REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

KONTRIBUT MBI DISA KLASA OPERATORËSH NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

PUNIM I DOKTORATURËS

Paraqitur nga
Mr.sc. Krutan Rasimi

Udhëheqës shkencor
Prof. Asoc. Luigj Gjoka
Prof. Dr. Muhib Lohaj

Tiranë, 2015

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

KONTRIBUT MBI DISA KLASA OPERATORËSH NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

DISERTACION PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE

"DOKTOR"

Miratohet:

Paraqitur nga | Udhëheqës shkencor

Mr.sc. Krutan Rasimi | Prof. Asoc. Luigj Gjoka
Prof. Dr. Muhib Lohaj

Tiranë, 2015

REPUBLIKA E SHQIPËRISË

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS

FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE

DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

i paraqitur nga:

Krutan Rasimi

Udhëhequr nga:

Prof. Asoc. Luigj Gjoka
Prof. Dr. Muhib Lohaj

Për marrjen e gradës shkencore

“DOKTOR”

Tema: **KONTRIBUT MBI DISA KLASA OPERATORËSH NË HAPËSIRAT E HILBERTIT**

Mbrohet me datë 28/ 05 / 2015 para jurisë:

1. Prof. Asoc. Ligor Nikolla (Kryetar)
2. Prof. Dr. Kristaq Filipi Anëtar (oponent)
3. Prof. Asoc. Lulëzim Hanelli Anëtar (oponent)
4. Prof. Dr. Xhezair Teliti (Anëtar)
5. Prof. Dr. Fatmir Hoxha (Anëtar)

Tiranë, 2015

MIRËNJOHJE

Në fillim do të dëshiroja të shpreh përzemërsisht mirënjohjen dhe falënderimet e mia të veçanta udhëheqësve shkencor Prof. Asoc. Luigj Gjoka dhe Prof. Dr. Muhib Lohaj, për udhëheqjen dhe mbështetjen e tyre të pakursyer gjatë gjithë kohës së realizimit të këtij disertacioni.

U jam shumë mirënjohës të gjithë pedagogëve dhe strukturave të Fakultetit të Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, për sjelljen e tyre miqësore, me çka më ofruan një ndihmesë të çmuar për mbarëvajtjen e këtij disertacioni.

Një falënderim i dedikoj edhe gjithë kolegëve të mi të Departamentit të Matematikës të Universitetit Shtetëror të Tetovës.

Me theks të veçantë një falënderoj komisionin e nderuar të mbrojtjes së këtij disertacioni.

Po ashtu falënderoj gjithë ata që në çfarëdo mënyre kanë kontribuuar në përgatitjen e këtij disertacioni e që nuk janë përmendur më sipër.

Në fund, por jo më pak e rëndësishme, falënderoj familjen time për mirëkuptimin, përkrahjen morale, mbështetjen dhe durimin që treguan gjatë realizimit të këtij disertacioni.

PËRMBAJTJA

HYRJE

Teoria e operatorëve është teori relativisht e re e zhvilluar në kuadër të analizës funksionale, e cila si disiplinë e veçantë u zhvillua nga fundi i shekullit XIX dhe fillimi i shekullit XX. Në fillim të shekullit XX, u shfaqën një numër punimesh nga matematikanë të shquar të kohës që vendosën themelet dhe dinamikën e kësaj disipline. Shkurt, madje duke lënë anash një numër kontributesh dhe matematikanë që pa të drejtë nuk do ti përmendim këtu, po japim një historik të shkurtër të kësaj disipline. Mund të përmendim Fredholmin (Ivar Fredholm) me teorinë e tij mbi ekuacionet diferenciale me çka ofroi një qasje ndryshme mbi problemin Dirihleut (Johann Dirichlet) për gjetjen e zgjidhjes së një ekuacioni diferencial parcial. Në vitin 1902 Lebegu (Henri Lebesgue) prezantoi një përkufizim të ri të integralit duke zgjeruar klasën e funksioneve të integrueshme përtej atyre që ishin të integrueshëm sipas Rimanit (Bernhard Riemann) dhe njëkohësisht përkufizoi një hapësirë funksionesh, që për nder të tij sot e shënojmë me L^p (klasën e funksioneve të integrueshme sipas Lebegut). Gati në të njëjtën kohë, Hilberti (David Hilbert) me një numër punimesh vendosi themelet e teorisë spektrale. Koncepti mbi algjebrën e operatorëve u fut nga Risi (Frigyes Riesz) në punimet e tij të vitit 1913 ku, ai, studion algjebrën e operatorëve të kufizuar në hapësirën e Hilbertit l^2. Detyrimisht duhet përmendur fon Nojmanin (John von Neumann), i cili përkufizoi një numër të madh konceptesh nga teoria e operatorëve dhe i cili kuptoi drejtë se përshkrimi i fizikës moderne, asaj kuantike, kalon përmes operatorëve të vetë-adjunguar, hermitian, në hapësirat e Hilbertit. Dhe, me të vërtetë, një përshkrim i tillë i mekanikës kuantike përmes operatorëve edhe u arrit nga ana e Hajzenbergut (Werner Heisenberg) në vitin 1926. Përpjekja e parë më serioze për sistematizimin e rezultateve të analizës funksionale në përgjithësi dhe teorisë së operatorëve në veçanti, bashkë me përkufizimin e një numri të objekteve të reja matematike, u bë nga ana e matematikanit polak Banah (Stefan Banach) në punimin e tij “Teoria e operatorëve linearë” vitin 1932. Kontributi i tij është i madh. Po përmendim këtu vetëm disa prej tyre, siç janë teorema mbi pikën fikse, teorema mbi grafikun e mbyllur, atë për konvergjencën e dobët.

Në këtë punim disertacioni ne përqendrohemi në studimin e një aspekti të veçantë të klasave të ndryshme të operatorëve në hapësirat e Hilbertit, atë të ndikimit të vetisë komutative ndaj problemeve që kanë të bëjnë me mbylltësinë e klasave të operatorëve përkatës. Operatorët kyç që përcjellin disertacionin janë ata të vetë-adjunguar, përkatësisht operatorët normal.

Disertacioni përbëhet nga katër krerë.

Në kreun e parë kemi dhënë konceptet bazike të rëndësishme për mbështetjen e ndërtimit të mëtejshëm të materies së disertacionit. Përfshijmë këtu hapësirat e Hilbertit, Banahut, konceptet themelore mbi operatorët e kufizuar dhe ato të pakufizuar në hapësirën e Hilbertit. Këtu përmendim rolin kyç edhe të teoremës Fuglede-Putnam e cila mundëson kapërcimin e problemeve që shfaqen edhe në studimin e klasave më familjare të operatorëve sikurse është ajo e operatorëve normal.

Në kreun e dytë kemi studiuar disa klasa operatorësh dhe vetitë komutuese që mundësojnë mbylltësinë e një klase operatorësh ndaj kompozimit ose mbledhjes së tyre. Klasat që kemi studiuar përmes vetisë komutuese janë ajo e operatorëve hipernormal, kuazi-hipernormal, izometrik, paranormal si edhe disa klasa më pak të njohura, më pak familjare si ajo e operatorëve n-normal, ata të klasës (Q) me fuqi n. Kemi dhënë edhe rezultate të reja krahas modifikimit të disa rezultateve tashmë të njohura.

Vetia komutuese e operatorëve ka pasoja të mëdha, andaj është studiuar edhe komutativiteti i operatorëve, përkatësisht janë studiuar çiftet e operatorëve komutues deri në një faktor, pra operatorët λ-komutues. Studimi i kësaj vetie është në esencën e kreut të tretë. Rëndësia e shqyrtimit të ekuacioneve operatoriale të natyrës $AB = \lambda BA$ nuk ka vetëm benefit të pastër matematik, gjithashtu rëndësi dhe zbatim ka edhe në problemet e mekanikës kuantike. Këtu krahas zbërthimit në detaje të disa rezultateve të njohura kemi dhënë një numër rezultatesh të reja si edhe kemi përkufizuar një klasë të re të operatorëve që i kemi quajtur operatorët (λ, μ) – komutues.

Kreu i katërt është po ashtu i lidhur me vetinë e operatorëve komutues, respektivisht jokomutues e që kanë të bëjnë me principin e papërcaktueshmërisë së Heisenberg-ut. Është evidente se shumica e fenomeneve natyrore nuk mund të përshkruhen me anë të operatorëve të kufizuar e as me algjebrat komutative, prandaj këtu kemi shqyrtuar një zbatim të operatorëve të pakufizuar edhe atë kemi bërë një tejkalim të interpretimit të principeve të papërcaktueshmërisë duke mos u kufizuar vetëm në operatorët e vetë-adjunguar. Pra, zgjerimi i principeve të papërcaktueshmërisë në klasa tjera operatorësh, si ajo e operatorëve normal dhe simetrik e madje edhe e operatorëve hipernormal përbëjnë thelbin e këtij kreu.

KREU 1

1. KONCEPTE BAZIKE NGA TEORIA E OPERATORËVE NË HAPËSIRAT E HILBERTIT

I konsiderojmë të njohura konceptet dhe rezultatet më të rëndësishme nga teoria e hapësirave të normuara dhe atyre të normuara të plota, ndryshe të njohura si hapësira të Banach-ut. Në mesin e hapësirave të Banach-ut një klasë hapësirash të plota luajnë një rol të jashtëzakonshëm dhe ato i njohim si hapësira të Hilbertit. Hapësirat e tilla na mundësojnë të japim strukturën e plotë gjeometrike të hapësirave vektoriale. Këto hapësira vektoriale në vete i furnizojmë me produktin skalar, produktin e brendshëm dhe shpesh njihen me emrin edhe hapësira unitare krahas emërtimit si hapësira vektoriale me produkt skalar. Ky kre kryesisht bazohet në monografitë [5], [10] dhe [11].

1.1. Vetitë themelore të operatorëve të kufizuar në hapësirën e Hilbertit

Përkufizim 1.1.1. *Pasqyrimi T nga hapësira e Hilbertit $\mathcal{H}$ në $\mathcal{H}$ thuhet se është operator linear nëse T plotëson vetitë (i) dhe (ii) më poshtë:*

(i) Aditiviteti: $T(x+y)=T(x)+T(y)$ *për çdo* $x, y \in \mathcal{H}$.

(ii) Homogjeniteti: $T(\alpha x)=\alpha T(x)$ *për çdo* $x \in \mathcal{H}$ *dhe numrin kompleks* α.

Përkufizim 1.1.2. *Operatori linear T në hapësirën e Hilbertit thuhet se është i kufizuar nëse ekziston numri real $c>0$ i tillë që $\|Tx\| \le c\|x\|$ për gjithë $x \in \mathcal{H}$. $\|T\|$ është përkufizuar me*

$$\|T\| = \inf\left\{c>0 : \|Tx\| \le c\|x\| \text{ për gjithë } x \in \mathcal{H}\right\}.$$

$\|T\|$ quhet normë operatoriale e T.

Përkufizim 1.1.3. *$B(\mathcal{H})$ nënkupton bashkësinë e gjithë operatorëve linear të kufizuar në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$.*

TEOREMË 1.1.1. ***Janë ekuivalente pohimet e mëposhtme***

(i) **Për çdo operator linear të kufizuar T, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| = 1\}$.**

(ii) **Për çdo operator linear të kufizuar T, $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : \|x\| \le 1\}$.**

(iii) **Për çdo operator linear të kufizuar T, $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y\rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\}$.**

TEOREMË 1.1.2. ***Për çdo operator linear të kufizuar T në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$, pohimet e mëposhtme janë reciprokisht ekuivalente:***

(i) T ***është i kufizuar.***

(ii) T ***është i vazhdueshëm në gjithë hapësirën $\mathcal{H}$.***

(iii) T ***është i vazhdueshëm në ndonjë pikë $x_0 \in \mathcal{H}$.***

TEOREMË 1.1.3. ***Le të jenë S dhe T dy operatorë linear të kufizuar në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$. Atëherë, kanë vend vetitë e mëposhtme:***

(i) $\|\alpha T\| \le |\alpha| \|T\|$ ***për çdo $\alpha \in \mathbb{C}$.***

(ii) $\|S + T\| \le \|S\| + \|T\|$.

(iii) $\|ST\| \le \|S\| \|T\|$.

Le të jetë T mbi një hapësirë të çfarëdoshme të Hilbertit. Për çdo $y \in \mathcal{H}$ të fiksuar, shqyrtojmë funksionin f të përkufizuar me $f(x) = \langle Tx, y\rangle$ mbi $\mathcal{H}$. Në pajtueshmëri me teoremën e Riesz-it, ekziston dhe është i vetëm vektori $u \in \mathcal{H}$ i tillë që $f(x) = \langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle$ për gjithë $x \in \mathcal{H}$. Në këtë mënyrë mund të përkufizojmë operatorin T^*, operatorin e adjunguar të operatorit T me $\langle Tx, y\rangle = \langle x, u\rangle = \langle x, T^* y\rangle$ për $x, y \in \mathcal{H}$.

TEOREMË 1.1.4. ***Le të jetë T një operator në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$. Atëherë T^* është po ashtu operator në $\mathcal{H}$ dhe kanë vend vetitë e mëposhtme:***

(i) $\|T^*\| = \|T\|$.

(ii) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$.

(iii) $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$ ***për çdo*** $\alpha \in \mathbb{C}$.

(iv) $(T^*)^* = T$.

(v) $(ST)^* = T^* S^*$.

RRJEDHIM 1.1.1**.** ***Le të jetë*** T ***operator linear. Atëherë***

(i) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

(ii) $T^*T = 0$ ***nëse dhe vetëm nëse*** $T = 0$.

Përkufizim 1.1.4. *Forma bilineare* $f(x,y)$ *mbi hapësirën e Hilbertit* $\mathcal{X}$ *përkufizohet me sa vijon:* $f(x,y) = g_y(x) = h_x(y)$ *është funksion kompleks në lidhje me* x *dhe* y*, i tillë që* $g_y(x)$ *është funksional linear në lidhje me* x*, kurse* $h_x(y)$ *është funksional linear i konjuguar në lidhje me* y*, pra, vlen* $h_x(\alpha y) = \overline{\alpha} h_x(y)$ *për çdo* $\alpha \in \mathbb{C}$.

TEOREMË 1.1.5. ***Nëse*** $f(x,y)$ ***është një formë bilineare në hapësirën komplekse*** $\mathcal{X}$ ***, atëherë***

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\{f(x+y,x+y) - f(x-y,x-y)\} + \frac{1}{4}i\{f(x+iy,x+iy) - f(x-iy,x-iy)\}$$

vlen për çdo $x, y \in \mathcal{X}$.

TEOREMË 1.1.6. ***Nëse*** T ***është operator në hapësirën e Hilbertit*** $\mathcal{H}$ ***, atëherë***

$$(Tx,y) = \frac{1}{4}\{T(x+y,x+y) - T(x-y,x-y)\} + \frac{1}{4}i\{T(x+iy,x+iy) - Tf(x-iy,x-iy)\}$$

vlen për çdo $x, y \in \mathcal{X}$.

TEOREMË 1.1.7. ***Nëse*** T ***është operator në hapësirën e Hilbertit*** $\mathcal{H}$ ***mbi bashkësinë*** $\mathbb{C}$***, atëherë vetitë (i), (ii) dhe (iii) të mëposhtme, janë reciprokisht ekuivalente:***

(i) $T = 0$**.**

(ii) $\langle Tx, x \rangle = 0$ ***për gjithë*** $x \in \mathcal{H}$**.**

(iii) $\langle Tx, y \rangle = 0$ ***për gjithë*** $x, y \in \mathcal{H}$**.**

Përkufizim 1.1.5. Le të jetë T operator në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$, atëherë

(i) *Operatori është i vetë-adjunguar nëse* $T^* = T$.

(ii) *Operatori është normal nëse* $T^*T = TT^*$.

(iii) *Operatori është kuazinormal nëse* $T(T^*T) = (T^*T)T$.

(iv) *Operatori është projeksion nëse* $T^2 = T$ *dhe* $T^* = T$.

(v) *Operatori është unitar nëse* $T^*T = TT^* = I$.

(vi) *Operatori është izometri nëse* $T^*T = I$.

(vii) *Operatori është pozitiv (shënohet* $T \geq 0$*) nëse* $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ *për çdo* $x \in \mathcal{H}$.

(viii) *Operatori është hipernormal nëse* $T^*T \geq TT^*$, *ku* $A \geq B$ *nënkupton* $A - B \geq 0$ *për operatorët e vetë-adjunguar* A *dhe* B.

Nga përkufizimi kemi këtë

TEOREMË 1.1.8. ***Nëse*** T ***është operator në hapësirën e Hilbertit*** $\mathcal{H}$ ***mbi bashkësinë*** $\mathbb{C}$***, atëherë vlejnë pohimet :***

(i) T ***është operator normal nëse dhe vetëm nëse*** $\|Tx\| = \|T^*x\|$ ***për çdo*** $x \in \mathcal{H}$**.**

(ii) T ***është operator i vetë-adjunguar nëse dhe vetëm nëse*** $\langle Tx, x \rangle$ ***është numër real për çdo*** $x \in \mathcal{H}$**.**

(iii) T ***është operator unitar nëse dhe vetëm nëse*** $\|Tx\| = \|T^*x\| = \|x\|$ ***për çdo*** $x \in \mathcal{H}$**.**

(iv) T ***është operator hipernormal nëse dhe vetëm nëse*** $\|Tx\| \geq \|T^*x\|$ ***për çdo*** $x \in \mathcal{H}$.

Më poshtë japim edhe këto klasa operatorësh në hapësirat e Hilbertit

Përkufizim 1.1.6. *Le të jetë* T *operator në hapësirën e Hilbertit* $\mathcal{H}$*, atëherë*

1. *Paranormal nëse* $\| T^2(x) \| \geq \| T(x) \|^2 \; \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$*;*

2. ** Paranormal nëse* $\| T^2(x) \| \geq \| T^*(x) \|^2 \; \left(x \in H, \|x\| = 1\right)$*;*

3. *Kuazihipernormal, nëse* $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2$ *;*

4. n *- normal nëse vlen* $T^nT^* = T^*T^n$ *;*

5. *Kuazinormal me fuqi* n *nëse* $T^n(T^*T) = (T^*T)T^n$ *;*

6. *Operator i klasës (Q) nëse* $T^{*2}T^2 = (T^*T)^2$ *;*

7. *Operator i klasës (Q) me fuqi* n *nëse* $T^{*2}T^{2n} = (T^*T^n)^2$.

TEOREMË 1.1.9. ***Nëse*** T ***është operator, ekzistojnë operatorët e vetë-adjunguar*** A ***dhe*** B ***të tillë që*** $T = A + iB$**. *Operatori*** $A = \frac{1}{2}\left(T + T^*\right)$ ***dhe*** $B = \frac{1}{2i}(T - T^*)$**.**

Përkufizim 1.1.7. $R(T)$, *rangu i operatorit* T *është përkufizuar me* $R(T) = \{Tx : x \in \mathcal{H}\}$, *kurse* $N(T)$, *bërthama e operatorit* T, *është përkufizuar me* $N(T) = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$.

Përkufizimi 1.1.8. *Le të jetë* A *një operator në hapësirën e Hilbertit* $\mathcal{H}$. *Shënojmë me* (A) *bashkësinë* $(A) = \{B : AB = BA,$ ku B është operator në $\mathcal{H}\}$.

TEOREMË 1.1.10. (Rrënja katrore e operatorit pozitiv). ***Për çdo operator pozitiv*** A**, *ekziston dhe është i vetëm operatori pozitiv*** S ***i tillë që*** $S^2 = A$ ***dhe*** $(S) \supset (A)$**. *Shënohet me*** $S = A^{1/2}$**.**

RRJEDHIM 1.1.3. ***Nëse*** $A \geq 0$ ***dhe*** $B \geq 0$ ***ashtu që*** A ***të komutojë me*** B**, *atëherë*** $AB \geq 0$**.**

Përkufizim 1.1.9. *Kur operatori* T *komuton me* S *dhe* S^*, *atëherë themi se* T *komuton dyfish me* S.

Formulojmë këtu njërin nga rezultatet më të njohur nga teoria e operatorëve

TEOREMË (**Fuglede-Putnam**). ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***operatorë normal. Nëse*** $AX = XB$ ***vlen për ndonjë operator*** X **, *atëherë vlen*** $A^*X = XB^*$**.**

Vlen të theksohet se Teorema Fuglede është dhënë për operatorët që e pakufizuar.

Përkufizimi 1.1.3. *Le të jetë* $T \in B(\mathcal{H})$. *Spektri i operatorit* T *shënohet me* $\sigma(T)$ *dhe është bashkësia e të gjithë numrave kompleksë* λ *të tillë që* $T-\lambda I$ *nuk është invertibil në* $B(\mathcal{H})$. *Pra:*

$$\sigma(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \notin B(\mathcal{H})^{-1} \right\}$$

Komplementi i bashkësisë $\sigma(T)$ *shënohet me* $\rho(T)$ *dhe paraqet bashkësinë rezolvente të operatorit* T. *Pra,*

$$\rho(T) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda I \in B(\mathcal{H})^{-1} \right\} = \mathbb{C} \setminus \sigma(T).$$

TEOREMË 1.1.1. ***Për çdo operator*** $T \in B(\mathcal{H})$, ***spektri i operatorit*** T ***është nënbashkësi joboshe dhe kompakte në*** $\mathbb{C}$.

1.2. Operatorët linear të pakufizuar (Operatori i adjunguar, simetrik dhe operatorët e vetë-adjunguar)

Një fakt i pamohueshëm është se shumica e fenomeneve natyrore, sikurse janë ato në fizikë, mund dhe shprehen në shumicën dërrmuese të rasteve përmes operatorëve të pakufizuar. Këtu në pika të shkurtra do të japim vetëm disa veti themelore të operatorëve të pakufizuar të dhënë në një nënhapësirë të dendur të hapësirës së Hilbertit. Le të rikujtojmë se çka quajmë operator të kufizuar.

Përkufizim 1.2.1 *Le të jenë* X, Y *dy hapësira të normuara dhe* $T : \mathcal{D}(T) \subset X \to Y$ *operator linear. Operatori* T *quhet i kufizuar nëse ekziston numri real* $c > 0$ *i tillë që*

$$\|Tx\|_Y \le c\|x\|_X, \forall x \in \mathcal{D}(T)$$

Teorema e mëposhtme sugjeron se një operator i përgjithshëm i pakufizuar mund të jetë i përkufizuar vetëm në një nënbashkësi të dendur të hapësirës së Hilbertit $\mathcal{H}$.

TEOREMË 1.2.1 (**Hellinger-Toplitz**) ***Nëse një operator linear*** T ***është përkufizuar në gjithë hapësirën e Hilbertit*** $\mathcal{H}$ ***dhe plotëson***

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \forall x, y \in \mathcal{H}$$

atëherë T ***është i kufizuar.***

Përkufizim 1.3.2. *Le të jenë* T, S *dy operatorë të përkufizuar dendësisht në* $\mathcal{H}$*. Atëherë* T *është zgjerim i* S*, simbolikisht shkruajmë*

$$S \subset T$$

nëse $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$ *dhe* $S = T\big|_{\mathcal{D}(S)}$.

Japim përkufizimin për operatorin e adjunguar në rastin e operatorëve të pakufizuar.

Përkufizim 1.2.3 *Le të jetë* $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ *operator i pakufizuar, dendësisht i përkufizuar në hapësirën komplekse të Hilbertit. Atëherë operator i adjunguar i tij* $T^* : \mathcal{D}(T^*) \to \mathcal{H}$ *është përkufizuar me sa vijon:*

$\mathcal{D}(T^*) = \{ y \in \mathcal{H} : \exists y^* \in \mathcal{H}$ që plotëson
$\langle Tx, y\rangle = \langle x, y^*\rangle, \forall x \in \mathcal{D}(T)$ dhe y^* në mënyrë të vetme është përkufizuar me $y^* = T^* y\}$

TEOREMË 1.2.2 ***Le të jenë*** $S : \mathcal{D}(S) \to \mathcal{H}$ ***dhe*** $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ ***operatorë linear dendësisht të përkufizuar në hapësirën komplekse të Hilbertit*** $\mathcal{H}$***. Atëherë, nëse***

$$S \subset T \Rightarrow T^* \subset S^*.$$

Përkufizim 1.2.4 *Le të jetë* $T : \mathcal{D}(T) \to \mathcal{H}$ *operator linear dendësisht i përkufizuar në hapësirën e Hilbertit* $\mathcal{H}$*.* T *quhet operator linear simetrik nëse*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle, \forall x, y \in \mathcal{D}(T)$$

TEOREMË 1.2.3 ***Operatori*** T***, dendësisht i përkufizuar në hapësirën e Hilbertit*** $\mathcal{H}$***, është simetrik atëherë dhe vetëm atëherë kur*** $T \subset T^*$***.***

Përkufizim 1.2.5 *Operatori* T*, dendësisht i përkufizuar në hapësirën e Hilbertit* $\mathcal{H}$*, quhet i vetë-adjunguar nëse* $T = T^*$.

Vërejmë se çdo operator linear i vetë-adjunguar është operator simetrik. Pra, për operatorin linear në hapësirën e Hilbertit, $\mathcal{D}(T) = \mathcal{H}$, koncepti i simetrisë dhe vetë-adjunguar janë identik në këtë rast.

Shembull i operatorit të pakufizuar dhe të vetë-adjunguar mund të shërbej operatori i pozicionit $X:\mathscr{D}(X)\to L^2(\mathbb{R},dx)$ i dhënë me $(Xf)(x)=xf(x)$ dhe me domen $\mathscr{D}(X)=\{\psi\in L^2(\mathbb{R},dx): X\psi\in L^2(\mathbb{R},dx)\}$. Edhe operatori i derivimit $P:\mathscr{D}(P)\subset L^2(\mathbb{R},dx)\to L^2(\mathbb{R},dx)$ i dhënë me $(P\psi)(x)=-i\hbar\frac{d\psi(x)}{dx}$ dhe domen $\mathscr{D}(P)=\{\psi, P\psi\in L^2(\mathbb{R},dx):\psi$ absolutisht i vazhdueshëm në çdo interval kompakt në $\mathbb{R}\}$ është një operator i tillë, pra i pakufizuar dhe i vetë-adjunguar.

KREU 2

2. KLASA OPERATORËSH NË HAPËSIRAT E HILBERTIT. KUSHTET E KOMUTATIVITETIT DHE NDIKIMI NË SHUMËN DHE PRODUKTIN ALGJEBRIK TË OPERATORËVE TË KLASAVE TË NDRYSHME

Në kreun në vijim do të shqyrtojmë disa klasa operatorësh në hapësirat e Hilbertit dhe në veçanti do të shqyrtojmë ndikimin që ka vetia komutative e kompozimit të operatorëve ndaj mbylltësisë, respektivisht mos mbylltësisë së klasave të veçanta në lidhje me produktin dhe shumën e operatorëve nga e njëjta klasë, si dhe impaktin që ka mbi produktin e operatorëve të marrë nga klasa të ndryshme. Shqyrtimin do ta fillojmë me klasën e operatorëve hipernormal si zgjerim të klasës së operatorëve normal. Nga shumë aspekte klasën e operatorëve normal e marrim si klasë mirë të kuptueshme dhe të njohur përgjithësisht. Duke mos dashur të futemi më thellë, vetëm do të theksojmë se problemet më të spikatura që kanë të bëjnë me teorinë e operatorëve në përgjithësi, siç është problemi i ekzistencës së nënhapësirave invariante, për operatorët normal kanë gjetur zgjidhje. Edhe pse zbutja e kushtit për të qenë operator normal, mund të duket "naive", duke marrë në konsideratë largpamësinë e matematikanit që ka përkufizuar klasën e operatorëve hipernormal, Pol Halmosh, kjo flet shumë dhe medoemos ka pasur dhe akoma ka pasoja të mëdha në teorinë e operatorëve. Edhe pse përkufizimi i klasës së operatorëve hipernormal dhe i atyre subnormal, duke i thjeshtë, këto përkufizime kanë hapur rrugën e përkufizimit të një numri të konsiderueshëm klasash të cilat ku më shumë, e ku më pak, janë të furnizuara me veti interesante për hulumtim. Arsyet se pse më shumë është shqyrtuar klasa e operatorëve që kënaqin kushtin $A^*A \geq AA^*$ (operatorët hipernormal) në vend të atyre që kënaqin kushtin $A^*A \leq AA^*$ (operatorët e ashtuquajtur ko-hipernormal), janë më shumë, por më e rëndësishmja, ndoshta, është se vetitë e operatorëve hipernormal janë më frytdhënëse se sa ajo e operatorëve ko-hipernormal. Dhe mbi të gjitha një operator, ai i zhvendosjes unilaterale del të jetë operator hipernormal, për të cilin edhe është vërtetuar se ka nënhapësirë invariante. Sidoqoftë ne do të merremi vetëm me disa prej këtyre klasave edhe atë do të shqyrtojmë disa aspekte mbi shumën dhe produktin algjebrik të tyre. Në fakt do të ndjekim efektin që kanë mbi shumën dhe produktin e operatorëve kushtet e ndryshme të komutativitetit. Në disa raste do të përdorim kërkesa më të dobëta e në të tjera do të kërkojmë plotësimin e kushteve më të forta të komutativitetit.

2.1. Klasa e operatorëve normal dhe hipernormal. Lidhja mes tyre në problemet e shumës dhe produktit të operatorëve

Le të themi, që në fillim, se kur jemi te klasa e operatorëve normal, shuma dhe produkti i operatorëve normal është operator normal në rastin kur operatorët mbledhës, shumëzues janë operator komutues dhe kjo për arsye se atëherë është kënaqur teorema Fuglede, respektivisht përgjithësimi i saj-teorema Fuglede-Putnam. Për shkak të rëndësisë shumë të madhe të kësaj teoreme mbi shumën, produktin algjebrik të operatorëve ne do ta formulojmë edhe përgjithësimin e saj

TEOREMË 2.1.1 (Fuglede). ***Nëse*** $N \in B(H)$ ***është operator normal dhe*** $T \in B(H)$ ***operator i çfarëdoshëm, i tillë që*** $NT = TN$***, atëherë vlen*** $N^*T = TN^*$.

Pra, siç mund të vërehet, pasojë imediate e teoremës Fuglede është se nëse $T, S \in B(H)$ janë dy operatorë normal që komutojnë, atëherë secili prej tyre është komutues me operatorin e adjunguar të tjetrit dhe kështu produkti i tyre, po ashtu, është operator normal. Me gjasë, ky është kushti i mjaftueshëm më i njohur për normalitetin e produktit të dy operatorëve normal.

TEOREMË 2.1.2 (Fuglede-Putnam). ***Nëse*** $M, N \in B(H)$ ***janë operatorë normal dhe*** $T \in B(H)$ ***i tillë që*** $MT = TN$***, atëherë po ashtu vlen*** $M^*T = TN^*$***.***

Le të jetë A operator hipernormal dhe A^* operatori i konjuguar i tij. Për shumën $A + A^*$ të secilit operator me operatorin e tij të konjuguar dimë se është operator normal, rrjedhimisht edhe hipernormal. Por, nëse marrim në shqyrtim kombinimin linear $\alpha A + \beta A^*$, ku α dhe β janë numra kompleks, atëherë situata nuk është evidente. Kërkesa që ky operator të jetë hipernormal lidhet me kërkesën e jonegativitetit të ndryshimit $\left(\alpha A+\beta A^*\right)^*\left(\alpha A+\beta A^*\right)-\left(\alpha A+\beta A^*\right)\left(\alpha A+\beta A^*\right)^*$

Nëse e llogaritim këtë ndryshim, fitojmë:

$$\begin{aligned}&\left(\alpha A+\beta A^*\right)^*\left(\alpha A+\beta A^*\right)-\left(\alpha A+\beta A^*\right)\left(\alpha A+\beta A^*\right)^*=\\&=\left(\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}A\right)\left(\alpha A+\beta A^*\right)-\left(\alpha A+\beta A^*\right)\left(\overline{\alpha}A^*+\overline{\beta}A\right)=\\&=|\alpha|^2\left(A^*A-AA^*\right)-|\beta|^2\left(A^*A-AA^*\right)=\\&=\left(|\alpha|-|\beta|\right)\left(|\alpha|+|\beta|\right)\left(A^*A-AA^*\right)\end{aligned}$$

Vërejmë se nëse A është operator hipernormal dhe plotësohet kushti $|\alpha|>|\beta|$, atëherë kombinimi linear $\alpha A+\beta A^*$ do të jetë operator hipernormal. Vlen edhe e anasjella. Me fjalë të tjera, sa here që $\alpha A+\beta A^*$ është operator hipernormal për numrat kompleks α dhe β që kënaqin kushtin $|\alpha|>|\beta|$, atëherë operatori A është operator hipernormal. Tash, nga kjo që thamë mund të formulojmë këtë :

POHIM 2.1.1 [53] ***Le të jetë $A\in B\left(H\right)$, operator i kufizuar. Operatori A është operator hipernormal atëherë dhe vetëm atëherë kur për çdo dy numra kompleks α dhe β me vetinë $|\alpha|>|\beta|$ operatori $\alpha A+\beta A^*$ është hipernormal.***

Vazhdojmë më tutje duke marrë shumën e dy operatorëve hipernormal A dhe B. Shuma $A+B$ nuk është e thënë që të jetë operator hipernormal edhe sikur operatorët A dhe B të komutojnë. Le të përmendim këtu se kërkesa për komutativitetin, respektivisht për lloje të ndryshme të komutativitetit lind nga ndërtimi i ndryshimit $\left(A+B\right)^*\left(A+B\right)-\left(A+B\right)\left(A+B\right)^*$. Vërtetë, kur të zhvillojmë këtë ndryshim vërejmë se

$$\begin{aligned}&\left(A+B\right)^*\left(A+B\right)-\left(A+B\right)\left(A+B\right)^*=\\&\qquad=A^*A+B^*A+A^*B+B^*B-AA^*-BA^*-AB^*-BB^*=\\&\qquad=\left(A^*A-AA^*\right)+\left(B^*B-BB^*\right)+\left(B^*A-AB^*\right)+\left(A^*B-BA^*\right)\end{aligned}$$

Nga zhvillimi në fjalë, vërejmë se, dy mbledhësit e parë janë pozitiv dhe kërkesa që ky ndryshim të jetë pozitiv do të plotësohej nëse dy mbledhësit e tjerë të jenë pozitiv ose eventualisht zero. Kështu, përfundimisht mund të themi se, shuma e dy operatorëve hipernormal A dhe B që të jetë operatorë hipernormal duhet që operatorët A dhe B^* të komutojnë (ose anasjelltas, që operatori B të komutojë me operatorin A^*). Kështu, mund të formulojmë këtë pohim:

POHIM 2.1.2 [53] ***Le të jenë operatorët*** A ***dhe*** B ***dy operatorë hipernormal. Shuma e tyre*** $A+B$ ***do të jetë operator hipernormal nëse operatori*** A ***komuton me operatorin*** B^***.**

Shqyrtojmë më tutje kombinim linear $\alpha A+\beta B$ të operatorëve hipernormal A dhe B. Na intereson të përcaktojmë kushtet se kur ky kombinim do të jetë operator hipernormal. Ndërtojmë mbështjellësin linear $span\{A,B\}=\{\alpha A+\beta B : \text{ku } \alpha,\beta \text{ numra kompleks}\}$. Paraprakisht, për hir të shkurtimit në të shkruar dhe qartësisë do të përkufizojmë komutatorin $[A,B]=AB-BA$, të operatorëve A dhe B.

Për nevojat e mëtutjeshme, do të vërtetojmë këtë:

LEMË 2.1.1 [53] ***Nëse*** A ***dhe*** B ***janë operatorë të kufizuar, pra nga*** $B(H)$***, atëherë*** $T\in span\{A,B\}$ ***është operatorë hipernormal nëse për çdo numër kompleks*** a***, operatorët*** A ***dhe*** $aA+B$ ***janë hipernormal. Vlen edhe e anasjella.***

Vërtetimi. Le të jetë $T=\alpha A+\beta B\in span\{A,B\}$ operator hipernormal, ku α dhe β janë numra kompleks çfarëdo. Atëherë, në veçanti për $\alpha=1$ dhe $\beta=0$, respektivisht për $\alpha=a$ dhe $\beta=1$, fitojmë që $T=A$ dhe $T=aA+B$ janë operatorë hipernormal.

Anasjelltas, le të jetë $aA+B$ operator hipernormal. Që operatori $\alpha A+\beta B\in span\{A,B\}$ është operator hipernormal del nga fakti që shumëzimi me skalar i operatorit hipernormal është operator hipernormal. Kemi këtë zbërthim $\alpha A+\beta B=\beta\left[\dfrac{\alpha}{\beta}A+B\right]=\beta(aA+B)$, ku a pikërisht është shprehur si herës i numrave kompleks α dhe β. □

Le të vërejmë se me çka është i barabartë komutatori $\left[T^*,T\right]$, ku $T=\omega A+B$ për ω numër kompleks çfarëdo. Kemi:

$$\begin{aligned}\left[T^*,T\right]&=\left[\overline{\omega}A^*+B^*,\omega A+B\right]=\left(\overline{\omega}A^*+B^*\right)\left(\omega A+B\right)-\left(\omega A+B\right)\left(\overline{\omega}A^*+B^*\right)\\&=\left|\overline{\omega}\right|^2A^*A+\omega B^*A+\overline{\omega}A^*B+B^*B-\left|\overline{\omega}\right|^2AA^*-\overline{\omega}BA^*-\omega AB^*-BB^*\\&=\left|\omega\right|^2\left(A^*A-AA^*\right)+\left(B^*B-BB^*\right)+\omega B^*A+\overline{\omega}A^*B-\overline{\omega}BA^*-\omega AB^*\\&=\left|\omega\right|^2\left(A^*A-AA^*\right)+\left(B^*B-BB^*\right)+\omega\left(B^*A-AB^*\right)+\overline{\omega}\left(A^*B-BA^*\right)\\&=\left|\omega\right|^2\left(A^*A-AA^*\right)+\left(B^*B-BB^*\right)+\omega\left(B^*A-AB^*\right)+\left(\omega\left(A^*B-BA^*\right)\right)^*\\&=\left|\omega\right|^2\left[A^*,A\right]+\left[B^*,B\right]+2\,\mathrm{Re}\left(\omega\left[B^*,A\right]\right)\end{aligned}$$

d.m.th.,

$$(*)\qquad\left[T^*,T\right]=\left|\omega\right|^2\left[A^*,A\right]+\left[B^*,B\right]+2\,\mathrm{Re}\left(\omega\left[B^*,A\right]\right)$$

POHIMI 2.1.3 [18] ***Nëse*** A ***dhe*** B ***janë dy operatorë hipernormal dhe nëse*** $AB^*=B^*A$***, atëherë***

(a) $T\in span\{A,B\}$ ***është operator hipernormal;***

(b) AB ***dhe*** BA ***janë operatorë hipernormal.***

Vërtetimi. (a) Kushti që $AB^*=B^*A$ do të thotë se $\left[B^*,A\right]=0$. Nga ekuacioni (*) del se

$$(**)\qquad\left[T^*,T\right]=\left|\omega\right|^2\left[A^*,A\right]+\left[B^*,B\right]$$

Sipas Lemës 2.2.1., nëse vërtetojmë se $T=\omega A+B$ është operator hipernormal, atëherë $\alpha A+\beta B$ është operator hipernormal. Por, ekuacioni (**) pikërisht këtë edhe e vërteton sepse $T=\omega A+B$ është hipernormal sepse $\left[A^*,A\right]\geq 0$ dhe $\left[B^*,B\right]\geq 0$.

(b) Vërtetojmë, p.sh., se AB është hipernormal (ngjashëm vërtetohet se edhe operatori BA është operator hipernormal). Kemi:

$$\begin{aligned}(AB)(AB)^*=ABB^*A^*\leq AB^*BA^*=B^*AA^*B\leq\\\leq B^*A^*AB=(AB)^*(AB)\end{aligned}$$

Pra, $(AB)(AB)^* \le (AB)^*(AB)$ çka edhe duhej treguar. □

VËREJTJE 2.1.1 [53] ***Këtu, ndoshta, duhet përmendur se mosbarazimi*** $ABB^*A^* \le AB^*BA^*$ ***sigurohet nga fakti se për operatorët pozitiv*** C ***dhe*** D ***të cilët kënaqin kushtin*** $C \le D$***, atëherë vlen*** $ECE^* \le EDE^*$ ***për cilindo operator*** E***.***

VËREJTJE 2.1.2 [18] ***Kushti në Pohimin 2.1.3. nuk është i domosdoshëm që*** $span\{A,B\}$ ***të jetë operator hipernormal. Me të vërtetë, nëse*** $A = B =$ zhvendosje unilaterale ***me shumëfishitet* 1, *atëherë*** $span\{A,B\}$ ***është operator hipernormal edhe përkundër faktit që*** $AB^* \ne B^*A$***.***

Tani do të japim një kusht të mjaftueshëm dhe të domosdoshëm që $span\{A,B\}$ të jetë hipernormal.

TEOREMA 2.1.4 [18] ***Nëse*** A ***dhe*** B ***janë operatorë hipernormal, atëherë*** $span\{A,B\}$ ***është operator hipernormal nëse dhe vetëm nëse për çdo*** h ***në*** X ***të tillë që*** $[B^*, A]h \ne 0$ ***vlen mosbarazimi***

$$\left|\left\langle [B^*, A]h \middle| h\right\rangle\right|^2 \le \left\langle [A^*, A]h \middle| h\right\rangle \left\langle [B^*, B]h \middle| h\right\rangle$$

Para se të vërtetojmë pohimin japim një lemë, e cila jep një veti të numrave kompleks e që do të na shërbejë në vërtetimin e teoremës.

LEMË 2.1.2 [53] ***Le të jenë*** a ***dhe*** b ***numra real jonegativ dhe*** c ***një numër kompleks çfarëdo, i ndryshëm nga zero. Mosbarazimi*** $|z|^2 a + b + 2\,\mathrm{Re}(zc) \ge 0$ ***vlen për çdo numër kompleks*** z ***atëherë dhe vetëm atëherë kur*** $|c|^2 \le ab$***.***

VËREJTJE 2.1.3 [53] ***Mosbarazimi*** $\mathrm{Re}(\mu c)^2 \le |c|^2 \le ab$ ***është rezultat i vlerësimit*** $\mathrm{Re}(\mu c)^2 \le |\mu c|^2 \le |\mu|^2 |c|^2 \le ab$***.***

Vërtetimi i pohimit 2.1.4. Për numrin çfarëdo kompleks ω vejmë $T = \omega A + B$, ku A dhe B operatorë hipernormal. Supozojmë po ashtu se $span\{A, B\}$ është hipernormal që sipas Lemës 2.2.1., nënkuptohet se $T = \omega A + B$ është hipernormal. Tani llogaritim

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left[T^*, T\right] h \middle| h \right\rangle = \left\langle \left[\overline{\omega} A^* + B^*, \omega A + B\right] h \middle| h \right\rangle \\
&= \left\langle \left(\left|\overline{\omega}\right|^2 A^* A + \omega B^* A + \overline{\omega} A^* B + B^* B - \left|\overline{\omega}\right|^2 AA^* - \overline{\omega} BA^* - \omega AB^* - BB^* \right) h \middle| h \right\rangle \\
&= \left|\omega\right|^2 \left\langle \left(A^* A - AA^*\right) h \middle| h \right\rangle + \left\langle \left(B^* B - BB^*\right) h \middle| h \right\rangle + 2\operatorname{Re}\left(\omega \left[B^*, A\right]\right) \\
&= \left|\omega\right|^2 a + b + 2\operatorname{Re}\left(c\omega\right) \geq 0
\end{aligned}$$

Këtu $a = \left\langle \left(A^* A - AA^*\right) h \middle| h \right\rangle$, $b = \left\langle \left(B^* B - BB^*\right) h \middle| h \right\rangle$ dhe $c = \left\langle \left[B^*, A\right] h \middle| h \right\rangle$. Tani, nga Lema 2.2.2. del se $\left|c\right|^2 \leq ab$, respektivisht që

$$\left|\left\langle \left[B^*, A\right] h \middle| h \right\rangle\right|^2 \leq \left\langle \left[A^*, A\right] h \middle| h \right\rangle \left\langle \left[B^*, B\right] h \middle| h \right\rangle . \square$$

RRJEDHIMI 2.1.1 [18] ***Nëse operatorët*** A ***dhe*** B ***janë operatorë hipernormal,*** $AB^* \neq B^* A$ ***dhe*** $span\{A, B\}$ ***është hipernormal, atëherë as operatori*** A***, e as operatori*** B ***nuk janë operatorë normal.***

RRJEDHIMI 2.1.2 [18] ***Nëse operatori*** A ***është hipernormal dhe*** N ***operator normal, atëherë*** $span\{A, N\}$ ***është hipernormal nëse*** $AN = NA$***. Vlen edhe e anasjella.***

2.2. Produkti i operatorëve normal dhe hipernormal

Rikujtojmë faktin se produkti i dy operatorëve hipernormal nuk është e thënë të jetë operator hipernormal. Kjo nuk ndodh domosdo as edhe në rast se operatorët e kompozimit janë komutues. Kjo është dëshmi e qartë se dobësimi i kushteve për të qenë operator normal shkakton ndryshime të mëdha. Mirëpo, në kushte të veçanta, shtesë, të cilat lidhen me komutativitetin në forma të tjera të kompozimit, mundësohet që produkti i operatorëve hipernormal të jetë operator hipernormal. Në këtë paragraf do të tregojmë disa raste të veçanta kur produkti i operatorëve hipernormal është operator hipernormal. Fillimisht, në favor të kësaj që thamë lartë po japim disa fakte që do të na shërbejnë në këtë drejtim. Ashtu siç numri kompleks mund të paraqitet si produkt i numrit real pozitiv dhe një numri kompleks me intensitet, modul të barabartë me 1, ashtu edhe çdo operator mund të paraqitet si produkt i një operatori pozitiv dhe një operatori izometrik. Pra, nëse operatori $T \in B(H)$, atëherë atë mund ta shkruajmë në formën $T = U|T|$, ku $|T| = \left(T^*T\right)^{1/2}$ është rrënja pozitive e operatorit T. Kemi këtë:

POHIM 2.2.1 [22] ***Le të jenë T_1 dhe T_2 operatorë hipernormal dhe supozojmë se T_1 komuton me pjesën pozitive të operatorit T_2, kurse T_2 me pjesën pozitive të operatorit T_1^*, pra me $\left(T_1T_1^*\right)^{1/2}$. Atëherë, edhe operatorët T_1T_2 dhe T_2T_1 janë operatorë hipernormal.***

VËREJTJE 2.2.1 ***Përfundimi i pohimit të mësipërm nuk qëndron nëse mungon kushti që operatori T_2 të komutojë me pjesën pozitive të operatorit T_1^*, siç tregon shembulli në vijim.***

Shembulli 2.2.1 Le të jetë H hapësirë e Hilbertit me bazë të ortonormuar $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$. Le të jetë T_1 projeksion ortogonal i H në $[e_0, e_1]$, pra në $span\{e_0, e_1\}$ dhe T_2 le të jetë dhënë me $T_2 e_n = e_{n+1}\ (n \geq 0)$. Atëherë T_1 dhe T_2 janë operatorë hipernormal dhe T_1 komuton me $T_2^*T_2$. Mirëpo,

$$\left(T_1T_2\right)^* e_1 = T_2^*T_1^*e_1 = T_2^*e_1 = e_0 \text{ dhe } T_1T_2e_1 = T_1e_2 = 0$$

Prandaj, $\left\|\left(T_1T_2\right)^* e_1\right\|$ nuk është më e vogël se $\left\|\left(T_1T_2\right) e_1\right\|$. Rrjedhimisht, operatori T_1T_2 nuk është operator hipernormal.

RRJEDHIM 2.2.1 ***Le të jenë operatorët*** N_1 ***dhe*** N_2 ***operatorë normal. Secili nga operatorët*** N_1 ***dhe*** N_2 ***komuton me pjesën pozitive të operatorit tjetër atëherë dhe vetëm atëherë kur*** N_1N_2 ***dhe*** N_2N_1 ***janë operatorë normal.***

Vërtetim. Me qenë se pjesa pozitive e operatorit N_1 dhe N_2 është e njëjtë me pjesën pozitive të operatorit N_1^*, respektivisht N_2^*, nga Pohimi 2.2.1 i sapo vërtetuar, rrjedh se operatorët N_1N_2 dhe $\left(N_1N_2\right)^* = N_2^*N_1^*$ janë hipernormal. Kjo jep normalitetin e operatorit N_1N_2. Në mënyrë të ngjashme vërtetohet se edhe operatori N_2N_1 është normal.

E anasjella vërtetohet duke u bazuar në teoremën në vijim:

TEOREMË 2.2.1 [53] ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***operatorë në hapësirën e Hilbertit, të tillë që operatorët*** A ***dhe*** AB ***të jenë operatorë normal. Operatori*** B ***komuton me operatorin*** A^*A ***atëherë dhe vetëm atëherë kur*** BA ***është operator normal.***

Vërtetim. Le të jetë operatori B komutativ me operatorin A^*A. Vërtetojmë se operatori BA është operator normal. Për këtë qëllim marrim dekompozimin polar të operatorit A, $A = UR$. Fakti që operatori A është operator normal ka për pasojë që operatori U është operator unitar dhe operatorët U dhe R komutojnë. Po ashtu, B komuton me R, me rrënjën pozitive katrore të operatorit A^*A. Tani, kemi

$$U^*ABU = U^*URBU = RBU = BRU = BUR = BA$$

Pra BA është operator unitarisht ekuivalent me operatorin normal AB, andaj edhe vetë është operator normal.

Tani, le të jetë operatori BA operator normal. Do të vërtetojmë se operatori B komuton me operatorin A^*A. Për këtë qëllim thirremi në teoremën e Fuglede-Putnamit sipas së cilës nëse operatorët P dhe Q janë operatorë normal dhe nëse për operatorin e çfarëdoshëm C vlen $PC = CQ$, atëherë vlen edhe $P^*C = CQ^*$. Këtu, marrim për operatorë normalë $P = AB$ dhe $Q = BA$ dhe meqenëse $\left(AB\right)A = A\left(BA\right)$ rrjedh se

$B^*A^*A = AA^*B^*$. Në bazë të asaj që operatori A është normal del se operatori B^* komuton me operatorin A^*A, e gjithashtu me të komuton edhe operatori B. □

Në rrugën që të gjejmë rastet kur produkti i operatorëve hipernormal është operatorë hipernormal do të japim një përkufizim të një klase të re të operatorëve të ashtuquajtur klasa e operatorëve binormal.

Përkufizim 2.2.1 *Le të jetë T operator në hapësirën e Hilbertit H. Operatori T quhet binormal nëse është komutativ me operatorin T^*T dhe TT^*. Klasën e operatorëve binormal e shënojmë me (BN).*

Klasën e operatorëve binormal që njëkohësisht janë edhe hipernormal e shënojmë me $(BN)^+$.

Kemi parë më herët se klasa e operatorëve hipernormal nuk është e mbyllur kundrejt kompozimit të operatorëve si veprim shumëzimi në $B(H)$. Tani do të japim një teoremë, e cila siguron që fuqitë e operatorit hipernormal të jenë operatorë hipernormal. Pra, nën kushte të caktuara të komutativitetit cilado fuqi e operatorit hipernormal do të jetë operator hipernormal.

TEOREMË 2.2.2 ***Le të jetë $T \in (BN)^+$. Atëherë, secila fuqi T^n, $n \geq 1$, e operatorit T është operator hipernormal.***

Vërtetim. Le të përmendim se nëse operatorët C, D janë operatorë pozitivë të tillë që $C \geq D \geq 0$, atëherë vlen $TCT^* \geq TDT^*$ dhe $T^*CT \geq T^*DT$ për cilindo operatorë të kufizuar nga hapësira e Hilbertit. Supozojmë tani se $T \in (BN)^+$. Meqenëse se $T^*T \geq TT^*$, kemi $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2$ dhe $(TT^*)^2 \geq T^2T^{*2}$. Mirëpo, $T^*T \geq TT^*$ dhe $[T^*T, TT^*] = 0$, ka për pasojë $(T^*T)^2 \geq (TT^*)^2$. Kështu kemi $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2 \geq (TT^*)^2 \geq T^2T^{*2}$ që tregon se operatori T^2 është operator hipernormal. Supozojmë, se vlen mosbarazimi $T^{*n}T^n \geq (T^*T)^n \geq (TT^*)^n \geq T^nT^{*n}$ për ndonjë $n \geq 2$. Atëherë, $T^{*n}T^n \geq (TT^*)^n$ implikon $T^{*n+1}T^{n+1} \geq (T^*T)^{n+1}$, kurse $(T^*T)^n \geq T^nT^{*n}$

implikon $\left(TT^*\right)^{n+1} \geq T^{n+1}T^{*n+1}$. Mirëpo, $\left(T^*T\right)^{n+1} \geq \left(TT^*\right)^{n+1}$. Tani, pohimi i teoremës del me induksion. □

2.3. Operatorët dyfish komutues. Produkti i operatorëve hipernormal, kuazihipernormal dhe operatorëve izometrik

Ashtu siç përmendëm më sipër, dobësimi i kushtit për operatorin normal ka pasoja të mëdha në raport me rezultatin e shumës, respektivisht produktit të operatorëve të një klase dhe gjithashtu edhe në lidhje me shumën dhe produktin e operatorëve të klasave të ndryshme. Këtu, duke u nisur nga kjo, do të shqyrtojmë disa produkte të operatorëve të klasave të sipërpërmendura. Por, nëse njëri nga shumëzuesit është operator normal dhe tjetri nga ndonjë klasë e operatorëve që përfshin klasën e operatorëve normal, atëherë produkti i takon klasës së dytë sa herë që operatorët në fjalë janë komutues. Nëse klasën e operatorëve normal e shënojmë me $\mathcal{N}$, atë të operatorëve hipernormal me $\mathcal{H}$, kurse të operatorëve kuazi-hipernormal me $\mathcal{QH}$, atëherë vlen përfshirja $\mathcal{N} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{QH}$. Tani, lehtë, me përdorimin e teoremës Fuglede, tregohet se nëse A operator hipernormal dhe B operator normal, atëherë produkti AB është operator hipernormal. Me të vërtetë, do të kemi me sa vijon: $(AB)(AB)^* = ABB^*A^* = AB^*BA^* = B^*AA^*B \leq B^*A^*AB = (AB)^*(AB)$. Ngjashëm tregohet, po ashtu, se produkti i operatorëve komutues kuazi-hipernormal dhe normal është operator kuazi-hipernormal. Mirëpo, nëse njëri nga shumëzuesit nuk është operator normal, atëherë produkti i operatorëve komutues nga e njëjta klasë nuk është e thënë t'i takoj asaj klase. Në raste të tilla duhen kushte të tjera të komutativitetit. Kështu, nëse do ti referoheshim klasës së operatorëve hipernormal, atëherë për dy operatorë hipernormal, A dhe B që produktet e tyre AB dhe BA të jenë hipernormal mjafton që A të komuton me B^*. Kjo nuk do të mjaftonte nëse klasa e shqyrtuar do të ishte ajo e operatorëve kuazi-hipernormal. Për rastet e tilla përkufizojmë komutativitetin e dyfishtë. Për operatorët A dhe B themi se janë dyfish komutues nëse $AB = BA$ dhe $AB^* = B^*A$. Në këtë njësi do të japim disa rezultate tjera, të cilat përfshijnë produktin e operatorëve hipernormal, kuazihipernormal dhe izometrik.

Përkufizim 2.3.1 *Për operatorin $T \in B(\mathcal{H})$ themi se është operator kuazi-hipernormal nëse plotëson kushtin $T^{*2}T^2 \geq (T^*T)^2$.*

TEOREMË 2.3.1 ***Operatori*** $T \in B(\mathcal{H})$ ***është kuazi-hipernormal nëse*** $\| T^2 x \| \geq \| T^* T x \|$.

Vërtetim. E zhvillojmë normën

$$\begin{aligned}
\| T^* T x \|^2 &= \langle T^* T x | T^* T x \rangle = \langle T T^* T x | T x \rangle \\
&= \langle T^* T T^* T x | x \rangle \leq \langle T^{*2} T^2 x | x \rangle \\
&= \langle T^* T^* T T x | x \rangle = \langle T T x | T T x \rangle = \| T^2 x \|^2
\end{aligned}$$

Nga këtu, kemi $\| T^* T x \|^2 \leq \| T^2 x \|^2$. Meqenëse bëhet fjalë për numra pozitiv, del se $\| T^* T x \| \leq \| T^2 x \|$. Kjo edhe duhej vërtetuar. □

TEOREMË 2.3.2 [52] ***Le të jetë*** A ***operator kuazi-hipernormal dhe*** B ***le të jetë operator hipernormal. Nëse operatorët*** A ***dhe*** B ***janë dyfish komutues, atëherë operatorët*** AB ***dhe*** BA ***janë operator kuazi-hipernormal.***

Vërtetim. Duhet të provojmë se vlen mosbarazimi operatorial $[(AB)^*(AB)]^2 \leq (AB)^{*2}(AB)^2$. Për këtë qëllim, e zhvillojmë anën e majtë të mosbarazimit si më poshtë:

$$\begin{aligned}
[(AB)^*(AB)]^2 &= (AB)^*(AB)(AB)^*(AB) \\
&= B^* A^* A B B^* A^* A B \\
&= B^* B \underbrace{A^* A A^* A}_{\leq A^{*2} A^2} B^* B \\
&\leq B^* B A^* A^* A A B^* B \\
&= B^* A^* A^* \underbrace{B B^*}_{\leq B^* B} A A B \\
&\leq B^* A^* A^* B^* B A A B \\
&= B^* A^* B^* A^* A B A B \\
&= (AB)^{*2} (AB)^2 \quad \square
\end{aligned}$$

Në mënyrë të ngjashme vërtetohet se edhe BA është operator kuazi-hipernormal.

TEOREMË 2.3.3 [52] ***Nëse operatorët janë operatorë kuazi-hipernormal dhe dyfish komutues, atëherë produktet*** AB ***dhe*** BA ***janë operator kuazi-hipernormal.***

Vërtetim. Duam të vërtetojmë se vlen mosbarazimi mes normave, pra se vlen $\|(AB)^*(AB)x\| \le \|(AB)^2x\|$. Për të vërtetuar këtë mosbarazim, e zhvillojmë anën e majtë të tij. Kemi:

$$\begin{aligned}\|(AB)^*(AB)x\| &= \|B^*A^*ABx\| \\ &= \|B^*BA^*Ax\| \\ &\le \|B^2A^*Ax\| \\ &= \|A^*AB^2x\| \\ &\le \|A^2B^2x\| \\ &= \|(AB)^2x\| \quad \square\end{aligned}$$

çka edhe duhej vërtetuar.

Ngjashëm, mund të tregohet se BA gjithashtu është operator kuazi-hipernormal.

TEOREMË 2.3.4 [52] ***Le të jetë A operator kuazi-hipernormal dhe le të jetë dyfish komutativ me operatorin izometrik B. Atëherë operatori AB është operator kuazi-hipernormal.***

Vërtetim. Vërtetimin e japim në dy mënyra. Duke vërtetuar mosbarazimin operatorial $[(AB)^*(AB)]^2 \le (AB)^{*2}(AB)^2$ dhe mosbarazimin e normave $\|(AB)^*(AB)x\| \le \|(AB)^2x\|$. Kemi zhvillimet si në vijim:

$$\begin{aligned}[(AB)^*(AB)]^2 &= (AB)^*(AB)(AB)^*(AB) \\ &= \underbrace{B^*B}_{I}A^*AA^*A\underbrace{B^*B}_{I} \\ &= \underbrace{A^*AA^*A}_{\le A^{*2}A^2} \\ &\le A^*A^*\underbrace{B^*\underbrace{B^*B}_{I}B}_{I}AA \\ &= B^*A^*B^*A^*ABAB \\ &= (AB)^{*2}(AB)^2\end{aligned}$$

Nëse zhvillojmë normën, kemi

$$\begin{aligned}\|(AB)^*(AB)x\| &= \|B^*A^*ABx\|\\ &= \|(B^*B)(A^*A)x\|\\ &\le \|B^*B\|\cdot\|A^*Ax\|\\ &= \|A^*Ax\|\\ &\le \|A^2x\|\\ &= \|B^2A^2x\|\\ &= \|ABABx\|\\ &= \|(AB)^2x\| \quad \square\end{aligned}$$

2.4. Disa rezultate për klasa më pak familjare të operatorëve në hapësirat e Hilbertit

Shkurt, me pak fjalë, le të rikujtojmë se për operatorin T nga $B(\mathcal{H})$ themi se është operator n - normal nëse vlen $T^nT^* = T^*T^n$, pra nëse operatori T, komuton me fuqinë e n-të tij, pra me T^n. Është evidente se për $n=1$ fitojmë klasën e operatorëve normal. Themi se operatori T është operator kuazi normal me fuqi n nëse $T^n(T^*T) = (T^*T)T^n$. Operatori T është operator kuazi n - normal nëse $T(T^*T^n) = (T^*T^n)T$. Përfundimisht, themi se operatori T është operator i klasës (Q) nëse $T^{*2}T^2 = (T^*T)^2$, kurse themi se T është operator i klasës (Q) me fuqi n nëse $T^{*2}T^{2n} = (T^*T^n)^2$.

TEOREMË 2.4.1 [51] ***Nëse*** $T \in B(\mathcal{H})$ ***është operator*** n ***- normal, atëherë ai është operator i klasës (Q) me fuqi*** n**.**

Vërtetim. Meqenëse T është n - normal vlen $T^nT^* = T^*T^n$. Veprojmë në barazimin e dhënë majtas me operatorin e adjunguar T^* dhe më pas djathtas me operatorin T^n, fitojmë $T^*T^nT^*T^n = T^*T^*T^nT^n$, respektivisht $T^{*2}T^{2n} = (T^*T^n)^2$. Pra, operatori është i klasës(Q) me fuqi n. Me kundër shembull tregohet se e kundërta nuk është e vërtetë. $\square$

Shembulli 2.4.1 Nëse $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, atëherë ky operator është i klasës(Q) me fuqi 2, por nuk është operator 2-normal.

Në këtë pikë, ne pohojmë se me kushtin shtesë, që operatori $T \in B(\mathcal{H})$ i klasës (Q) me fuqi n, të jetë invertibil, pra të ketë invers, atëherë duhet të jetë operator n - normal. Formulojmë dhe vërtetojmë këtë

TEOREMË 2.4.2 [51] ***Le të jetë T operator linear i kufizuar. Nëse T është operator i klasës (Q) me fuqi n dhe ka invers, atëherë T është operator n - normal.***

Vërtetimi. Le të jetë $T \in B(\mathcal{H})$ dhe T le të jetë operator klasës (Q) me fuqi n, do të thotë se $T^{*2}T^{2n} = (T^*T^n)^2$. Mund të shkruajmë se $T^{*2}T^{2n} = T^*T^nT^*T^n$. Tani, meqenëse T ka invers, është çështje triviale, elementare, që operatori i adjunguar i tij, T^*, ka gjithashtu invers dhe se ai është $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Nëse veprojmë në $T^{*2}T^{2n} = T^*T^nT^*T^n$ me $(T^*)^{-1}$ nga e majta, atëherë fitojmë $T^*T^{2n} = T^nT^*T^n$. Ky relacion është i barabartë me $T^*T^nT^n = T^nT^*T^n$. Më tej, nëse në relacionin e mëparshëm e veprojmë n herë me operatorin T^{-1} nga ana e djathtë, ose, që është ekuivalente, me $(T^n)^{-1}$ nga e djathta, atëherë kjo do të rezultojë me barazinë operatoriale $T^*T^n = T^nT^*$. Domethënë, me kushtin e mësipërm, operatori i klasës (Q) me fuqi n është një operator n - normal. Me këtë edhe vërtetimi ka mbaruar. □

Le të potencojmë se operatorët e klasës (Q) me fuqi n dhe operatorët e klasës (Q) me fuqi $n+1$ nuk janë të krahasueshëm. Shembulli me operatorin $T = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$ që vepron në hapësirën dy dimensionale të Hilbertit, e vërteton këtë. Me fjalë tjera, ky është operator i klasës(Q) me fuqi 2, por nuk i takon klasës (Q) me fuqi 3. Më tej, tregohet se nëse T është operator i klasës (Q) me fuqi n dhe nëse T është operator kuazi n - normal, atëherë T është operator i klasës (Q) me fuqi $n+1$. Po ashtu, me shembullin e njëjtë si më sipër provohet se kushti që T të jetë operator kuazi n - normal është i nevojshëm. Duke u nisur nga ky rezultat, e përgjithësojmë të njëjtin dhe formulojmë këtë:

TEOREMË 2.4.3 [51] ***Le të jetë T operator linear i kufizuar në H. Nëse T është operator i klasës (Q) me fuqi $n+k$ dhe në të njëjtën kohë është operator kuazi n - normal, atëherë T është i klasës (Q) me fuqi $n+k+1$ për çdo $k \geq 0$.***

*Vërtetimi***.** Le të jetë T një operator linear i kufizuar në hapësirën e Hilbertit $\mathcal{H}$. Supozojmë se operatori T është operator i klasës (Q) me fuqi $(n+k)$ dhe njëkohësisht operator kuazi $n-$normal. Për kushtet e dhëna, operatori T plotëson relacionet në vijim: $T^{*2}T^{2(n+k)} = (T^*T^{(n+k)})^2$ dhe $T(T^*T^n) = (T^*T^n)T$. Duhet të vërtetojmë se vlen relacioni $T^{*2}T^{2(n+k+1)} = (T^*T^{(n+k+1)})^2$. Duke e zhvilluar anën e majtë të relacionit të fundit, gjejmë me sa vijon:

$$\begin{aligned} T^{*2}T^{2(n+k+1)} &= T^{*2}T^{2(n+k)}T^2 \\ &= (T^*T^{(n+k)})^2T^2 \\ &= T^*T^{(n+k)}T^*T^{(n+k)}TT \\ &= T^*T^nT^kT^*T^nT^kTT \\ &= T^*T^nT^kT^*T^nTT^kT \\ &= T^*T^nT^kTT^*T^nT^kT \\ &= T^*T^{n+k+1}T^*T^{n+k+1} \\ &= (T^*T^{n+k+1})^2. \;\square \end{aligned}$$

E japim pa vërtetim këtë:

TEOREMË 2.4.4 [39] ***Le të jenë*** $T_1,...,T_m$ ***operatorë n-normal. Atëherë operatorët*** $(T_1 \oplus ... \oplus T_m)$ ***dhe*** $(T_1 \otimes ... \otimes T_m)$ ***janë operatorë të klasës (Q) me fuqi*** n**.**

Teorema tregon se shuma dhe produkti direkt i m operatorëve $n-$normal janë operatorë të klasës (Q) me fuqi n.

Nëse për dy operatorë T,S kërkojmë që të jenë dyfish komutues, atëherë kemi:

TEOREMË 2.4.5 [51] ***Le të jenë*** T,S ***dy operatorë nga algjebra*** $B(\mathcal{H})$**. *Nëse*** T,S ***janë operatorë të tillë të klasës (Q) me fuqi*** n ***dhe dyfish komutues, pra*** $TS = ST$ ***dhe*** $TS^* = S^*T$ ***, atëherë*** TS ***është operator i klasës (Q) me fuqi*** n**.**

Vërtetim. Le të jenë T dhe S operatorë të klasës (Q) me fuqi n. Operatorët T dhe S le të jenë dyfish komutues. Me qëllim që të vërtetojmë se vlen $(TS)^{*2}(TS)^{2n} = [(TS)^*(TS)^n]^2$ fillojmë me anën e majtë të barazisë operatoriale duke e rishkruar si në vijim $(TS)^{*2}(TS)^{2n} = S^*T^*S^*T^*\underbrace{TSTS....TS}_{2n-\text{herë}}$. Pasi që T është dyfish komutues me S, mund të shkruajmë se $(TS)^{*2}(TS)^{2n} = S^*S^*T^*T^* \underbrace{TSTS....TS}_{2n-\text{herë}}$. Tani, po për të njëjtën arsye, pra, meqë $TS = ST$ dhe $TS^* = S^*T$ (ose $T^*S = ST^*$), me zhvendosje të njëpasnjëshme majtas të operatorit S, fitojmë

$$\begin{aligned}(TS)^{*2}(TS)^{2n} &= S^*S^* \underbrace{SS...S}_{2n-\text{herë}} T^*T^* \underbrace{TT...T}_{2n-\text{herë}} \\ &= S^{*2}S^{2n}T^{*2}T^{2n} \\ &= (S^*S^n)^2(T^*T^n)^2 \\ &= S^*S^nS^*S^nT^*T^nT^*T^n \\ &= S^*T^*S^nT^nS^*T^*S^nT^n \\ &= (TS)^*(TS)^n(TS)^*(TS)^n \\ &= [(TS)^*(TS)^n]^2\end{aligned}$$

Vërtetimi është kompletuar. □

VËREJTJE 2.4.1 *Po ashtu, nën kushtet e njëjta, mund të vërtetohet se edhe operatori* ST *është operator i klasës (Q) me fuqi* n.

TEOREMA 2.4.6 [51] ***Nëse*** T ***është operator i klasës (Q) me fuqi*** n ***dhe i tillë që dyfish komuton me operatorin izometrik*** S***, atëherë operatori*** TS ***është operator i klasës (Q) me fuqi*** n***.***

Vërtetim. Vërtetimi i këtij pohimi është i ngjashëm me vërtetimin e teoremës së më sipërme. Kështu, duke e zhvilluar anën e majtë të barazisë operatoriale që jep përkufizimin e operatorëve të klasës (Q) me fuqi n, kemi:

$$\begin{aligned}(TS)^{*2}(TS)^{2n} &= S^*T^*S^*T^* \underbrace{TSTS...TS}_{2n-\text{herë}} \\ &= S^*S^*SST^{*2}T^{2n} \underbrace{SS...S}_{2n-2-\text{herë}} \\ &= T^{*2}T^{2n}S^{2n-2} \\ &= T^*T^nT^*T^nS^{2n-2} \\ &= S^*ST^*S^{n-1}T^nS^*ST^*S^{n-1}T^n \\ &= S^*T^*S^nT^nS^*T^*S^nT^n \\ &= (TS)^*(TS)^n(TS)^*(TS)^n \\ &= [(TS)^*(TS)^n]^2\end{aligned}$$

Çka edhe duhej vërtetuar. □

KREU 3

3. OPERATORËT λ-KOMUTUES DHE (λ,μ) - KOMUTUES

Në kreun në vijim do të shqyrtojmë disa klasa operatorësh në hapësirat e Hilbertit, edhe atë klasat e operatorëve λ-komutues dhe (λ,μ)-komutues. Shqyrtimi i klasës së operatorëve λ-komutues ka një rëndësi të madhe si në aspektin e pastër teorik matematik, ashtu edhe në teorinë e mekanikës kuantike. Ashtu sikurse në kreun pararendës, edhe këtu në qendër të hulumtimit do të jenë operatorët normal. Në fakt do të shqyrtojmë çiftet e operatorëve të kufizuar (A,B) ku njëri ose të dy operatorët do të jetë normal dhe tjetri një operator i kufizuar. Le të potencojmë këtu se për operatorët A dhe B themi se janë λ-komutues nëse gëzojnë vetinë $AB=\lambda BA$, $AB\neq O$ për ndonjë λ numër kompleks. Gjithsesi, në hulumtim e sipër me siguri se do të kemi rezultate që lidhen me spektrin e operatorëve të cilët gëzojnë vetinë e mësipërme. Për këtë arsye do të kemi nevojë për disa rezultate mirë të njohura në raport me spektrin e produktit të operatorëve. Edhe në këtë kre, teorema e Fuglede-Putnam-it do të ketë një zbatim shumë të madh.

3.1. Operatorët λ-komutues

Le të fillojmë me përkufizimin formal të operatorëve λ-komutues. Kemi përkufizimin në vijim.

Përkufizim 3.1.1 *Për operatorët A dhe B themi se komutojnë deri në faktorin λ, ose se janë λ-komutues, nëse gëzojnë vetinë*

$$AB=\lambda BA,\ \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Është e qartë se nëse $AB=O$, atëherë edhe $BA=O$, kështu që operatorët janë komutues dhe λ mund të jetë cilido numër kompleks i ndryshëm nga zero.

Me qëllim vërtetimin e rezultateve të më poshtme do të përdorim rezultatet në vijim.

TEOREMË 3.1.1 [2] ***Le të jenë** A **dhe** B **dy operatorë të kufizuar të çfarëdoshëm. Atëherë vlen***

$$\sigma(AB)\setminus\{0\}=\sigma(BA)\setminus\{0\}.$$

TEOREMË 3.1.2 [41] ***(i) Le të vlejë** $AB=\lambda BA$ **dhe** $AB\neq O$**. Atëherë 0 është ose në të dy spektrat** $\sigma(AB)$ **dhe** $\sigma(BA)$**, ose në asnjërin prej tyre. Kështu***

$$\sigma(AB)=\sigma(BA)=\lambda\sigma(AB).$$

(ii) Nëse** $0\in\sigma(AB)$**, atëherë së paku njëri nga operatorët** A **ose** B **nuk ka invers të kufizuar. Nëse** $\sigma(AB)\neq\{0\}$**, atëherë** $|\lambda|=1$**.

(iii) Nëse** $0\notin\sigma(AB)$**, atëherë të dy operatorët** A **dhe** B **kanë invers të kufizuar.

Vërtetim. (i) Meqenëse $AB\neq O$, kemi $\lambda\neq 0$. Supozojmë të kundërtën se 0 është në spektrin e njërit nga operatorët dhe nuk është në spektrin e tjetrit. Për shembull, le të jetë $0\in\sigma(AB)$ dhe $0\notin\sigma(BA)$. Sipas përkufizimit të spektrit, kjo nënkupton ekzistencën e inversit të operatorit BA. Kështu vlen $(BA)(BA)^{-1}=I$. Meqë $AB=\lambda BA$, nga barazia e më sipërme kemi $\lambda^{-1}AB(BA)^{-1}=I$, respektivisht se $AB(BA)^{-1}=\lambda I$. Operatori në anën e majtë të këtij barazimi ka zeron në spektrin e tij, që nënkupton se për ndonjë vektor $x\neq 0$ vlen $[AB(BA)^{-1}](x)=0x$. Nga ana tjetër $\lambda I(x)=\lambda x$. Prej këtu, me barazimin e anëve përkatëse del se $\lambda=0$. Kjo është në kundërshtim me supozimin se $\lambda\neq 0$. Në mënyrë të njëjtë tregohet se edhe rasti $0\notin\sigma(AB)$ dhe $0\in\sigma(BA)$ nuk mund të realizohet. Përfundimisht, vlen, ose $0\in\sigma(AB)\cap\sigma(BA)$, ose $0\notin\sigma(AB)\cup\sigma(BA)$. Nga këtu dhe nga fakti se $\sigma(AB)\setminus\{0\}=\sigma(BA)\setminus\{0\}$, del se $\sigma(AB)=\sigma(BA)$. Me qenë se spektri është invariant ndaj shkallëzimit për një faktor, kemi $\sigma(AB)=\sigma(BA)=\lambda\sigma(AB)$.

(ii) Nëse $0\in\sigma(AB)$, e që sipas pjesës së mësipërme të vërtetimit nënkupton se $0\in\sigma(AB)=\sigma(BA)$, atëherë 0 është ose në spektrin e operatorit A ose në spektrin e operatorit B. Kështu që njëri prej tyre nuk ka invers të kufizuar. Në rastet tjera, kur 0 nuk është në spektrin e asnjërit prej operatorëve A dhe B, atëherë të dy operatorët në fjalë, e edhe vetë produkti i tyre AB, kanë inverse të kufizuara, kështu që $0\notin\sigma(AB)$.

Supozojmë se $\sigma(AB) \neq \{0\}$. Spektri i një operatori është bashkësi kompakte, kështu që bashkësia $\sigma(AB) = \lambda\sigma(AB)$, si bashkësi kompakte, ka një element, le ta quajmë γ, me intensitet, modul, maksimal. Nëse $|\lambda| > 1$, atëherë elementi $\lambda\gamma$ do të kishte modul $|\lambda\gamma| = |\lambda||\gamma| > |\gamma|$ dhe kështu nuk do ti takonte spektrit $\sigma(AB)$. Kjo tregon se $|\lambda| \leq 1$. Nëse e shumëzojmë $\sigma(AB) = \lambda\sigma(AB)$ me inversin e λ, fitojmë $\sigma(AB) = \lambda^{-1}\sigma(AB)$. Edhe këtu, nëse do të supozonim se $|\lambda^{-1}| \geq 1$, atëherë elementi $|\lambda^{-1}\gamma| = |\lambda^{-1}||\gamma| > |\gamma|$ do të kishte intensitet më të madh se maksimumi i bashkësisë kompakte në fjalë dhe, prandaj, përsëri vijmë në përfundimin se $\lambda^{-1}\gamma$ nuk është në spektrin $\sigma(AB)$. Pra, edhe këtu, $|\lambda^{-1}| \leq 1$, përkatësisht $|\lambda| \geq 1$. Mosbarazimet $|\lambda| \leq 1$ dhe $|\lambda| \geq 1$ sigurojnë që $|\lambda| = 1$.

(iii) Nëse $0 \notin \sigma(AB) = \sigma(BA)$, atëherë operatorët AB dhe BA, që të dy, kanë inverse të kufizuara, sepse spektrat e tyre shtrihen larg prej 0. Me fjalë tjera të dy operatorët, A dhe B, janë "1-1" dhe "mbi" dhe, prandaj, kanë inverse të kufizuar. ■

VËREJTJE 3.1.1 *Ky rezultat nënkupton, në veçanti, se $AB = \lambda BA (\neq O)$, me vetinë që $|\lambda| \neq 1$, mund të realizohet vetëm nëse operatori AB është operator kuazi-nilpotent.*

3.2 Operatorët λ – komutues me operatorët e vetëadjunguar

TEOREMË 3.2.1 [41] ***Le të jenë A dhe B operatorë të kufizuar, të tillë që $AB \neq O$ dhe $AB = \lambda BA$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Atëherë vlen:***

- ***(i)*** ***Nëse A ose B është operator i vetë-adjunguar, atëherë $\lambda \in \mathbb{R}$;***
- ***(ii)*** ***Nëse të dy operatorët A dhe B janë të vetë-adjunguar, atëherë $\lambda \in \{-1,1\}$;***
- ***(iii)*** ***Nëse A dhe B janë të vetë-adjunguar dhe njëri prej tyre edhe operator pozitiv, atëherë $\lambda = 1$.***

Vërtetim. (i) Le të supozojmë se A është operator i vetë-adjunguar, pra se $A = A^*$, kurse B është operator çfarëdo. Tani, kushti $AB = \lambda BA (\neq O)$, duke vepruar nga e djathta me operatorin e adjunguar të operatorit B, kemi

$$ABB^* = \lambda BAB^* = \lambda\bar{\lambda}^{-1}BB^*A.$$

Këtu kemi shfrytëzuar faktin se $AB = \lambda BA$, tërheq barazinë $B^*A^* = \bar{\lambda}A^*B^*$. Pasi që $A = A^*$, kemi $B^*A = \bar{\lambda}AB^*$. Prej këtu, $AB^* = \bar{\lambda}^{-1}B^*A$. Pra vërtetë $ABB^* = \lambda BAB^* = \lambda\bar{\lambda}^{-1}BB^*A$. Nga ana tjetër, operatori BAB^* është operator i vetë-adjunguar, kurse ekuacioni i fundit tregon se operatori ABB^* është shumëfish i një operatori të tillë, me spektër të barabartë me

$$\sigma(ABB^*) = \lambda\bar{\lambda}^{-1}\sigma(BB^*A) = \lambda\sigma(BAB^*) \subseteq \lambda\cdot[-\|BAB^*\|,\|BAB^*\|].$$

Sipas teoremës 3.1.2., vlen

$$\sigma(ABB^*) = \sigma(BB^*A).$$

Për më shumë, meqë operatorët A dhe BB^* janë operatorë të vetë-adjunguar, vlen $(ABB^*)^* = BB^*A^* = BB^*A$, kështu që vlen

$$\sigma(ABB^*) = \sigma(BB^*A) = \overline{\sigma(ABB^*)} \subseteq \lambda\cdot[-\|BAB^*\|,\|BAB^*\|].$$

Shumëzimi me λ e shkallëzon segmentin $[-\|BAB^*\|,\|BAB^*\|]$ në boshtin real, për një faktor $|\lambda|$ dhe njëkohësisht e rrotullon atë në rrafshin kompleks rreth origjinës. Pasi që spektri $\sigma(ABB^*)$ është invariant ndaj konjugimit, kjo nënkupton simetrinë e kësaj bashkësie në lidhje me refleksionin kundrejt boshtit real. Pasi që $\sigma(BB^*A) = \sigma(ABB^*) = \lambda\sigma(BAB^*) \neq \{0\}$, nga ku kemi $\lambda \in \mathbb{R}$ ose $\lambda \in i\mathbb{R}$. Në rast se $\lambda \in i\mathbb{R}$, atëherë për produktin $\lambda\bar{\lambda}^{-1}$ kemi ekuacionin $\lambda\bar{\lambda}^{-1} = -1$. Kjo e zëvendësuar në ekuacionin e mësipërm $ABB^* = \lambda BAB^* = \lambda\bar{\lambda}^{-1}BB^*A$ na tregon se $ABB^* = -BB^*A$. Duke vepruar në të dy anët e këtij ekuacioni, nga e djathta, me A, fitojmë ekuacionin $ABB^*A = -BB^*A^2$. Le të vërejmë se operatori nga ana e majtë e ekuacionit është operator jonegativ. Vërtetë,

$$(ABB^*A)^* = A^*(B^*)^*B^*A^* = ABB^*A$$

dhe

$$\left\langle ABB^*Ax \middle| x\right\rangle = \left\langle B^*Ax \middle| B^*A^*x\right\rangle = \left\langle B^*Ax \middle| B^*Ax\right\rangle = \|(B^*A)x\|^2 \geq 0$$

që, sipas përkufizimit të operatorit të vetë-adjunguar dhe jonegativ, tregon se operatori në fjalë është operator i vetë-adjunguar dhe jonegativ. Pra, ana e djathtë patjetër duhet të jetë operator i vetë-adjunguar, që nënkupton se operatorët BB^* dhe A^2 duhet të komutojnë. Tani nga ekuacioni $ABB^*A = -BB^*A^2$ del se $BB^*A^2 \le O$, kurse nga ana tjetër, meqenëse BB^* dhe A^2 janë operatorë jonegativ, pra $BB^*A^2 \ge O$. Prandaj, pasi që produkti i tyre është njëkohësisht jonegativ dhe jopozitiv, vlen $BB^*A^2 = O$, e që është në kundërshtim me supozimin e mësipërm se $AB \ne O$. Kështu që, përfundimisht $\lambda \notin i\mathbb{R}$ dhe ngel që me të vërtetë $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) Operatorët A dhe B le të jenë operatorë të vetë-adjunguar, pra le të vlejë $A = A^*$ dhe $B = B^*$. Atëherë, nga ekuacioni $AB = \lambda BA$, pas veprimit nga e djathta me B, fitojmë $AB^2 = \lambda BAB = \lambda^2 B^2 A$. Nga pjesa e parë e teoremës kemi $\lambda \in \mathbb{R}$, pra λBAB dhe kështu edhe operatori AB^2 është i vetë-adjunguar, që nënkupton se A komuton me B^2. Pra, $\lambda^2 = 1$, përkatësisht $\lambda \in \{-1,1\}$.

(iii) Pohimi në fjalë drejtpërdrejtë buron nga ekuacioni i fundit. Vërtetë, nëse supozojmë se operatori A është pozitiv, atëherë edhe operatori AB^2 si produkt i dy operatorëve pozitiv, është operator i tillë dhe natyrisht, nga kjo, del se operatori BAB është pozitiv gjithashtu. Pra, $\lambda = 1$. ■

VËREJTJE 3.2.1 ***Pohimet (i) dhe (ii) mund ti vërtetojmë edhe si më poshtë, duke përdorur teoremën e mirënjohur të Fuglede-Putnam-it. Kemi si më poshtë:***

(i) Supozojmë se A është operator i vetë-adjunguar. Meqenëse çdo operator i vetë-adjunguar njëkohësisht është edhe operator normal, kjo nënkupton se produkti λA, i operatorit A me një skalar λ, po ashtu është operator normal. Tani kemi mundësinë e përdorimit të teoremës së Fuglede-Putnam-it, kështu që nga $AB = \lambda BA$ rrjedh se $AB = \overline{\lambda} BA$. Tani, nga ky ekuacion dhe ekuacioni pararendës del se $\lambda - \overline{\lambda} = 0$. Kjo tregon se $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) le të marrim se A dhe B janë operatorë të vetë-adjunguar, pra se $A = A^*$ dhe $B = B^*$. Fillimisht tregojmë se në këtë rast operatorët AB dhe BA janë operatorë normal dhe komutues. Vërtetë, shënojmë me $T = AB$. Atëherë $T^* = BA$. Nga fakti se $AB = \lambda BA$, nga shënimet e mësipërme vlen $T = \lambda T^*$ dhe natyrisht se $TT^* = \lambda T^{*2}$. Nga ana tjetër edhe $T^*T = \lambda T^{*2}$. Duke i barazuar anë për anë ekuacionet e sapo shënuara, fitojmë $T^*T = TT^*$. Pra operatori AB është operator normal dhe njëkohësisht edhe komutues me operatorin BA. Në vijim, duke e shfrytëzuar pjesën e parë të vërtetimit, marrim $\lambda \in \mathbb{R}$. Nga ekuacioni

$$T = \lambda T^*$$

për rrjedhim ka ekuacionin

$$T^* = \lambda T$$

që e fitojmë pasi marrim konjugimin anë për anë të (3.3.3). Nëse ekuacionet $T = \lambda T^*$ dhe $T^* = \lambda T$ i mbledhim anë për anë, fitojmë

$$T + T^* = \lambda(T + T^*)$$

përkatësisht

$$\mathrm{Re}(T) = \lambda \,\mathrm{Re}(T)\,.$$

Pra,

$$(1-\lambda)\,\mathrm{Re}(T) = 0$$

Nëse i zbresim, atëherë fitojmë

$$T - T^* = -\lambda(T - T^*)$$

përkatësisht

$$(1+\lambda)\,\mathrm{Im}(T) = 0\,.$$

Por, meqenëse operatori $T = AB \neq O$, fitojmë se, ose $\mathrm{Re}(T) \neq 0$ ose $\mathrm{Im}(T) \neq 0$. Sigurisht, mund të paraqitet edhe rasti $\mathrm{Re}(T) \neq 0$ dhe $\mathrm{Im}(T) \neq 0$. Sidoqoftë, nga se u tha më sipër, del se $\lambda \in \{-1,1\}$. ■

Le të përmendim se pohimi (i), në teoremën paraprake mund të përgjithësohet. Kemi këtë:

RRJEDHIM 3.2.1 ***Supozojmë se*** $A, B, C \in B(H)$ ***dhe se operatorët*** A ***dhe*** C ***janë operatorë të vetë-adjunguar me vetinë*** $AB = \lambda BC \neq O, \lambda \in \mathbb{C}$***, atëherë*** $\lambda \in \mathbb{R}$.

Vërtetim. Edhe këtu kemi mundësinë e përdorimit të teoremës Fuglede-Putnam. Në fakt operatori i vetë-adjunguar C është operator normal, kështu që edhe λC është i tillë. Sipas teoremës së Fuglede-Putnam, nga ekuacioni $AB=\lambda BC$ del se $A^*B=\overline{\lambda}BC^*$. Por, nga supozimi ynë, $A=A^*$ dhe $C=C^*$ dhe prej këtu edhe $AB=\overline{\lambda}BC$. Duke i zbritur anë për anë ekuacionet e mësipërme, fitojmë $(\lambda-\overline{\lambda})=0$, përkatësisht $\lambda\in\mathbb{R}$. Kjo edhe duhej vërtetuar. ■

RRJEDHIM 3.2.2 **Supozojmë se** $A,B,C\in B(H)$ **dhe se operatori** A **është operator i vetë-adjunguar dhe** C **operator normal, me vetinë** $AB=\lambda BC\neq O,\lambda\in\mathbb{C}$ **, atëherë** λC **është operator i vetë-adjunguar.**

Vërtetim. Nga ekuacioni $AB=\lambda BC$, pas shfrytëzimit të teoremës së Fuglede-Putnam-it për operatorët normal A dhe kemi C, kemi $A^*B=\overline{\lambda}BC^*$. Mirëpo, operatori A është operator i vetë-adjunguar, kështu që vlen $AB=\overline{\lambda}BC^*$. Tani, duke i barazuar anë për anë, fitojmë se $\lambda BC=\overline{\lambda}BC^*$. Në fakt, kemi $B(\lambda C-\overline{\lambda}C^*)=O$. Meqenëse sipas supozimit, $B\neq O$, del se $\lambda C-\overline{\lambda}C^*=O$, përkatësisht se $\lambda C=(\lambda C)^*$ që edhe tregon se operatori normal λC është operator i vet-adjunguar. ■

TEOREMË 3.2.2 **Le të jetë** $AB=\lambda BA$ **dhe** $AB\neq O$ **si dhe operatori** A **le të ketë invers të kufizuar. Atëherë vlen** $\sigma(B)=\lambda\cdot\sigma(B)$**. Për më tepër, nëse** $\sigma(B)\neq\{0\}$ **, ose nëse** A **është operator unitar, atëherë** $|\lambda|=1$**.**

Vërtetim. Operatori A meqë ka invers të kufizuar, kjo do të thotë se është element i rregullt, pra me invers, në $B(H)$ dhe kemi mundësinë të shumëzojmë, veprojmë, me A^{-1}, nga e djathta, ekuacionin $AB=\lambda BA$. Kjo na jep $ABA^{-1}=\lambda B$. Meqenëse transformimi i ngjashmërisë, spektrin e operatorit përkatës e lë të pandryshuar, kemi $\sigma(B)=\sigma(ABA^{-1})=\sigma(\lambda B)=\lambda\sigma(B)$. Tani le të supozojmë se $\sigma(B)\neq\{0\}$. Meqenëse spektri është bashkësi kompakte, ekziston elementi me modul maksimal i tij, le të themi β. Nëse $|\lambda|\geq 1$, atëherë për modulin $|\lambda\beta|$ të elementit $\lambda\beta$ do të vlente $|\lambda\beta|\geq|\beta|$ dhe ky element do të ishte jashtë spektrit të operatorit të dhënë. Pra, $|\lambda|\leq 1$ Ngjashëm, tregohet se $|\lambda|\geq 1$. Përfundimisht, $|\lambda|=1$. Nëse do të supozonim, nga ana tjetër se operatori A është operator unitar, d.m.th., se $A^*A=AA^*=I$, atëherë, nga fakti se

$ABA^{-1} = \lambda B$, duke marrë normën, kemi $\| B \| = \| ABA^{-1} \| = \| \lambda B \| = |\lambda| \cdot \| B \|$. Rrjedhimisht, $|\lambda| = 1$. ■

3.3. Operatorët λ-komutues me operatorët normal

Më sipër në studimin e çifteve të operatorëve λ-komutues kemi marrë në shqyrtim rastet kur së paku njëri nga operatorët është operator i vetë-adjunguar, respektivisht hermitian. Në vijim do të shqyrtojmë situatën kur së paku njëri prej operatorëve është operator normal.

TEOREMË 3.3.1 ***Le të jenë*** $A, B \in B(H)$ ***operatorë të tillë që*** $AB = \lambda BA \neq O$**,** $\lambda \in \mathbb{C}$**. *Nëse njëri prej operatorëve*** A ***dhe*** B ***është i vetë-adjunguar, kurse tjetri operator normal, atëherë*** $\lambda \in \{-1,1\}$**. *Nëse të dy operatorët*** A ***dhe*** B ***janë operatorë normal, atëherë*** $|\lambda| = 1$**.**

Për vërtetimin e teoremës së më sipërme nevojitet ky rezultat në lidhje me katrorin e normës së operatorit të çfarëdoshëm $T \in B(H)$. Vlen:

$$\begin{aligned} \| T \|^2 &= [\sup\{\| Tx \| : \| x \| = 1, x \in H\}]^2 \\ &= [\sup\{\| Tx \|^2 : \| x \| = 1, x \in H\}] \\ &= \sup\{< T^*Tx \mid x > : \| x \| = 1, x \in H\} = \| T^*T \| \end{aligned}$$

Pra, $\| T \|^2 = \| T^*T \|$. Me këtë rezultat, për katrorin e normës së produktit AB, ku $A \in B(H)$ operator normal, kemi

$$\| AB \|^2 = \| (AB)^*(AB) \| = \| B^*A^*AB \| = \| B^*AA^*B \| = \| A^*B \|^2$$

Ngjashëm nëse $B \in B(H)$ dhe $B \in B(H)$ operator normal, kemi

$$\| BA \|^2 = \| (BA)^*(BA) \| = \| A^*B^*BA \| = \| A^*BB^*A \| = \| B^*A \|^2 = \| (B^*A)^* \|^2 = \| A^*B \|^2 .$$

Këtu, le të përmendim se kemi shfrytëzuar faktin se për cilindo operator të kufizuar $T \in B(H)$, vlen $\| T \| = \| T^* \|$.

Vërtetimi i teoremës 3.3.1. Le të jetë operatori $B \in B(H)$ operator i vetë-adjunguar dhe $A \in B(H)$ operator normal. Teorema Fuglede-Putnam na mundëson të përfundojmë, nga $AB=\lambda BA$, se $A^*B=\overline{\lambda}BA^*$. Nga këtu, $A^*BA=\overline{\lambda}BA^*A$, përkatësisht $A^*\lambda^{-1}AB=\overline{\lambda}BA^*A$. Kjo nënkupton se $A^*AB=\lambda\overline{\lambda}BA^*A$. Operatori A^*A është operator pozitiv, kurse $B\in B(H)$ operator i vetë-adjunguar, kështu që jemi në kushtet e Teoremës 3.1.1. Kjo më tutje nënkupton se $\lambda\overline{\lambda}=1$. Me fjalë tjera $|\lambda|^2=1$ ose $\lambda\in\{-1,1\}$.

Le të supozojmë se operatorët A dhe B janë operatorë normal. Atëherë, meqenëse A normal, $\|AB\|=\|A^*B\|$. Meqenëse B normal, $\|BA\|=\|(A^*B)^*\|=\|A^*B\|$. Nga këto ekuacione kemi $\|AB\|=\|BA\|=|\lambda|\cdot\|AB\|$. Pasi kemi supozuar që $AB\neq O$, kemi $|\lambda|=1$.

Sigurisht se një rrugë tjetër e vërtetimit do të ishte përmes teoremës Fuglede-Putnam. Rikujtojmë se për një operator normal edhe operatori i adjunguar i tij është normal. Ekuacioni $AB=\lambda BA$, pas konjugimit anë për anë, merr formën $B^*A^*=\overline{\lambda}A^*B^*$. Sipas teoremës Fuglede-Putnam, për operatorin B që komuton me operatorët normal A dhe λA, fitojmë $A^*B=\overline{\lambda}BA^*$, kurse për operatorin A^*, që komuton me operatorët normal B^* dhe $\overline{\lambda}B^*$, kemi $BA^*=\lambda A^*B$. Tani

$$A^*B=\overline{\lambda}BA^*=\overline{\lambda}\lambda A^*B=|\lambda|^2\ A^*B$$

Meqenëse A është operator normal dhe $AB\neq O$, kemi $\|A^*Bx\|^2=\|A^*(Bx)\|^2=(A\text{ normal})=\|ABx\|^2\neq 0$. Pra, $A^*B\neq O$. Përfundimisht, $|\lambda|=1$. Kjo edhe duhej vërtetuar. ■

Produkti i dy operatorëve të kufizuar normal $\lambda-$komutues është operator normal. Më saktë, kemi këtë:

TEOREMË 3.3.2 ***Le të jenë*** $A,B\in B(H)$ ***operatorë normal, të tillë që*** $AB=\lambda BA\neq O,\ \lambda\in\mathbb{C}$***. Atëherë*** AB ***(edhe*** BA***) janë operatorë normal për çdo numër*** $\lambda\in\mathbb{C}$***, të ndryshëm nga zero.***

RRJEDHIM 3.3.1 ***Në kushtet e teoremës së më sipërme, operatorët*** AB ***dhe*** BA ***janë operatorë normal komutues.***

Kanë vend rrjedhimet:

RRJEDHIM 3.3.2 ***Le të jenë*** $A, B \in B(H)$ ***të tillë që*** $AB = \lambda BA$ ***dhe*** B ***operator normal, ku*** $B = H + iK$***,*** H, K ***të vetë-adjunguar,*** $HK = KH$ ***dhe*** $\lambda \in \mathbb{R}$***. Atëherë kemi*** $AH = \lambda HA$ ***dhe*** $AK = \lambda KA$***.***

Vërtetim. Nga $AB = \lambda BA$ dhe fakti që B dhe λB, duke përdorur teoremën e Fuglede-Putnam-it, fitojmë

$$AB^* = \lambda B^* A$$

Nëse ekuacionet (3.) dhe (3.) njëherë i mbledhim dhe herën tjetër i zbresim, fitojmë

$$A(B + B^*) = \lambda(B + B^*)A$$

Dhe

$$A(B - B^*) = \lambda(B - B^*)A$$

Meqenëse $B + B^* = 2H$ dhe $B - B^* = 2iK$, fitojmë $AH = \lambda HA$ dhe $AK = \lambda KA$. ■

RRJEDHIM 3.3.3 ***Le të jenë*** $A, B, C \in B(H)$ ***të tillë që*** $AB = \lambda BC$***,*** A ***dhe*** C ***operatorë normal,*** $A = H_1 + iK_1$***,*** $C = H_2 + iK_2$***, ku*** H_1, K_1, H_2, K_2 ***operatorë të vetë-adjunguar me vetinë*** $H_1K_1 = K_1H_1$***,*** $H_2K_2 = K_2H_2$ ***dhe*** $\lambda \in \mathbb{R}$***. Atëherë*** $H_1B = \lambda BH_2$ ***dhe*** $K_1B = \lambda BK_2$***.***

Vërtetim. Në mënyrë analoge si rrjedhimi më sipër.

Nëse dobësojmë kushtin që operatorët të jenë normal, fitojmë rezultatin e shprehur në teoremën në vijim.

TEOREMË 3.3.3 [48] ***Le të jenë*** $A, B \in B(H)$***, operatorë të tillë që gëzojnë vetinë*** $AB = \lambda BA \neq O$***,*** $\lambda \in \mathbb{C}$***. Atëherë:***

(1) Nëse operatorët A^* ***dhe*** B ***janë operator hipernormal, atëherë*** $|\lambda| \leq 1$***;***

(2) Nëse operatorët B^* ***dhe*** A ***janë operatorë hipernormal, atëherë,*** $|\lambda| \geq 1$***.***

Vërtetim. (1) Kemi me sa vijon

$$\begin{aligned}|\lambda|\|BA\| &= \|AB\| = \|(AB)^*(AB)\|^{1/2}\\ &= \|B^*A^*AB\|^{1/2} \le \|B^*AA^*B\|^{1/2}\\ &= \|(A^*B)^*(A^*B)\|^{1/2} = \|A^*B\|\\ &= \|(A^*B)^*\| = \|A^*BB^*A\|^{1/2} \le \|A^*B^*BA\|^{1/2} = \|BA\|\end{aligned}$$

Që $|\lambda|\|BA\| \le \|BA\|$, duhet patjetër të vlejë $|\lambda| \le 1$.

(2) Këtu operatorët B^* dhe A janë operatorë hipernormal, prandaj

$$\begin{aligned}|\lambda|\|BA\| &= \|AB\| = \|(AB)^*(AB)\|^{1/2}\\ &= \|B^*A^*AB\|^{1/2} \ge \|B^*AA^*B\|^{1/2}\\ &= \|(A^*B)^*(A^*B)\|^{1/2} = \|A^*B\|\\ &= \|(A^*B)^*\| = \|A^*BB^*A\|^{1/2} \ge \|A^*B^*BA\|^{1/2} = \|BA\|\end{aligned}$$

Pra, $|\lambda|\|BA\| \ge \|BA\|$. Ky mosbarazim, për $\|BA\| \ge 0$, plotësohet kur $|\lambda| \ge 1$. Teorema u vërtetua. ■

RRJEDHIM 3.3.4 ***Le të jenë*** $A,B \in B(H)$***, operatorë të tillë që gëzojnë vetinë*** $AB = \lambda BA \ne O$***,*** $\lambda \in \mathbb{C}$***. Atëherë:***

(1) Nëse A ***është operator normal dhe*** B ***është operator hipernormal, atëherë*** $|\lambda| \le 1$

(2) Nëse A ***është operator hipernormal dhe*** B ***operator normal, atëherë,*** $|\lambda| \ge 1$***.***

Vërtetim. (1) Nëse A është operator normal, atëherë edhe A^* është i tillë. Meqë çdo operator normal është edhe hipernormal, kemi kaluar në kushtet e teoremës paraprake dhe, kështu, $|\lambda| \le 1$. Me analogji vërtetohet edhe (2) e rrjedhimit të mësipërm.

TEOREMË 3.3.4 ***Le të jenë*** $A,B \in B(H)$***, operatorë të tillë që gëzojnë vetinë*** $AB = \lambda BA \ne O$ ***dhe*** $\lambda \in \mathbb{C}$ ***me vetinë*** $|\lambda| \ge 1$***. Nëse*** A^* ***dhe*** B ***janë operator hipernormal, atëherë produktet e tyre*** A^*B ***dhe*** BA^* ***janë operatorë hipernormal.***

Vërtetim. Nga njëra anë kemi:

$$(A^*B)^*(A^*B) = B^*AA^*B \ge B^*A^*AB$$

Mosbarazimi i fundit është pasojë e supozimit se A^* është operator hipernormal. Tani, nga ana tjetër, kemi:

$$
\begin{aligned}
(A^*B)(A^*B)^* &= A^*BB^*A \le A^*B^*BA \\
&= \overline{\lambda}^{-1}\lambda^{-1}B^*A^*BA = |\lambda|^{-2}\ B^*A^*BA \le B^*A^*BA
\end{aligned}
$$

Nga këto dy mosbarazime fitojmë se $(A^*B)^*(A^*B) \ge (A^*B)(A^*B)^*$ që edhe tregon se operatori A^*B është operator hipernormal. Në mënyrë analoge tregohet se edhe operatori BA^* është hipernormal. ■

Në mënyrë të ngjashme mund të vërtetojmë këtë:

RRJEDHIM 3.3.5 ***Le të jenë*** $A, B \in B(H)$***, operatorë të tillë që gëzojnë vetinë*** $AB = \lambda BA \ne O$ ***dhe*** $\lambda \in \mathbb{C}$ ***me vetinë*** $|\lambda| \le 1$***. Nëse*** A ***dhe*** B^* ***janë operator hipernormal, atëherë produktet e tyre*** AB^* ***dhe*** B^*A ***janë operatorë hipernormal.***

Vërtetim. Kemi

$$
\begin{aligned}
\|(AB^*)^*x\|^2 &= \left\langle (AB^*)^*x \middle| (AB^*)^*x \right\rangle = \left\langle BA^*x \middle| BA^*x \right\rangle \\
&= \left\langle AB^*BA^*x \middle| x \right\rangle \le \left\langle ABB^*A^*x \middle| x \right\rangle = \left\langle \lambda BA\overline{\lambda}A^*B^*x \middle| x \right\rangle \\
&= |\lambda|^2 \left\langle BAA^*B^*x \middle| x \right\rangle \le \left\langle BA^*AB^*x \middle| x \right\rangle \\
&= \left\langle AB^*x \middle| AB^*x \right\rangle = \|(AB^*)x\|^2
\end{aligned}
$$

Nga këtu, del se $\|(AB^*)^*x\| \le \|(AB^*)x\|$. Pra, AB^* është operator hipernormal. Në mënyrë analoge, mund të tregojmë se B^*A është, po ashtu, operator hipernormal. Rrjedhimi u vërtetua. ■

Kemi theksuar se produkti i dy operatorëve hipernormal A dhe B, mes tjerash, është operator hipernormal nëse A komuton me B^* (ose nëse B komuton me A^*). Mund të formulojmë këtë

TEOREMË 3.3.5 ***Nëse*** $A, B \in B(H)$ ***janë operatorë të tillë hipernormal që gëzojnë vetinë*** $AB^* = \lambda B^*A \ne O$***,*** $\lambda \in \mathbb{C}$ ***dhe*** $|\lambda| \le 1$***. Atëherë operatorët*** AB ***dhe*** BA ***janë operatorë hipernormal.***

Vërtetim. Kemi si më poshtë

$$
\begin{aligned}
(AB)^*(AB) &= B^*A^*AB \ge B^*AA^*B \\
&= \lambda^{-1}AB^*\overline{\lambda}^{-1}BA^* = |\lambda|^{-2}\ AB^*BA^* \\
&\ge AB^*BA^* \ge ABB^*A^* = (AB)(AB)^*
\end{aligned}
$$

Kështu, kemi vërtetuar se AB është operator hipernormal.

Në mënyrë të ngjashme mund të tregojmë se edhe BA është operator hipernormal. Në fakt kemi

$$\begin{aligned}\|(BA)^*x\|^2 &= \left\langle (BA)^*x \middle| (BA)^*x \right\rangle = \left\langle A^*B^*x \middle| A^*B^*x \right\rangle \\ &= \left\langle BAA^*B^*x \middle| x \right\rangle \le \left\langle BA^*AB^*x \middle| x \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\lambda}\lambda A^*BB^*Ax \middle| x \right\rangle = |\lambda|^2 \left\langle A^*BB^*Ax \middle| x \right\rangle \\ &\le \left\langle A^*BB^*Ax \middle| x \right\rangle \le \left\langle A^*B^*BAx \middle| x \right\rangle \\ &= \left\langle BAx \middle| BAx \right\rangle = \|(BA)x\|^2\end{aligned}$$

Pra, $\|(BA)^*x\|^2 \le \|(BA)x\|^2$, respektivisht $\|(BA)^*x\| \le \|(BA)x\|$ me çka vërtetimi është kompletuar. ■

Japim një vërtrtim të detajuar të rezultatit të mëposhtëm.

TEOREMË. 3.3.6 [49] ***Le të jetë*** A ***operator hipernormal dhe*** B ***operator normal, të tillë që*** $AB = \lambda BA \ne O$***,*** $\lambda \in \mathbb{C}$***. Atëherë ekuivalente janë pohimet:***

(1) AB ***është operator hipernormal;***

(2) $\sigma(AB) \ne \{0\}$***;***

(3) $|\lambda| = 1$***.***

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2) Le të jetë A operator hipernormal. Supozojmë të kundërtën se $\sigma(AB) = \{0\}$. Kjo nënkupton se operatori AB është operator nilpotent. Mirëpo, operatori i vetëm hipernormal dhe nilpotent është operatori zero, pra del se $AB = O$. Kjo është në kundërshtim me supozimin $AB = \lambda BA \ne O$, respektivisht se $AB \ne O$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Nëse $\sigma(AB) \ne \{0\}$, atëherë për shkak të Lemës 3.1.1., vlen $|\lambda| = 1$. Për të përfunduar vërtetimin mjafton të tregojmë se (3) $\Rightarrow$ (1).

(3) $\Rightarrow$ (1) Për këtë qëllim veprojmë si në vijim. Duhet të tregojmë se $(AB)^*(AB) \ge (AB)(AB)^*$, përkatësisht se $\|(AB)^*x\| \le \|(AB)x\|$, për $x \in H$. Para së gjithash, për shkak se B dhe λB janë operatorë normal, mund të përdorim teoremën e Fuglede-Putnam-it. Meqë $AB = \lambda BA$, kemi këto ekuacione $AB^* = \overline{\lambda} B^* A$ dhe $BA^* = \lambda A^* B$. Tani, llogaritim

$$\begin{aligned}\|(AB)^*x\|^2 &= \left\langle (AB)^*x \middle| (AB)^*x \right\rangle = \left\langle B^*A^*x \middle| B^*A^*x \right\rangle \\ &= \left\langle ABB^*A^*x \middle| x \right\rangle = \left\langle AB^*BA^*x \middle| x \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\lambda}B^*A\lambda A^*Bx \middle| x \right\rangle = |\lambda|^2 \left\langle B^*AA^*Bx \middle| x \right\rangle \\ &\le \left\langle B^*A^*ABx \middle| x \right\rangle = \left\langle ABx \middle| ABx \right\rangle = \|(AB)x\|^2\end{aligned}$$

Pra, $\|(AB)^*x\|^2 \le \|(AB)x\|^2$, respektivisht $\|(AB)^*x\| \le \|(AB)x\|$. Me të vërtetë operatori AB është operator hipernormal. ■

RRJEDHIM 3.3.6 ***Teorema 3.2.6 vlen edhe sikur në vend të operatorit*** AB ***të merrnim operatorin*** BA***.***

Vërtetim. Vërtetojmë vetëm (3) $\Rightarrow$ (1). Pra, le të vlejë $|\lambda|=1$. Atëherë

$$\begin{aligned}\|(BA)^*x\|^2 &= \left\langle (BA)^*x \middle| (BA)^*x \right\rangle = \left\langle A^*B^*x \middle| A^*B^*x \right\rangle \\ &= \left\langle BAA^*B^*x \middle| x \right\rangle \le \left\langle BA^*AB^*x \middle| x \right\rangle \\ &= \left\langle \overline{\lambda}\lambda A^*BB^*Ax \middle| x \right\rangle = |\lambda|^2 \left\langle A^*BB^*Ax \middle| x \right\rangle \\ &= \left\langle A^*B^*BAx \middle| x \right\rangle = \left\langle BAx \middle| BAx \right\rangle = \|(BA)x\|^2\end{aligned}$$

Me këtë vërtetimi ka mbaruar. ■

Në çiftin e operatorëve (A, B), mund të zbutim akoma kushtet mbi njërin prej operatorëve. Në fakt, nëse operatorin B e mbajmë të jetë akoma operator normal, kurse për operatorin A supozojmë të jetë operator kuazihipernormal, atëherë kemi këtë:

TEOREMË 3.3.7 ***Le të jenë*** A ***operator kuazihipernormal dhe*** B ***operator normal, të kufizuar, të tillë që të gëzojnë vetinë*** $AB = \lambda BA \neq O$***,*** $\lambda \in \mathbb{C}$***. Atëherë, janë ekuivalente pohimet:***

(1) AB ***është operator kuazihipernormal;***

(2) $\sigma(AB) \neq \{0\}$***;***

(3) $|\lambda| = 1$***.***

Vërtetim. Rrjedhimet (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) janë të qarta nga ajo që është shkruar më sipër. Për të mbyllur vërtetimin, le të tregojmë se vlen (3) $\Rightarrow$ (1). Për këtë qëllim, para së gjithash, le të vërejmë se, nga $AB = \lambda BA$ vlen $B^* A^* = \overline{\lambda} A^* B^*$. Për shkak të teoremës Fuglede-Putnam vlejnë ekuacionet $AB^* = \overline{\lambda} B^* A$, $B^* A = \overline{\lambda}^{-1} AB^*$ dhe $A^* B = \lambda^{-1} BA^*$

Provojmë se vlen mosbarazimi $\|(AB)^*(AB)x\| \le \|(AB)^2 x\|$. Kemi si më poshtë:

$$
\begin{aligned}
\|(AB)^*(AB)x\|^2 &= \left\langle (AB)^*(AB)x \,\middle|\, (AB)^*(AB)x \right\rangle \\
&= \left\langle B^* A^* ABB^* A^* ABx \,\middle|\, x \right\rangle \\
&= \left\langle B^* A^* AB^* BA^* ABx \,\middle|\, x \right\rangle \\
&= \left\langle \overline{\lambda}\lambda B^* A^* B^* AA^* BABx \,\middle|\, x \right\rangle \\
&= |\lambda|^2 \left\langle \frac{1}{|\lambda|^2} B^* B^* A^* AA^* ABBx \,\middle|\, x \right\rangle \\
&= \left\langle B^* B^* A^* AA^* ABBx \,\middle|\, x \right\rangle \le \left\langle B^* B^* A^* A^* AABBx \,\middle|\, x \right\rangle \\
&= \left\langle AABBx \,\middle|\, AABBx \right\rangle = \left\langle \lambda ABABx \,\middle|\, \lambda ABABx \right\rangle \\
&= |\lambda|^2 \left\langle ABABx \,\middle|\, ABABx \right\rangle = \left\langle (AB)^2 x \,\middle|\, (AB)^2 x \right\rangle = \|(AB)^2 x\|^2
\end{aligned}
$$

Duke krahasuar fillimin dhe mbarimin, fitojmë $\|(AB)^*(AB)x\|^2 \le \|(AB)^2 x\|^2$, përkatësisht se $\|(AB)^*(AB)x\| \le \|(AB)^2 x\|$. Kjo edhe tregon se operatori AB është operator kuazihipernormal. ■

Vlen edhe kjo teoremë me përfundimet sikurse ato në teoremën e mësipërme:

TEOREMË 3.3.8 [48] ***Le të jetë*** A ***operator paranormal dhe*** B ***operator izometrik, të tillë që*** $AB = \lambda BA \ne O$***. Janë ekuivalente pohimet***

(1) AB ***është operator paranormal;***

(2) $\sigma(AB) \ne \{0\}$***;***

(3) $|\lambda| = 1$***.***

RRJEDHIM 3.3.7 ***Nëse*** $|\lambda| = 1$***, atëherë edhe operatori*** BA ***është operator paranormal.*** ■

3.4. Operatorët (λ,μ)-komutues

Siç kemi theksuar në kreun paraprak, produkti i dy operatorëve hipernormal A dhe B, pra AB dhe BA, është operator hipernormal sa herë që operatori A komuton me operatorin B^*. Në mënyrë të ngjashme mund të vijmë në përfundimin se, nëse operatorët A^* dhe B janë hipernormal dhe $AB = BA$, atëherë operatorët A^*B dhe BA^* janë operatorë hipernormal. Ky është rast i veçantë i Rrjedhimit 3.3.5.

Le të jetë A operator kuzihipernormal, kurse B operator hipernormal. Atëherë, një teoremë analoge me teoremën 3.3.4 vështirë të realizohet. Këtu nuk mund të përdorim teoremën e Fuglede-Putnam-it. Ashtu si në shumë raste tjera, edhe këtu, përdorim forma, kushte tjera të komutimit të operatorëve. Kështu, një mundësi do të ishte të shfrytëzonim komutativitetin e dyfishtë. Të udhëhequr nga kjo ide, japim përkufizimin në vijim:

Përkufizim 3.4.1 *Themi se operatorët A dhe B janë operatorë $(\lambda,\mu)-$ komutues, nëse plotësojnë kushtet $AB = \lambda BA \neq O$ dhe $AB^* = \mu B^* A \neq O$, $\lambda \in \mathbb{C}, \mu \in \mathbb{C}$.*

Mbështetur në këtë përkufizim, marrim këtë

TEOREMË 3.4.1 ***Le të jenë A dhe B operatorë të kufizuar $(\lambda,\mu)-$komutues, të tillë që A operator kuazihipernormal, kurse B operator hipernormal si dhe nëse $|\mu| \leq |\lambda| \leq 1$, atëherë AB është operator kuazihipernormal.***

Vërtetim. Në fillim shkruajmë ekuacionet që do t'i përdorim në vijim. $AB = \lambda BA$, $B^*A^* = \overline{\lambda} A^* B^*$, $BA = \lambda^{-1} AB$, $A^*B^* = \overline{\lambda}^{-1} B^* A^*$, $AB^* = \mu B^* A$, $BA^* = \overline{\mu} A^* B$, $B^* A = \mu^{-1} AB^*$, $A^* B = \overline{\mu}^{-1} BA^*$. Tani llogaritim

$$
\begin{aligned}
&\| (AB)^*(AB)x \|^2 = \left\langle (AB)^*(AB)x \middle| (AB)^*(AB)x \right\rangle \\
&= \left\langle (AB)^*(AB)(AB)^*(AB)x \middle| x \right\rangle = \left\langle B^*A^*ABB^*A^*ABx \middle| x \right\rangle \\
&\le \left\langle B^*A^*AB^*BA^*ABx \middle| x \right\rangle = \left\langle B^*A^*\mu B^*A\overline{\mu}A^*BABx \middle| x \right\rangle \\
&= \left\langle \mu\overline{\mu}\overline{\lambda}^{-1}\lambda^{-1}B^*B^*A^*AA^*ABBx \middle| x \right\rangle = \frac{|\mu|^2}{|\lambda|^2}\left\langle B^*B^*A^*AA^*ABBx \middle| x \right\rangle \\
&\le \left\langle B^*B^*A^*AA^*ABBx \middle| x \right\rangle \le \left\langle B^*B^*A^*A^*AABBx \middle| x \right\rangle \\
&= \left\langle AABBx \middle| AABBx \right\rangle = \left\langle \lambda ABABx \middle| \lambda ABABx \right\rangle \\
&= |\lambda|^2 \left\langle ABABx \middle| ABABx \right\rangle \le \left\langle ABABx \middle| ABABx \right\rangle \\
&= \left\langle (AB)^2x \middle| (AB)^2x \right\rangle = \| (AB)^2x \|^2
\end{aligned}
$$

Shikojmë fillimin dhe mbarimin, fitojmë $\| (AB)^*(AB)x \|^2 \le \| (AB)^2x \|^2$, respektivisht $\| (AB)^*(AB)x \| \le \| (AB)^2x \|$. Kjo tregon se operatori AB është operator kuazihipernormal. ■

TEOREMË 3.4.2 ***Le të jenë A dhe B operatorë të kufizuar $(\lambda, \mu)-$komutues, të tillë që A operator kuazihipernormal, kurse B operator izometrik si dhe $|\mu| \ge |\lambda| \ge 1$. Atëherë AB është operator kuazihipernormal.***

Vërtetim. Kemi

$$
\begin{aligned}
&\| (AB)^*(AB)x \| = \| B^*A^*ABx \| \\
&= \| \lambda B^*A^*BAx \| \;(\text{sepse } AB = \lambda BA) \\
&= \| \lambda\overline{\mu}^{-1}B^*BA^*Ax \| \;(\text{sepse } A^*B = \overline{\mu}^{-1}BA^*) \\
&= |\lambda / \overline{\mu}| \| B^*BA^*Ax \| = (|\lambda| / |\overline{\mu}|) \| B^*BA^*Ax \| \\
&\le \| A^*Ax \| \;(\text{sepse } B \text{ është operator izometrik dhe } |\lambda| / |\overline{\mu}| \le 1) \\
&\le \| AAx \| \;(\text{sepse } A \text{ është operator kuazihipernormal}) \\
&= \| B^2(A^2x) \| \;(\text{sepse } B \text{ është operator izometrik}) \\
&= \| BBAAx \| = \| \lambda^{-3}ABABx \| = |1/\lambda^3| \| ABABx \| \\
&= (1/|\lambda|^3) \| ABABx \| \le \| (AB)^2x \|
\end{aligned}
$$

Pasi që $\| (AB)^*(AB)x \| \le \| (AB)^2x \|$, vërtetimi është kompletuar. ■

TEOREMË 3.4.3 ***Le të jenë A dhe B operatorë të kufizuar $(\lambda, \mu)-$komutues, të tillë që A operator kuazihipernormal, kurse B operator izometrik. Atëherë AB është operator kuazihipernormal sa herë që $|\lambda| \ge 1$ dhe $|\mu| \ge 1$.***

Vërtetim. Kemi këto llogaritje

$$
\begin{aligned}
\|(BA)^*(BA)x\| &= \|A^*B^*BAx\| \\
&= \|\overline{\lambda}^{-1}B^*A^*BAx\| \ \text{(sepse } A^*B^* = \overline{\lambda}^{-1}B^*A^*) \\
&= \|\overline{\lambda}^{-1}\overline{\mu}^{-1}B^*BA^*Ax\| \ \text{(sepse } A^*B = \overline{\mu}^{-1}BA^*) \\
&= (1/|\overline{\lambda}\overline{\mu}|)\|B^*BA^*Ax\| = (1/|\overline{\lambda}||\overline{\mu}|)\|B^*BA^*Ax\| \\
&\le \|A^*Ax\| \ \text{(sepse } B \text{ është izometrik dhe } 1/|\overline{\lambda}||\overline{\mu}| \le 1) \\
&\le \|AAx\| \ \text{(sepse } A \text{ është kuazihipernormal)} \\
&= \|B^2(A^2x)\| \ \text{(sepse } B \text{ është izometrik)} \\
&= \|BBAAx\| \\
&= \|\lambda^{-1}BABAx\| \\
&= |1/\lambda|\,\|BABAx\| = (1/|\lambda|)\|BABAx\| \\
&\le \|(BA)^2x\| \ \text{(sepse } |\lambda| \ge 1)
\end{aligned}
$$

Teorema u vërtetua. ■

KREU 4

---

4. KLASA OPERATORËSH DHE PRINCIPI I PAPËRCAKTUESHMËRISË

4.1 Një vështrim i shkurtër mbi principin e papërcaktueshmërisë të Heisenberg-ut

Principi i papërcaktueshmërisë ka tërhequr vëmendje të gjerë në mesin e matematikanëve. Fillimisht qe formuluar si princip i papërcaktueshmërisë në mekanikën kuantike nga ana e Heisenberg-ut në vitin 1927 kurse, më vonë, nga ana e Weyl-it iu dha interpretim si një mosbarazim që solli zgjerimet teorike nga këndvështrimi i operatorëve të llojeve të ndryshme. Natyrisht, përderisa mekanika klasike mund të interpretohet me algjebra komutative, mekanika kuantike nga ana tjetër, kërkon algjebra jokomutative. Me fjalë tjera, në thelbin e principeve të papërcaktueshmërisë qëndrojnë operatorët jokomutues. Ajo çka ne do të mundohemi të prezantojmë këtu lidhet me qasjen operatoriale të principit të papërcaktueshmërisë së Heisenberg-ut dhe variacioneve, formave të ndryshme të tij. Do të përkufizojmë komutatorin e dy operatorëve në një hapësirë të Hilbertit dhe do të provojmë forma të ndryshme të mosbarazimeve të ashtuquajtura të papërcaktueshmërisë. Historikisht, e dimë se mekanika kuantike bazohet në madhësitë e ashtuquajtura observabla dhe në operatorët përkatës, shoqërues të tyre të cilët për shkak të interpretimit të nevojshëm fizik duhet të ishin operatorë të vetë-adjunguar me qëllim që vlerat e tyre vetjake të ishin numra real ashtu siç janë edhe fenomenet fizike. Mirëpo, në këtë kapitull ne do të ndërtojmë mosbarazime përkatëse duke e tejkaluar këtë kufizim të “dhimbshëm”, pra që operatorët të jenë të vetë-adjunguar. Në lidhje me kufirin e sipërm të mosbarazimeve të papërcaktueshmërisë do të japim disa përmirësime që u referohen llojeve të operatorëve përkatës me veti komutuese të caktuara. Po ashtu, për çifte të caktuara të operatorëve do të japim edhe kushtet se kur në vend të mosbarazimit vlen barazia. Natyrisht, për ta përforcuar konstruksionin teorik do të japim shembuj që do të përforcojnë qasjen e sipërpërmendur.

Le të fillojmë me një rishikim të mosbarazimit klasik të Heisenberg-ut dhe për këtë qëllim le të marrim hapësirën e Hilbertit $L^2(\mathbb{R})$ të të gjitha funksioneve komplekse të integrueshme sipas Lebesgue-ut në boshtin real $\mathbb{R}$ me produkt skalar

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(t)\overline{g(t)}dt, \; f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

dhe normën përkatëse $\|\bullet\|_{\mathbb{R}}$. Me $W_2^1(\mathbb{R})$ le të shënojmë hapësirën e gjitha funksioneve absolutisht të vazhdueshme në $L^2(\mathbb{R})$ të tilla që $f' \in L^2(\mathbb{R})$. Principi i papërcaktueshmërisë i Heisenberg-ut përfshin operatorin e pozicionit M dhe operatorin e momentit, impulsit, D, të dhënë me ekuacionet

$$(Mf)(t) := tf(t)$$

dhe

$$(Df)(t) := if'(t), \; t \in \mathbb{R}.$$

Domeni i operatorit M është bashkësia e gjitha funksioneve $f \in L^2(\mathbb{R})$ për të cilët $Mf \in L^2(\mathbb{R})$, kurse domeni i operatorit D është bashkësia $W_2^1(\mathbb{R})$. Principi i papërcaktueshmërisë thotë se nëse $f \neq 0$, atëherë

$$\frac{1}{4} \leq \upsilon_{\mathbb{R}}(f) \tag{4.1}$$

ku

$$\upsilon_{\mathbb{R}}(f) := \frac{\left(\|Mf\|_{\mathbb{R}}^2 - \frac{\left|\langle Mf, f \rangle_{\mathbb{R}}\right|^2}{\|f\|_{\mathbb{R}}^2} \right)\left(\|Df\|_{\mathbb{R}}^2 - \frac{\left|\langle Df, f \rangle_{\mathbb{R}}\right|^2}{\|f\|_{\mathbb{R}}^2} \right)}{\|f\|_{\mathbb{R}}^4} \tag{4.2}$$

Një version më i dobët i formulës (4.2) është

$$\frac{1}{4} \leq \frac{\|Mf\|_{\mathbb{R}}^2 \|Df\|_{\mathbb{R}}^2}{\|f\|_{\mathbb{R}}^4} \tag{4.3}$$

që vlen sa herë që $f, Mf, Df \in L^2(\mathbb{R})(f \neq 0)$. Për më tepër barazia në (4.3) arrihet nëse dhe vetëm nëse $f(t) = ae^{bt}e^{-ct^2}, t \in \mathbb{R}$, për ndonjë $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{C}$ dhe $c \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$.

Le të përmendim këtu se operatorët M dhe D janë operatorë të vetë-adjunguar dhe të pakufizuar. Me fjalë tjera, relacioni $DM - MD = -i\hbar$ nuk mund të plotësohet nga operatorët në hapësirat e fundme, respektivisht nga prezantimet matricor të tyre. Sikur kjo të ishte e mundur, atëherë operatorët nga ana e majtë dhe e djathë do të duhej të kishin gjurmë të njëjtë, gjë kjo që nuk ndodh sepse $tr(DM - MD) = 0$ në rastin e matricave të operatorëve në hapësirat e fundme, kurse $tr(i\hbar I) \neq 0$. Po ashtu, lema e mirënjohur në vijim pamundëson trajtimin e këtij problemi në hapësirat e pafundme dhe me operatorët e kufizuar të përkufizuar në ato hapësira.

LEMË 4.1.1 [1] ***Nëse* A *dhe* B *janë elemente nga algjebra e Banach-ut me njësh* I*, atëherë* $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$.**

Vërtetimi. Nëse $\lambda \neq 0$ dhe $\lambda \in \sigma(AB)$, atëherë operatori $AB - \lambda I$ dhe bashkë me të, operatori $(\lambda^{-1}A)B - I$ nuk janë operatorë invertibil. Nga ana tjetër, nëse $\lambda \notin \sigma(BA)$, atëherë operatori $BA - \lambda I$ dhe me këtë, operatori $B(\lambda^{-1}A) - I$ janë operatorë invertibil. Ngel të tregojmë se $I - AB$ është operator invertibil nëse dhe vetëm nëse i tillë është operatori $I - BA$, për A dhe B elemente nga hapësira e Banach-ut me njësh.

Për një moment le të pajtohemi se $I - BA$ ka invers dhe se

$$(I - AB)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (AB)^n = I + AB + ABAB + ...$$

dhe

$$B(I - AB)^{-1} A = BA + BABA + BABABA + ... = (I - BA)^{-1} - I .$$

Kështu, nëse $I - AB$ ka invers, mund të shpresojmë që $B(I - AB)^{-1} A + I$ është inversi i $I - BA$. Duke shumëzuar anë për anë, fitojmë

$$(I - BA)[B(I - AB)^{-1} A + I]$$

$$= B(I - AB)^{-1} A + I - BAB(I - AB)^{-1} A - BA$$

$$= B[(I - AB)^{-1} - AB(I - AB)^{-1}]A + I - BA$$

$$= B[(I-AB)^{-1}(I-AB)]A + I - BA$$

$$= BA + I - BA = I$$

Ngjashëm,

$$[B(I-AB)^{-1}A + I](I-BA)$$

$$= B(I-AB)^{-1}A + I - B(I-AB)^{-1}ABA - BA$$

$$= B[(I-AB)^{-1} - (I-AB)^{-1}AB]A + I - BA$$

$$= B[(I-AB)^{-1}(I-AB)]A + I - BA$$

$$= BA + I - BA = I \ .$$

Rrjedhimisht, $I-BA$ është operator invertibil nëse i tillë është operatori $I-AB$ dhe anasjelltas. □

Përfundimisht, $\sigma(A+I) = \{1+a : a \in \sigma(A)\}$, bashkë me pohimin e lemës së mësipërme siguron që elementi njësh, I, në algjebrën e Banach-ut nuk është komutator, $AB-BA$, i elementeve A dhe B. Sikur $I = AB-BA$, atëherë $\sigma(AB) = 1+\sigma(BA)$ e që nuk është konsistent me faktin se $\sigma(AB)\cup\{0\} = \sigma(BA)\cup\{0\}$. Kështu, në mekanikën kuantike, relacionet e komutimit (në veçanti principi i Heisenberg-ut) nuk mund të prezantohen në terma të operatorëve të kufizuar.

Kjo lemë vetëm se përforcon faktin e më sipërm se operatorët M dhe D janë operator të pakufizuar.

Pra, mosbarazimi (4.1) mund të shihet si pasojë e mosbarazimit për operatorët linear të vetë-adjunguar në hapësirën komplekse të Hilbertit. Vërtetë, le të jetë H, hapësirë komplekse e Hilbertit me produkt skalar $\langle \bullet, \bullet \rangle$ dhe normë $\|\bullet\|$. Supozojmë se A dhe B janë dy operatorë arbitrar me domen dhe rang në H. (Operatorët mundësisht janë të pakufizuar). Përkufizojmë operatorin $[A,B] : D(AB)\cap D(BA) \to H$ dhe $[A,B]_+ : D(AB)\cap D(BA) \to H$ me

$$[A,B] := AB - BA$$
$$[A,B]_+ := AB + BA$$

ku $D(AB)$ dhe $D(BA)$ janë domenet përkatëse të operatorëve AB dhe BA. Operatorin $[A,B]$ e quajmë komutator të operatorëve A dhe B, kurse $[A,B]_+$ e quajmë antikomutator të tyre. Meqenëse kërkojmë që A^* dhe B^* të jenë operatorët e adjunguar të operatorëve A dhe B, për të njëjtët, në këtë kre, do të marrim se janë dendësisht të përkufizuar në H. Për operatorin A me domen dhe rang në hapësirën H dhe çdo $x \in D(A) \setminus \{0\}$, përkufizojmë madhësinë

$$\Delta_x(A) := \left(\|Ax\|^2 - \frac{|\langle Ax, x\rangle|^2}{\|x\|^2} \right)^{1/2} \tag{4.4}$$

Vërejmë se

$$\Delta_x(A) = \left\| Ax - \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} x \right\|$$

Se vërtetë është kështu tregohet duke llogaritur katrorin e normës $\left\| Ax - \frac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2} x \right\|^2$ si dhe duke shfrytëzuar vetitë e produktit skalar.

Vlen $\Delta_x(A) = 0$ nëse dhe vetëm nëse x është vektor vetjak (i vetë) i operatorit A çka mund të tregohet me llogaritje të drejtpërdrejtë.

Marrim këtë teoremë

TEOREMË 4.1.1 **[65]** ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***operatorë (mundësisht të pakufizuar) të vetë-adjunguar me domen dhe rang në hapësirën*** H***. Për çdo element*** $x \in D(AB) \cap D(BA)$***, të ndryshëm nga zero, vlen***

$$|\langle [A,B]x, x\rangle| \le 2\Delta_x(A)\Delta_x(B) \tag{4.5}$$

Për $H = L_2(\mathbb{R})$, $A = M$ dhe $B = D$, kemi $[A,B] = -iI$ përfundojmë se mosbarazimi (4.1) është pasojë e (4.5) kur $f \in D(AB) \cap D(BA)$.

Tani, le të ilustrojmë me një shembull se mund ti shmangemi kushtit që operatorët të jenë të vetë-adjunguar në mënyrë që të plotësojnë mosbarazimin (4.2).

Shembulli 4.1.1. Marrim hapësirën e Hilbertit $L^2[0,2\pi)$ të të gjitha funksioneve komplekse, katror të integrueshme dhe me periodë 2π. Përkufizojmë produktin skalar

$$\langle f,g\rangle_{[0,2\pi)} := \int_{[0,2\pi)} f(t)\overline{g(t)}dt\,,\ \ f,g\in L^2\left[0,2\pi\right)$$

dhe normën shoqëruese $\|\bullet\|_{[0,2\pi)}$. Shqyrtojmë operatorin

$$(Sf)(t) := e^{it} f(t)\,,\ t\in\left[0,2\pi\right)$$

që vepron si operatori i zhvendosjes për koeficientët Fourier të funksioneve $f\in L^2\left[0,2\pi\right)$. Le të jetë $W_2^1\left[0,2\pi\right)$ hapësira e funksioneve absolutisht të vazhdueshme në $L^2\left[0,2\pi\right)$ të tillë që $f'\in L^2\left[0,2\pi\right)$. Me llogaritje të drejtpërdrejtë tregohet se vlen

$$\frac{1}{4}\left|\langle Sf,f\rangle_{2\pi}\right|^2 \le \left(\|f\|_{2\pi}^2 - \frac{\left|\langle Sf,f\rangle_{2\pi}\right|^2}{\|f\|_{2\pi}^2}\right)\left(\|Df\|_{2\pi}^2 - \frac{\left|\langle Df,f\rangle_{2\pi}\right|^2}{\|f\|_{2\pi}^2}\right) \qquad (*)$$

Nëse $\langle Sf,f\rangle_{2\pi}\ne 0$, atëherë ky mosbarazim mund të rishkruhet si

$$\frac{1}{4}\le \upsilon_{2\pi}(f)$$

ku

$$\upsilon_{2\pi}(f) := \frac{\left(\|f\|_{2\pi}^2 - \frac{\left|\langle Sf,f\rangle_{2\pi}\right|^2}{\|f\|_{2\pi}^2}\right)\left(\|Df\|_{2\pi}^2 - \frac{\left|\langle Df,f\rangle_{2\pi}\right|^2}{\|f\|_{2\pi}^2}\right)}{\left|\langle Sf,f\rangle_{2\pi}\right|^2}$$

Por, siç vërehet lehtësisht, operatori S nuk është operator i vetë-adjunguar (është operator normal) dhe për këtë arsye teorema e mësipërme nuk është e zbatueshme për të. Kjo nënkupton mundësinë e shtrirjes së rezultateve edhe më të përgjithshme se sa që përfshin Teorema 4.1.1, respektivisht se kushti që operatorët të jenë të vetë-adjunguar mund të tejkalohet.

4.2 Principi i papërcaktueshmërisë për disa klasa më të gjera se klasa e operatorëve të vetë-adjunguar

E fillojmë këtë njësi me disa rezultate që vlejnë për operatorët normal dhe ato simetrik. Teoremën në vijim e vërtetojmë në detaje.

TEOREMA 4.2.1 [65] ***Nëse*** $A, B : H \to H$ ***janë operator simetrik ose normal (ose të dyja), atëherë vlen***

$$\|(A-a)x\|\|(B-b)x\| \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \left[A, B\right] x, x\right\rangle\right| \tag{4.6}$$

$$\|(A-a)x\|\|(B-b)x\| \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle \left[(A-aI),(B-bI)\right]_{+} x, x\right\rangle\right| \tag{4.7}$$

për gjithë numrat $a, b \in \mathbb{C}$ ***dhe*** $x \in D(AB) \cap D(BA)$***. Barazia arrihet nëse dhe vetëm nëse ekzistojnë konstantat*** $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ ***me vetinë*** $\left(|c_1|+|c_2|\right)\left(|d_1|+|d_2|\right) > 0$***, ashtu që*** $c_1(A^* - \overline{a})x = d_1(B-b)x$ ***dhe*** $c_2(A-a)x = d_2(B^* - \overline{b})x$ ***dhe, përveç kësaj, së paku njëra nga konstanta është zero dhe*** $\dfrac{d_1}{c_1} = \pm \dfrac{\overline{d_2}}{\overline{c_2}}$ ***(Shenja plus vlen në rastin e (4.6) dhe ajo minus në rastin e (4.7), përkatësisht.)***

Vërtetimi. Fillimisht le të rikujtojmë se për çdo konstantë $a \in \mathbb{C}$ vlen se operatori i adjunguar i operatorit $A - aI$ është operatori $A^* - \overline{a}I$ si dhe, për çdo operator normal ose simetrik, kemi

$$\left\|(A^* - \overline{a})x\right\| = \|(A-a)x\| \tag{4.8}$$

Po ashtu le të vërejmë se komutatori i operatorëve A dhe B është i njëjtë sa edhe komutatori i operatorëve $A-a$ dhe $B-b$, përkatësisht se vlen

$$\left\langle [A, B]x, x\right\rangle = \left\langle [A-a, B-b]x, x\right\rangle .$$

Për këtë qëllim marrim shënimet

$$C\_ = \left\langle [A-a, B-b]x, x\right\rangle = \left\langle [A, B]x, x\right\rangle \tag{4.9}$$

dhe

$$C_+ = \langle [A-a, B-b]_+ x, x \rangle \tag{4.10}$$

Marrim $x \in D(AB) \cap D(BA)$. Gjatë vërtetimit do të shfrytëzojmë mosbarazimin e trekëndëshit dhe mosbarazimin e Cauchy-Schwarz-it që vlejnë në hapësirat e Hilbertit. Kështu, kemi

$$\begin{aligned}
|\langle [A,B]x, x\rangle| &= |\langle [A-a, B-b]x, x\rangle| \\
&= |\langle ((A-a)(B-b)-(B-b)(A-a))x, x\rangle| \\
&= |\langle (A-a)(B-b)x, x\rangle - \langle (B-b)(A-a)x, x\rangle| \\
&\le \left|\left\langle (B-b)x, (A^* - \overline{a})x \right\rangle\right| + \left|\left\langle (A-a)x, (B^* - \overline{b})x \right\rangle\right| \\
&\le \|(A^* - \overline{a})x\| \|(B-b)x\| + \|(A-a)x\| \|(B^* - \overline{b})x\| \\
&= 2\|(A-a)x\| \|(B-b)x\|
\end{aligned}$$

Pra, me të vërtetë vlen

$$\|(A-a)x\| \|(B-b)x\| \ge \frac{1}{2} \left|\left\langle [A,B]x, x \right\rangle\right|.$$

Për a, b dhe x të dhënë, barazia në mosbarazimin e Cauchy-Schwarz-it vlen nëse dhe vetëm nëse ekzistojnë konstantat $c_1, c_2, d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ me vetinë $|c_i| + |d_j| > 0$, $j = 1, 2$, ashtu që

$$c_1(A^* - \overline{a})x = d_1(B-b)x \text{ dhe } c_2(A-a)x = d_2(B^* - \overline{b})x \tag{4.11}$$

Nëse, p.sh., $c_1 = 0$, atëherë $d_1 \ne 0$ dhe kështu $(B-b)x = 0$, çka na jep $(B^* - \overline{b})x = 0$ sipas (4.11). argumenti i njëjtë do vlente edhe sikur të kishim marrë $d_1 = 0$, nga ku përfundojmë se vlen barazia në mosbarazimin e Cauchy-Schwarz-it. Nëse asnjëra nga konstanta nuk është zero, atëherë nga (4.8) dhe (4.11) kemi

$$\|(A-a)x\| = \|(A^* - \overline{a})x\| = \left|\frac{d_1}{c_1}\right| \|(B-b)x\|$$

$$= \left|\frac{d_1}{c_1}\right| \left\|(B^* - \overline{b})x\right\| = \left|\frac{d_1}{c_1}\right| \left|\frac{c_2}{d_2}\right| \left\|(A-a)x\right\|$$

Pra, kemi $\left|\frac{d_1}{c_1}\right| \left|\frac{c_2}{d_2}\right| = 1$, që është ekuivalente me

$$\left|\frac{d_1}{c_1}\right| = \left|\frac{d_2}{c_2}\right| \tag{4.12}$$

Barazia në mosbarazimin e trekëndëshit

$$\left|\langle [A,B]x, x\rangle\right| = \left|\langle [A-a, B-b]x, x\rangle\right| \le$$

$$\le \left\|(A^* - \overline{a})x\right\| \left\|(B-b)x\right\| + \left\|(A-a)x\right\| \left\|(B^* - \overline{b})x\right\| \tag{4.13}$$

jep

$$\left|\frac{c_1}{d_1}\right| \left\|(A^* - \overline{a})x\right\|^2 + \left|\frac{c_2}{d_2}\right| \left\|(A-a)x\right\|^2 = \left(\left|\frac{c_1}{d_1}\right| + \left|\frac{c_2}{d_2}\right|\right) \left\|(A-a)x\right\|^2$$

$$= \left\|(A^* - \overline{a})x\right\| \left\|(B-b)x\right\| + \left\|(A-a)x\right\| \left\|(B^* - \overline{b})x\right\|$$

$$= \left|\langle [A-a, B-b]x, x\rangle\right| = \left|\left\langle (B-b)x, (A^* - \overline{a})x\right\rangle - \left\langle (A-a)x, (B^* - \overline{b})x\right\rangle\right|$$

$$= \left|\frac{c_1}{d_1}\left\langle (A^* - \overline{a})x, (A^* - \overline{a})x\right\rangle - \overline{\frac{c_2}{d_2}}\left\langle (A-a)x, (A-a)x\right\rangle\right|$$

$$= \left|\frac{c_1}{d_1}\left\|(A^* - \overline{a})x\right\|^2 - \overline{\frac{c_2}{d_2}}\left\|(A-a)x\right\|^2\right| = \left|\frac{c_1}{d_1} - \overline{\frac{c_2}{d_2}}\right| \left\|(A-a)x\right\|^2$$

Duke shikuar fillimin dhe mbarimin, kemi

$\left|\frac{c_1}{d_1}\right| + \left|\frac{c_2}{d_2}\right| = \left|\frac{c_1}{d_1} - \overline{\frac{c_2}{d_2}}\right|$ që është ekuivalente me $2\left|\frac{c_1}{d_1}\right| = \left|\frac{c_1}{d_1} - \overline{\frac{c_2}{d_2}}\right|$ që mund të plotësohet vetëm nëse $\frac{c_1}{d_1} = -\overline{\frac{c_2}{d_2}}$. Çka edhe duhej vërtetuar. □

Vëreni se për antikomutatorin vlen shenja pozitive, respektivisht vlen $\frac{c_1}{d_1} = \overline{\frac{c_2}{d_2}}$.

Për operatorët simetrik A dhe B dhe për numrat real a dhe b, mosbarazimet e mësipërme (4.6) dhe (4.7) mund të bashkohen në një me çka "mprehin" njëri-tjetrin.

TEOREMË 4.2.2 [65] ***Nëse*** $A, B : H \to H$ ***janë operatorë simetrik në hapësirën e Hilbertit*** H ***, atëherë***

$$\|(A-a)x\|\|(B-b)x\| \geq \frac{1}{2}\sqrt{\left|\left\langle\left[A,B\right]x,x\right\rangle\right|^2 + \left|\left\langle\left[(A-aI),(B-bI)\right]_+ x,x\right\rangle\right|^2} \qquad (4.14)$$

për gjithë $x \in D(AB) \cap D(BA)$ ***dhe gjithë*** $a, b \in \mathbb{R}$ ***. Barazia vlen nëse dhe vetëm nëse operatorët*** $A-a$ ***dhe*** $B-b$ ***janë shumëfisha të njëri tjetrit.***

Vërtetimi. Marrim modulin e numrit kompleks

$$\left|\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right)^2}\ .$$

Numrat $\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle$ dhe $\left\langle(A-a)x,(B-b)x\right\rangle$ janë të konjuguar për njëri tjetrin, prandaj vlen

$$\begin{aligned}
&\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle + \overline{\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle} \\
&\qquad = \left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle + \left\langle(A-a)x,(B-b)x\right\rangle \\
&\qquad = 2\,\mathrm{Re}\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle \\
&\qquad = \left\langle\left[(A-aI),(B-bI)\right]_+ x,x\right\rangle
\end{aligned}$$

Ngjashëm, për arsye të njëjta, vlen

$$\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle - \left\langle(A-a)x,(B-b)x\right\rangle = 2\,\mathrm{Im}\left\langle(A-a)x,(B-b)x\right\rangle = \left\langle\left[A,B\right]x,x\right\rangle.$$

Kështu që nga

$$\left|\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right| = \sqrt{\left(\mathrm{Re}\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right)^2 + \left(\mathrm{Im}\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right)^2}$$

del se

$$\left|\left\langle(B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right| = \sqrt{\left[\frac{1}{2}\left\langle\left[A,B\right]x,x\right\rangle\right]^2 + \left[\frac{1}{2}\left\langle\left[(A-aI),(B-bI)\right]_+ x,x\right\rangle\right]^2} \qquad (4.15)$$

Nga ana tjetër, për shkak të mosbarazimit të Cauchy-Schwarz-it, kemi

$$\left|\left\langle (B-b)x,(A-a)x\right\rangle\right| \le \|(B-b)x\|\|(A-a)x\| \tag{4.16}$$

Nga (4.15) dhe (4.16) kemi (4.14) □

Deri më tani kemi studiuar mosbarazimet për numrat e çfarëdoshëm a dhe b. Këta mund të përdoren nëse shqyrtojmë rastin e barazisë dhe nëse dëshirojmë të kemi një gamë zgjidhjesh. Ose, nëse pyetemi se për cilët a dhe b, ana e majtë e mosbarazimeve funksionale (4.6), (4.7) dhe (4.14) bëhet minimale. Në rastin tonë vlera minimale e $\|(A-a)x\|$ për gjitha vlerat x, papërcaktueshmëria e operatorit A, në fakt arrihet kur a është projeksioni ortogonal i vektorit Ax mbi x, d.m.th.,

$$\min_{a\in\mathbb{C}}\|(A-a)x\| = \left\|Ax-\frac{\langle Ax,x\rangle}{\langle x,x\rangle}x\right\| = \Delta_x(A)$$

RRJEDHIM 4.2.1. [65] ***Nëse*** $A,B:H\to H$ ***janë operator simetrik ose normal në hapësirën e Hilbertit*** H ***, atëherë***

$$\Delta_x(A)\Delta_x(B) \ge \frac{1}{2}\left|\left\langle [A,B]x,x\right\rangle\right| \tag{4.17}$$

dhe

$$\Delta_x(A)\Delta_x(B) \ge \operatorname{cov}_x(AB) \tag{4.18}$$

për çdo $x\in D(AB)\cap D(BA)$ ***dhe të ndryshëm nga zero.***

Të dy këto mosbarazime përfshijnë papërcaktueshmëritë prandaj mund të quhen principe, relacione, të papërcaktueshmërisë. Ata pohojnë se produkti i papërcaktueshmërive të dy operatorëve normal ose simetrik në hapësirën e Hilbertit nga poshtë është i kufizuar me vlerat e pritjes së komutatorit të tyre dhe të antikomutatorit të tyre. Për të mbështetur këtë pohim të rrjedhimit të sipërpërmendur do ta elaborojmë një shembull që përfshin operatorin e Laplace-it.

Shembulli 4.2.1. Le të jetë ω një funksion probabilitar dhe përkufizojmë produktin skalar si më poshtë

$$\langle f,g\rangle := \int f(x)\overline{g(x)}\omega(x)dx$$

Shqyrtojmë hapësirën e Hilbertit $L_2\left(\left[0,2\pi\right),\omega_\alpha\right)$ ku

$$\omega_\alpha(f) = c_\alpha (\sin x)^{2\alpha+1}, c_\alpha = \frac{\Gamma(2\alpha+2)}{\Gamma(\alpha+1)^2 2^{2\alpha+1}}$$

ku Γ është funksioni gama dhe $\alpha \geq -\frac{1}{2}$.

Përkufizojmë operatorin e Laplace-it si në vijim

$$L_\alpha f(x) = -\left(f''(x) + (2\alpha+1)\frac{\cos x}{\sin x} f'(x) \right)$$

me domen hapësirën $D(L_\alpha) = \left\{ f \in C^2\left(\left[0,\pi\right]\right) : f'(0) = f'(\pi) = 0 \right\}$. Atëherë ky operator është simetrik (shih [21]). Përkufizojmë, për $h \in D(L_\alpha)$ të fiksuar, $Nh = hf$, atëherë $N^* f = \overline{h} f$ dhe N është operator normal. Operatori $-L_\alpha N$ është dhënë me

$$\begin{aligned}
(-L_\alpha N) f(x) &= -L_\alpha(Nf(x)) = -L_\alpha(hf)(x) \\
&= (hf)''(x) + (2\alpha+1)\frac{\cos x}{\sin x}(hf)'(x) \\
&= h''(x) f(x) + h(x) f''(x) + 2h'(x) f'(x) + \\
&\quad + (2\alpha+1)\frac{\cos x}{\sin x}(h'(x) f(x) + h(x) f'(x)) \\
&= -2h'(x) f'(x) - L_\alpha h(x) - L_\alpha f(x)
\end{aligned}$$

Kështu për komutatorin e tyre kemi

$$\left[N, L_\alpha\right] f = hL_\alpha f - L_\alpha(hf) = 2h' f' - L_\alpha h.$$

Principi i papërcaktueshmërisë, Rrjedhimi 4.2.1, na jep

$$\left(\|hf\| - \frac{\left|\langle hf, f\rangle\right|^2}{\|f\|^2} \right)\left(\|L_\alpha f\| - \frac{\left|\langle L_\alpha f, f\rangle\right|^2}{\|f\|^2} \right) \geq \frac{1}{4}\left|\langle 2f'h' - fL_\alpha h, f\rangle\right|^2.$$

4.3. Përgjithësime të principit të papërcaktueshmërisë

Në këtë njësi do të japim disa përgjithësime të principit të papërcaktueshmërisë bazuar në vetitë e operatorëve. Fillimisht le të rikujtojmë këtë rezultat

LEMË 4.3.1 ***Për çdo*** $x \in D(A) \setminus \{0\}$ ***vlen***

$$\min_{a \in \mathbb{C}} \|(A-a)x\| = \Delta_x(A) \tag{4.19}$$

kurse minimumi arrihet për $a = \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}$**.**

Në këtë njësi, principet e papërcaktueshmërisë janë thellësisht të lidhura me rezultatin e teoremës që flet për principin e papërcaktueshmërisë së operatorëve të vetë-adjunguar. Për ta realizuar këtë, le të jenë A^* dhe B^* operatorët e adjunguar të operatorëve A dhe B, përkatësisht. Marrim shënimin

$$D(A\,|\,B) = D(AB) \cap D(BA) \cap D(A^*) \cap D(B^*)\ .$$

TEOREMË 4.3.1. ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***dy operatorë linear (mundësisht të pakufizuar) me domen dhe rang në të njëjtën hapësirë të Hilbertit*** H ***. Për çdo vektor*** $x \in D(A\,|\,B)$ ***, të ndryshëm nga zero, vlen***

$$\left|\left\langle [A,B]\,x, x\right\rangle\right| \le \Delta_x(A)\Delta_x(B^*) + \Delta_x(A^*)\Delta_x(B) \tag{4.20}$$

Vërtetimi. Për çdo vektor $x \in D(A\,|\,B)$, $x \ne 0$, kemi

$$\begin{aligned}\left\langle [A,B]\,x, x\right\rangle &= \langle ABx, x\rangle - \langle BAx, x\rangle \\ &= \langle Bx, A^*x\rangle - \langle Ax, B^*x\rangle\end{aligned}$$

Duke shfrytëzuar në mënyrë të njëpasnjëshme mosbarazimin e trekëndëshit dhe atë të Cauchy-Schwarz-it, kemi

$$\begin{aligned}\left|\left\langle [A,B]\,x, x\right\rangle\right| &= \left|\langle ABx, x\rangle - \langle BAx, x\rangle\right| \\ &= \left|\langle Bx, A^*x\rangle - \langle Ax, B^*x\rangle\right| \\ &\le \left|\langle Bx, A^*x\rangle\right| + \left|\langle Ax, B^*x\rangle\right|\end{aligned}$$

$$\leq \|Ax\| \|B^* x\| + \|Bx\| \|A^* x\| \tag{4.21}$$

Për çdo $a, b \in \mathbb{C}$, më lartë në vend të operatorëve A dhe B marrim operatorët $A - aI$ dhe $B - bI$. Dihet se $[A, B] = [A - aI, B - bI]$, prandaj mund të shkruajmë

$$\left| \left\langle [A, B] x, x \right\rangle \right| \leq \left\| (A - aI) x \right\| \left\| \left(B^* - \bar{b} I \right) x \right\| + \left\| (B - bI) x \right\| \left\| \left(A^* - \bar{a} I \right) x \right\| \tag{4.22}$$

Tani, në (4.21) përdorim Lemën 4.3.1 për të fituar

$$\min_{a,b\in\mathbb{C}} \left\{ \left\| (A - aI) x \right\| \left\| \left(B^* - \bar{b} I \right) x \right\| + \left\| (B - bI) x \right\| \left\| \left(A^* - \bar{a} I \right) x \right\| \right\}$$
$$= \Delta_x(A) \Delta_x(B^*) + \Delta_x(A^*) \Delta_x(B)$$

Me çka është vërtetuar mosbarazimi (4.20). □

RRJEDHIM 4.3.1. ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***operatorë normal me domen dhe me rang në hapësirën e Hilbertit*** H ***. Për çdo*** $x \in D(A \mid B)$***,*** $x \neq 0$***, kemi***

$$\left| \left\langle [A, B] x, x \right\rangle \right| \leq 2 \|Ax\| \|Bx\| \tag{4.23}$$

Për më tepër vlen

$$\left| \left\langle [A, B] x, x \right\rangle \right| \leq 2 \Delta_x(A) \Delta_x(B) \tag{4.24}$$

Vërtetimi. Vetëm le të përmendim se për $x \in D(A) \cap D(B)$ dhe operatorët normal A dhe B vlen $\|Ax\| = \|A^* x\|, \|Bx\| = \|B^* x\|$ dhe se për numrat kompleks a dhe b, operatorët $A - aI$ dhe $B - bI$ janë operator normal dhe vërtetësia e pohimit del nga (4.20) dhe (4.21). □

Teoria e operatorëve të pakufizuar të vetë-adjunguar, normal, simetrik është mirë e studiuar. Po ashtu edhe teoria e operatorëve hipernormal të pakufizuar ka rezultate të lakmueshme. Në këtë pikë mund të shtojmë edhe një rrjedhim që i nënshtrohet teoremës së mësipërme. Në fakt japim këtë

RRJEDHIM 4.3.2 ***Le të jenë*** A ***dhe*** B ***operatorë hipernormal (ose çift operatorësh normal dhe hipernormal) me domen dhe me rang në hapësirën e Hilbertit*** H ***. Për çdo*** $x \in D(A \mid B)$***,*** $x \neq 0$***, vlejnë mosbarazimet e mësipërme (4.23) dhe (4.24).***

Vërtetimi. Le të rikujtojmë se sipas përkufizimit, operatori A, dendësisht i përkufizuar, është hipernormal nëse në domenin e vlerave të tij plotëson mosbarazimin $\|A^*x\| \le \|Ax\|$. Tani, është evidente se për operatorët e tillë A dhe B vlejnë mosbarazimet përkatëse. □

Principi i papërcaktueshmërisë (*) është pasojë e Rrjedhimit 4.3.1, sepse operatori S është normal, kurse operatori D operator i vetë-adjunguar (me këtë edhe normal). Në përgjithësi mosbarazimi (4.24) nuk është e thënë të vlejë. Si shembull i tillë mund të shërbejë marrja e matricave

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

në hapësirën e Hilbertit $\mathbb{C}^2$. Nëse marrim vektorin $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, atëherë ana e majtë e mosbarazimit (4.23) është 1, kurse ana e djathtë është zero.

Rezultat në Teoremën 4.3.1 dhe në Rrjedhimin 4.3.1 mbështeten në mosbarazimin (4.21) dhe faktin se operatori i identitetit komuton me secilin operator. Le të provojmë të zhvillojmë më tej këtë ide. Duke filluar me operatorët A dhe B, do të provojmë të gjejmë dy operatorë U dhe V që ofrojnë kufi më të mirë mbi $\left|\left\langle [A,B]x, x\right\rangle\right|$. Do të përdorim operatorët U dhe V në mënyrë që të reduktojmë kufirin e sipërm (4.21). Për të realizuar këtë kërkojmë që $x \in D(A|B) \cap D(A|V) \cap D(B|U) \cap D(U|V)$ si dhe

$$[A,V]x = [B,U]x = [U,V]x = 0 \tag{4.25}$$

Këto kushte kanë për pasojë ekuacionin

$$\left\langle [A,B]x, x\right\rangle = \left\langle Bx - Vx, A^*x - U^*x\right\rangle - \left\langle Ax - Ux, B^*x - V^*x\right\rangle$$

dhe për pasojë mosbarazimin

$$\begin{aligned} \left|\left\langle [A,B]x, x\right\rangle\right| &= \left|\left\langle Bx - Vx, A^*x - U^*x\right\rangle - \left\langle Ax - Ux, B^*x - V^*x\right\rangle\right| \\ &\le \left|\left\langle Bx - Vx, A^*x - U^*x\right\rangle\right| + \left|\left\langle Ax - Ux, B^*x - V^*x\right\rangle\right| \\ &\le \|Ax - Ux\|\|B^*x - V^*x\| + \|A^*x - U^*x\|\|Bx - Vx\| \end{aligned} \tag{4.26}$$

Këtu ngrihet çështja e minimizimit të (4.25) mbështetur në (4.24). fillimisht, identifikimi i gjithë operatorëve, U dhe V, të tillë që të vlejë $\left[A,V\right]x=\left[B,U\right]x=0$ është i vështirë dhe akoma më e vështirë është kërkesa shtesë që $\left[U,V\right]x=0$. Siç edhe mund të shihet, këtu kemi një kërkesë që operatorët përkatës të jenë komutues. Po ashtu, edhe funksioni në anën e djathtë të (4.26) është shumë i komplikuar. Kjo na shtyn që të përdorim strategji më pak optimale për ta përdorur në mënyrë efektive mosbarazimin (4.26). Këtu, përzgjedhim operatorin U të jetë shumëfish i operatorit të identitetit dhe duke vepruar si në Teoremën 4.3.1 fitojmë kufirin

$$\left|\left\langle\left[A,B\right]x,x\right\rangle\right|\leq\left\|Ax-Ux\right\|\left\|B^{*}x-V^{*}x\right\|+\left\|A^{*}x-U^{*}x\right\|\left\|Bx-Vx\right\|$$

$$\leq\left\|Ax-ax\right\|\left\|B^{*}x-V^{*}x\right\|+\left\|A^{*}x-\overline{a}x\right\|\left\|Bx-Vx\right\| \qquad (4.27)$$

Në mosbarazimin e fundit marrim minimumin dhe fitojmë

$$\left|\left\langle\left[A,B\right]x,x\right\rangle\right|\leq\Delta_{x}(A)\left\|B^{*}x-V^{*}x\right\|+\Delta_{x}(A^{*})\left\|Bx-Vx\right\| \qquad (4.28)$$

që vlen sa herë që $\left[A,V\right]x=0$.

Nëse shtrohet çështja se kur vlen barazia në principet e papërcaktueshmërisë të sipërpërmendur në këtë kapitull, atëherë pikërisht mosbarazimi (4.26) luan rolin kyç në gjitha këto mosbarazime. Teorema në vijim jep kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme se kur vlen barazia në (4.26).

TEOREMË 4.3.2 ***Le të jenë*** A,B,U,V ***operatorë linear me domen dhe rang në hapësirën e Hilbertit*** H ***dhe*** x ***le të jetë një element i ndryshëm nga zero në*** $D(A\,|\,B)\cap D(A\,|\,V)\cap D(B\,|\,U)\cap D(U\,|\,V)$ ***që plotëson (4.25).***

(a) Nëse x ***nuk është në bërthamën e asnjërit nga operatorët*** $A-U, A^{*}-U^{*}, B-V, B^{*}-V^{*}$***, atëherë barazia në (4.26) vlen nëse dhe vetëm nëse ekzistojnë konstanta e ndryshme nga zero,*** $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{C}$ ***ku*** $\dfrac{\alpha_2\beta_2}{\alpha_1\beta_1}<0$ ***i tillë që*** x ***shtrihet në bërthamën e operatorëve***

$$S_{\alpha_1,\alpha_2}:=\alpha_1(A-U)+\alpha_2(B^{*}-V^{*}),\; T_{\beta_1,\beta_2}:=\beta_1(A^{*}-U^{*})+\beta_2(B-V) \qquad (4.29)$$

(b) Nëse x është në së paku bërthamën e njërit nga operatorët $A-U, A^*-U^*, B-V, B^*-V^*$, atëherë barazia qëndron në (4.27) nëse dhe vetëm nëse ekzistojnë konstantat $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ku $|\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$ dhe $|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$ të tilla që x shtrihet në bërthamën e operatorëve S_{α_1,α_2} dhe T_{β_1,β_2} në (4.29).

Vërtetimi. Duke e shqyrtuar fitimin e (4.27), vërejmë se barazia në (4.26) qëndron nëse dhe vetëm nëse

$$\left|\left\langle Bx-Vx, A^*x-U^*x\right\rangle-\left\langle Ax-Ux, B^*x-V^*x\right\rangle\right|$$

$$=\left|\left\langle Bx-Vx, A^*x-U^*x\right\rangle\right|+\left|\left\langle Ax-Ux, B^*x-V^*x\right\rangle\right| \tag{4.30}$$

dhe nëse ekzistojnë konstantat $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ku $|\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$ dhe $|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$ ashtu që

$$\alpha_1(Ax-Ux)+\alpha_2(B^*x-V^*x)=0,\ \beta_1(A^*x-U^*x)+\beta_2(Bx-Vx)=0 \tag{4.31}$$

Le të vërejmë se (4.31) vlen nëse dhe vetëm nëse x shtrihet në bërthamën e operatorëve S_{α_1,α_2} dhe T_{β_1,β_2} në (4.29).

Fillimisht e vërtetojmë pjesën (a) të kësaj teoreme. Për të realizuar vërtetimin, vërejmë se nëse x nuk është në bërthamën e operatorëve $A-U, A^*-U^*, B-V, B^*-V^*$, atëherë të gjitha madhësitë $\|Ax-Ux\|^2$, $\|A^*x-U^*x\|^2$, $\|Bx-Vx\|^2$ dhe $\|B^*x-V^*x\|^2$ janë pozitive. Sikurse është vërejtur më sipër, barazia në (4.25) ka për pasojë faktin që (4.30) dhe (4.31) plotësohen për disa konstanta $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ ku $|\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$ dhe $|\beta_1|+|\beta_2| \neq 0$. Vërejmë se gjitha konstantat $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{C}$ janë të ndryshme nga zero. Me të vërtetë, për shembull, nëse $\alpha_1=0$, atëherë sipas (4.30) do të përfundonim se

$$\alpha_2(B^*x-V^*x)=0.$$

Pasi që $B^*x-V^*x \neq 0$, kjo ka për rrjedhojë se $\alpha_2=0$ e që është në kundërshtim me kushtin $|\alpha_1|+|\alpha_2| \neq 0$. Për më tepër, për shkak se $\alpha_1, \beta_1 \neq 0$, (4.30) mund të rishkruhet si

$$Ax - Ux = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(B^* x - V^* x), \; A^* x - U^* x = -\frac{\beta_2}{\beta_1}(Bx - Vx) \tag{4.32}$$

Duke e zëvendësuar (4.32) në (4.30), fitojmë

$$\left| \frac{\overline{\beta_2}}{\overline{\beta_1}} \|Bx - Vx\|^2 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \|B^* x - V^* x\|^2 \right| = \left| \frac{\beta_2}{\beta_1} \right| \|Bx - Vx\|^2 + \left| \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right| \|B^* x - V^* x\|^2$$

dhe duke shfrytëzuar faktin se $\|Bx - Vx\|^2 \|B^* x - V^* x\|^2 > 0$ del se $\dfrac{\alpha_2 \beta_2}{\alpha_1 \beta_1} < 0$.

Për kahen e kundërt të vërtetimit, mund të tregohet se (4.30) dhe (4.31) janë plotësuar dhe kështu që vlen barazia në (4.26).

Në pjesën (b) të rezultatit, supozojmë se x është së paku në bërthamën e njërit nga operatorët $A - U, A^* - U^*, B - V, B^* - V^*$. Atëherë (4.30) plotësohet menjëherë. Kjo edhe jep kushtin ekuivalent për barazinë në (4.26). □

RRJEDHIM 4.3.3 ***Le të jenë A dhe B operatorë linear të vetë-adjunguar me domen dhe rang në hapësirën e njëjtë komplekse të Hilbertit, H, dhe x le të jetë një element i ndryshëm nga zero në $D(A \mid B)$. Atëherë, ose x është një vektor vetjak i A ose B dhe barazia vlen në (4.5) ose barazia vlen në (4.5) nëse dhe vetëm nëse ekziston një konstantë e ndryshme nga zero $\mu \in \mathbb{R}$ e tillë që x është një vektor vetjak i operatorit $S_{1,-i\mu} := A - i\mu B$.***

Vërtetimi. Me përzgjedhjen e $U := aI$ dhe $V := bI$ ku $a := \dfrac{\langle Ax, x\rangle}{\|x\|^2}$ dhe $b := \dfrac{\langle Bx, x\rangle}{\|x\|^2}$ dhe duke marrë në konsideratë se A dhe B janë operatorë linear të vetë-adjunguar, pohimi i parë i rrjedhimit del nga Teorema 4.3.2 ose nga fakti se x është vektor vetjak i A ose B nëse dhe vetëm nëse $\Delta_x(A)\Delta_x(B) = 0$. Duke ndjekur vërtetimin e Teoremës 4.3.2, mund të vërtetohet rasti kur x nuk është vektor vetjak as i A as i B.

Vërejmë se Teorema 4.3.2 është përgjithësim i Teoremës 4.2.1 dhe i rrjedhimeve të saj.

PËRFUNDIME

Në këtë disertacion kemi ndjekur vetinë komutuese të kompozimit të operatorëve dhe ndikimin e saj në raport me produktin dhe shumën e çifteve të operatorëve të klasës së njëjtë dhe klasave të ndryshme. Është interesant të përmendet fakti se ruajtja e produktit të operatorëve brenda një klase operatorësh nuk është e arritshme as për klasat si ajo e operatorëve normal nëse nuk shtohen kushte shtesë pikërisht në raport me këtë veti. Sigurisht që marrja në shqyrtim e gjitha çifteve të mundshme do të ishte një mision i pamundshëm, prandaj jemi kufizuar në disa klasa që janë më të njohura, natyrisht duke mos anashkaluar edhe klasa operatorësh jo aq familjare. Vlen të theksohet se klasat e shqyrtuara, në të shumtën e rasteve, janë klasa më të gjera se ajo e operatorëve normal, përveç në rastin e operatorëve të vetë-adjunguar.

Në kreun e parë në mënyrë koncize janë dhënë konceptet bazike nga teoria e operatorëve të nevojshme për zhvillimin e mëtejmë të disertacionit.

Në kreun e dytë kemi dhënë disa rezultate në lidhje me ndikimin e vetisë komutuese dhe asaj dyfish komutuese të operatorëve në raport me produktin e operatorëve të klasave të njëjta dhe të ndryshme. Kështu bazuar në rezultatet e mirënjohura si ato në [42], [43] dhe [45], ku është treguar se në çfarë kushte të komutativitetit produkti i operatorëve normal do të jetë normal, kemi ofruar rezultatet e formuluara në Teoremat 2.3.2, 2.3.3 dhe 2.3.4, në lidhje me klasën e operatorëve hipernormal, kuazihipernormal, izometrik, si dhe në Teoremat 2.4.1, 2.4.2 dhe 2.4.5 dhe 2.4.6 për operatorët n-normal dhe operatorët e klasës (Q) me fuqi n.

Në kreun e tretë, kemi zgjeruar studimin në operatorët komutues deri në një faktor. Krahas rezultateve të njohura dhe rrjedhimeve që kanë të bëjnë me vlerat që mund të merr faktori i komutimit kemi ofruar po ashtu, në Teoremat 3.3.5, 3.3.6, 3.3.8. disa rezultate që lidhen me çiftet e operatorëve e klasave hipernormal, paranormal dhe kuazihipernomal. Po ashtu, kemi dhënë përkufizim të ri, Përkufizimin 3.4.1 dhe në raport me të edhe disa rezultate të prezantuara në Teoremat 3.4.1, 3.4.2 dhe 3.4.3.

Në kreun e katërt, duke ju referuar vetisë komutuese, përkatësisht jo-komutuese të operatorëve të pakufizuar kemi dhënë interpretimin e principit të papërcaktueshmërisë në fizikën kuantike nga këndvështrimi i teorisë së operatorëve. Nëpërmjet Teoremave 4.2.1 dhe 4.2.2, kemi dhënë zgjerimin e principit të papërcaktueshmërisë në klasa operatorësh që tejkalojnë atë të operatorëve të vetë-adjunguar.

REKOMANDIME

1. Shqyrtimi i klasave tjera të operatorëve dhe gjetja e kushteve të mjaftueshme që produkti i operatorëve të ruhet brenda klasës përkatëse.

2. Zgjerimi i studimit të operatorëve që komutojnë deri në një faktor edhe për klasat e tjera të operatorëve duke fiksuar njërin operator në çiftin e studiuar të operatorëve dhe operatorin tjetër duke e ndryshuar, përkatësisht duke e marrë nga klasat që nuk janë përfshirë në këtë disertacioni.

3. Ndërtimi, respektivisht formulimi i principit të papërcaktueshmërisë për çifte të operatorëve nga klasa të ndryshme dhe hapësira të ndryshme të Hilbertit. Duhet përmendur këtu se për shkak të natyrës së fenomeneve fizike ekzistojnë një numër kufizimesh që duhet marrë në konsideratë gjatë punës me operatorët e pakufizuar.

SUMMARY

In this dissertation we have follow the commutativity property of composition of operators, sum and product impact on the pair of operator of the same class and different classes. Here it is important to emphasize the fact that closeness under product of the same class it is not possible even for normal operators if there is not additional condition related with this property. Clearly, it would be impossible to study operator classes, that's why we are limited with known operator classes and some other classes. It is important to mention that the studied classes are larger classes than normal operators, except those of self –adjoint operators.

In the first chapter we have given basic definitions from theory of operators which are necessary to accomplish the dissertation.

In the second chapter we have shown some results related with the impact of commutativity and double commutativity property related with the product of operators of the same and different classes. Getting started with well known results as [42], [43] and [45], where are shown in which commutativity conditions the product of normal operators are normal operators, we have given the formulated results in Theorems 2.3.2, 2.3.3 and 2.3.4, related with hyponormal, quasi-hyponormal, isometric class of operators and Theorems 2.4.1, 2.4.2 and 2.4.5 and 2.4.6 for *n*-normal operators and *n*-power class (Q) operators.

In the third chapter we have expended the study of commutative operators until factor one. Except known results and corollaries related with values that can take commutative factor we have offered in Theorems 3.3.5, 3.3.6, 3.3.8 some results with operator pairs of hyponormal, paranormal and quasi-hyponormal classes. Also, we have given a new definition, Definition 3.4.1 and some other presented results in Theorems 3.4.1, 3.4.2 and 3.4.3.

In the fourth chapter, referring to commutativity property, respectively non commutativity property of infinite operators we have given the interpretation of uncertainty principle in quantum physics from operator theory view point. With Theorems 4.2.1 and 4.2.2, we have given the expansion of uncertainty principle on operator classes which exceed the class of self-adjoint-operators.

REFERENCAT

[1] P. R. Halmos, Hilbert Space Problems Book, Van Nostrand, The university Series in Higher Mathematics (1966)

[2] P. R. Halmos, Ten Problems in Hilbert Space, Bull. Amer. Math. Soc. (1970), 877-933

[3] P. R. Halmos, Hilbert Space Problems Book, Second Edition, Springer-Verlag, New-York Inc. (1982)

[4] P. R. Halmos, Commutators of Operators, II, Amer. J. Math. 76 (1954), 191-198

[5] S. K. Berberian, Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer-Verlag, New-York Inc. (1974)

[6] S. K. Berberian, A Note on Hyponormal Operators, Pacif. J. Math. Vol. 12 (1962), 1172-1176

[7] C. S. Kubrusly, Elements of Operator Theory, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 2001

[8] C. S. Kubrusly, Hilbert Space Operators, Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 2003

[9] C. S. Kubrusly, Spectral Theory of Operators on Hilbert Space, , Birkhauser, Boston, Basel, Berlin, 2010

[10] S. Kurepa, Funkcionalna analiza- Elementi teorije operatora, Skolska Knjiga, Zagreb (1981)

[11] T. Furuta, Invitation to Linear Operators – From Matrices to Bounded Linear Operators in Hilbert Space, Taylor & Francis, London (2001)

[12] T. Furuta, R. Nakamoto, M. Horie, A Remark on a Class of Operators, Proc. Japan Acad. Vol. 43 (1967), 607-609

[13] T. Furuta, R. Nakamoto, On Some Theorems of Berberian and Sheth, Proc. Japan Acad., Vol. 46 (1970), 841-845

[14] T. Furuta, On the Class of Paranormal Operators, Proc. Japan Acad., Vol. 43 (1967), 594-598

[15] TW. Rudin, Funkctional Analysis, International Edition, Singapore (1991)

[16] J. B. Conway, A Course in Functional Analysis, Springer Science+Business Media Inc., 1990

[17] J. B. Conway, A Course in Operator Theory, Amer. Math. Soc., 2000

[18] J. B. Conway, W. Szymanski, Linear combination of Hyponormal Operators, Rocky Mountain J. math., Vol. 18 (1988), 695-705

[19] T. Ando, On Hyponormal operators, Proc. AMS, vol. 14 (1963), 290-291

[20] T. Ando, Operators with a Norm condition, Acta Sci. Math. (Szeged) 133 (1972), 169-178

[21] V. Itratesscu, On Some Hyponormal Operators, Pacific J. Math., vol. 3 (1967), 414-417

[22] A. B. Patel, P. B. Ramanujan, On Sum and Product of Normal Operators, Indian J. of Pure and Applied math., Vol. 12 (1981), 1213-1218

[23] T. Saito, Factorization of a Hyponormal Operator, Proc. Japan Acad., Vol. 51 (1975), 552-553

[24] J. Stampfli, Hyponormal Operators, Pacific J. math., Vol. 12 (1962), 1453-1458

[25] J. Stampfli, Extreme Points of the Numerical range of a Hyponormal Operator, Michigan Math. J., Vol. 13 (1966), 87-89

[26] C. S. Ryoo, S. H. Lee, On Some Properties of Certain Nonhyponormal Operators, Bull. Korean Math. Soc., 31 (1994), N.1., pp. 133-141

[27] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag New York Inc., (1980)

[28] T. Veluchamy, A. Devika, Some Properties of Quasi - *paranormal Operators, Journal of Modern mathematics and Statistics 1 (1-4):35-38, 2007

[29] L. R. Williams, Quasisimilarity and Hyponormal Operators, J. Operator Theory, 5 (1981), 127-139

[30] A. Brown, On a Class of Operators, Proc. Amer. Math. Soc., Vol. 4 (1953), 253-258

[31] M. R. Embry, A Connection between commutativity and separation of spectra of operators, Acta Sci. Math., Szeged, Vol. 32 (9171), 235-237

[32] A. Brown, C. Pearcy, Structure of Commutators of Operators, Ann. Math., 82 (1965), 112-127

[33] H. Flanders, H. K. Wimmer, On the matrix Equation $AX - XB = C$ and $AX - YB = C$, SIAM J. Appl. Math., 32 (1977), 707 – 710

[34] M. Rosenblum, The Operator Equation $BX - XA = Q$ with self-adjoint A and B, Proc. Amer. Math. Soc., 20 (1969), 115-120

[35] S. Panayappan, N. Sivamani, On n Power Class (Q) Operators, Int. Journal of Mth. Analysis, Vol. 6, (2012), no.31, 1513-1518

[36] A. A. A., Jibril, On Operators for wich $T^{*2}T^2=(T^*T)^2$, International mathematical Forum, Vol. 5 (2010), no. 46, 2255-2262

[37] M. R. Embry, Conditions Implying Normality in Hilbert Space, Pacific J. Math., vol. 18 (1966), no. 3, 457-460

[38] S. K. Berberian, Extension of a theorem of Fuglede and Putnam, Proc. Amer. Math. Soc., 71 (1978), 113-114

[39] S. Panayappan, A. Radharamani, On a Class of Quasiparahyponormal Operators, Int. journal of Math. Analysis, Vol. 2, 2008, no. 15, 741-745

[40] M. M. Mortad, Products and Sums of Bounded and Unbounded Normal Operators: Fuglede-Putnam versus Embry, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., 56 (2011), 3, 195-205

[41] J. A. Brooke, P. Busch, D. B. Pearson, Commutativity up to a factor of bounded operators in complex Hilbert space, R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. 458/2017 (2002), 109-118

[42] B. Fuglede, A commutativity theorem for normal operators, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 36 (1950), 35-40

[43] A. Gheondea, When are the products of normal operators normal, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie (N.S.) 52(100)/2 (2009), 129-150

[44] A. Schweinsberg, The Operator Equation AX – XB = C with Normal A and B, Pacific J. Math., Vol. 103, No.2, 1982

[45] I. Kaplansky, Products of normal operators, Duke Math. J. 20/2 (1953), 257-260

[46] M. H. Mortad, On some product of two unbounded self-adjoint operators, Integral Equations Operator Theory 64/3 (2009), 399-408

[47] M. H. Mortad, Commutativity up to a factor: more results and the unbounded case, Z. Anal. Anwend 29/3 (2010), 303-307

[48] Cm. Cho, J. I Lee, T. Yamazaki, On the operator equation AB = zBA, Scientiae Mathematicae Japonicae Online, e-2009, 49-55

[49] L. Zhang, T. Ohwada, M. Cho, On λ-commuting operators, International mathematical Forum, 6, No.34 (2011), 1685-1690

[50] K. Rasimi, A. Ibraimi, L. Gjoka, Notes on λ-commuting operators, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 91, No.2, 2014, 191-196

[51] K. Rasimi, Some remarks on n-power class(Q) operators, International Journal of Pure and Applied Mathematics, Vol. 89, No.2, 2013, 147-151

[52] K. Rasimi, Double Commutativity and Some results on Quasihyponormal operators, International Journal of Mathematics Research, Vol. 5, No. 3, 313-316

[53] K.Rasimi, Operatorët hipernormal, paranormal dhe kuazidiagonal në hapësirat e Hilbertit, punim magjistrature, Prishtinë, 2010

[54] J. B. Conway, G. Prajitura, On λ - commuting operators, Studia Math. 166 (2005), 1-9

[55] J. Yang, H.-K., Du. A note on commutativitu up to a factor of bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc. 132(2004), 1713-1720

[56] V. lauric, On λ-commuting hyponormal operators, Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 7, 2013, no. 49, 2441-2444

[57] Ch. Chellali, M. H. Mortad, Commutativity up to a factor for bounded and unbounded operators, arkiv: 1401.5917v2 [math.FA] 25 April 2014

[58] M. H. Mortad, Commutativity of unbounded Normal and Self-adjoint Operators and Aplications, Operators and Matrices, 8/2 (2014), 563-571

[59] J. Von Neumann, Mathematical Foundations of Quantum mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1955. MR 16:654a

[60] C. R. Putnam, Commutation properties of Hilbert space operators and related topis, Springer-Verlag, New York, 1967, MR 36:707

[61] H. Weyl, Group Theory and Quantum Mechanics, London: Methuen; 1950 New York: Dover

[62] G. B. Folland, A. Sitaram, The Uncertainty principle: A mathematical Survay, J. Fourier Anal. Appl. 3(3) (1997), 207-238

[63] J. Prestin, E. Quak, H. Rauhaut, K. Selig, On the connection of uncertainty principle for functions on the circle and on the real line, Preprint, 2001

[64] M. Rosler, M. Voit, An uncertainty principle for ultraspherical expansions, J. Math. Anal. Appl. 209 (1997), 624-634

[65] K. K. Selig, Uncertainty principles revisited, Electronic Transactions on Numerical Analysis, Vol. 14, pp. 165- 177, 2002

[66] J. Blank, P. Exner, M. Havlicek, Hilbert Space Operators in Quantum Physics, Second Edition, Springe Science+Business Media B.V. , New York, 2008