset Z_n, n \in \mathbb{N}$ dhe

$$\mu(Z_n) \le \sum_{j=1}^{\infty} \mu(M_j) < \sum_{j=n}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Ndërkaq për $t \notin Z_n$ dhe $k \ge n$ ne kemi $\left\| g_{k+1}(t) - g_k(t) \right\|_X < \frac{1}{2^k}$ që nga rrjedh se seria

$\sum_{k=n}^{\infty} \left( g_{k+1}(t) - g_k(t) \right)$

Konvergjon absolutisht dhe uniformisht për $t \notin Z_n$.

Supozojmë se është dhënë $\varepsilon > 0$. Shënojmë $Q = Z_k$ ,dhe për vlera mjaftueshëm të mëdha të k-së do të kemi $\mu(Q) = \mu(Z_k) < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon$ kjo tregon se seria $\sum_{k=n}^{\infty}(g_{k+1}(t) - g_k(t))$ konvergjon absolutisht dhe uniformisht në $S \mid N$. Në qoftë se shënojmë $M = \bigcap Z_n$ ,duket qartë që $\mu(M) = 0$. Nëse $t \notin M$ ,atëherë $t \notin Z_n$ për ndonjë $n$. Kjo do të thotë se seria

$$g_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left( g_{k+1}(t) - g_k(t) \right)$$

konvergjon për $t \notin M$.

Me fjalë të tjera, $\lim_{k\to\infty} g_k(t) = \lim_{k\to\infty} f_{N_k}(t)$ ekziston pothuaj për të gjitha $t \in S$ dhe vargu $g_k(t) = f_{N_k}(t)$ konvergjon uniformisht në $S \mid N$.

**Lema 2.8.**

Në qoftë se $f \in B_s$ dhe vargu ( $f_n$ ) i funksioneve të thjeshtë është st- Koshi që përcakton funksionin $f$ , atëherë $\|f\|_X \in B_s$ dhe vargu $\left( \|f_n\|_X \right)$ përcakton funksionin real $\|f\|_X$ si një element të bashkësisë $B_s$. Në këtë rast çdo të kemi

$$\int_S \|f\|_X \, d\mu = st - \lim_{n\to\infty} \int_S \|f_n\|_X \, d\mu = st - \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_1 \quad (1)$$

Për më tepër

$$\left\| \int_S f d\mu \right\|_X \leq \int_S \|f\| d\mu \qquad (2)$$

**Vërtetim.** Përderisa

$$\left| \|f_n(x)\|_X - \|f_N(x)\| \right| \leq \|f_n(x) - f_N(x)\|_X, t \in S$$

Do të marrim

$$\left\| \|f_n(x)\|_X - \|f_N(x)\|_X \right\|_1 = \int_S \left| \|f_n(x)\|_X - \|f_N(x)\|_X \right| d\mu \leq$$

$$\int_S \|f_n(x) - f_N(x)\| d\mu = \|f_n(x) - f_N(x)\|_1$$

Kjo do të thotë se vargu i funksioneve të thjeshtë me vlera reale $\|f_n\|_X$ është varg st-Koshi. Për më tepër $st - \lim_{n\to\infty} \|f_n(t)\|_X = \|f(t)\|_X$ për pothuajse të gjithë $t \in S$ dhe si rrjedhim funksioni $\|f\|_X : S \to R$ është st- iintegrueshëm sipas përkufizimit 2.3.dhe$\|f_n\|_X, n \in \mathbb{N}$ është varg përcaktues për $\|f\|_X$ kjo tregon se (1) ka vend.

Në saje të vetisë ( III ) për funksionet e thjeshtë do të kemi

$$\left\| \int_A f_n d\mu \right\| \leq \int_A \|f_n\| d\mu.$$

Barazimi (1) mund të përdoret për të marrë (2) duke kaluar në limit kur $n \to \infty$në të dy anët e këtij mosbarazimi.

**Lema 2.9.**

Në qoftë se $f \in B_S$ dhe $(f_n)$ është një varg st-Koshii funksioneve të thjeshtë që përcaktojnë funksionin $f$, atëherë

$$st - \lim \|f_n - f\|_1 = 0.$$

**Vërtetim** . Përderisa $(f)_n$ është një varg st-Koshi elementet e të cilit $f_n$ janë funksione të thjeshtë të cilët që konvergjojnë statistikisht pothuajse kudo tek funksioni f atëherë për çdo $\varepsilon < 0$ gjendet një $N \in \mathbb{N}$ e tillë që $\|f_r - f_N\|_1 < \varepsilon$ p.p.gj.r

Le të fiksojmë taninjë $r > N_\varepsilon$; $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ dhe shënojmë $g_n = f_r - f_n$ si një funksion të thjeshtë për $n \in \mathbb{N}$.

Në këtë rast $st - \lim_{n\to\infty} g_n(t) = f_r(t) - f(t) \in B_S$ për pothuajse çdo $t \in S$ . Duke patur parasysh barazimin $\|g_s - g_N\|_1 = \|f_s - f_N\|_1$ rrjedh se vargu $(g_n)$ është st- Koshi dhe përcakton $f_r - f \in B_S$ .

Që nga

$$\|f - f_r\|_1 = st - \lim_{n\to\infty} \|g_n\|_1 = st - \lim_{n\to\infty} \|f_n - f_r\|_1 < \varepsilon$$

Gjë që sjell

$$st - \lim_{r\to\infty} \|f_r - f\|_1 = 0.$$

**Rrjedhim 2.10.**

Në qoftë se $f \in B_s$ atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një funksion i thjeshtë $g_\varepsilon$ i tillë që $\|f - g_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ dmth bashkësia $J$ e funksioneve të thjeshtë është e dendur në $B_S$ në lidhje me seminormën $\|\cdot\|_1$.

**Lema 2.11.**

Hapësira $B_S$ e pajisur me seminormën $\| \ \|_1$ është e plotë.

Vërtetim. Supozojmë se $g_n \in B_S$ , $n \in \mathbb{N}$ është varg st-Koshi në lidhje me seminormën $\| \ \|_1$.

Në saje të rrjedhimit 2.10.për çdo $n \in \mathbb{N}$ gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n$ i tillë që $\|g_n - f_n\| < \frac{1}{n}$

Që nga ekziston $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ për të cilën kanë vend mosbarazimet

$$\|f_n - f_N\|_1 \le \|f_n - g_n\|_1 + \|g_n - g_N\|_1 + \|g_N - f_N\|_1 \le \frac{1}{n} + \frac{1}{N} + \|g_n - g_N\|_1$$

Mosbarazim që tregon se vargu $f_n$ është varg Koshi. Në saje të lemës (2.7.) ky varg përmban një nënvarg $f_{nk}$ që konvergjon statistikisht pothuasje kudo në S tek ndonjë funksion f : S→X dhe për më tepër ky nënvarg është përsëri Koshi. Gjë që tregon se f∈ $B_s$. Për nënvargun $f_{nk}$do të kemi

$$\| f_{nk} - f \|_1 \leq \| f_{nk} - f_N \|_1 + \| f_N - f \|_1$$

Për një N ∈ℕ. Kjo do të thotë se nënvargu $f_{nk}$ i vargut $f_n$ konvegjon statistikisht tek funksioni f sipas gjysmë normës tek f nga lema 2.6. Kjo do të thotë se edhe vargu $f_n$ konvergjon statistikisht sipas gjysmënormës tek f ∈ Bs që tregon se hapësira Bs është e plotë.

**Lema 2.12.**

Një funksion i matshëm fortësisht me vlera të numërueshme $f : S \to X$ iformës (1) është st-Bohner iitegrueshëm në qoftë se ka vend

$$\sum_K \|y_m\|_X \mu(E) < \infty \ .$$

**Vërtetim** . Ndërtojmë për $r \in \mathbb{N}$ funksionin e thjeshtë $f_r(t) = \sum_{m=1}^{r} y_m \chi_{E_m}(t)$ $t \in I$ i tillë që $st - \lim_{r \to \infty} f_r(t) = f(t)$ për $t \in S$ .

Për $t \in S$ dhe $k < s$ nga ndërtimii funksionit të thjeshtë do të marrim

$$\left\| f_r(t) - f_k(t) \right\|_X = \left\| \sum_{m=k+1}^{r} y_m \chi_{E_m}(t) \right\|_X$$

Prej nga

$$\left\| \sum_{m=k+1}^{r} y_m \chi_{E_m}(t) \right\|_X \leq \sum_{m=k+1}^{r} \left\| y_m \right\|_X \chi_{E_m}(t)$$

Që do të thotë se

$$\left\| f_r(t) - f_k(t) \right\|_1 \leq \sum_{m=k+1} \left\| y_m \right\|_X \mu(E_n) .$$

Tani mund të shohim se vargu $(f_r)$ është varg st-Koshi, atëherë dhe vetëm atëherë kur seria $\sum_K \|y_m\|_X \mu(E_m)$ konvergjon. Në këtë rast seria $\sum_K y_m \chi_{E_m}$ konvergjon në X tek funksioni $f$ dhe nga përkufizimi do të marrim që $f \in B_S$ dhe $\int_S f d\mu = \sum_K y_m \mu(E_m)$ dhe gjithashtu $\int_S \|f\| d\mu = \sum_K \|y_m\|_X \mu(E_m)$.

**Rrjedhim 2. 13.**

Një funksion i matshëm fortësisht me vlera të numërueshme $f : S \to X$ për të cilin $\|f(t)\|_X \le g(t)$ pothuajse kudo në $S$ ku $g \in B_S$ është st-Bohner iintegrueshëm.

**Vërtetim**. Duke përdorur vargun $(f_r)$ të ndërtuar në vërtetimin e lemës 2.12 shohim se $\|f_r\| \le \int_S g d\mu < +\infty$ për çdo $r \in \mathbb{N}$ prej nga konduta e kërkuar tek lema 2.12 është e plotësuar.

Teorema e mëposhtme është pohimi kyç që na hap rrugën për teoremat e konvergjencës dhe të kalimit në limit tek integrali statistikor i Bohnerit.

**Teoremë 2.14.**

Funksioni f : S→X është st-Bohner iintegrueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur funksioni ||f|| është gjithashtu iintegrueshëm.

**Vërtetim.** Duke patur parasysh përkufizimin e st-Bohner integralit, themi që ekziston vargu i funksioneve të thjeshtë $f_k$ që konvergjon pothhuajse kudo dhe p.p.gj. k tek funksioni f dhe $\int_S \| f_k(s) - f_N(s) \| d\mu < \varepsilon$ pothuajse për çdo k. Marrim në shqyrtim mosbarazimin e njohur $|\|f_k\|-\|f\|| \le \|f_k - f\|$. Meqenëse st-lim $f_k(s)=f(s)$ pothuajse kudo rrjedh se st-lim$\|f_k(s)\|=\|f(s)\|$ pothuajse kudo.
Mosbarazimi

$$\int_S |\| f_k \| - \| f_N \|| d\mu \le \int_S \| f_k - f_N \| d\mu$$

Tregon se funksioni ||f|| është st- iintegrueshëm.

Anasjelltas, supozojmë se$\|f\|_X$ është st Bohner iintegrueshëms. Përderisa funksioni f është st-iintegrueshëm ekziston vargu $(f_n)$( nga rrjedhimii teoremës Egorov, teorema 1.14) i funksioneve të matshëm me vlera të numërueshme të formës .

$$f_n(t) = \sum_{m=1}^{\infty} y_{k,m} \chi_{E_{k,m}}(t) \ , t \in S \ , \text{p.p.gj.m.}$$

Ku $E_{k,m} \subset S$, m $\in \mathbb{N}$ janë të matshme dhe $E_{k,m} \cap E_{k,r} = \emptyset$ for $m \neq r$ , $y_{k,m} \in X$ dhe $f_k$ kanë këtë veti. Pothuajse për çdo k$\in\mathbb{N}$ gjendet bashkësia B që B $\subset$ S , $\mu(B) = 0$ dhe

$\|f(t) - f_k(t)\| < \frac{\varepsilon}{2\mu(V)}$për t $\in$ V\B , p.p.gj.k .

Që nga

$$\|f_k(t)\|_X \leq \|f(t)\|_X + \|f(t) - f_t(t)\|_X \leq \|f(t)\|_X + \frac{\varepsilon}{2\mu(V)}$$

p.k. në S dhe p.p.gj.k. Duke qenë se $\mu(S) < +\infty$rrjedhimi 2.13. sjell si rrjedhim se funksionet $f_k$ janë st- Bohner të integrueshëm s dhe

$\int_S \|f_k\|_X = \sum_{m=1}^{\infty} \|y_{k,m}\|_X \, \mu\left(E_{k,m}\right) < +\infty$ p.p.gj.m

Zgjedhim $r_k \in \mathbb{N}$ të tillë që

$$\sum_{m=r_k+1}^{\infty} \|y_{k,m}\|_X \mu\left(E_{k,m}\right) < \frac{\varepsilon}{2} \text{p.p.gj.m.}$$

Përderisa$\|f - f_k\|_X$ është funksion i matshëm pohimi ynë ka vend për funksionin $\|f - f_k\|_X$i cili është iintegrueshëm dhe

$$\int_S \|f - f_k\|_X \leq \frac{\varepsilon}{2\mu(V)} \mu(V) = \frac{\varepsilon}{2}$$

Shënojmë

$$g_k = \sum_{m=1}^{r_k} y_{k,m} \chi_{E_{k,m}} \quad ,$$

atëherë funksionet $g_k$ janë Bohner të integrueshëm dhe

$$f_k = g_k + \sum_{m=r_k+1}^{\infty} y_{k,m} \, \chi_{E_{k,m}} \text{p.p.gj.m}$$

Do të kemi gjithashtu

$\|f - g\|_1 = \int_S \|f - g_k\|_X \leq \int_S \|f_k - g_k\|_X \leq \sum_{m=r_k+1}^{\infty} \|y_{k,m}\|_X \, \mu(E_{k.m}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$
p.p.gj.m.nga del se funksioni f është st- iintegrueshëm.

Barazimi

$$st - \lim_n \int_S f_n d\mu = (Bs) \int_S f d\mu \,,$$

Ku ($f_n$) është një varg funksionesh të thjeshtë përcaktues të funksionit f . U provua kështu vetia e njohur e integralit klasik të Bohnerit të paraqitur tek [28].

Let të jetë $f: S \to X$ një funksion st- i matshëm fortësisht me vlera të numërueshme i formës

$$f(t) = \sum_K y_m \chi_{E_n}(t), t \in I \ \delta(K) = 1 \qquad (3)$$

ku $E_m \subset S$, $m \in \mathbb{N}$ janë të matshme , $E_m \cap E_n = \varnothing$ për $m \neq n$ $y_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$.

Le të jetë $f: S \to X$ një funksion st -i matshëm fortësisht i formës $f = g + \sum_K x_n \chi_{E_n}$ $\delta^2(K) = 1$, ku $g: S \to I$ është një funksion st- i matshëm fortësisht dhe i kufizuar dhe $E_n$ nënbashkësi të matshme dy nga dy joprerëse të $S$, $x_n \in \mathrm{X}, n \in \mathbb{N}$ (shih 1.18).

**Pohim 2.15.**

Le të jetë $f: S \to X$ një funksion st -i matshëm fortësisht i formës $f = g + \sum_K x_n \chi_{E_n}$ $\delta(K) = 1$, ku $g: S \to I$ është një funksion st- i matshëm fortësisht dhe i kufizuar dhe $E_n$ nënbashkësi të matshme dy nga dy joprerëse të $S$, $x_n \in \mathrm{X}, n \in \mathbb{N}$ (shih1.18).

Në këto kushte $f$ështës st-Bohner iintegrueshëm atëherë dhe vetëm atëherë kur $x_n$dhe $E_n$ , $n \in \mathbb{N}$ mund të zgjidhen në mënyrë të tillë që seria $\sum_K x_n \mu(E_n)$ të konvergjojë absolutisht në X dhe në këtë rast ka vend

$$Bs - \int_E f d\mu = Bs - \int_E g d\mu + \sum_K x_n \mu(E_n) \qquad (4)$$

Për çdo bashkësi të matshme $E \subset S$.

**Vërtetim.** Supozojmë se $f \in Bs(g \in B_s)$ është i forms (2). Përderisa $g$ është e kufizuar do të kemi $f \in Bs(g \in B_s)$ që nga $f - g = \sum_K x_n \chi_{E_n} \in Bs$ . Në saje të rrjedhimit të teoremës 2.12 do të marrim

$\int_S \|f - g\|_X \, d\mu < \infty$ ,

Por kjo është e vërtetë sepse nga $E_n \cap E_m = \varnothing$, $m \neq n$, për të cilat ka vend

$$\int_S \left\| \sum_K x_n \chi_{E_n} \right\|_X d\mu = \sum_K \|x_n\|_X \ \mu(E_n) < +\infty$$

Dhe se seria $h = \sum_K x_n \mu(E_n)$ është absolutisht konvergjente në $X$ .

Anasjelltas, në qoftë se $g$ është i kufizuar dhe seria $\sum_K x_n \mu(E_n)$ konvergjon absolutisht atëherë $g \in Bs$ dhe $\| f(s) \|_X \leq g(s)$ pothuajse për çdo s ∈ S atëherë $\sum_K x_n \mu(E_n) \in Bs$ në saje të lemës 1.18. që nga

$$f = g + h \in Bs.$$

## 4. Teoremat mbi kalimin në limit në integralin statistikor

Integrali iLebegut(Bohnerit) u diferencua tepër nga integrali i Rimanit kur mbi këta u vërtetuan shumë teorema mbi kalimin në limit nën shenjën e integralit kur për integralin e Rimanit këto pohime janë të pakta dhe me kërkesa të larta për funksionin. Këto lloj teoremash tregojnë dhe mundësi më të mëdha zbatimi të këtij lloji integrali.Më poshtë po paraqesim një numër teoremash dhe lemash për të arritur pohime të ngjashme me rastet klasik.Teorema 2.16 është e ngjashme me teoremën e njohur për funksionet realë porn ë rastin tonë është provuar vetëm për normën.Në rastin e funksioneve me vlera në një hapësirë vektoriale të normuar duhet të shtojmë që st-integralet $\int_S f_n d\mu$ të jenë uniformisht të kufizuar.

**Teorema 2.16.**

Le të jetë vargu i funksioneve ($f_k(s)$) st-të matshëm dhe që konvergjojnë statistikisht pothuajse kudo tek funksioni f(s) dhe pothuajse për të gjithë k dhe për çdo s $\|f_k(s)\| \leq \|f_{k+1}(s)\|$, atëherë

$$st - \lim_k (Bs) \int_S f_k(s) d\mu = (Bs) \int_S f(s) d\mu \ .$$

**Vërtetim**. Paraqesim çdo funksion $\|f_k\|$ si limit i vargut jo zbritës të funksioneve të thjeshtë $\| f_k^r \|$ që konvergjojnë tek $\|f_k\|$ pothuajse për të gjithë k. P.Sh. një varg i tillë mund të shërbejë

$$f_k^r = \begin{cases} h2^{-r} & \text{pwr } h2^{-r} \leq \| f_k(s) \| < (h+1)2^{-r} \quad h=0,1,...,2^{2r} - 1 \\ 2^r & \text{për } \|f_k(s)\| \geq 2^r \end{cases}$$

Ndërtojmë funksionet e thjeshtë

$g^r(s) = \max\{\| f_1^r(s) \|, \ldots, \| f_r^r(s) \|\}$

Vëmë në dukje se $\| f_k^r(s) \| \leq \| f_k(s) \|$ për çdo k dhe pothuajse për të gjithë r si dhe $\|f_k(s)\| \leq \|f_r(s)\|$ për të gjithë k<r, që nga marrim mosbarazimet

$$\| f_k^r(s) \| \leq g^r(s) \leq \| f_k(s) \| \qquad (1)$$

Duk shfrytëzuar vetitë e integralit do të kemi

$$(Bs)\int_S \| f_k^r(s) \| \, d\mu \leq (Bs)\int_S g^r(s) d\mu \leq (Bs)\int_S \| f_k(s) \| d\mu \qquad (2)$$

Në saje të vetisë izotonisë nga mosbarazimet (1) marrim

$$\| f_k(s) \| \leq st - \lim_r g^r \leq \| f(s) \| .$$

Ky limit tregon se pothuajse për të gjithë r vargu ($g^r(s)$) është varg jo zbritës i kufizuar nga sipër nga funksioni $\|f(s)\|$. Duke patur parasysh se $f_k(s) \to f(s)$ pothuajse për çdo s dhe pothuajse për të gjithë m del se $g^r(s) \to \|f(s)\|$ pothuajse për çdo s dhe pothuajse për të gjithë r.

Meqenëse vargu ($\| f_k^r \|$) është gjithashtu varg funksionesh të thjeshtë dhe duke shfrytëzuar përkufizimin e integralit kemi

$$\int_S \| f_k(s) \| \, d\mu \leq \int_S \| f \| d\mu \leq st - \lim_r \int_S \| f_r \| d\mu$$

Që nga fitojmë

$$st - \lim_r \int_S \| f_r \| \, d\mu = (Bs)\int_S \| f(s) \| d\mu .$$

**Lemë 2.17.**

Në qoftë se funksioni f(x) me vlera në hapësirën separabile të Banahut është st-i matshëm në lidhje me një masë probabilitare dhe ka vend mosbarazimi

$$\|f(s)\| \leq g(s),$$

ku g(s) është një funksion (Bs) iintegrueshëm, atëherë funksioni f(s) është (Bs) iintegrueshëm.

**Vërtetim**.Shënojmë $f_k^m$ vargun e funksioneve të thjeshtë që konvergjon statistikisht pothuajse kudo tek funksioni f. Vëmë re se

$$\| f_k^m \| \leq \| f \| + \| f_k^m - f \| \leq \| f \| + \varepsilon$$

$$< \| f \| + \frac{1}{2} \| f_k^m \|$$

Që nga

$$\| f_k^m \| \leq 2\| f \| \leq 2g \text{ pothuajse për të gjithë k.}$$

Shqyrtojmë

$$\| f_k^m(s) - f_N^m(s) \| \leq \| f_k^m(s) \| + \| f_N^m(s) \| < 4g(s)$$

Në saje të vetisë (V) të integralit

$$(Bs)\int_S \| f_k^m(s) - f_N^m(s) \| d\mu \leq (Bs)4\int_S g(s) d\mu$$

pothuajse për të gjitha k.

Duke marrë një bashkësi të matshme C të tillë që $\mu(C)<\delta$ në saje të vetisë [IV] për integralin marrim $\int_C g(s) d\mu < \varepsilon$ .

Kemi treguar kështu që

$$\int_C \| f_k^m - f_N^m \| d\mu < \varepsilon$$

Meqenëse vargu ( $f_k^m$ ) konvergjon pothuajse kudo dhe për të gjithë k tek funksioni f del se masa e bashkësisë B={s : $\| f_k^m(s) - f_N^m \| \geq \lambda$, $\lambda>0$} është zero dhe të jetë S\B bashkësia {s : $\| f_k^m(s) - f_N^m \| < \lambda$}. Në saje të vetisë (ii) të integralit

$$\int_S \| f_k - f_N \| d\mu = \int_B \| f_k - f_N \| d\mu + \int_{S\setminus B} \| f_k - f_N \| d\mu$$

$$< \varepsilon + \lambda \cdot \mu(S)$$

Gjë që tregon se st- $\lim_k \int_S \| f_k(s) - f_N(s) \| d\mu = 0$ .

Vërtetimi plotësohet nëse në vend të g(s) merret ||f(s)||.

**Teorema 2.18.( Lebeg)**

Në qoftë se vargu i funksioneve të matshme ($f_k(s)$) me vlera në hapësirën separabile të Banahut konvergjon tek funksioni f(x) pothuajse kudo dhe p.p.gj.k dhe nëse për $f_k(s)$ ka vend mosbarazimi $\|f_k(s)\| \leq g(s)$, ku g(s) funksion (Bs) iintegrueshëm, atëherë

$$(Bs)\int_S f(s) d\mu = st - \lim_k \int_S f_k(s) d\mu .$$

**Vërtetim**.Në saje të lemës 2.17, funksionet $f_k$ janë (Bs) të integrueshme. Nga mosbarazimi $\|f_k(x)\| \leq g(s)$ dhe $f_k(s) \to f(s)$ pothuajse kudo dhe pothuajse të gjithë k rrjedh që $\|f(s)\| \leq g(s)$

pothuajse kudo. Kjo do të thotë se funksioni f(s) është (Bs) iintegrueshëm dhe përveç kësaj $0\leq\|f_k(s)-f(s)\|\leq 2g(s)$ pothuajse kudo dhe funksioni $\|f_k(s)-f(s)\|$ është iintegrueshëm dhe pothuajse kudo

$$st-\lim_{k}\int_{S}\|f_k(s)-f(s)\|d\mu=0$$

Mosbarazimi

$$\|\int_{S}f_k(s)d\mu-\int_{S}f(s)d\mu\|\leq\int_{S}\|f_k(s)-f(s)\|d\mu$$

tregon se vargu ((Bs) $\int_{s}f_k(s)d\mu$ ) st-konvergjon për më tepër njëtrajtësisht tek integrali (Bs) $\int_{S}f(s)d\mu$.

**Lema 2.19. (Fatou)**

Le të jetë $\{f_n(x)\}$ një varg funksionesh st- të matshëm fortësisht nga S tek X, atëherë për çdo $A\subset S$ ka vend mosbarazimi

$$\int_{A}st-\liminf\|f_n\|d\mu\leq st-\liminf\int_{A}\|f_n\|d\mu .$$

**Vërtetim**. Ndërtojmë funksionin

$$\|g_n\|=\inf_{k\geq n}\{\|f_n(s)\|\text{, n=1,2,}\ldots$$

Është e qartë se vargu $\{\|g_n\|\}$ është një varg jozbritës i funksioneve të matshme jonegativë që konvergjon tek inf lim$\{\|f_n(s)\|\}$ . Në saje të teoremës [2.14]

$$st-\lim\int_{A}\|g_n\|d\mu=st-\int_{A}\liminf\|f_n\|d\mu \qquad (3)$$

Nga ana tjtër $\|g_n\|\leq\|f_n\|$ për çdo $s\in S$. kjo sjell mosbarazimin

$$st-\int_{A}\|g_n(s)\|d\mu\leq st-\int_{A}\|f_n(s)\|d\mu$$

Dhe do të kemi

$$st-\lim\int_{A}\|g_n(s)\|d\mu\leq st-\liminf\int_{A}\|f_n(x)\|d\mu \qquad (4)$$

Nga mosbarazimet (3) dhe (4) marrim

$$st-\int_{A}\liminf\|f_n\|d\mu\leq st-\liminf\int_{A}\|f_n\|d\mu .$$

Në qoftë se vargu funksional $\{f_n(x)\}$ është i kufizuar nga sipër nga një funksion st- i matshëm fortësisht, të themi v(x), do të marrim mosbarazimin

$$st-\limsup\int_{A}\|f_n\|d\mu\leq st-\int_{A}\limsup\|f_n\|d\mu .$$

**Teoremë 2.20.**

Le të jetë $\{f_n(s)\}$ një varg funksionesh dhe st të matshëm fortësisht të tillë që vargu $\{f_n(s)\}$ të konvergjojë statistikisht pothuajse kudo tek një funksion f(s) . Në qoftë se gjenden funksionet st- të matshëm fortësisht u(x) dhe v(x) të tillë që

$$u(s)\|\leq\|f_n(s)\|\leq\|v(s)\|$$

Në këto kushte funksionet $f_n$ dhe f janë st- të integrueshëm Bohner dhe ka vend barazimi

$$st-\lim\int_A f_n d\mu = st-\int_A fd\mu .$$

**Vërtetim**. Ashtu si në vërtetimin e teoremës 2.14., i paraqesim funksionet $f_n$ si limite të nënvargjeve jo zbritës të funksioneve të thjeshtë $\{\| f_n^k(s)\|\}$ të tillë që

$$\| f_n(s)\| = \lim_{k\to\infty}\| f_n^k(s)\|,$$

$$\| f_n^p(s)\|\leq\| f_n^q(s)\|\leq\| f_n(s)\| \text{ për } p<q$$

Si rrjedhim marrim që vargu jozbritës $\{\int_A \| f_n^k \| d\mu\}$ është i kufizuar nga sipër nga st- integrali $\int_A \| v(s)\| d\mu$. Kjo sjellë që vargu $\{\|f_n\|\}$ është st-i integrueshëms. Le të shfrytëzojmë tani relacionet (3) dhe (4) duke patur parasysh se .

$$st-\liminf\| f_n\| = st-\limsup\| f_n\| = st-\lim\| f_n\| = \| f\|$$

Do të marrim

$$st-\limsup\int_A\| f_n\| d\mu \leq Bs-\int_A\| f\| d\mu \leq st-\liminf\int_A\| f_n\| d\mu .$$

Kjo sjellë barazimin

$$st-\lim\int_A\| f_n\| d\mu = Bs-\int_A\| f\| d\mu$$

Teorema 2.16 provon barazimin tonë.

**Teoremë 2.21.( Kadec)[21]**

Në qoftë se E është një hapësirë e normuar dhe separabël atëherë gjendet një normë ekuivalente me normën e dhënë e tillë që nga konvergjenca e dobët e vargut $x_n \xrightarrow{w} x$ dhe $\|x_n\|\to\|x\|$ të rrjedh konvergjenca e fortë e vargut $(x_n)$ tek x.

**Teoremë 2.22. (Beppo-Levi)**

Le të jetë $f_n : S\to X$, një funkson me vlera në një hapësirë separable të Banahut, $\{\|f_n\|\}$ është një varg jorritës në X dhe bashkësia $\{\int_S f_n d\mu\}$ është uniformisht të kufizuar.

Në këto kushte gjendet një funksion f(x) i tillë që $st-\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ pothuajse kudo në S dhe ka vend barazimi

$$st-\lim_{n\to\infty}\int_S f_n(x)d\mu = (Bs)\int_S f(x)d\mu .$$

**Vërtetim**.Përderisa bashkësia $\{\int_S f_n d\mu\}$ është plotësisht e kufizuar ekziston një nënvarg nga kjo bashkësi që konvergjon tek një element i saj. Me fjalë të tjera, gjendet një funksion st- i integrueshëm g(x) i tillë që $\int_S f_k(x)d\mu \xrightarrow{st} \int_S g(x)d\mu$ . Kjo tregon se vargu $f_k(x)$ konvergjon statistikisht sipas normës tek g(x) në X.

Shënojmë

$$A_k^r = \{x : \| f_k(x) \| \geq r) \cap S \text{ (k,r = 1,2,…)}$$

Nga vetia e monotonisë e vargut $\{\|f_n\|\}$ për çdo r do të kemi

$$\{x : \| f_k(x) \| \geq r\} \subset \{x : \| f_{k+1}(x) \| \geq r\}$$

Kjo do të thotë se për çdo numër natyral k bashkësitë $A_k^r$ formojnë një varg jo-zbritës dhe

$$B_r = \lim_{\substack{\lim n \\ x\to\infty}} A_k^r = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k^r \quad \text{(r=1,2,…)}$$

Nga ana tjetër, për një numër k të fiksuar bashkësitë $A_k^r$ formojnë një varg jorritës

$$\{x : \| f_k(x) \| \geq r\} \subset \{x : \| f_k(x) \| \geq r+1\}$$

Shënojmë

$$C = \lim_{r\to\infty} B_r = \bigcap_{r=1}^{\infty} B_r \ .$$

Në saje të mosbarazimit të Chebichevit (cf. [schëabik1]) për çdo k dhe r do të kemi

$$\mu(A_k^r) \leq \int_S f_k(x)d\mu < \frac{M}{r}$$

ku M është e kufizuar dhe $\| \int_S f_k(x)d\mu \|_1 \leq M$ për çdo k.

Duke u bazuar në vetinë e vazhdueshmëria e masës do të kemi

$$\mu(B_r) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k^r) \leq \frac{r}{M}$$

gjithashtu

$$\mu(C) \leq \mu(B_r) \leq \frac{M}{r} \text{ për çdo r.}$$

Kjo tregon se μ(C)=0. Kështu për çdo x∉C dhe x∉$B_r$ gjithashtu për ndonjë r, do të kemi x∉ $A_k^r$ për çdo k. Kjo do të thotë se $\|f_k(x)\|<r$ për çdo k, mosbarazimi tregon se ekziston limiti $\lim_{k\to\infty} \| f_k(x) \|$, të cilin e shënojmë ||f(x)||.

Duke marrë në konsideratë mosbarazimet $|\|f_k\|-\|g\||<\|f_k-g\|$ për çdo normë edhe për normën ||.|| do të marrim

$$\int_S |\| f_k(x) \| - \| f(x) \|| \, d\mu \leq \int_S \| f_k(x) - f(x) \| \, d\mu < \varepsilon$$

Pothuajse për çdo k. Në saje të vetisë përkatëse të integralit (Bs) rrjedh se vargu $\|f_k(x)-g(x)\|\to 0$ p.p.gj.k. Kjo sjell barazimin f(x)=g(x) dhe vargu $\{f_k(x)\}$ konvergjon statistikisht tek funksioni f(x) pothuajse kudo.

Jemi tani në kushtet e teoremës së Lebegut dhe mund të kalojmë në limit nën shenjën e integralit.

## KREU III

## Konvergjenca statistikore dhe integrali Dunford dhe Pettis

Integrali i Pettis-it është nga integralet më të rëndësishëm në lidhje me teorinë moderne të probabiliteteve.Ai është I pranishëm në përkufizimet e koncepteve bazë si pritja matematike .dispersioni etj.Në teorinë e probabiliteteve hasim me funksione të rastit me vlera në një hapësirë vektoriale. Në qoftë se ($\Omega$, S, $\mathbb{P}$) është hapësira e probabiliteteve, ku $\Omega$është hapësira e ngjarjeve elementare $\omega$ , S është$\sigma$-algjebër e bashkësive nga S dhe $\mathbb{P}$ përfaqëson masën probabilitare, atëherë x($\omega$) do të jenë funksionet e matshëm përkatës. Pritja matematike e funksioneve të rastit x($\omega$) dotë quhet integrali i dobët(integrali i Pettis-it) i këtij funksioni në lidhje me probabilitetin $\mathbb{P}$:

$$E[x(\omega)]=\int x(\omega)d\omega \ .$$

Po shqyrtojmë se pari integralin e Dunfordit si pararendës dhe integrali i dobët më i përgjithshëm .Integralin e Pettis-it e trajtojmë si rast të veçantë të tij.

### 1.Integralistatistikor i Dunfordit

**Lame3.1 (Dunford)[12]** Në qoftë se $f: S \to X$është statistikisht fortësisht i matshëm në hapësirën e normuar X dhe për çdo $x^* \in X^*$ funksioni$x^*(f): S \to R$është statistikisht (Bohner) iintegrueshëm ($x^*(f) \in L_1$), atëherë për çdo bashkësi të matshme E $\subset$ S gjendet një element i vetëm$x^{**} \in X^{**}$i tillë që

$$x_E{}^{**} = B_S - \int_E \ x^*(f) \text{për çdo} x^* \in X^*. \qquad (1)$$

**Vërtetim**. Për bashkësinë e matshme E$\subset$ S ne kemi$\int_E \ x^*(f) = \int_S \ x^*(f \ \cdot \chi_E)$ që nga mund të përcaktojmë funksionin

$T_E(x^*) \to x^*(f \ \cdot \chi_E)$,

ku$T_E$është një funksion lineari$X^*$në hapësirën $L_1$të funksioneve real tëintegrueshëm sipas Lebegut(Bohnerit) në S dhe funksioni

$T_E: x^* \to \int_S \ x^*(f \cdot \chi_E \ )$

është funksion linear në$X^*$ .

Marrim në shqyrtim nënvargun konvergjent$x^*{}_{n_k} \to x^*$në$X^*$ dhe $T_E(x^*{}_{n_k}) \to g$ në$L_1$ ku $n_k \in K, k \to \infty$ ndërkaq$(x^*{}_{n_k})$ dhe$(T_E(x^*{}_{n_k})$ janë nënvargje esencialë të vargut $(x^*{}_{n_k})$dhe$(T_E(x^*{}_n \ )$ , që do të thotë se

$\lim_K \int_S \ |x^*{}_{n_k}(f \cdot \chi_E) - g| = 0 n_k \in K$dhe k$\to \infty$.

Kjo tregon se vargu $x^*{}_{n_k}(f \cdot \chi_E)$konvergjon për$n_k \in K$dhe k$\to +\infty$sipas masës tek g dhe në saje të teoremës së Riesz-it, gjendet nënvargu esencial $\{x^*{}_{m_r}\}$i vargut$\{x^*{}_{n_k}\}$i tillë që

$$x^*{}_{m_r}\left(f(t) \cdot \chi_E(t)\right) \to g(t) m_r \in K \text{dhe r} \to +\infty$$

pothuajse për çdo t$\in S$.

Përderisa

$$x^*{}_n \ \left(f(t) \cdot \chi_E(t)\right) \to g(t) \to x^*(f(t) \cdot \chi_E(t))$$

për të gjithë t $\in S$, rrjedh se

$$g(t) = X^*(f(t) \cdot \chi_E(t)),$$

për të gjithë t$\in S$ dhe$x^*(f \cdot \chi_E) \in L_1$ . Kjo do të thotë se grafii funksionit linear$T_E: X^* \to L_1$ështëi mbyllur dhe sipas teoremës së Banahut për grafin e mbyllur tëoperatorit rrjedh se operatori$T_E$ështëi kufizuar. Që nga

$$|T_E(x^*)| = \left|\int_S \ x^*(f \cdot \chi_E)\right| \le \int_S \ |x^*(f \cdot \chi_E)| = \int_S \ |T_E(x^*)| = \|T_E(x^*)\|_{L_1} \le \|T_E\| \|X^*\|$$

Kjo sjell

$$\left|\int_E \ x^*(t)\right| \le \|T_E\| \|x^*\|$$

Kështu operatori$\int_E \ x^*(t)$është një funksional linear i vazhdueshëm në$X^*$ dhe na përcakton elementin$x^{**} \in \ X^{**}$ për të cilin barazimi tek(1) ka vend.

Lema e mësipërme e Dunfordit(3.1) bën të mundur futjen e kuptimit të mëposhtëm.

**Përkufizim 3.2.** Në qoftëse f:S→ $X$është*statistikisht i matshëm dobët* dhe i tillë që funksioni$x^*(f): S \to \mathbb{R}$ështëstatistikisht iintegrueshëmsipas Bohnerit(në formë të shkurtuar Bs-iintegrueshëm),atëherëintegrali statistikor i Dunfordit Ds-$\int_E f$i funksionit f në bashkësinë e matshmeE⊂ S përcaktohet nga elementi $x^{**} \in X^{**}$i dhënë në lemën (3.1), dmth

$x^{**} = Ds - \int_E f,$

ku$x^{**}{}_E(x^*) = Bs - \int_E x^*(f)$ për$x^* \in X^*$.

Shënojmë me Ds bashkësinë e të gjithë funksioneve Ds- tëintegrueshëm f:S→ $X$.Për funksionet f ∈ Ds kemi që$x^*(f) \in L_1$ për çdo$x^* \in X^*$. Le të përcaktojmë

$$T(x^*) = x^*(f),\ x^* \in X^*, \qquad (2)$$

ku$T: X^* \to L_1$është një operator lineari ciliështëi kufizuar në saje të teoremës së Banahut për grafin e mbyllur (në vërtetimin e lemës(3.1) në rastin kur E= $S$ )

Le të jetë$T^*: L^*{}_1 = L_\infty \to X^{**}$ operatorii konjuguar i operatorit T i përcaktuar nga barazimi

$$T^*(g)(x^*) = Bs - \int_S g \cdot T(x^*) = Bs - \int_S g \cdot x^* f \in R \quad , g \in L^*{}_1 = L_\infty$$

$T^*(g)$është funksional linear në$X^*$ për ndonjë g ∈ $L_\infty(L^*{}_1)$sepse

$$Bs - \int_S g(ax^*{}_1 + bx^*{}_2)(f) = a \int_S gx^*{}_1(f) + b \int_S g\, x^*{}_2(f)$$

Ky operatorështëi kufizuar sepse kufizueshmëria e operatorit Tmerret nga mosbarazimi

$$|T^*(g)(x^*)| = \left| Bs - \int_S gT(x^*) \right| \le \|g\|_{L_\infty} \cdot \|T(x^*)\|_{L_1} \le \|g\|_{L_\infty} \|T\| \|x^*\|_{X^*}$$

Që nga$T^*(g) \in X^{**}$për çdo g∈ $L_\infty$.

Duke supozuar se $g = \chi_E \in L_\infty$,ku E⊂Sështë e matshme , do të kemi

$$T^*(\chi_E)(x^*) = Bs - \int_S \chi_E x^*(f) = \int_E x^*(f)$$

Atëherë$T^*(\chi_E) \in X^{**}$për për çdo bashkësi të matshme $E \subset S$ dhe

$$\nu(E)=T^*(\chi_E)=Ds-\int_E f \qquad (3)$$

Funksioni $\nu(E)=Ds-\int_E f$ështëi përcaktuar për të gjitha bashkësitë e matshme E⊂ S quhetintegrali statistikor i pacaktuar i Dunfordit i funksionit f.

**Pohim 3.3.**Në qoftëse funksioni $f:S\to X$ është statistikisht Dunford iintegrushëm atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

a) Operatori $T:X^*\to L_1$ i dhënë nga formula (3)është statstikisht kompakt sipas vargjeve;
b) Operatorii konjuguar $T^*:L_\infty\to X^{**}$ i operatorit Tështë statistikisht kompakt i dobët;
c) The set $\{x^*(f) : x^*\in B(X^*)\}\subset L_1$ është uniformisht e integrueshme,

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E x^*(f)=0,$$

është uniformisht për çdo $x^*\in B(X^*)$

d) integralii pacaktuar i Dunforditν(E)i dhënë nga (3)është additive e numërueshme, dmth në qoftë se $E_n\subset S, n\in\mathbb{N}$janë bashkësi të matshme dy nga dy joprerëse, atëherë

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\nu\left(E_n\right),$$

në X** ( atëherëthuhet se seria $\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon\left(E_n\right)$ është konvergjente sipas normës në X**).

Vëmë në dukje se operatorikompakt(sipas vargjeve) i dobët çon vargjet e kufizuara në vargje që kanë nënëvargje konvergjent ose në mënyrë ekuivalente operatori kompakt(sipas vargjeve) çon bashkësitë e kufizuara në bashkësi kompakte dobët(sipas vargjeve dobët)

Përpara se të fillojmë vërteimin le të formulojmë një lemë e cila është e domosdoshme për të realizuar atë.

**Lemë 3.4. ([12],IV, 8.9.)**

Një bashkësi C⊂ $L_1$është kompakte e dobët atëherë dhe vetëm atëherë kur Cështë e kufizuar dhe aditiviteti I numërueshëm I integralit $\int_E fd\mu$ është uniform në lidhje me çdo f ∈ C, që do të thotë se për çdo varg bashkësish të matshme rritëse $E_n$⊂ S që kanqë prerje boshe limiti

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} fd\mu = 0$$

Është uniform në lidhje me f $\in$ C

**Vërtetim.:** Letëbazohemi në teoremën e Gantmacher-it ( [12] .VI .Teorema 4.8.) sipas të cilës një operator T është kompakt(kompakt sipas vargjeve) atëherë dhe vëtëm atëherë kur operatorii tij i konjuguar T* është kompakt i dobët(kompakt i dobët sipas vargjeve) dhe atëherë a) dhe b) janë ekuivalenete .

Le të marrim në shqyrtim bashkësinë

$$T(B(X^*)) = \{x^*(f); x^* \in B(X^*)\} \subset L_1$$

Ne kemi

$$\|x^*(f)\|_{L_1} = \int_S |x^*(f)| = \|T(x^*)\|_{L_1} \le \|T\| < +\infty$$

për x*$\in$B(X*)sepse kur operatori T ështëikufizuar rrjedh se bashkësia $T(B(X^*))$ është e kufizuar.

Në saje të lemës 3.4.bashkësia C$\subset L_1$ është kompakte e dobët në qoftë se dhe vetëm nëqoftëse

Cështë e kufizuar dhe aditivitetii numërueshëm iintegralit $\int_E fd\mu$ është uniform në lidhje $f \in C$,

dmth për çdo varg rritës bashkësish $E_n \subset S$ të bashkësive të matshme që kanë prerje dy nga dy boshe, limiti

$$\lim_{n\to\infty}\int_{E_n} fd\mu = 0$$

është uniform në lidhje me $f \in C$.

Kështu që bashkësia $T(B(X^*)) \subset L_1$ është kompakte e dobët( ose ekuivalente me këtëstatistikisht kompakte e dobët sipas vargjeve) atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$\lim_{\mu(E)\to 0}\int_E x^*(f)$$

uniformisht për çdo $x^* \in B(X^*)$.

Kjo do të thotëse c) është ekuivalente me a). Tani supozojmë se ka vend c) . Në këtë rast është e qartë se $\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E |x^*(f)| = 0$ uniformisht për çdo $x^* \in B(X^*)$.Atëherë për çdo $\eta > 0$ gjendet një $\varepsilon > 0$ e tillë që

$$\left|T^*\left(\chi_E\left(x^*\right)\right)\right| = \left|\int_E x^*(f)\right| < \eta$$

Për çdo $x^* \in B(X^*)$.Në qoftë se $\mu(E) < \varepsilon$ atëherë $\left\|T^*(\chi_E)\right\| < \eta$. Nga ana tjetër, në qoftë se $E_n \subset S, n \in \mathbb{N}$ janë të matshme dhe dy nga dy joprerëse, duke shënuar $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ do të marrim që

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) = 0$$

Dhe si rrjedhim

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \upsilon\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)\right\|_{X^{**}} = 0.$$

Përderisa

$$E = \left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n\right) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n ,$$

Nga fakti se operatoriështë aditiv i fundmë, marrim

$$T^*(\chi_E) = T^*\left(\chi_{E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n}\right) + T^*\left(\chi_{\bigcup_{n=1}^{N} E_n}\right) = T^*\left(\chi_{E \setminus \bigcup_{n=1}^{N} E_n}\right) + \sum_{n=1}^{N} T^*\left(\chi_{E_n}\right).$$

Kjo do të thotë se

$$\nu(E) - \sum_{n=1}^{N} \nu(E_n) = \nu\left(E \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

dhe

$$\lim_{N\to+\infty}\left\|\nu(E)-\sum_{n=1}^{N}\nu(E_n)\right\| = \lim_{N\to+\infty}\left\|\nu\left(E\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)\right\| = 0$$

Që nga rrjedh se $\nu(E)$ ështëaditive e numërueshme.

Supozojmë tani se c) nuk ka vend, atëherë gjendet një $k>0$ dhe një varg bashkësish $E_n \subset S, n\in\mathbb{N}$ të matshme të tilla që $\mu(E_n)\to 0, n\to\infty$ dhe $\int_{E_n}\left|x_n^*(f)\right|>k$ për tëgjithë $x_n^*\in B(X^*)$.

Përderisa masat e bashkësive $E_n$ është e mundur të zgjedhim një nënvarg të $E_n$ dhe duke supozuar se m<n do të kemi

$$\int_{E_m}\left|x_n^*(f)\right|<\frac{k}{2^{n+1}}$$

marrim $A_n = E_n\setminus\bigcup_{m\prec n}E_m, A_n\subset S$ të matshme, $A_n\bigcap A_r=\varnothing, m\neq r$ dhe

$$\int_{A_n}\left|x_n^*(f)\right| = \int_{E_n}\left|x_n^*(f)\right| - \int_{\bigcup_{m\prec n}E_m}\left|x_n^*(f)\right| > \frac{k}{2}$$

Kështu që gjenden bashkësitë e matshme $B_n\subset A_n, B_n$ ( $B_n$ dy nga dy joprerëse) të tilla që

$$\int_{B_n}\left|x_n^*(f)\right|>\frac{k}{4}$$

Nga rrjedhse $\left\|T^*\left(\chi_{B_n}\right)\right\|>\frac{k}{4}$ për çdo n. Kjo do të thotë se seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}T^*(B_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\upsilon(B_n)$$

Nuk mund të konvergjojë dhe d) nuk plotësohet .Kjo na jep ekuivalencën e c) me d).

## 2.Integrali statistikor i Pettis-it

Siç pamë ne seksionin e mëparshëm integrali statistikor i Dunfordit $Ds-\int_E f$ është element i dualit të dytë $X^{**}$ të hapësirës së Banahut X . Do të donim që integrali t'i kishte vlerat në X sepse kjo do ta bënte më të përdorshëm.

Kjo kërkesë çoi në idenë e zhvillimit të një integrali që ta kishte këtë veti.Kujtojmë që se vetë hapësira X është një zhytje natyrale e X në $X^{**}$ sipas funksioneve të caktuar p.sh.linearë. Nëse kjo ndodh integrali $Ds-\int_E f \in \mathrm{X} \subset X^{**}$ mund të gjenerojë një integral tjetër.

**Përkufizim 3.5.** Në qoftë se $f : S \to X$ është st-Dunford i integrueshëm, ku $Ds-\int_E f \in X$ për çdo bashkësi të matshme $E \subset I$ , (ose më konkretisht $Ds-\int_E f \in e(\mathrm{X}) \subset X^{**}$ , funksioni $e$ është zhytja kanonike e X në $X^{**}$), atëherë funksini f është statistikisht-Pettis i integrueshëm dhe

$$st-P-\int_E fd\mu = Ds-\int_E fd\mu$$

integrali mësipërm quhet *integrali statistikor i Pettis-it* i funksionit f në çdo bashkësi E. Do të shënojmë $Ps$ bashkësinë e të gjithë funksioneve Pettis të integrueshëm $f : S \to X$ Këta funksione mund të përkufizohen në mënyrë ekuivalente si më poshtë

**Përkufizim 3.6.** Funksioni statistikisht i matshëm dobët $f : S \to X$ për të cilin funksioni $x^*(f)$ është Lesbegue (Bohner) statistikisht i integrueshëm për çdo $x^* \in X^*$ është*st-Pettis i integrueshëm*në qoftë se për çdo bashkësi të matshme $E \subset S$ ekziston elementi $x_E \in X$ për të cilin ka vend barazimi

$$x^*(x_E) = \int_E x^*(f) d\mu \text{ për çdo } x^* \in X^*. \qquad (1)$$

Elementi $x_E$ quhet integral i pacaktuar statistikor i Pettis-it dhe shënohet

$x_E$ =st-P-$\int_E fd\mu$ . (2)

Duket qartë se kur hapësira e Banahut X është hapësirë reflektive $\left(X^{**} = X\right)$ integrali statistikor i Dunfordit dhe integrali statistikor i Pettis-it përputhen.

Në qoftë se hapësira $X$ nuk është reflektive ata do të jenë të ndryshëm, pra gjendet një funksion që është st-Dunford i integrueshëm por jo st-Pettis i integrueshëm, siç tregon shembulli i mëposhtëm i modifikuar nga një shembull klasik.[27] example 2.2.5, p.34]

**Shembull 3.7.**

Le të shënojmë $c_0$ një hapësirë të Banahut të vargjeve realë

$$x = (x_1, x_2, \ldots) = (x_n)$$

për të cilën $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ me normë

$$\| x \| = \max_n | x_n |$$

Le të përcaktojmë funksionin

$$f(t) = \begin{cases} n^2 \chi_{]0,\frac{1}{n}[}(t) & n\ prim \\ n\chi_{]o,\frac{1}{n}[}(t) & n\ të\ tjerë \end{cases} \quad \text{f(o)=(0)}$$

Vëmë re se për

$t \in \left]\frac{1}{n^*+1}, \frac{1}{n^*}\right]$ funksioni merr vlerat $\quad f(t) = (1, 2^2, 3^2, 4, 5^2, 6, \ldots n^* \ldots)$

Gjithashtu ai f është i vazhdueshëm dhe shkon drejt zeros : $f \in c_0$ p.p.gj.n

Në qoftë se $x^* \in (c_0)^*$ atëherë gjendet një varg $\alpha = (\frac{1}{n^3}) \in l_1$ për të cilin

$$\|\alpha\|_{l_1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

dhe i tillë që

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} x_n \text{ për } x = (x_n) \in c_0$$

Atëherë funksioni

$$x^*\big(f(t)\big) = \begin{cases} \sum\limits_{n\in P} \frac{1}{n^3} n^2 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]}(t) \\ \sum\limits_{n\in \mathbb{N}\setminus P} \frac{1}{n^2} n \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]}(t) \end{cases}$$

ku P është bashkësia e numrave prim, është një funksion real i matshëm ( Lesbegue ), kjo do të thotë se funksioni f është i matshëm dobët dhe

$$\int_0^1 \left| x^*(f(t)) \right| dt = \begin{cases} \int_0^1 \sum\limits_{n\in P} \frac{1}{n^3} n^2 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]}(t)dt \\ \int_0^1 \sum\limits_{\mathbb{N}\setminus P} \frac{1}{n^3} n \int_0^1 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right[}(t)dt \end{cases} =$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{n\in p} \frac{1}{n} \int_0^1 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right[} dt \\ \sum\limits_{n\in \mathbb{N}\setminus P} \frac{1}{n^2} \int_0^1 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]} dt \end{cases} = \begin{cases} \sum\limits_{n\in P} \frac{1}{n^2} \to \\ \sum\limits_{n\in N\setminus P} \frac{1}{n^2} < +\infty \end{cases}$$

Shohim që funksioni f është st-Dunford i ntegrueshëm sepse

$$\int_0^1 x^* f(t) = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} n^2 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right[} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

është konvergjent.

Shohim se në saje të lemës 3.1.dhe përkufizimit 3.2. integrali i Dunfordit është

$$Ds - \int_0^1 f(t)dt = (1,2,3,15,1,7...) \in l_\infty = (\mathrm{c}_0)^{**}$$

Nga ana tjetër

$$Ds - \int_0^1 x^*(f(t))dt \notin c_0$$

Gjë që tregon se funksioni f : [0,1] $\to c_0$ nuk është st-Pettis i integrueshëm.

**Shembull 3.8.**

( Integrali i pacaktuar st-Dunford i integrueshën nuk është aditiv i numërueshëm në përgjithësi).

Duke përdorur funksionin  të dhënë në shembullin e mësipërm nuk është vështirë për të provuar këtë.

$$\int_0^{\frac{1}{k}} x^*(f(t))dt = \begin{cases} \int_0^{\frac{1}{k}} \sum_{n\in P} \frac{1}{n^3} n^2 \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]}(t)dt \\ \int_0^{\frac{1}{k}} \sum_{n\in \mathbb{N}\setminus P} \frac{1}{n^3} n\ \chi_{\left]0,\frac{1}{n}\right]}(t)dt \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^3} n^2 \frac{1}{k} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^3} \\ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{n^3} n \frac{1}{k} + \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^3} \end{cases}$$

Shohim që

$$Ds - \int_0^{\frac{1}{k}} f(t)dt = \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots, \frac{\theta_k}{k}, 1.1\ldots\right) \in l_\infty$$

ku

$$\theta_k = \begin{cases} \dfrac{(k-1)^2}{k} & \text{për } k \text{ prim} \\ \dfrac{k-1}{k} & \text{për të tjerë} \end{cases}.$$

## 3. Disa veti të integralit statistikor të Pettis-it. St- integrali i Pettis-it si limit

Së pari, rikujtojmë lidhjen ndërmjet integralit statistikor të Pettis-it dhe integralin statistikor të Bohnerit të përshkruar në seksionin e mëparshëm.

**Teoremë 3.9.**

Në qoftë se funksioni $f : S \to X$ është st-Bohner i integrueshëm atëherë $f$ është st-Pettis i integrueshëm dhe ka vend barazimi

$$Ps - \int_E fd\mu = Bs - \int_E fd\mu \qquad (4)$$

**Vërtetim.** Përderisa funksioni f(s) është st- Bohner i integrueshëm gjendet një nënvarg determinant i funksioneve të thjeshtë $f_n$ që konvegjojnë pothuajse kudo uniformisht pothuajse për çdo n tek funksioni f. Ndërkaq, meqenëse funksionet x* nga X* janë të vazhdueshëmare do të kemi

$$|x^*(f_n)-x^*(f)| \le \|x^*\|.\|f_n(s)-f(s)\| \to 0 \text{ p. p.gj. n},$$

kështu

$$\text{st-Bs-}\int_E |x^*(f_n)-x^*(f)|\,d\mu \le \|x^*\|\int_E \|f_n - f\|\,d\mu \to 0\,.$$

Kjo do të thotë se vargu i funksioneve $x^*(f_n)$ konvergjon statsistikisht tek x*f. Kjo sjellë që funksioni x*f është st-Bohner i integrueshëm si një funksion real. Duke marrë në shqyrtim edhe një herë vetinë e integrimit të funksioneve të thjeshtë marrim

$$x^*\int_E f_n d\mu = \int_E x^* f_n d\mu \to \int_E x^* fd\mu \text{ për çdo x* of X*.}$$

Nga ana tjetër, vargu që konvergjon stataistikisht dobët ka një limit të vetëm. Për rrjedhojë nga konvergjenca statistikore e vargut të integraleve $\left\{\int_E f_n d\mu\right\}$ tek integrali statistikor i Bohnerit $\int_E fd\mu$ rrjedh konvergjenca tek integrali statistikor i Bohnerit i vargut

$$x^*\int_E f_n d\mu \to x^*\int_E fd\mu\,.$$

Kjo sjell

$$\int_E x^* fd\mu = x^*\int_E fd\mu\,.$$

Sepse

$$|Bs-\int_E x^*(\mathrm{f}_n-f)d\mu| \leq Bs-\int_E |x^*(f_n-f)|\,d\mu$$

$$\leq \|x^*\|_{X^*}.(Bs-\int_E \|f_n-f\|_X\ d\mu$$

që nga

$$\lim_{n\to\infty}(Bs-\int_E \|f_n-f\|_X\ d\mu=0$$

Provuam ekzistencën e integralit statistikor të Pettis-it dhe ata janë të barabartë.

**Teorema 3.10. (Vitali)** Le të jetë (S, Σ, μ) një hapësirë e masës pozitive, μ është e fundme dhe një varg $\{f_n\}$, ku $f_n : S\to X$ janë uniformisht të integrueshëm . Në qoftë se

a) $\lim_K f_n = f$
b) $\|f(x)\|<\infty$

Atëherë kanë vend pohimet :

1. $f\in L_1(\mu)$
2. $Bs-\int_E \|f_n-f\|\,d\mu=0$

**Vërtetim.** Për të provuar pohimin 1, ne përdorim lemën e Fatou-s(pohimi 2.19 ) nga marrim që $\int_S st-\liminf \|f_n\|\,d\mu \leq st-\liminf \int_S \|f_n\|\,d\mu$

Duke shfrytëzuar integrueshmërinë uniforme do të kemi $\int_E \|f\|\,d\mu<1$, ku bashkësia E është e tillë që μ(E)<δ.

Në saje të teoremës Egorov,theorem 1.14, vargu $f_n$ konvergjon në mënyrë statistikore në bashkësinë $E^c$ dhe për më tepër $\int_{E^c} \|f_n-f_N\|\,d\mu<1$ për n>N dhe p.p. gj.n.

Duke përdorur mosbarazimin e trekëndëshit marrim

$$\int_{E^c} \|f_n\|\,d\mu \leq \int_{E^c} \|f_N\|\,d\mu+1=M\ .$$

Mosbarazim që provon pohimin 1. Për pohimin e dytë do të kemi

$$\int_S \|f-f_n\| \leq \int_E \|f\|\,d\mu+\int_E \|f_n\|\,d\mu+\int_{E^c} \|f-f_n\|\,d\mu.$$

Ku $E\subset S$ dhe $\mu(E)<\delta$.të gjithë termat e këtij mosbarazimi janë të kufizuar p.p.gj. n. Kjo provon pohimin 2.

**Përkufizim 3.11. [7]** Një pikë p quhet *pikë limite statistikore sipas vargjeve* e një bashkësie F në qoftë se gjendet një varg $x=(x_k)$ pikash nga $F\backslash\{p\}$ të tilla që st-lim$(x_k)$=p. Bashkësia e të gjitha pikave limite sipas vargjeve të F quhet *mbyllje statistikoresipas vargjeve* e F. Do thuhet se një bashkësi është e *mbyllur statistikisht sipas vargjeve* në qoftë se ajo përmban të gjitha pikat limite statistikore sipas vargjeve.

**Përkufizim 3.12** . Një nënbashkësi e F nga X quhet *statistikisht kompakte sipas vargjeve* në qoftë se për çdo varg $x=(x_k)$ pikash nga F gjendet një nënvarg y=$(y_{k_n})$ nga vargu x që st-lim $y_{k_n}$ =p$\in$F.

**Pohim 3.13 .**

Një nënbashkës**i** F nga X është kompakte siaps vargjeve atëherë dhe vetëm atëherë kur ajo është statistikisht kompakte sipas vargjeve në të.

**Vërtetim.** Le të jetë F një nënbashkësi statistikisht kompakte sipas vargjeve në X. Nga përkufizimi, për çdo varg x në F gjendet nënvargu $(y_k)$ i tillë që konvergjon statsitikisht në një pikë p$\in$F. Por, një varg i tillë $(y_k)$ ka një nënvarg esencial $(y_{k_n})$ konvergjent tek e njëjta pikë p. Kjo do të thotë se F është kompakte sipas vargjeve.

Një funksion $f:S\to X$ është uniformisht i kufizuar dobët në qoftë se gjendet një konstante M e tillë që $|x^*f|\le M\|x^*\|$ pothuajse kudo (bashkësia që përjashtohet do të lidhet me X*).

Në teoremat e mëposhtme ne do të ndjekim idenë e zhvilluat nga Geitz tek [17 ] dhe Musial [25 ] për integralin e zakonshëm të Pettis-it .

**Teoremë 3.14.**

Le të jetë $f:S\to X$ një funksion dhe X hapësirë e Banahut. Në qoftë se ekziston një varg funksionesh $\{f_n:n\in\mathbb{N}\}$ me vlera në X st- Pettis i integrueshëm në S dhe të tillë që :

(a) bashkësia $\{x^*f_n : x^*\in B(X^*), n\in\mathbb{N}\}$ është uniformisht e integrueshme .
(b) $st-\lim x^*f_n = x^*f$ sipas masës, për çdo $x^*\epsilon X^*$

Atëherë f iështë st- Pettis i integrueshëm dhe $st-\lim\int_E f_n d\mu = Ps-\int_E fd\mu$ dobët në X, për çdo $E\in\Sigma$.
**Vërtetim:**Fiksojmë $E\in\Sigma$ dhe le të jetë C një mbyllje statistikisht e dobët e bashkësisë $\{\int_E f_n d\mu : n\in\mathbb{N}\}$ . Përderisa Teorema e Vitalit për konvergjencën(teorema 3.10) garanton që

$st-\lim\int_E x^* f_n d\mu = Bs-\int_E x^* fd\mu$ për çdo $x^* \epsilon X^*$,

Shohim që nga rrjedhimi ([1] –Corollary 2.9)bashkësia C është statistikisht e kufizuar dhe $C \setminus \int_E f_n d\mu$ : n $\in \mathbb{N}$ përmban të shumtën një pikë. Për të vërtetuar pohimin tonë është e mjaftueshme të tregojmë se C është statistikisht kompakte e dobët. Kjo do të sillte ekzistencën e limitit statistikor të dobët të vargut $\{\int_E f_n d\mu : n \in \mathbb{N}\}$ në X. është e qartë se limiti do të jetë I barabartë vetëm me integralin $\int_E fd\mu$ dhe kjo na çon në përfundimin që funksioni është st-Pettis I integrueshëm në E dhe si rrjedhojë në të gjithë $\sum$. Supozojmë atëherë se C nuk është kompakte e dobët që do të thotë se bashkësia C nuk është as statistikisht kompakte e dobët siapas vargjeve (Pohimi 3.13). Atëherë në përputhje me teoremën e Xheimsit(James),([19] Theorem 1) gjendet një varg I kufizuar $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \subset$ C dhe $\varepsilon > 0$, I tillë që

$x_n^*(x_k) = 0$ për $k > n$

dhe

$x_n^*(x_k) > \varepsilon$ për $k \le n$

Përderisa $st-\lim x^* f_n = x^* f$ ne gjejmë një bashkësi A $\subset \mathbb{N}$ e tillë që $\delta$(n $\in$ A : |x*f$_n$ – x*f|>$\sigma$)=0 për çdo $\sigma$>0. Kështu, për $n \notin A$ do të kemi

$$\lim_{n\notin A}\int_E x^* f_n d\mu = Bs-\int_E x^* fd\mu \ .$$

Ne mund të zgjedhim një nënvarg $\{g_m : \text{m} \in \mathbb{N} \setminus \text{A}\}$ nga $\{f_n\}$ dhe një nënvarg $\{y_m^*\}$ nga $\{x_n^*\}$, të tillë që

(i) $\int_E y_k^* g_m d\mu = 0$ k<m

(ii) $\int_E y_k^* g_m d\mu > \varepsilon$ k$\geq$m

(iii) $st-\lim\int_E x^* f_m d\mu = \int_E x^* fd\mu$ për çdo x*$\in$X*.

Marrim në shqyrtim tani bashkësinë $\{y_m^* f : m \in \mathbb{N}\}$. Nga pika (a) rrjedh se kjo bashkësi është uniformisht e integrueshme dhe statistikisht e kufizuar në $L_1(\mu)$. Nga del se kjo bashkësi është relativisht kompakte.Kjo sjell ekzistencën e funksionit $h \epsilon L_1(\mu)$ dhe të një nënvargu $\{z_j^* : j \in \mathbb{N}\}$ të $\{y_m^* : m \in \mathbb{N} \setminus A\}$ të tillë që $st-\lim z_j^* f = h$ dobët në $L_1(\mu)$.duke zbatuar kushtin (iii) për të gjithë $z^*{}_j$ do të marrim mosbarazimin $\int_E z_j fd\mu \ge \varepsilon$ dhe $\int_E hd\mu \ge \varepsilon$. Tani kujtojmë lemën Mazur[23] që luan rol kryesor në këtë vërtetim. Le të jetë $a_1^m ... a_{k(m)}^m$, m $\in \mathbb{N}$ një n-she numrash jonegativë, të tillë që $\sum_j a_j^m = 1$ dhe $\lim_m(\sum_j a_j^m z_{j+m}^* f) = h$ në $L_1(\mu)$. Pa humbur përgjithësisnë, ne mund të supozojmë se konvergjenca ka vend pothuajse kudo sipas $\mu$. Është e qartë se në qoftë se $z_0$ është një pikë limite e dobët e dobët* e vargut $\{\sum_j a_j^m z_{\le j+m}^*$ : m$\in \mathbb{N}$ } atëherë $h = z_0^* f$ sipas μ p.k., në veçanti do të marrim që

(iv) $\int_E z_0^* f d\mu \geq \varepsilon$

Nga ana tjetër, secila nga $g_n$është st-Pettis i integrueshëm dhe funksionali $x^* \to \int_E x^* g_n d\mu$ është I vazhdueshëm dobët* . Kështu që në qoftë se vargu $\{\omega_{n,\alpha}^*\}$ është nënvarg i vargut $\{\sum_j a^m z_{j+m}^* : m > n\}$ i cili konvergjon statistikisht dobët tek $z^*_0$, atëherë duke zbatuar (i) do të marrim :

$$0 = \lim_\alpha \int_E \omega_{n,\alpha}^* g_n d\mu = \lim_\alpha \omega_{n,\alpha}^* \int_E g_n d\mu = z_0^* \int_E g_n d\mu = \int_E z_0^* g_n d\mu$$

Përderisa barazimi ka vend për të gjithë $n \in \mathbb{N} \setminus A$ ,nga kushti (iii) do të kemi $\int_E z_0^* f d\mu = 0$ . Gjë e cila bie në kundërshtim me mosbarazimin (iv).

**Theorem 3.15.**

Le të jetë (S, Σ, μ) hapësirë e matshme dhe $\Sigma_0 \subset \Sigma$. Funksioni f : S→X është st-Pettis i integrueshëm dhe statistikisht i matshëm dobët në lidhje me një hapësirë të matshme separabël (S, $\Sigma_0$, $\mu|_{\Sigma_0}$ ) atëherë dhe vetëm atëherë kur gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $\{f_n : n\in\mathbb{N}\}$ ome vlera në X në S i tillë që

(a) familja $\{x^*f_n : n\in\mathbb{N}, x^*\in B(X^*)\}$ është uniformisht e integrueshme,

(b) Për çdo $x^*\in X^*$ $st-\lim_n x^* f_n = x^* f$ μ-pothuajse kudo.

**Vërtetim.**Përderisa funksionet e thjeshtë janë st-Pettis të integrueshëm, kondita e nevojshme rrjedh në mënyrë të menjëhershme nga teorema e mësipërme.Supozojmë se funksioni f është i matshëm dobët në lidhje me hapësirën e matshme separable (S, $\Sigma_0$, $\mu|_{\Sigma_0}$ ) dhe le të jetë $\tilde{\Sigma} = \sigma$ ($\{E_n, n\in\mathbb{N}\}$)$\subset\Sigma_0$ një sigma algjebër e numërueshme e gjeneruar e cila është e dendur sipas masës $\mu|_{\Sigma_0}$ në $\Sigma_0$.Përveç kësaj, le të jetë $\Pi_n$ një copëtim i intervalit S i gjeneruar nga bashkësitë $E_1,\ldots,E_n$. ndërtojmë për çdo n funksionet

$$f_n = \sum_{E\subset\Pi_n} \frac{\int_E f d\mu}{\mu(E)} \chi_E \qquad (\frac{0}{0} = 0)$$

Siç dihet çifti $\{\ f_n, \sigma(\Pi_n)\ \}_{n=1}^{\infty}$ është një martingale me vlera në X dhe $x^*f_n \to E(x^*f|_{\tilde{\Sigma}})$ p.p.gj.n është në $L_1(S,\tilde{\Sigma},\mu|_{\Sigma_0})$ (cf. Neveu [26]) dhe μ-p.k sipas pohimit të (Diestel [10]). Për më tepër operatori i pritjes matematike të kushtëzua është një kontraktim në $L_1(\mu|_{\tilde{\Sigma}})$ që nga marrim që

$$\int_E |x^* f_n| \, d\mu \le \int_E |x^* f| \, d\mu \text{ p. p.gj.n} \in \mathbb{N}.$$

Meqenëse nga supozimi kjo është e dendur në në $\Sigma_0$, do të kemi që $E(x^* f|_{\tilde{\Sigma}}) = x^* f$ μ-p. k. dhe do të kemi që

$$x^*f_n \to x^*f \quad \mu|_{\Sigma_0}\text{-p. k. dhe p. p.gj. n.}$$

Nga ana tjetër, nga kushti (b) kemi që vargu $\{x^*f_n : n\in\mathbb{N}\}$ është statistikisht konvergjent dobët tek x*f në $L_1(\mu)$. Kushti mësipërm tregon saktësisht se për çdo $E\in\Sigma$ vargu $\{\int_E f_n d\mu\}$ është statistikisht konvergjent tek $\int_E f d\mu$. Kjo do të thotë se $\nu_n$përmbahet në mbylljen e dobët të bashkësisë $\bigcup_n \nu_n$ ku $\nu_n$ është integrali i pacaktuar statistikor i Pettis-it i funksionit $f_n$. Meqenëse çdo bashkësi $\nu_n(\Sigma)$ ka dimensione të fundme, bashkimi i tyre është separabël i dobët. Duke ju referuar rezultatit shumë të njohur të Mazur-it norma e dobët dhe norma separabël në hapësirat e Banahut koncidojnë.

**Teoremë 3.16.**

Le të jetë $(S,\Sigma,\mu)$ një hapësirë e matshme me masë të fundme, X një hapësirë eBanahut dhe f : S→X. Supozojmë se gjendet një varg $\{f_n\}$ I funksioneve st-Pettis të integrueshëm nga S në X të tillë që $\lim_K x^* f_n = x^* f$ μ-p.k. për çdo x* nga X*(thebashkësia boshe në të cilën konvergjenca nuk ka vend do të varet nga x*). Në qoftë se gjendet një funksion skalar v(x) për të cilin $\| x^* f_n \| \le v(x)$ μ-p.k. dhe për çdo $x^* \in X^*$ dhe $n\in K$, atëherë funksioni f është st-Pettis i integrueshëm dhe ka vend barazimi

$$st - \lim \int_E f_n d\mu = Ps - \int_E f d\mu \, .$$

**Vërtetim**. Në saje të teoremës mbi konvergjencën e dominuar , funksioni x*f është st-Bohner i integrueshëm për çdo $x^*\in X^*$ dhe

$$st - \lim \int_E x^* f_n d\mu = Bs - \int_E x^* f d\mu \text{, për } E\in\Sigma. \qquad (5)$$

Mund të shkruajmë që

$$\int_E x^* f_n d\mu = x^* \int_E f_n d\mu \qquad (6)$$

Nga (5) dhe (6) do të kemi që vargu $\{\int_E f_n d\mu\}$ është themelor në X*. Nga plotshmëria e hapësirës së Banahut X* vargu i mësipërm ka për limit y:

$$st - \lim x^* \int_E f_n d\mu = x^* y \text{ për çdo } x^* \in X^*.$$

Kjo plotëson dy kushtet e ekzistencës të integralit statistikor të Pettis-it të funksionit f:

$$Ps - \int_E f d\mu = y = st - \lim \int_E f_n d\mu \ .$$

## 4.Seritë konvergjente të pakushtëzuara dhe integrali statistikor i Pettis-it

Për të provuar aditivitetin e numërueshëm të integralit të Pettis-t gjë e cila nuk ishte e mundur në rastin e integralit të Dunfordit do na duhen një sërë pohimesh lidhur me seritë konvergjente të pakushtëzuara. Meqenëse ato janë shumë të njohura po japim vetëm formulimin e tyre dhe përkufizimet përkatëse

**Përkufizim3.17.** Seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e elementeve $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$ nga një hapësirë e Banahut X quhet konvergjente në qoftë se shuma e pjesshme $s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ është konvergjente sipas normës në X.

**Përkufizim 3.18**. Seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ , $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$ është absolutisht konvergjente në qoftë se është konvergjente seria $\sum_{k=1}^{\infty} \| x_k \|$ .

**Pohim 3.19**

Në qoftë se seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergjon absolutisht atëherë konvergjon edhe seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ .

**Përkufizim 3.20** Seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ me elemente $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, ku X është një hapësirë e Banahut quhet seri *konvergjente e pakushtëzuar* në qoftë se ajo , për çdo rirenditje të termave të saj dmth, seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_{P(n)}$ konvergjon për çdo P që është një korrespondencë biunivoke të $\mathbb{N}$ me $\mathbb{N}$.

**Teoremë 3.21. ([20] Teoremë 1.3.2.)**

Për serinë $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e elementeve $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,në hapësirën ëe Banahut pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

(a) Seria konvergjon në mënyrë të pakushtëzuar
(b) Të gjitha seritë e formës $x_{n_1} + x_{n_2} + x_{n_3} + \ldots$ ku $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ konvergjojnë
(c) Për çdo varg të kufizuar elementesh $(a_i)$ $a_i \in \mathbb{R}$, seria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ konvergjon tek ndonjë elemet i X.

**Pohim 3.22.** [20]

Në qoftë se $X = \mathbb{R}$ atëherë seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ e elementeve $x_k \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$,është konvergjente e pakushtëzuar atëherë dhe vetëm atëherë kur seria është absolutisht konvergjente.

**Përkufizim 3.23**. Seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ me elemente $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, *konvergjon dobët( është konvergjente e dobët)* tek shuma $s \in X$ në qoftë se $x^* \in X^*$ limiti

$$\lim_{n\to\infty} x^*(\sum_{k=1}^{n} x_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^*(x_k) = x^*(s)$$

ekziston.

**Teoremë 3.24. (Orlicz, Pettis[32])** Le të jetë $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ $x_k \in X$, $k \in \mathbb{N}$, seri në hapësirën e Banahut X.

Në qoftë se për çdo bashkësi $A \subset \mathbb{N}$ ekziston elementi $x_A \in X$ i tillë që për çdo $x^* \in X^*$ të kemi

$$\sum_{k\in A} x^*(x_k) = x^*(x_A)$$

Atëherë seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ është konvergjente e pakushtëzuar.

**Teoremë 3.25.**

Në qoftë se $f : S \to X$ është st- Pettis i integrueshëm dhe i përcaktuar në një bashkësi të matshme $E \subset S$ atëherë funksioni

$$\upsilon(E) = Ps - \int_E f d\mu \in X \text{ (integrali i pacaktuar st-Pettis-it)}$$

është aditiv i numërueshëm.

**Vërtetim**. Supozojmë se bashkësitë $E_n \subset S, n \in \mathbb{N}$ janë bashkësi të matshme dhe $E_n \cap E_m = \varnothing, n \neq m$ .

atëherë

$$x^*(\upsilon(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)) = x^*(Ps - \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} f d\mu) = Bs - \int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} x^*(f) d\mu =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Bs - \int_{E_n} x^*(f) d\mu) = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(\upsilon(E_n))$$

për çdo $x^* \in X^*$. Kjo do të thotë se $\upsilon$ është aditive e numërueshme dobët, dmth, seria e numrave realë $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(\upsilon(E_n))$ është konvergjente për çdo $x^* \in X^*$. Në sajë të pohimit 3.22 për $X = \mathbb{R}$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ e elementeve $x_n \in X$ është konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar atëherë dhe vetëm atëherë kur kjo seri $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ është absolutisht konvergjentes. Kemi marrë kështu se seria $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(\upsilon(E_n))$ është konvergjente e pakushtëzuar në saje të teoremës 3.21 ([30] p.284) kjo është gjithashtu konvergjente dobët sipas nënserive. Duke u bazuar në teoremën Orlicz –Pettis 3.24 ([30], theorem .p.268) kemi që seria $\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(E_n)$ është konvergjente e pakushtëzuar që nga rrjedh se ajo është konvergjente edhe sipas normës. Ndërkaq

$$\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(\mathrm{E}_n) = \upsilon(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n)$$

Gjë që provon teoremën.

**Teoremë 3.26.**

Le të jetë $f : S \to X$ funksion st- i matshëm fortësisht dhe i formës

$$f = g + \sum_K x_n \chi_{E_n} \quad \delta(K) = 1 \qquad (7)$$

ku $g : S \to X$ është st – i matshëm fortësisht dhe i kufizuar , $E_n$ nënbashkësi të matshme dy nga dy joprerëse nga $S$ , dhe $x_n \in X, n \in \mathbb{N}$ dhe $E_n$ të mund të zgjidhen të tilla që seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \mu(E_n)$ të jetë konvergjente e pakushtëzuar në X ,në këtë rast do të kemi

$$Ps - \int_E f d\mu = Ps - \int_E g d\mu + \sum_K x_n \mu(E \cap E_n) \qquad (8)$$

për çdo bashkësi të matshme $E \subset S$ dhe $\delta(K) = 1$

**Vërtetim**. Supozojmë se funksioni $f$ është st – Pettis i integrueshëm dhe është në formën (7). Përderisa $g$ është st-i kufizuar do të kemi që $g \in Bs \subset Ps$ , në saje të pohimit (3.9) do të marrim

$$h = f - g = \sum_K x_n \chi_{E_n} \in Ps$$

Në qoftë se $E \subset S$ është e matshme dhe meqë integrali i pacaktuar i st-Pettis-it është aditiv i numërueshëm duke zbastuar teoremën 3.24. do të kemi

$$\int_E h d\mu = \sum_K \int_{E \cap E_n} h d\mu = \sum_K x_n \mu(E \cap E_n) \ \delta(K) = 1 .$$

Duke bërë një rinumerim të serisë $\sum_K x_n \chi_{E_n}$ fitojmë të njëjtin funksion h , dmth

$$h = \sum_K x_n \chi_{E_n} = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(n)} \chi_{E_{\pi(n)}}$$

në lidhje me një korrespondencë një për një $\pi$ të K me $\mathbb{N}$. Gjithashtu

$$\int_E hd\mu = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{E\cap E_{\pi(n)}} hd\mu = \sum_{k=1}^{\infty} x_{\pi(n)}\mu(E\cap E_{\pi(n)}) \in X$$

që nga del se seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n)$ është seri konvergjente e pakushtëzuar.

Për të vërtetuar të anasjelltën, le të supozojmë se funksioni $g : S \to X$ është i kufizuar ($\|g(t)\|_X \le M$ për pothuaj të gjithë $t \in I$ ) kjo tregon se ai është i integrueshëm Bohner që nga del se $g \in Ps$ në saje të pohimit 3.9 . Tani mjafton të tregojmë se funksioni $h = \sum_K x_n\chi_{E_n}$ është st-Pettis i integrueshëm që do të provonte se seria $\sum_{n=1}^{\infty} x_n\mu(E_n)$ është seri konvergjente e pakushtëzuar në $X$ .

Pa humbur përgjithësinë mund të supozojmë për thjeshtësi se $\mu(E_n) > 0$ , $n \in \mathbb{N}$ dhe se $E \subset S$ është e matshme .

Atëherë, seria

$$\sum_K x_n\mu(E\cap E_n) = \sum_K x_n\mu(E_n)\frac{\mu(E\cap E_n)}{\mu(E_n)}$$

është konvergjente e pakushtëzuar në $X$ sepse

$$\frac{\mu(E\cap E_n)}{\mu(E_n)} \le 1 \text{ për çdo } n \in \mathbb{N} \quad \text{(shih teoremën 3.21)}$$

Në qoftë se $x^* \in X^*$ atëherë $\sum_K x^*(x_n)\mu(E\cap E_n)$ konvergjon në mënyrë të pakushtëzuar në $\mathbb{R}$.

Në saje të pohimit 3.22 do të kemi

$$\int_E \left|x^*(h)\right| d\mu = \sum_K x^*(x_n)\mu(E\cap E_n) = x^*\left(\sum_K x_n\mu(E\cap E_n)\right)$$

dhe $h \in Ps$, ndërkaq

$$Ps - \int_E hd\mu = \sum_K x_n\mu(E\cap E_n)$$

Kjo sjell që $f = g + h \in Ps$ dhe provon barazimin (8) .

**Përkufizim 3.27**. Seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ është*absolutisht konvergjente e dobët* në qoftë se konvergjon seria

$$\sum_{k=1}^{\infty} | x^*(x_k) < \infty$$

Për çdo $x^* \in X^*$

**Teoremë 3.28[20] teoremë 6.4.3](Bessaga-Pelczynski)**

Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente

(a) Hapësira e Banahut X nuk përmban nënhapësira izomorfike me $c_0$.
(b) Çdo seri absolutisht konvergjente e dobët në X është konvergjente e dobët
(c) Çdo seri absolutisht konvergjente e dobët është konvergjente e pakushtëzuar
(d) Çdo seri absolutisht konvergjente e dobët nëX(sipas normës) është konvergjente.

**Teoremë 3.29**

Në qoftë se $f : S \to X$ është st- Dunford i integrueshëm dhe st - i matshëm si dhe hapësira X nuk përmban nënhapësira izomorfike me $c_0$, atëherë funksioni $f$ është st-Pettis i integrueshëm në S.

**Vërtetim:** Me qenëse $f$ është st -i matshëm nga pohimi 2.13 marrim barazimin

$$f = g + \sum_K x_n \chi_{E_n} \quad \delta(K) = 1$$

ku $g : S \to X$ është st- i matshëm dhe i kufizuar, $E_n$ janë nënbashkësi të matshme dy nga dy joprerëse të $I$ , $x_n \in X$ , $n \in \mathbb{N}$.

Meqenëse intervali S është kompakt dhe funksioni $g : S \to X$ është st- Bochner i integrueshëm, në saje të pohimit 3.9ai është gjithashtu st- Pettis i integrueshëm.

St-integrueshmësia sipas Dunfordit e funksionit $\sum_K x_n \chi_{E_n}$ sjell st-integrueshmërinë sipas Bohnerit ( Lebesgue ) të funksionit $x^*(\sum_K x_n \chi_{E_n})$ për çdo $x^* \in X^*$ dhe do të kemi gjithashtu

$$x^*(\sum_K x_n \chi_{E_n}) = f = \sum_K x^*(x_n \chi_{E_n})$$

ku nënbashkësitë $E_n$ janë dy nga dy joprerëse .

Marrim kështu mosbarazimin

$\sum_K x^* \left|(x_n \mu(E_n))\right| < +\infty$ për çdo $x^* \in X^*$.

Kjo sjell që seria

$$\sum_K x_n \mu(E_n)$$

është absolutisht konvergjente dobët (shiko përkufizimin 3.27 , [30] p .286)

Përderisa hapësira $X$ nuk përmban një nënhapësirë izomorfike me $c_0$ , në saje të teoremës Besaga- Pelczynski ( 3.28. [30]p.287 ) seria $\sum_K (x_n \mu(E_n))$ konvergjon në mënyrë të pakushtëzuar . Nga del se funksioni $\sum_K x_n \chi_{E_n}$ është st- Pettis i integrueshëm. Në saje të pohimit 3.26.kemi që $f \in P_S$.

**Teoremë 3.30**

Le të jetë hapësira $X$ e cila nuk përmban ndonjë nënhapësirë izomorfike me $c_0$ dhe funksioni $f : S \to X$ është st – Dunford i integrueshëm. Në këto kushte, në qoftë se

$Ds - \int_E fd\mu \in X$ përe çdo interval $J \subset S$ , atëherë $f$ është st- Pettis i integrueshëm në $S$.

**Vërtetim** . Së pari të provojmë pohimin e mëposhtëm:

Në qoftë se $J_k \subset S, k \in \mathbb{N}$ është një varg intervalesh që nuk mbulojnë njëri tjetrin (pra, kanë brendësi dy nga dy joprerëse), atëherë $Ds - \int_E fd\mu \in X$ .

Vërtet, kemi

$$B_S - \int_{\bigcup J_k} x^*(f)d\mu = \sum_K (Bs - \int_{J_k} x^*(f)d\mu) = \sum_K \left| x^*(Ds - \int_{J_k} fd\mu) \right| < +\infty$$

për çdo $x^* \in X^*$. Kjo tregon se seria $\sum_K (Ds - \int_{J_k} fd\mu)$ është absolutisht konvergjente dobët .

Përderisa hapësira $X$ nuk përmban ndonjë nënhapësirë izomorfike me $c_0$, në saje të teoremës Bessaga – Pelczynski 3.28, del se seria $\sum_K (Ds-\int_{J_k} fd\mu)$ është seri konvergjente e pakushtëzuar tek ndonjë element $x_{\bigcup J_k} \in X$ dhe $Ds-\int_{\bigcup J_k} fd\mu = x_{\bigcup J_k} \in X$

Në saje të teoremës ( 1. 11) tek ( [34] ) çdo bashkësi e hapur në $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$ mund të shkruhet si bashkim i numërueshëm segmentesh që nuk mbulojnë dy nga dy njëri tjetrin . Në saje të pohimit të mësipërm do të marrim që $Ds-\int_G fd\mu \in X$ për çdo bashkësi të hapur $G \subset S$ .

Në qoftëse $F \subset S$ është bashkësi e mbyllur atëherë I \ F është e hapur ( në S ) dhe

$$\text{Ds-} \int_F fd\mu = (Ds-\int_S fd\mu) - (Ds-\int_{S|F} fd\mu) \in X$$

Vëmë në dukje se kur $Z \subset S$ dhe Z është e tillë që $\mu(Z)=0$ atëherë $Ds-\int_Z fd\mu = 0 \in X$ .

Le të jetë tani $E \subset S$ një bashkësi e matshme arbitrare . Në saje të teoremës ( 3. 28) tek ( [34] ) do të kemi $E = H \cup Z$ ku $\mu(Z)=0$ dhe H është e tipit $F_\sigma$, që do të thotë se $H = \bigcup_k H_k$ ku $H_k \subset S, k \in \mathbb{N}$ janë bashkësi të mbyllura.

Shënojmë $L_n = \bigcup_{k=1}^n H_k$ . Bashkësitë $L_n \subset S$ janë të mbyllura dhe $L_n \subset L_{n+1,} n \in \mathbb{N}$ . Bashkësia $L_0 = \varnothing,\ K_n = L_n \setminus L_{n+1}, n \in N$ . Shohim që $K_n \cap K_l = \varnothing$ për $n \neq l$ dhe $H = \bigcup_{n=1}^\infty K_n$ .

Vëmë në dukje se

$$Ds-\int_{k_n} fd\mu = Ds-\int_{L_n \setminus L_{n-1}} fd\mu = (Ds-\int_{L_n} fd\mu) - (Ds-\int_{L_{n-1}} fd\mu) \in X$$

Më tej

$$\int_H x^*(f)d\mu = \int_{\bigcup k_n} x^*(f)d\mu = \sum_n \int_{k_n} x^*(f)d\mu = \sum_n x^*(Ds-\int_{k_n} fd\mu)$$

dhe

$$\sum_n \left| x^*(Ds-\int_{k_n} fd\mu) \right| = \sum_n \left| Bs-\int_{K_n} x^*(f)d\mu \right| \leq$$
$$\sum_n Bs-\int_{K_n} \left| x^*(f) \right| d\mu = \int_{\bigcup K_n} \left| x^*(f) \right| d\mu = \int_H \left| x^*(f) \right| d\mu < +\infty$$

Për çdo $x^* \in X^*$ .

Në mënyrë të ngjashme si më sipër teorema e Bessaga- Pelczynski 3.28. ([30]) provon se seria $\sum_n (Ds - \int_{K_n} fd\mu)$ konvergjon në mënyrë të pakushtëzuar tek ndonjë element $x_H \in X$ dhe $Ds - \int_H fd\mu = x_H \in X$ .

që nga

$$Ds - \int_E fd\mu = Ds - \int_H fd\mu + Ds - \int_Z fd\mu \in X$$

**Teoremë 3.31.**

Ka vend përfshirja e mirëfilltë $Bs \subset Ps$ në përgjithësi për hapësirën e Banahut X , dmth , gjendet një hapësirë e Banahut $X$ dhe funksioni $f : S \to X$ i cili është st – Pettis i integrueshëm por jo st- Bohner i integrueshëm.

**Vërtetim**. Le të imitojmë shembullin [30] p.287 dhe ta modifikojmë në kushtet tona pohimin 3.31. Në qoftë se seria $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ është statistikisht konvergjente në mënyrë të pakushtëzuar atëherë ajo është absolutisht konvergjente dobët .

**Shembull 3.31**

Për $k \in \mathbb{N}$ shënojmë me

$$e_k = \begin{cases} (0 , \dots ,0 , k , 0 \dots ) & \text{për } k \text{ prim} \\ (0, \dots ,0 , 1 ,0 ,0 \dots ) & \text{për të tjerët} \end{cases}$$

Duket qartë se $e_k \in c_0$ p.p.gj.k, dhe $e_k$ ka element $\neq 0$ vetëm në pozicionin e k –të në varg.

Me qenëse për

$$\sum_{k-1}^{n} e_k = \begin{cases} (1,2,3,1 \dots n, 0, 0 \dots ) \text{ për } k \text{ prim} \\ ( 1.1.1 \dots .1 ,0.0 \dots ) \text{ për të tjerë} \end{cases}$$

për $n \in \mathbb{N}$ . Mund të shihet menjëherë se seria $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ nuk konvergjon në $c_0$ (sipas normës ) dhe gjithashtu seria $\sum_K e_k$ ka të njëjtën natyrë .

Supozojmë se $x^* \in {c_0}^* = l_1$ , dmth, $x^* = (\alpha_{1,}\alpha_2 ... \alpha_k ...)$ , $\alpha_k \in \mathbb{R}$ për $k \in \mathbb{N}$ dhe $st - \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k| = \|x^*\|_{{C_0}^*} < +\infty$ ose $\sum_K |\alpha_K| < +\infty$ . Duke fiksuar $x^*(e_k) = \alpha_k$ për k të ndryshëm nga numrat prim

$$\sum_K |x^*(e_k)| = \sum_K |\alpha_k| < +\infty$$

Dmth seria $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ është statistikisht konvergjente dobët .

Përderisa $x^*\left(\sum_K e_k\right) = \sum_K \alpha_k$ për $k \in K$ shohim se ky varg konvergjon tek $\sum_K \alpha_k = x^*(y)$ , ku y=(0 0 1 0 1 0 1 1 ... ) . Koordinatat janë zero vetën në vendet me indeks prim.

Ky varg nuk i përket hapësirës $c_0$. Kjo do të thotë se në qoftë se seria $\sum_{k=1}^{\infty} e_k$ do të ishte statistikisht konvergjente dobët tek shuma e saj y. Vëmë në dukje se $c_0$ nuk përmban element të tillë.

Përkufizimi 3.5 tregon se një funksion st-Pettis i integrueshëm është st- Dunford i integrueshëm. Teorema 3.24 provon që pohimi d) tek Teorema 3.3.ka vend. Si rezultat në këtë rrugë kemi arritur në rezultatin e mëposhtëm:

**Theorem 2.33**

Në qoftë se funksioni $f : S \to X$ është st-Pettis i integrueshëm, atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente :

a) Operatori $T : X^* \to L_1$ i përcaktuar nga barazimi $T(x^*) = x^*(f)$ për $x^* \in X^*$ është kompakt i dobët .

b) Operator i konjuguar $T^* : L_\infty \to X^{**}$ tek T është kompakt i dobët .

c) Bashkësia $\{x^*(f); x^* \in B(X^*)\} \subset L_1$ është uniformisht e integrueshme , dmth

$\lim_{\mu(E)\to 0} \int_E X^*(f) = 0$uniformisht për $x^* \in B(X^*)$

d) st-integrali i pacaktuar i Pettis $\upsilon(E)$ i dhënë nga barazimi $\upsilon(E) = Ps - \int_E f d\mu$ për bashkësinë e matshme -it $E \subset S$ , është aditiv i numërueshme, dmth , në qoftë se $E_n \subset S$ , $n \in \mathbb{N}$ janë dy nga dy joprerëse atëherë

$$\upsilon(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(\mathrm{E}_n)$$

në $X$ ( seria $\sum_{n=1}^{\infty} \upsilon(\mathrm{E}_n)$ është konvergjente sipas normës në X. )

Vëmë në dukje se pohimi c) nga teorema 3.32 garanton se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $\eta > 0$ të tillë që në qoftë se $E \subset S$ është e matshme $\mu(E) < \eta$ atëherë $\|\upsilon(E)\|_X \leq \varepsilon$ .

Në lidhje me Teoremën 3.33 lind në mënyrë të natyrshme pyetja :

A është e vërtetë se në qoftë se funksioni $f : S \to X$ është st-Dunford i integrueshëm dhe njëri nga pohimet ekuivalente a) – d) të pohimit 3.3.plotësohet atëherë funksioni f është st-Pettis i integrueshëm ?
Në rastin klasik kjo pyetje ka marrë përgjigjje negative në artikullin e R. Huff[30 ]Pohimi 3]. Në rastin e integraleve të Dunfordit dhe Pettis-it në trajtën e integralit statistikor problemi mbetet i hapur

## REFERENCAT


[1] Bhardwaj V., Bala I., On Weakly Statistical Convergence, International Journal of Mathematics and Mathematical
Sciences, Volume 2007, Article ID 38530, 9 pages

[2] Bochner, S., (1933), "Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vectorraumes sind", Fundamenta Mathematicae 20: 262–276

[3]Burgin M., Duman, O., Statistical Convergence and Convergence in Statistics, internet article

[4]Connor, J., Ganichev, M., and Kadets, V., "A characterization of Banach spaces ëith separable duals via weak statistical convergence," *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 244,no. 1, pp. 251–261, 1989.

[5]Connor J., Kline, J., On statistical limit points and consistency of statistical convergence. J. Math. Appl. 197(1996) 393-399.

[6]Connor J., Swardson, M.A., Strong integral summability and Stone- Chech compactification of half-line, Pacific J. Math. 157(1993) 201-224.

[7]Çakalli H., A study on statistical convergence. Functional analysis, approximation and computation 1:2(2009),19-24

[8]Caushi, A., Tato, A., A statistical integral of Bohner type on Banach space, Hikari Ltd Appl. Math. Sci., Vol. 6, 2012,
no. 137-140, 6857-6870.

[9]Çaushi, A., Tato, A.,Pettis Integration via Statistical Convergence**,** Journal of Advances in Mathematics Vol 3, No 2.p.159-167

[10]Diestel, J. and Uhl J. J. Jr., Vector measure, Math.Surveys no. 15. Providence (1977)

[11]Duman, O., Khan, M.K., Orhan, C., A-statsistical convergenence of approximating operators, Math. Inequal. Appl. 6 (2003) 689-699.

[12] Dunford, N., Schwartz,J.T., Linear operators I., Interscience Publishers, New Yoork, London 1958.

[13]Fast, H., "Sur la convergence statistique," *Colloquium Mathematicum*, vol. 2, pp. 241–244, 1951.

[14]Fridy, A., "On statistical convergence," *Analysis*, vol. 5, no. 4, pp. 301–313, 1985.

[15] Fridy, J. A.,“Statistical limit points,” *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 118, no. 4, pp. 1187–1192, 1993.

[16]Fridy, J. A., Orhan, C., Statistical limit superior and limit inferior, Proc. Amer. Math. Soc., 125, nr. 12(1997) 3625-3631.

[17]Geitz, R. F., Pettis integration, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol.82, Number 1, May 1981

[18]Gökhan A., Güngör M., On pointwise statistical convergence, Indian Journal of pure and application mathematics, 33(9) : 1379-1384, 2002.

[19]James, R.C., Weakly compactness and reflexivity, Israel J. Math., 2 (1964), 101-119.

[20]Kadets, M.I., Kadets V.M., Series in Banach space; Conditional and Unconditional convergence, Birkhaeuser Verlang, Basel 1997.

[21] Kadec′ M. J., *On strong and weak convergence*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **122** (1958), 13–16 (Russian)

[22]Maddox, I.J., Statistical converegence in a locally convex space, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 104 (1988) 141-145

[23]Mazur, S Uber konvexe Mengen in linearen normierten Raeumen, Studia Math., 4(1933),

70-84.

[24]Miller, H. I., A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Trans. Amer. Math. Soc. 347(1995) 1811-1819.

[25]Musial, K. Pettis integration, Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II, Suplimento No. 10, pp.133-142.
(1985)

[26]Neveu J., Bases mathématiques du calcul des probabilities, Masson et Cie, Paris (1964)

[27]Pugachev, V.S., Lekcii po funkcionalnomu analizu, Maj, Moskva,1996

[28]Salat T., On statistically convergent sequences of real numbers. Math.Slovaca, 30.No.2(1980), 139-150

[29] Schoenberg, I.J., “The integrability of certain functions and related summability methods,” *The American Mathematical Monthly*, vol. 66, no. 5, pp. 361–375, 1959.

[30]Schwabik S., Guoju, Y., Topics in Banach space integration, Series in Analysis vol. 10. World Scientific Publishing Co. Singapore 2005.

[31]Steinhaus,  H.,“Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique,” *Colloquium Mathematicum*, vol. 2, pp. 73–74, 1951

[32]Talegrand, M., Pettis integral and Measure Theory, Memoires of the AMS 307, 1984

[33]Tripathy, B.C.,On statistically convergent sequence, Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, vol.90,nr.4.pp.259-262,1998

[34]Wheeden, R. L., Zygmund A., Measure and Integral, Marcel Dekker Inc., New York, 1977

[35]Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1979.