



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

Për marrjen e gradës shkencore **DOKTOR**

Fusha e studimit: **ANALIZË FUNKSIONALE**

Lëmia: **TEORIA E OPERATORËVE**

TEOREMA E WEYL-IT DHE VETITË SPEKTRALE NË DISA KLASË TË OPERATORËVE

Kandidati

Msc. Ilmi HOXHA

Udhëheqës shkencor

Prof. Dr. Agron TATO

Prof. Asoc. Naim L. BRAHA



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

Për marrjen e gradës shkencore **DOKTOR**

TEOREMA E WEYL-IT DHE VETITË SPEKTRALE NË DISA KLASË TË OPERATORËVE

Kandidati

Msc. Ilmi HOXHA

Miratohet

Udhëheqës shkencor

Prof. Dr. Agron TATO

Prof. Asoc. Naim L. BRAHA

Tiranë, 2015



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

I paraqitur nga Msc. Ilmi HOXHA

Udhëhequr nga: Prof. Dr. Agron TATO dhe Prof. Asoc. Naim L. BRAHA

Për marrjen e gradës shkencore **DOKTOR**

TEOREMA E WEYL-IT DHE VETITË SPEKTRALE NË DISA KLASË TË OPERATORËVE

Mbrohet më datë: 15/07/2015, para jurisë:

1. Prof. Asoc. Ligor NIKOLLA, Kryetar
2. Prof. Dr. Lulëzim HANELLI, Anëtar (oponent)
3. Prof. Dr. Xhezair TELITI, Anëtar
4. Prof. Asoc. Luigj GJOKA, Anëtar (oponent)
5. Prof. Dr. Fatmir HOXHA, Anëtar

Tiranë, 2015

Përmbajtja

Abstrakt	vi
Abstract	vii
Hyrje	viii
Falënderim	xi
1 Operatori dhe spektri i tij	1
1.1 Rangu dhe bërthama e operatorëve. Ascenti dhe descenti i tyre . . .	1
1.2 Operatorët e adjunguar. Projektori ortogonal dhe nënhapësira invari- ante	4
1.3 Operatorët pozitiv dhe dekompozimi polar	6
1.4 Spektri i operatorit	8
1.5 Operatorët e Fredholm-it. Teorema e Weyl-it	16
1.6 Teorema e pasqyrimit spektral	21
1.7 Disa klasë të rëndësishme të operatorëve	24
2 Vetitë spektrale	28
2.1 Vetitë spektrale për klasën e operatorëve k -kuazi- $*$ -paranormal	28
2.2 Vetitë spektrale për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$	42
2.3 Operatorët (p, r, q) - $*$ -paranormal dhe absolut- (p, r) - $*$ -paranormal . . .	54
3 Teorema e Weyl-it dhe vazhdueshmëria e spektrit	63
3.1 Teorema e Weyl-it për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal	63
3.2 Teorema e Weyl-it për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$	67
3.3 Vazhdueshmëria e spektrit në bashkësinë e operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$	72
3.4 Vetitë spektrale dhe Teorema e Browder-it për operatorët absolut- k - $*$ -paranormal	75
4 Vetitë tjera për operatorët k-kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, $\mathcal{A}(k^*)$ dhe k-kuazi-$*$- klasë $\mathcal{A}$	79

4.1	Prodhimi tensorial për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$	79
4.2	Prodhimi tensorial për operatorët e klasës $\mathcal{A}(k^*)$	83
4.3	Teorema e Fuglede-Putnam-it për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$	85
4.4	Vetia e Fuglede-Putnam-it për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$	87
Përfundim		96
Conclusion		97
Biografia dhe lista e punimeve		98
Literatura		101

Abstrakt

Në këtë punim të doktoraturës do të përkufizojmë klasët e operatorëve: k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal dhe absolut- (p, r) - $*$ -paranormal.

Për këto klasë të operatorëve do të studiohen vetitë bazike të tyre. Pastaj do të studiohen vetitë spektrale për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal, e në veçanti për operatorët p - $*$ -paranormal, si dhe rrjedhimet nga ato veti. Gjithashtu, për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ do të vërtetojmë disa veti për nënhapësirën invariante.

Më tutje, do të vërtetojmë Teoremën e Weyl-it dhe versionet e saj për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal dhe k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Po ashtu do të vërtetojmë teoremën e Browder-it dhe versionet e saj për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, si dhe do të tregojmë se spektri i operatorit, spektri i Weyl-it dhe spektri i Browder-it i kësaj klase të operatorëve është i vazhdueshëm. Do të vazhdojmë me vetitë spektrale për operatorët absolut- k - $*$ -paranormal, teoremën spektrale si dhe Teoremën e Browder-it për këtë klasë të operatorëve.

Në vazhdim, do të vërtetojmë teoremën: Prodhimi tensorial $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen njëri nga kushtet:

1. T dhe S janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$,
2. $T^{k+1} = O$ ose $S^{k+1} = O$,

si dhe teoremën analoge për klasën e operatorëve $\mathcal{A}(k^*)$.

Në kapitullin e fundit do të japim Teoremën e Fuglede-Putnamit për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, e cila është rrjedhim i vetive spektrale të kësaj klase të operatorëve. Ndërsa në fund të punimit do të tregojmë se operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ e plotësojnë dekompozimin e tipit Wold.

Klasifikimi sipas AMS 2010: Primare 47b20; Sekondare 47A10, 47A15, 47A53, 47A75, 47A80.

Fjalët kyçe: spektër, resolvente, rreze spektrale, spektër pikësor, spektër aproksimativ, spektër surjektiv, spektër i përbashkët pikësor, spektër i përbashkët aproksimativ, normaloid, isoloid, polaroid, pol i resolventes, pikë e izoluar, Idempotent i Riesz-it, nilpotent, pothuajse-nilpotent, a -isoloid, a -polaroid, normal, paranormal, hipernormal, $*$ -paranormal, klasa $\mathcal{A}$, klasa $\mathcal{A}^*$, klasa $\mathcal{A}(k)$, klasa $\mathcal{A}(k^*)$, absolut- k -paranormal, absolut- k - $*$ -paranormal, k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal, absolut- (p, r) - $*$ -paranormal, Teorema e Weyl-it, Teorema e Browder-it.

Abstract

In this doctorate thesis, we will define the operator classes: k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, k -quasi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal and absolute- (p, r) - $*$ -paranormal, where we will also study their basic properties. Then, we will study spectral properties of the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, k -quasi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal operators, particularly of p - $*$ -paranormal operators, as well as corollaries from these properties. Further, for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operator, we will prove some properties for the invariant subset.

Furthermore, we will prove the Weyl's Theorem and its versions for the k -quasi- $*$ -paranormal operators. Then, we will work on Weyl's Theorem for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operator, where we will also prove the Browder's Theorem and its versions for this class of operators. Next, we will show that the spectrum, the Weyl and Browder's spectrum of this operators' class is continuous. We will continue with spectral properties for absolute- k - $*$ -paranormal operators, the spectral theorem and with the Browder's Theorem for this class of operators.

In addition, we will prove the theorem: The tensorial product $T \otimes S$ is k -quasi class operator $\mathcal{A}_n^*$ if and only if one of the conditions holds:

1. T and S are k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operators,
2. $T^{k+1} = O$ or $S^{k+1} = O$,

as well as the analogue theorem for the class $\mathcal{A}(k^*)$.

In the last chapter, we will give the Fuglede-Putnam theorem for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operators, which is a corollary of the spectral properties of this class of operators. Finally, we will show that the k -quasi- $*$ -class $\mathcal{A}$ operators satisfy the decomposition of the Wold type.

Classification according to AMS 2010: Primary 47b20; Secondary 47A10, 47A15, 47A53, 47A75, 47A80.

Key words: spectrum, resolvent, spectral radius, point spectrum, approximative spectrum, surjective spectrum, point joint spectrum, approximative joint spectrum, normaloid, isoloid, polaroid, pol of resolvent, isolated point, Idempotent of Riesz, nilpotent, quasinilpotent, a -isoloid, a -polaroid, normal, paranormal, hyponormal, $*$ -paranormal, class $\mathcal{A}$, class $\mathcal{A}^*$, class $\mathcal{A}(k)$, class $\mathcal{A}(k^*)$, absolute- k -paranormal, absolute- k - $*$ -paranormal, k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, k -quasi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal, absolute- (p, r) - $*$ -paranormal, Weyl's Theorem, Browder's Theorem.

Hyrje

Spektri i operatorit paraqet një kuptim bazë në teorinë e operatorëve. Pas përkufizimit të një klase të operatorëve dhe studimit të vetive bazike të tyre, veti të rëndësishme të cilat studiohen janë vetitë spektrale të asaj klase të operatorëve.

Matematikani i madh gjerman Herman Weyl (1885-1955) në [97] në vitin 1909 ekzaminoi spektrin e perturbimit kompakt $T + K$ për operatorin e vetë-adjunguar T dhe vërejti se për çdo operator kompakt K , $\mu \in \sigma(T + K)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur μ nuk është vlerë vetjake e izoluar me shumëfishitet të fundmë. Sot ky rezultat është i njohur me emrin: Teorema e Weyl-it. Ky emërtim u përdor për herë të parë nga L. A. Coburn në [21], në të cilin punim, Coburn zgjeroi Teoremën e Weyl-it për operatorët hipernormal. Që të tregojmë se operatori T e plotëson Teoremën e Weyl-it, duhet të tregojmë se plotësohet barazimi:

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T).$$

Punimet lidhur me Teoremën e Weyl-it vazhduan nga matematikan të tjerë, si S. K. Berberian, i cili vërtetoi Teoremën e Weyl-it për operatorët seminormal në *An extension of Weyl's theorem to a class of not necessarily normal*, Michigan Math. J. **16**(1966). Pastaj, nga P. Aiena, W. Y. Lee, R. E. Harte, R. Curto, S. Mecheri, K. Tanahashi, Y. M. Han, M. Berkani, B. P. Duggal, A. Uchiyama, etj.

Teorema e Weyl-it luan rol qendror në teorinë spektrale të operatorëve. Janë dhënë edhe disa variante të tjera të teoremës së Weyl-it, si:

Teorema e a -Weyl-it, e përmendur për herë të parë nga V. Rakočević në [81],

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^a(T),$$

Teorema e Përgjithshme e Weyl-it, e përmendur për herë të parë nga M. Berkani në [14]:

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi_{00}(T),$$

Teorema e Përgjithshme e a -Weyl-it, e përmendur për herë të parë në [13]:

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{UBW}(T) = \Pi_{00}^a(T).$$

Po ashtu, Teorema e Browder-it është një version i teoremës së Weyl-it:

$$\sigma_b(T) = \sigma_w(T).$$

Pastaj Teorema e a -Browder-it, Teorema e Përgjithshme e Browder-it dhe Teorema e Përgjithshme e a -Browder-it.

Ky punim është i ndarë në katër kapituj.

Kapitulli i parë: **Operatori dhe spektri i tij**

Në kapitullin e parë kemi dhënë kuptimet themelore dhe pohimet ndihmëse, të cilat do ti shfrytëzojmë për vërtetimin e pohimeve themelore në kapitujt dy, tre dhe katër, të cilët kapituj janë të përbërë kryesisht nga punime autoriale. Këtu kemi dhënë kuptimet për operatorin, bërthamën dhe imazhin e tij, në mënyrë të veçantë kemi dhënë ascentin dhe descentin e operatorit.

Pastaj në paragrafin tjetër kemi vazhduar me operatorin e adjunguar, operatorin invers, hapësirën invariante dhe projektorin ortogonal. Pastaj kemi dhënë spektrin e operatorit dhe ndarjen klasike të tij, llojet e spektrit të operatorit si dhe disa pohime pa vërtetim lidhur me këto kuptime. Po ashtu kemi përkufizuar operatorët isoloid, normaloid, a -isoloid, a -polaroid, nilpotent dhe pothuajse-nilpotent. Në vazhdim kemi përkufizuar SVEP-in dhe kemi dhënë vetitë e tij.

Në dy paragrafet e fundit kemi rikujtuar përkufizimin për operatorët e Fredholm-it (Erik Ivar Fredholm 1866-1927, matematikan suedez), Weyl-it, Browder-it, B -Fredholm-it, B -Weyl-it dhe B -Browder-it si dhe spektrat përkatës të tyre, dhe në fund kemi dhënë kuptimin mbi Teoremën e Weyl-it, Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, Teoremën e a -Weyl-it, Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it, Teoremën e Browder-it, Teoremën e Përgjithshme të Browder-it, Teoremën e a -Browder-it dhe Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it.

Në fund të këtij kapitulli kemi folur për Teoremën e pasqyritit spektral lidhur me spektrin e operatorit, spektrin e Fredholm-it, spektrin e Weyl-it, spektrin gjysmë të sipërm të Weyl-it, spektrin e Browder-it, spektrin gjysmë të sipërm të Browder-it, si dhe spektrat përkatës të përgjithshëm.

Kapitulli i dytë: **Vetitë spektrale në disa klasë të operatorëve**

Në këtë kapitull do të përkufizojmë operatorët: k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal, dhe absolut- (p, r) - $*$ -paranormal.

Për këto klasë të operatorëve do të studiohen vetitë bazike të tyre. Pastaj do të studiohen vetitë spektrale për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal dhe (p, r, q) - $*$ -paranormal (në veçanti për operatorët p - $*$ -paranormal) si dhe rrjedhimet nga ato veti. Për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ do të vërtetojmë disa veti për hapësirën invariante.

Kapitulli i tretë: **Teorema e Weyl-it për disa klasë të operatorëve**

Në paragrafin e parë të këtij kapitulli do të vërtetojmë Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it dhe versionet e saj për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal. Pastaj në paragrafin e dytë do të vërtetojmë Teoremën e Weyl-it për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Po ashtu paraprakisht do të vërtetojmë Teoremën e Browder-it dhe versionet e saj për këtë klasë të operatorëve.

Ndërsa në paragrafin e tretë kemi përkufizuar vazhdueshmërinë e spektrit dhe kemi dhënë disa pohime të cilat do ti përdorim për vërtetimet e rezultateve tona. Do të tregojmë se spektri i operatorit, spektri i Weyl-it dhe spektri i Browder-it për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ është i vazhdueshëm. Në paragrafin e fundit do të shohim vetitë spektrale për operatorët absolut- k -*-paranormal, Teoremën spektrale si dhe Teoremën e Browder-it për këtë klasë të operatorëve.

Kapitulli i katërt: **Veti të tjera të operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, $\mathcal{A}(k^*)$ dhe k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$**

Në këtë kapitull, në paragrafin e parë do të japim kuptimet bazë për prodhimin tensorial dhe pohimet të cilat do t'i shfrytëzojmë për vërtetimin e dy teoremave bazë të këtij paragrafi dhe paragrafit të dytë:

Prodhimi tensorial $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen njëri nga kushtet:

1. T dhe S janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$,
2. $T^{k+1} = O$ ose $S^{k+1} = O$,

si dhe teoremën analoge për klasën e operatorëve $\mathcal{A}(k^*)$.

Në paragrafin e radhës do të japim Teoremën e Fuglede-Putnamit për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, që këtu do të tregohet se është rrjedhim i vetive spektrale të kësaj klase të operatorëve. Ndërsa në paragrafin e fundit të këtij kapitulli do të vërtetojmë se operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}^*$ e plotësojnë dekompozimin e tipit Wold.

Falënderim

Falënderoj udhëheqësit shkencor, profesorin Naim L. Braha dhe profesorin Agron Tato për mundin, përkushtimin, përkrahjen dhe ndihmën e pakursyer të dhënë që ky punim të jetë sa më profesional.

Kapitulli 1

Operatori dhe spektri i tij

Le të jenë H dhe K hapësira të Hilbert-it, ku nëse nuk themi ndryshe do ti kuptojmë si hapësira komplekse me dimension të pafundmë. Me $L(H, K)$ shënojmë bashkësinë e të gjithë operatorëve të kufizuar nga H në K , e cila është hapësirë e normuar lidhur me normën

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\},$$

rrjedhimisht me normën

$$\|T\| = \sup\{|\langle Tx, y \rangle| : \|x\| = \|y\| = 1\},$$

ku me $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kemi shënuar prodhimin skalar.

Nëse $H = K$, atëherë shkurt shënojmë $L(H) = L(H, H)$. Operatorin identik e shënojmë me I ndërsa operatorin zero me O . Mbylljen e bashkësisë M e shënojmë me $\overline{M}$, numrin e konjuguar të numrit kompleks μ me $\overline{\mu}$, ndërsa pjesën reale të numrit kompleks μ me $\operatorname{Re}\mu$ dhe pjesën imagjinare me $\operatorname{Im}\mu$. Bashkësinë e numrave natyralë e shënojmë me $\mathbb{N}$, bashkësinë e numrave realë me $\mathbb{R}$ dhe bashkësinë e numrave kompleksë e shënojmë me $\mathbb{C}$. Gjithashtu në vend të $T - \mu I$ do të shënojmë shkurt $T - \mu$.

1.1 Rangu dhe bërthama e operatorëve. Ascenti dhe descenti i tyre

Le të jetë $T \in L(H, K)$. Me

$$\ker(T) = \{x \in H : Tx = 0\} = T^{-1}(\{0\}),$$

kemi shënuar bërthamën e operatorit T e cila është nënhapësirë e mbyllur e hapësirës H . Nëse $\ker(T) = \{0\}$, atëherë operatori T është injektiv.

Me

$$T(H) = \{y \in K : y = Tx \text{ për ndonjë } x \in H\},$$

është përkufizuar rangi i operatorit T ose imazhi i tij. Tregohet se $T(H)$ është nënhapësirë e hapësirës K , në rastin e përgjithshëm jo e mbyllur. Nëse $T(H) = K$, atëherë operatori T është surjektiv.

Pasi që

$$\{0\} = \ker(T^0) \subseteq \ker(T) \subseteq \ker(T^2) \subseteq \dots,$$

pra kemi varg rritës të bërthamave të operatorit T , atëherë mund të marrim përkufizimin:

Përkufizim 1.1.1. Për operatorin $T \in L(H)$, numrin më të vogël të plotë pozitiv p për të cilin vlen

$$\ker(T^p) = \ker(T^{p+1}),$$

e quajmë ascent (ngritje) të operatorit T dhe e shënojmë me $p(T)$. Nëse një numër i tillë nuk ekziston, atëherë kemi $p(T) = \infty$.

Themi se T ka ascent të fundmë në qoftë se,

$$p(T - \mu) < \infty, \text{ për çdo } \mu \in \mathbb{C}.$$

Pasi që

$$\dots \subseteq T^2(H) \subseteq T(H) \subseteq T^0(H),$$

pra kemi varg zvogëlues të rangjeve të operatorit T , prandaj mund të marrim përkufizimin:

Përkufizim 1.1.2. Për operatorin $T \in L(H)$, numrin më të vogël të plotë pozitiv q për të cilin vlen

$$T^q(H) = T^{q+1}(H),$$

e quajmë descent (zbritje) të operatorit T dhe e shënojmë me $q(T)$. Nëse një numër i tillë nuk ekziston, atëherë kemi $q(T) = \infty$.

Themi se T ka descent të fundmë në qoftë se,

$$q(T - \mu) < \infty, \text{ për çdo } \mu \in \mathbb{C}.$$

Lemë 1.1.1. [1, Theorem 1.19 dhe 1.26] *Le të jetë T operator linear në H .*

1. *Nëse $p(T)$ dhe $q(T)$ janë të fundmë, atëherë $p(T) = q(T)$,*
2. *Nëse $p(T) = q(T) < \infty$, atëherë $H = T^p(H) \oplus \ker(T^p)$,*
3. *Nëse për ndonjë numër natyral m vlen $H = T^m(H) \oplus \ker(T^m)$, atëherë $p(T) = q(T) \leq m$.*

Për $T \in L(H)$, me $\alpha(T) = \dim \ker(T)$ shënojmë dimensionin e bërthamës së operatorit T , ndërsa me $\beta(T) = \dim(H/\overline{T(H)})$ kodimensionin e rangut të operatorit T .

Lemë 1.1.2. [67, Theorem 1.2.5] *Le të jetë $T \in L(H, K)$. Operatori T është me rang të mbyllur, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T^* është me rang të mbyllur.*

Lemë 1.1.3. [67, Theorem 1.2.7] *Nëse T ka rang të mbyllur, atëherë*

$$\alpha(T) = \beta(T^*) \text{ dhe } \alpha(T^*) = \beta(T).$$

Përkufizim 1.1.3. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet i kufizuar nga poshtë në qoftë se, T ka rang të mbyllur dhe është injektiv,
2. Operatori T quhet pothuajse-invertibil nëse T është injektiv dhe me rang të dendur,
3. Operatori $S \in L(H)$ quhet transformim pothuajse-invertibil i operatorit T nëse ekziston operatori pothuajse-invertibil X i tillë që $XS = TX$,
4. Operatorët T dhe S janë të ngjashëm, në qoftë se ekziston operatori invertibil me invers të kufizuar X i tillë që $XT = SX$.
5. Për operatorët $S, T \in L(H)$ themi se janë pothuajse të ngjashëm nëse ekzistojnë operatorët injektiv $X, Y \in L(H)$ me rang të dendur, të tillë që $XS = TX$ dhe $YT = SY$.

Nëse S dhe T janë pothuajse të ngjashëm, simbolikisht shënojmë $S \sim T$, [66].

Përkufizim 1.1.4. Operatori $T : H \rightarrow K$ quhet kompakt, në qoftë se për çdo varg të vektorëve njësi $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ nga H , vargu $\{Tx_m\}_{m=1}^{\infty}$ ka nënvarg konvergjent në K .

Shënojmë me $\mathcal{B}(H, K)$ bashkësinë e të gjithë operatorëve kompakt nga hapësira H në hapësirën K . Është e qartë se nëse T është operator kompakt, atëherë T është operator i kufizuar, pra nga $T \in \mathcal{B}(H, K)$ rrjedh se $T \in L(H, K)$. Tregohet se $\mathcal{B}(H, K)$ është nënhapësirë e mbyllur e hapësirës $L(H, K)$, [52, Proposition 13.1].

Lemë 1.1.4. Le të jenë H, K dhe J hapësira të Hilbert-it.

1. Në qoftë se njëri nga operatorët $T \in L(H, K)$ dhe $S \in L(K, J)$ është kompakt, atëherë edhe kompozimet ST dhe TS janë operatorë kompakt.
2. Në qoftë se për $T \in L(H, K)$ operatori T^*T është kompakt, atëherë edhe T është kompakt.
3. Operatori $T \in L(H, K)$ është kompakt, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $T^* \in L(K, H)$ është kompakt.

Në rastin e përgjithshëm, nëse T^n është operator kompakt për ndonjë numër natyral n , nuk rrjedh se edhe T është kompakt. E tregojmë këtë me një shembull.

Shembull 1.1.5. Le të jetë $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ bazë ortogonale në $H = l_2(\mathbb{N})$. Përkufizojmë operatorin T të dhënë me

$$Te_{2k-1} = e_{2k} \text{ dhe } Te_{2k} = 0, \text{ për } k = 1, 2, 3, \dots$$

Është e qartë se nga vargu i vektorëve njësi $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$, nuk mund të nxirret një nënvarg konvergjent, prandaj T nuk është operator kompakt.

Në anën tjetër, pasi që $T^2 = O$, atëherë T^2 është operator kompakt.

Në këtë punim do të tregojmë se kjo që thamë më sipër nuk ndodh kur operatorët janë k -kuazi- $*$ -paranormal ose p - $*$ -paranormal. Pra, nëse T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal (p - $*$ -paranormal), ashtu që T^n është operator kompakt, atëherë edhe T është operator kompakt.

1.2 Operatorët e adjunguar. Projektori ortogonal dhe nënhapësira invariante

Përkufizim 1.2.1. Për $T \in L(H, K)$ operatori $T^* \in L(K, H)$ i cili e plotëson barazimin

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle,$$

për çdo $x \in H$ dhe për çdo $y \in K$, quhet operator i adjunguar i operatorit T

Në qoftë se $T = T^*$, atëherë T quhet operator i vetë-adjunguar. Tregohet se vlen $\|T\| = \|T^*\|$, si dhe është e qartë se $I^* = I$ dhe $O^* = O$.

Vektori x është ortogonal me vektorin y në qoftë se $\langle x, y \rangle = 0$. Në këtë rast shënojmë $x \perp y$. Dy bashkësi A dhe B nga hapësira H janë ortogonale (shënohet $A \perp B$), në qoftë se çdo vektor nga bashkësia A është ortogonal me çdo vektor nga bashkësia B . Komplementi ortogonal i bashkësisë A është bashkësia $A^\perp$, e cila i përmban të gjithë vektorët $x \in H$, të cilët janë ortogonal në çdo vektor nga bashkësia A , pra:

$$A^\perp = \{x \in H : \langle x, y \rangle = 0, \text{ për çdo } y \in A\}.$$

Është e qartë se $A \perp A^\perp$, $A \cap A^\perp \subseteq \{0\}$, ndërsa $A \cap A^\perp = \{0\}$ në qoftë se A e përmban vektorin zero.

Nëse $A \subseteq B$, atëherë $B^\perp \subseteq A^\perp$ [25, Faqe 326]. Po ashtu, në qoftë se M është nënhapësirë e mbyllur e hapësirës H , atëherë $H = M \oplus M^\perp$.

Lemë 1.2.1. [67, Theorem 1.2.4] Le të jetë $T \in L(H)$. Atëherë,

$$\ker(T^*) = (T(H))^\perp.$$

Le të jetë M nënhapësirë e mbyllur e hapësirës H . Përkufizojmë operatorin $P : H \rightarrow M$, të tillë që

$$P(m + n) = m \text{ për çdo } m \in M \text{ dhe } n \in M^\perp,$$

që quhet projektor i hapësirës H mbi nënhapësirën M . Është e qartë se $Pm = m$ për çdo $m \in M$. Po ashtu $P(H) = M$ dhe $\ker(P) = M^\perp$. Operatori P quhet projektor ortogonal sepse

$$P(M) \perp \ker(P).$$

Nga këtu shohim që nëse P është projektor ortogonal nga H mbi M , atëherë

$$\ker(P) = (P(H))^\perp,$$

si dhe anasjelltas.

Në qoftë se P është projektor ortogonal nga H mbi M , atëherë $I - P$ është projektor ortogonal nga H mbi $M^\perp$. Pra, $(I - P)(H) = M^\perp$ dhe $\ker(I - P) = M$. Vlen

$$(I - P)(H) = \ker(P) \text{ dhe } P(M) = \ker(I - P),$$

që tregon se rangi i projektorit P është nënhapësirë e mbyllur.

Tregohet se për çdo nënhapësirë të mbyllur M të hapësirës H , ekziston projektori ortogonal unik P i përkufizuar më sipër. Po ashtu tregohet se $\|P\| = 1$ dhe vlen kjo Lemë:

Lemë 1.2.2. [46, Theorem 13.1] P është projektor ortogonal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $P^2 = P$ dhe P është operator i vetë-adjunguar.

Përkufizim 1.2.2. Le të jetë M nënhapësirë e mbyllur e hapësirës H .

1. Për nënhapësirën M themi se është T -invariante në qoftë se $T(M) \subseteq M$. Pra, në qoftë se për çdo $x \in M$, rrjedh $Tx \in M$. Nënhapësira invariante M është jo triviale, në qoftë se $M \neq \{0\}$ dhe $M \neq H$.

2. Nënhapësira M quhet nënhapësirë e reduktuar për operatorin T , në qoftë se $T(M) \subseteq M$ dhe $T(M^\perp) \subseteq M^\perp$.

3. Nënhapësira M është nënhapësirë hiperinvariante jo triviale për T , nëse $\{0\} \neq M \neq H$ dhe M është invariante për çdo operator $S \in L(H)$, që plotëson kushtin $TS = ST$.

Lemë 1.2.3. Le të jetë M nënhapësirë e hapësirës H .

1. [25, Proposition 5.54] Nënhapësira M e hapësirës H është T -invariante, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $M^\perp$ është invariante për T^* .
2. [25, Corollary 5.75] Nënhapësira M është nënhapësirë e reduktuar, atëherë dhe vetëm atëherë, kur M është invariante për T dhe T^* .

Në qoftë se $T \in L(H)$ dhe M nënhapësirë e mbyllur e hapësirës H , atëherë $H = M \oplus M^\perp$ dhe T mund të shprehet përmes matricës të tipit 2×2 :

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ D & C \end{pmatrix},$$

ku

$$A : M \rightarrow M, \text{ pra } A \in L(M);$$

$$B : M^\perp \rightarrow M, \text{ pra } B \in L(M^\perp, M);$$

$$D : M \rightarrow M^\perp, \text{ pra } D \in L(M, M^\perp);$$

dhe

$$C : M^\perp \rightarrow M^\perp, \text{ pra } C \in L(M^\perp).$$

Lemë 1.2.4. [22, Proposition 3.7] Le të jetë $T \in L(H)$, M nënhapësirë e hapësirës H dhe P projektor nga H mbi M . Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. M është nënhapësirë invariante për operatorin T .
2. $PTP = TP$.
3. $D = O$.

Po ashtu edhe pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

4. M është nënhapësirë e reduktuar për operatorin T .
5. $PT = TP$.
6. $B = O$ dhe $D = O$.
7. M është nënhapësirë invariante për operatorët T dhe T^* .

Nëse $T \in L(H)$ dhe M është nënhapësirë invariante për operatorin T , atëherë me $T|_M$ shënojmë ngushtimin e operatorit T në M . Është e qartë se $T|_M \in L(M)$, $(T|_M)^* = T^*|_M$ dhe $\|T|_M\| \leq \|T\|$. Po ashtu, në qoftë se M është nënhapësirë invariante për operatorin T dhe

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix},$$

atëherë $A = T|_M$.

1.3 Operatorët pozitiv dhe dekompozimi polar

Operatori $T \in L(H)$ quhet operator pozitiv në qoftë se, $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ për çdo $x \in H$. Simbolikisht shënojmë $T \geq O$. Çdo operator pozitiv në hapësirën komplekse është operator i vetë-adjunguar. Po ashtu është e qartë se operatorët T^*T dhe TT^* janë operatorë pozitiv.

Tani do të japim disa lema të rëndësishme, pa vërtetim, për operatorët pozitiv, të cilat i kemi përdorur për vërtetimin e pohimeve tona.

Lemë 1.3.1. [50, Jobarazimi i Hansenit] Nëse operatorët $A, B \in L(H)$ plotësojnë kushtet $A \geq O$ dhe $\|B\| \leq 1$, atëherë

$$(B^*AB)^\delta \geq B^*A^\delta B \text{ për çdo } \delta \in (0, 1].$$

Lemë 1.3.2. [51, 68, Jobarazimi Löwner-Heinz] Nëse $A \geq B \geq O$, atëherë $A^\delta \geq B^\delta$ për çdo $\delta \in [0, 1]$.

Lemë 1.3.3. [69, Jobarazimi Hölder-McCarthy] Le të jetë T operator pozitiv. Atëherë, jobarazimet e mëposhtme vlejné për çdo $x \in H$:

1. $\langle T^r x, x \rangle \leq \langle Tx, x \rangle^r \|x\|^{2(1-r)}$ për $0 < r < 1$,
2. $\langle T^r x, x \rangle \geq \langle Tx, x \rangle^r \|x\|^{2(1-r)}$ për $r \geq 1$.

Nëse për operatorin $T \in L(H)$ ekziston operatori $S \in L(H)$ i tillë që $S^2 = T$, atëherë S quhet rrënja katrore e operatorit T . Vlen kjo teoremë:

Teoremë 1.3.4. [25, Theorem 5.85] Për çdo operator pozitiv $Q \in L(H)$, ekziston rrënja katrore unike $Q^{\frac{1}{2}} \in L(H)$, e cila gjithashtu është operator pozitiv, i cili komuton me çdo operator me të cilin komuton operatori Q .

Vëmë $|T| = (T^*T)^{\frac{1}{2}}$, i cili është operator pozitiv dhe vlen $|T|^2 = T^*T$. Nga këtu kemi $|T^*|^2 = TT^*$. Shënojmë me $[T^*, T] = T^*T - TT^*$, të cilin e quajmë vet-komutator të operatorit T .

Rikujtojmë përkufizimin për operatorin unitar.

1. Operatori U në H quhet izometri në qoftë se $\|Ux\| = \|x\|$, për çdo $x \in H$. Nga këtu rrjedh që U është izometri, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $U^*U = I$.

2. Operatori U quhet koizometri në qoftë se operatorin i adjunguar i tij U^* është izometri.

3. Në qoftë se U është izometri dhe koizometri, atëherë U quhet operator unitar. Në këtë rast U është invertibil dhe vlen $U^{-1} = U^*$.

4. Operatori T quhet unitarisht ekuivalent me operatorin S , nëse ekziston operatori unitar A i tillë që $AT = SA$.

Tregohet se:

Operatori $U \in L(H, K)$ është izometri, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\langle Ux_1, Ux_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle$, për çdo $x_1, x_2 \in H$, [Proposition 5.2, [22]].

Përkufizim 1.3.1. Operatori $U \in L(H, K)$ quhet izometri parciale, në qoftë se ekziston nënhapësira e mbyllur M , e tillë që $\|Ux\| = \|x\|$, për çdo $x \in M$ dhe $Ux = 0$ për çdo $x \in M^\perp$. Në këtë rast $M = (\ker(U))^\perp$ quhet hapësira initiale, ndërsa $U(H)$ quhet hapësira finale për izometrinë parciale U .

Përkufizim 1.3.2. Në qoftë se operatorin $T \in L(H, K)$ mund ta paraqesim si prodhim të një izometrie parciale $U \in L(H, K)$ dhe të një operatori jonegativ $Q \in L(H)$ dhe nëse $\ker(U) = \ker(Q)$, atëherë paraqitja $T = UQ$ quhet dekompozim polar i operatorit T .

Teoremë 1.3.5. [25, Theorem 5.89] *Le të jetë $T \in L(H, K)$. Atëherë, ekziston izometria parciale $U \in L(H, K)$ me hapësirë initiale $(\ker(T))^\perp$ dhe hapësirë finale $T(H)$, e tillë që $T = U|T|$ dhe $\ker(T) = \ker(|T|)$.*

Lemë 1.3.6. [42] *Nëse $T = U|T|$ është dekompozim polar për operatorin T , atëherë:*

1. $T^* = U^*|T^*|$ është dekompozim polar për operatorin T^* .
2. Vlen $|T^*|^q = U|T|^q U^*$ dhe $|T|^q = U^*|T^*|^q U$, për çdo numër pozitiv q .

Përkufizim 1.3.3. Them i se operatori T komuton dyfish me operatorin S , në qoftë se T komuton me operatorët S dhe S^* .

Lemë 1.3.7. [41, Theorem 2] *Le të jenë $T_1 = U_1 P_1$ dhe $T_2 = U_2 P_2$ dekompozime polare të operatorëve T_1 dhe T_2 , respektivisht. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. Operatori T_1 komuton dyfish me operatorin T_2 ,
2. Operatorët U_1^* , U_1 dhe P_1 komutojnë me operatorët U_2^* , U_2 dhe P_2 ,
3. $[P_1, P_2] = O$, $[U_1, P_2] = O$, $[P_1, U_2] = O$, $[U_1, U_2] = O$ dhe $[U_1^*, U_2] = O$.

Lemë 1.3.8. [41, Corollary 1] *Le të jenë $T_1 = U_1 P_1$ dhe $T_2 = U_2 P_2$ dekompozime polare të operatorëve T_1 dhe T_2 , respektivisht. Nëse T_1 komuton dyfish me T_2 , atëherë*

$$T_1 T_2 = U_1 U_2 P_1 P_2$$

është dekompozim polar i operatorit $T_1 T_2$ ashtu që, $U_1 U_2$ është izometri polare me $\ker(U_1 U_2) = \ker(P_1 P_2)$ dhe $P_1 P_2 = |T_1 T_2|$.

1.4 Spektri i operatorit

Le të jetë $T \in L(H)$. Bashkësinë

$$\begin{aligned}\rho(T) &= \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ është invertibil}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \ker(T - \mu) = \{0\} \text{ dhe } (T - \mu)(H) = H\}\end{aligned}$$

e quajmë bashkësi resolvente të operatorit T , ndërsa pikat e kësaj bashkësie quhen pika regulare të operatorit T . Në bashkësinë resolvente përkufizojmë pasqyrimin

$$R_T(\mu) : \mu \rightarrow (T - \mu)^{-1},$$

të cilin e quajmë resolvente e operatorit T . Tregohet se ky pasqyrim është analitik dhe i vazhdueshëm në bashkësinë resolvente, [46, Theorem 10.1].

Bashkësinë komplement të resolventës e quajmë spektër të operatorit T , pra

$$\begin{aligned}\sigma(T) &= \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është invertibil}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \ker(T - \mu) \neq \{0\} \text{ ose } (T - \mu)(H) \neq H\}\end{aligned}$$

e cila është bashkësi e mbyllur dhe joboshe, [46, Theorem 10.1 dhe 10.2]. Po ashtu $\sigma(T)$ është bashkësi kompakte, [83, Theorem 10.13].

Është i njohur fakti se T është invertibil, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T^* është invertibil. Pra $T - \mu$ është invertibil, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $T^* - \bar{\mu}$ është invertibil. Prandaj, $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ si dhe vlen

$$\sigma(T^*) = \{\bar{\mu} \in \mathbb{C} : \mu \in \sigma(T)\}.$$

Me

$$r(T) = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T)\},$$

shënojmë rrezen spektrale të operatorit T . Pasi që $\mu \in \sigma(T)$ vetëm nëse $|\mu| \leq \|T\|$, atëherë $r(T) \leq \|T\|$ për çdo operator $T \in L(H)$.

Tregohet se vlen,

$$(1.4.1) \quad r(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}},$$

që quhet formula e Gelfand-Beurlingut, [83, Theorem 10.13].

Përkufizim 1.4.1. Operatori T quhet normaloid, në qoftë se $r(T) = \|T\|$.

Nga përkufizimi dhe nga relacioni (1.4.1) shohim që operatori T është normaloid, në qoftë se

$$\|T^m\| = \|T\|^m, \text{ për çdo } m \in \mathbb{N}.$$

Përkufizim 1.4.2. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet pothuajse-nilpotent, në qoftë se

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} = 0.$$

2. Operatori T quhet nilpotent me rend të nilpotencës k , në qoftë se ekziston numri i plotë pozitiv k i tillë që

$$T^{k-1} \neq O, \text{ dhe } T^k = O.$$

Shohim se nëse T është pothuajse-nilpotent atëherë $\sigma(T) = \{0\}$. Po ashtu nga përkufizimi shohim se nëse T është nilpotent, atëherë T është pothuajse-nilpotent. Mirëpo e anasjellta nuk është e vërtetë në rastin e përgjithshëm, [25, Proposition 2. N].

Nëse për $\mu \in \mathbb{C}$ ekziston $0 \neq x \in H$ i tillë që $(T - \mu)x = 0$, atëherë μ quhet vlerë vetjake e operatorit T ndërsa x quhet vektor vetjak i operatorit T lidhur me vlerën vetjake μ . Me

$$\begin{aligned} \sigma_p(T) &= \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është injektiv}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : \ker(T - \mu) \neq \{0\}\} \end{aligned}$$

shënojmë spektrin pikësor të operatorit T . Vërejmë se, nëse μ është vlerë vetjake e operatorit T , atëherë μ i takon spektrit pikësor të operatorit T . Nëse μ është vlerë vetjake e operatorit T , atëherë me $\ker(T - \mu)$ shënojmë nënhapësirën vetjake të operatorit T lidhur me vlerën vetjake μ . Shumëllojshmëri të vlerës vetjake μ quajmë dimensionin e nënhapësirës vetjake të vlerës vetjake μ .

Nëse $\dim(H) < \infty$, atëherë $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. Mirëpo, nëse $\dim(H) = \infty$, tregohet me shembuj se $\sigma(T) \neq \sigma_p(T)$, prej nga rrjedh se mundet që $\sigma_p(T) = \emptyset$, pra T në këtë rast nuk ka vlera vetjake. Shembull i operatorit të tillë është operatori i zhvendosjes së njëanshme.

Marrim operatorin nilpotent, me rend të nilpotencës $k \geq 2$. Atëherë, $T(T^{k-1}x) = 0$ për çdo $x \in H$. Prandaj

$$\{0\} \neq T^{k-1}(H) \subseteq \ker(T),$$

që tregon se 0 është vlerë vetjake e operatorit T . Nga këtu shohim se, nëse T është nilpotent, atëherë $\sigma(T) = \sigma_p(T) = \{0\}$.

Në qoftë se nga $(T - \mu)x = 0$ rrjedh $(T - \mu)^*x = 0$, atëherë themi se μ është vlerë vetjake normale e operatorit T . Bashkësinë e të gjitha vlerave vetjake normale e shënojmë me $\sigma_{jp}(T)$ dhe e quajmë spektër të përbashkët të operatorit T . Është e qartë se vlen

$$\sigma_{jp}(T) \subseteq \sigma_p(T),$$

mirëpo e anasjellta nuk vlen në rastin e përgjithshëm, prandaj barazimi

$$(1.4.2) \quad \sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T).$$

nuk vlen gjithmonë.

Nëse T është operator normal ose hipernormal, atëherë vlen barazimi (1.4.2). Dugall dhe të tjerët këtë rezultat e zgjeruan në klasën e operatorëve $*$ -paranormal, në [27]. Në [87], Shen dhe të tjerët këtë rezultat e zgjeruan për operatorët kuazi-klasë $\mathcal{A}^*$. Uchiyama në [94] ka treguar se nëse T është operator i klasës $\mathcal{A}$, atëherë plotësohet barazimi

$$(1.4.3) \quad \sigma_{jp}(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

Ne, në punimin tonë do të vërtetojmë se barazimi (1.4.2) vlen për operatorët p - $*$ -paranormal dhe absolut- k - $*$ -paranormal. Gjithashtu do të vërtetojmë se për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}_n$ dhe k -kuazi- $*$ -paranormal vlen barazimi (1.4.3)

Nëse për $\mu \in \mathbb{C}$ ekziston vargu i vektorëve njësi $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset H$, për të cilin vlen $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$, atëherë themi se μ i takon spektrit aproksimativ të operatorit T , të cilin spektër e shënojmë me $\sigma_a(T)$. Tregohet se spektri aproksimativ është nënbashkësi kompakte, e kufizuar dhe jo boshe, është nënbashkësi e mbyllur e spektrit $\sigma(T)$, [25, Theorem 2.5]. Po aty, tregohet se vlejné përfshirjet $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$ dhe

$$\sigma_p(T) \subseteq \sigma_a(T) \subseteq \sigma(T).$$

Në qoftë se nga $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$ rrjedh $(T - \mu)^*x_m \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$, atëherë themi se μ i takon spektrit të përbashkët aproksimativ të operatorit T , të cilin e shënojmë me $\sigma_{ja}(T)$. Është evidente se vlen

$$\sigma_{ja}(T) \subseteq \sigma_a(T),$$

mirëpo e anasjellta nuk vlen në rastin e përgjithshëm. Pra në rastin e përgjithshëm nuk vlen barazimi (1.4.4).

$$(1.4.4) \quad \sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T).$$

Nëse T është operator normal ose operator hipernormal, atëherë vlen barazimi (1.4.4). Dugall dhe të tjerët këtë rezultat e zgjeruan për operatorët $*$ -paranormal, [27]. Cho dhe Yamazaki në [20] kanë treguar se nëse T është operator i klasës $\mathcal{A}$, atëherë plotësohet barazimi

$$(1.4.5) \quad \sigma_{ja}(T) \setminus \{0\} = \sigma_a(T) \setminus \{0\}.$$

Do të tregojmë se barazimi (1.4.4) plotësohet për operatorët p - $*$ -paranormal dhe absolut- k - $*$ -paranormal. Gjithashtu, do të tregojmë se barazimi (1.4.5) plotësohet për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}_n$ dhe k -kuazi- $*$ -paranormal.

Nëse $\mu \notin \sigma_a(T)$ atëherë, $\ker(T - \mu) = \{0\}$ ndërsa $(T - \mu)(H)$ është nënhapësirë e mbyllur, [22, Proposition 6.4]. Prandaj spektrin aproksimativ mund ta përkufizojmë edhe si

$$\sigma_a(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është i kufizuar nga poshtë}\}.$$

Me

$$\begin{aligned} \sigma_s(T) &= \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është surjektiv}\} \\ &= \{\mu \in \mathbb{C} : (T - \mu)(H) \neq H\} \end{aligned}$$

kemi shënuar spektrin surjektiv të operatorit T . Për operatorin e kufizuar T vlen

$$\sigma(T) = \sigma_a(T) \cup \sigma_s(T), \sigma_s(T) = \sigma_a(T^*),$$

$$\sigma_a(T) = \sigma_s(T^*), \text{ dhe } \partial\sigma(T) \subseteq \sigma_s(T).$$

Më poshtë po japim dy lema të rëndësishme, pa vërtetim, të cilat do ti shfrytëzojmë për vërtetimet tona në pjesën kryesore të punimit.

Lemë 1.4.1. [11, Zgjerimi Berberian] Nëse H është hapësirë e Hilbert-it, atëherë ekziston hapësira e Hilbert-it K e tillë që $H \subset K$ dhe ndërtohet pasqyrimi $\varphi : L(H) \rightarrow L(K)$ ashtu që:

1. $\varphi(I_H) = I_K$,
2. $\varphi(T^*) = (\varphi(T))^*$, për çdo $T \in L(H)$,
3. $\varphi(TS) = \varphi(T)\varphi(S)$, për çdo $T, S \in L(H)$,
4. $\varphi(\alpha T + \beta S) = \alpha\varphi(T) + \beta\varphi(S)$, për çdo $T, S \in L(H)$ dhe $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,
5. $\varphi(T) \geq O$, për çdo operator $T \geq O$ në $L(H)$,
6. $\sigma_a(T) = \sigma_a(\varphi(T)) = \sigma_p(\varphi(T))$, për çdo operator $T \in L(H)$,
7. Nëse T është operator pozitiv, atëherë $\varphi(T^\delta) = |\varphi(T)|^\delta$, për çdo $\delta > 0$,
8. [98] $\sigma_{ja}(T) = \sigma_{jp}(\varphi(T))$, për çdo operator $T \in L(H)$.

Lemë 1.4.2. [7] Le të jetë $T = U|T|$ dekompozim polar i operatorit T , $\mu = |\mu|e^{i\theta} \neq 0$ dhe vargu i vektorëve $\{x_m\}_{m=1}^\infty$. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ dhe $(T^* - \bar{\mu})x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$,
2. $(|T| - |\mu|)x_m \rightarrow 0$ dhe $(U - e^{i\theta})x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$,
3. $(|T^*| - |\mu|)x_m \rightarrow 0$ dhe $(U^* - e^{-i\theta})x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$.

Pikën $\mu \in \sigma(T)$ e quajmë pikë të izoluar të spektrit $\sigma(T)$, në qoftë se bashkësia $\{\mu\}$ është pjesë e izoluar nga spektri $\sigma(T)$. Bashkësinë e të gjitha pikave të izoluar të spektrit të operatorit T e shënojmë me $\text{iso}\sigma(T)$. Komplementin e bashkësisë së pikave të izoluar lidhur me spektrin e operatorit, e quajmë bashkësi të pikave akumuluese të spektrit dhe e shënojmë me

$$\text{acc}\sigma(T) = \sigma(T) \setminus \text{iso}\sigma(T).$$

Le të jetë $\text{Hol}(\sigma(T))$ hapësira e të gjitha funksioneve komplekse analitike në ndonjë rrethinë të hapur të spektrit $\sigma(T)$, dhe marrim $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Atëherë, ekziston rrethina e hapur Ω e spektrit $\sigma(T)$, në të cilën, funksioni f është analitik. Pasi që spektri është bashkësi kompakte, atëherë rrjedh se ekziston zona Koshi Ω_0 , e tillë që $\sigma(T) \subset \Omega_0 \subset \Omega$ dhe $\Gamma = \partial\Omega_0$ është kontur Koshi rreth spektrit $\sigma(T)$. Është e qartë se konturi Koshi Γ shtrihet në bashkësinë resolvente $\rho(T)$, spektri i operatorit T shtrihet në zonën e brendshme të konturit Koshi, ndërsa $\mathbb{C} \setminus \Omega$ në zonën e jashtme të konturit Koshi.

Resolventa $R_T(\mu) : \mu \rightarrow (T - \mu)^{-1}$ e operatorit T është funksion analitik në $\rho(T)$, prandaj edhe funksioni $f(\mu)(T - \mu)^{-1}$ është analitik në $\rho(T)$. Duke shfrytëzuar Teoremën integrale Koshi, marrim funksionin

$$f(T) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\mu)(\mu - T)^{-1} d\mu,$$

që e quajmë funksion llogaritës të operatorit T , ku integrali është marr sipas orientimit pozitiv. Pasi integrali është i Rieman-Stieltjes-it, atëherë $f(T)$ është operator linear dhe i kufizuar.

Le të jetë dhënë bashkësia e hapur $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ku $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{0\}$. Nëse μ është pikë e izoluar dhe $\{\mu\} \subset \Omega_1$, ndërsa pjesa tjetër e spektrit përmbahet në Ω_2 , mund të përkufizojmë funksionin

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{nëse } \mu \in \Omega_1 \\ 0 & \text{nëse } \mu \in \Omega_2 \end{cases}$$

funksioni llogaritës i të cilit është:

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Omega_1} (\mu - T)^{-1} d\mu,$$

që quhet Idempotenti i Riesz-it (Frigyes Riesz 1880-1956, matematikan brilant hungarez) i operatorit T , lidhur me pikën e izoluar μ .

Është e qartë se Ω_1 është një rruzull i mbyllur me qendër në pikën μ me rrezen më të vogël të mundshme r , ashtu që $\Omega_1 \cap \sigma(T) = \{\mu\}$.

Lemë 1.4.3. [47] Nëse $T \in L(H)$ dhe μ pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$, atëherë

1. P_μ është projektor dhe $H = P_\mu(H) \oplus \ker(P_\mu)$.
2. $P_\mu(H)$ dhe $\ker(P_\mu)$ janë nënhapësira invariante lidhur me operatorin T .
3. $P_\mu^2 = P_\mu$, $TP_\mu = P_\mu T$, $\sigma(T|_{P_\mu(H)}) = \{\mu\}$ dhe $\sigma(T|_{(I-P_\mu)(H)}) = \sigma(T) \setminus \{\mu\}$.
4. $(P_\mu)^* = P_\mu^*$

Resolventa $R_T(\mu) = (\mu - T)^{-1}$ mund të zbërthehet në seri të Loranit, në ndonjë rrethinë të pikës μ , e cila shtrihet në bashkësinë resolvente ρ . Le të jetë R rrezja më e madhe e rrethinës së pikës μ , e cila shtrihet në bashkësinë resolvente të operatorit T . Për çdo λ nga unaza $0 < |\lambda - \mu| < R$, seria e Loranit për resolventën është

$$(\mu - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k (\lambda - \mu)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k}{(\lambda - \mu)^k},$$

ku

$$Q_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{R_T(\mu)}{(\lambda - \mu)^{k+1}} d\mu \text{ dhe } P_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} R_T(\mu) (\lambda - \mu)^{k-1} d\mu.$$

Përkufizim 1.4.3. Në qoftë se $P_k \neq 0$ për $k = 1, 2, \dots, m$ dhe $P_k = 0$ për $k > m$, atëherë μ quhet pol i resolventes i rendit m .

Teoremë 1.4.4. [52] Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Pika $\mu \in \sigma(T)$ është pol i resolventes së operatorit T , atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$0 < p(T - \mu) = q(T - \mu) < \infty.$$

2. Nëse $m = p(T - \mu) = q(T - \mu)$, atëherë μ është pol i rendit m .

3. Nëse μ është pol i rendit m i resolventes $R_T(\mu)$, atëherë

$$P_\mu(H) = \ker((T - \mu)^m) \text{ dhe } \ker(P_\mu) = (T - \mu)^m(H).$$

Për $T \in L(H)$ shënojmë me

$$P_{00}(T) = \{\mu \in \sigma(T) : 0 < p(T - \mu) = q(T - \mu) < \infty\}$$

bashkësinë e të gjitha poleve të resolventes së operatorit T

Përkufizim 1.4.4. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet isoloid, në qoftë se çdo pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$ është vlerë vetjake e operatorit T . Pra, T është isoloid nëse

$$\text{iso}\sigma(T) \subseteq \sigma_p(T).$$

2. Operatori T quhet polaroid, në qoftë se çdo pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$ është pol i resolventes së operatorit T . Pra, T është polaroid nëse,

$$\text{iso}\sigma(T) \subseteq P_{00}(T).$$

Nëse μ është pikë e izoluar dhe pol i resolventes, atëherë μ është vlerë vetjake e operatorit T , [22, Corollary 6.13]. Prandaj, nëse T është polaroid, atëherë T është isoloid. Mirëpo e anasjellta nuk vlen në rastin e përgjithshëm, siç tregon ky shembull:

Shembull 1.4.5. Marrim operatorin e zhvendosjes së njëanshme $T : l_2 \rightarrow l_2$ të përkufizuar me $Te_1 = 0$ dhe $Te_n = \frac{1}{n}e_{n-1}$. Shohim që

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, \dots\right).$$

Pasi që $\frac{1}{n} \rightarrow 0$, rrjedh se $T - \mu$ është invertibil për çdo $\mu \neq 0$, pra $\sigma(T) = \{0\}$. Nga këtu shohim se 0 është pikë e izoluar e spektrit. Nga përkufizimi i operatorit T , kemi $\ker(T) = \{e_1\}$. Pra $Te_1 = 0e_1$, që tregon se 0 është vlerë vetjake e operatorit T . Prandaj, T është operator isoloid. Në anën tjetër, pasi $p(T) = \infty$, atëherë T nuk ka ascent të fundmë, gjë që tregon se T nuk është polaroid.

Vlen kjo teoremë:

Teoremë 1.4.6. [3, Theorem 2.11] Operatori $T \in L(H)$ është polaroid, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T^* është polaroid.

Përkufizim 1.4.5. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet a -isoloid, në qoftë se çdo pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(T)$, është vlerë vetjake e operatorit T . Pra, T është a -isoloid, nëse

$$\text{iso}\sigma_a(T) \subseteq \sigma_p(T).$$

2. Operatori T quhet a -polaroid, në qoftë se çdo pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(T)$, është pol i resolventes së operatorit T . Pra, T është a -polaroid, nëse

$$\text{iso}\sigma_a(T) \subseteq P_{00}(T).$$

Është e qartë se nëse T është a -polaroid atëherë, T është a -isoloid, ndërsa e anasjellta në rastin e përgjithshëm nuk është e vërtetë, fakt që na tregon shembulli i mëposhtëm:

Shembull 1.4.7. *Marrim operatorin*

$$T = \begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix},$$

ku A është operatori i zhvendosjes së njëanshme në l_2 , ndërsa C është operator injektiv pothuajse-nilpotent në l_2 . Atëherë,

$$\sigma(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq 1\}$$

dhe

$$\sigma_a(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\} \cup \{0\}.$$

Nga këtu shihet që T është isoloid mirëpo nuk është a -isoloid.

Në fund të këtij paragrafi do të japim përkufizimin për pjesën pothuajse-nilpotente dhe pjesën qendrore analitike për operatorin $T - \mu$.

Pjesa pothuajse-nilpotente $\mathcal{H}_0(T - \mu)$ dhe pjesa qendrore analitike $K(T - \mu)$ për operatorin $T - \mu$ përkufizohen me

$$\mathcal{H}_0(T - \mu) = \{x \in H : \lim_{m \rightarrow \infty} \|(T - \mu)^m x\|^{\frac{1}{m}} = 0\}, \text{ dhe}$$

$$K(T - \mu)$$

$$= \{x \in H : \text{për të cilin ekziston vargu } \{x_m\} \subset H \text{ dhe } \delta > 0 \text{ ashtu që } x = x_0, (T - \mu)x_{m+1} = x_m \text{ dhe } \|x_m\| \leq \delta^m \|x\| \text{ për çdo } m = 1, 2, \dots\}.$$

Është e qartë se $\mathcal{H}_0(T - \mu)$ dhe $K(T - \mu)$ janë nënhapësira lineare të hapësirës H , në rastin e përgjithshëm jo të mbyllura, mirëpo janë nënhapësira hiperinvariante lidhur me $T - \mu$. Po ashtu nga përkufizimi rrjedh se $\ker(T - \mu) \subseteq \mathcal{H}_0(T - \mu)$.

Lemë 1.4.8. [1, Theorem 1.28] *Le të jetë $T \in L(H)$. Atëherë, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$ vlen*

$$(T - \mu)(K(T - \mu)) = K(T - \mu).$$

Teoremë 1.4.9. [2] *Le të jetë $T \in L(H)$ dhe μ pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$. Atëherë,*

1. $P_\mu(H) = \mathcal{H}_0(T - \mu)$ dhe $\ker(P_\mu) = K(T - \mu)$.
2. [2, Theorem 3.76] $H = \mathcal{H}_0(T - \mu) \oplus K(T - \mu)$, ku $\mathcal{H}_0(T - \mu)$ dhe $K(T - \mu)$ janë nënhapësira të mbyllura.

Operatori T quhet gjysmë-regular nëse $T(H)$ është nënhapësirë e mbyllur dhe

$$\ker(T) \subseteq \cap_{m \in \mathbb{N}} T^m(H).$$

Për operatorin T themi se e posedon dekompozimin e përgjithshëm Kato, në qoftë se ekziton çifti i nënhapësirave të mbyllura T -invariante (M, N) për të cilat vlen $H = M \oplus N$, ku $T|_M$ është operator pothuajse-nilpotent dhe $T|_N$ është operator gjysmë-regular. Nëse $T|_M$ është nilpotent, atëherë themi se T e posedon dekompozimin e tipit Kato.

Përkufizim 1.4.6. Themë se operatori $T \in L(H)$ ka vlerë të vetme të vetisë së zgjerimit (SVEP) pikën $\mu_0 \in \mathbb{C}$, në qoftë se për çdo rrethinë të hapur U të pikës μ_0 funksioni i vetëm analitik $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ që e plotëson ekuacionin $(T - \mu)f(\mu) = 0$, për çdo pikë $\mu \in U$, është funksioni konstant $f \equiv 0$.

Themë se operatori T ka SVEP, në qoftë se T ka SVEP në çdo pikë $\mu \in \mathbb{C}$.

Operatori T ka SVEP në çdo pikë të resolventes së operatorit T . Po ashtu T ka SVEP në çdo pikë të izoluar të spektrit $\sigma(T)$.

Po japim një lemë dhe një teoremë të rëndësishme, për vërtetimet tona të më-tutjeshme.

Lemë 1.4.10. [1, Corollary 2.28] *Le të jetë $T \in L(H)$.*

1. *Nëse T ka SVEP, atëherë $\sigma_s(T) = \sigma(T)$.*
2. *Nëse T^* ka SVEP, atëherë $\sigma_a(T) = \sigma(T)$.*

Lemë 1.4.11. [1, Theorem 2.39] *Nëse T ka ascent të fundmë në pikën 0, atëherë T ka SVEP në pikën 0.*

Teoremë 1.4.12. [2, Theorem 2.40] *Le të jetë $T \in L(H)$ dhe $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ funksion analitik në rrethinën e hapur U të spektrit $\sigma(T)$. Nëse T ka SVEP, atëherë edhe $f(T)$ ka SVEP. Nëse f është funksion jo konstant në çdo komponent të lidhur nga U , atëherë T ka SVEP, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $f(T)$ ka SVEP.*

Përkufizim 1.4.7. Le të jetë $T \in L(H)$ dhe $x \in H$. Me $\rho_T(x)$ shënojmë bashkësinë e të gjithë numrave μ , për të cilët numra μ ekziston një rrethinë e hapur U_μ dhe një funksion analitik $f : U_\mu \rightarrow H$, ashtu që ekuacioni $(T - \lambda)f(\lambda) = x$ vlen për çdo $\lambda \in U_\mu$.

1. Funksioni f i definuar më sipër quhet resolvente lokale e operatorit T lidhur me pikën x ,
2. Bashkësia $\rho_T(x)$ quhet bashkësi resolvente lokale e operatorit T lidhur me pikën x ,
3. Bashkësia $\sigma_T(x) = \mathbb{C} \setminus \rho_T(x)$ quhet spektër lokal i operatorit T lidhur me pikën x .

Bashkësia $\rho_T(x)$ është bashkësi e hapur dhe vlen $\rho(T) \subseteq \rho_T(x)$. Prandaj, bashkësia $\sigma_T(x)$ është bashkësi e mbyllur dhe vlen $\sigma_T(x) \subseteq \sigma(T)$.

Për çdo nënbashkësi të mbyllur F në $\mathbb{C}$, me

$$H_T(F) = \{x \in H : \sigma_T(x) \subseteq F\},$$

shënojmë nënhapësirën analitike spektrale të operatorit T .

Lemë 1.4.13. [66, Theorem 1.2.16] *Për çdo operator $T \in L(H)$ dhe për çdo nën-bashkësi $F \subseteq \mathbb{C}$, $H_T(F)$ është nënhapësirë T -hiperinvariante në H .*

1.5 Operatorët e Fredholm-it. Teorema e Weyl-it

Përkufizim 1.5.1. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. T quhet operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it, nëse T ka rang të mbyllur dhe vlen $\alpha(T) < \infty$,
2. T quhet operator gjysmë i poshtëm i Fredholm-it, nëse T ka rang të mbyllur dhe vlen $\beta(T) < \infty$,
3. T quhet operator gjysmë i Fredholm-it, nëse T është gjysmë i sipërm ose gjysmë i poshtëm i Fredholm-it,
4. T quhet operator i Fredholm-it, nëse T është gjysmë i sipërm dhe gjysmë i poshtëm i Fredholm-it.

Nëse $T \in L(H)$ është operator gjysmë i Fredholm-it, atëherë indeksi i operatorit T është i përkufizuar me

$$\text{ind}(T) = \alpha(T) - \beta(T).$$

Nga Lemat 1.1.3 dhe 1.1.2 rrjedh se nëse T është operator i Fredholm-it, atëherë edhe T^* është operator i Fredholm-it dhe vlen $\text{ind}(T) = -\text{ind}(T^*)$.

Teoremë 1.5.1. [67, Theorem 1.5.2] Nëse $T \in L(H, K)$ dhe $S \in L(K, J)$ janë operatorë të Fredholm-it, atëherë ST është operator i Fredholm-it, dhe në këtë rast vlen $\text{ind}(ST) = \text{ind}(S) + \text{ind}(T)$.

Kjo teoremë vlen edhe nëse operatorët T dhe S janë operatorë të sipërm ose të poshtëm të Fredholm-it.

Teoremë 1.5.2. [1, Theorem 1.62 dhe 1.64] (Teorema mbi rrethinën e shpuar) Nëse T është operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it, atëherë ekziston $\epsilon > 0$ ashtu që $T - \mu$ është operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it, $\alpha(T - \mu) \leq \alpha(T)$, $\text{ind}(T - \mu) = \text{ind}(T)$ dhe $\alpha(T - \mu)$ është konstant, për çdo $0 < |\mu| < \epsilon$.

Përkufizim 1.5.2. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. T quhet operator gjysmë i sipërm i Weyl-it, nëse T është gjysmë i sipërm i Fredholm-it me $\text{ind}(T) \leq 0$,
2. T quhet operator gjysmë i poshtëm i Weyl-it, nëse T është gjysmë i poshtëm i Fredholm-it me $\text{ind}(T) \geq 0$,
3. T quhet operator i Weyl-it, nëse T është operator i Fredholm-it me indeks zero.

Vërejtje 1.5.1. E anasjellta e teoremës 1.5.1 nuk vlen. E tregojmë këtë me një shembull. Marrim operatorët në l_2 :

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, 0, x_2, 0, x_3, \dots) \text{ dhe } S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Shohim se $ST = I$, pra ST është operator i Fredholm-it, por S dhe T nuk janë operatorë të Fredholm-it.

Mirëpo, nëse operatorët S dhe T komutojnë me njëri tjetrin, atëherë vlen e anasjellta e teoremës së mësipërme. Me të vërtetë, supozojmë se ST është operator

i Fredholm-it dhe vlen $ST = TS$. Nga $ST(H) = TS(H) \subseteq T(H)$ rrjedh se $\beta(T) < \beta(ST) < \infty$. Po ashtu $\ker(T) \subseteq \ker(ST)$, prej nga rrjedh se $\alpha(T) < \infty$, që tregon se T është operator i Fredholm-it. Ngashëm tregohet për operatorin S .

Mirëpo nëse ST është operator i Weyl-it nuk rrjedh se T dhe S janë operatorë të Weyl-it. Për këtë marrim operatorët $T = \begin{pmatrix} U & O \\ O & I \end{pmatrix}$ dhe $S = \begin{pmatrix} I & O \\ O & U^* \end{pmatrix}$ të cilët janë operatorë të Fredholm-it, mirëpo nuk janë të Weyl-it, ndërsa $ST = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U^* \end{pmatrix}$ është operator i Weyl-it, sepse $\text{ind}(ST) = \text{ind}(U) + \text{ind}(U^*) = 0$, [67, Remark 1.5.3].

Spektri i Weyl-it dhe spektri aproksimativ i Weyl-it për operatorin T përkufizohen me

$$\sigma_w(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është i Weyl-it}\}$$

dhe

$$\sigma_{uw}(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është gjysmë i sipërm i Weyl-it}\},$$

respektivisht. Ndërsa me

$$\sigma_e(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është i Fredholm-it}\},$$

shënojmë spektrin e Fredholm-it.

Përkufizim 1.5.3. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. T quhet operator gjysmë i sipërm i Browder-it, nëse T është gjysmë i sipërm i Fredholm-it me $p(T) < \infty$,
2. T quhet operator gjysmë i poshtëm i Browder-it, nëse T është gjysmë i sipërm i Fredholm-it me $q(T) < \infty$,
3. T quhet operator i Browder-it, nëse T është i Fredholm-it me ascent dhe descent të fundmë.

Spektri i Browder-it dhe spektri gjysmë i sipërm i Browder-it për operatorin T përkufizohen me

$$\sigma_b(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është i Browder-it}\}$$

dhe

$$\sigma_{ub}(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është gjysmë i sipërm i Browder-it}\},$$

respektivisht.

Lemë 1.5.3. [1, Theorem 4.6] Le të jetë $T \in L(H)$. Nëse T ose T^* ka SVEP, atëherë $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$ dhe $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$.

Lemë 1.5.4. [1, Theorem 2.48] Le të jetë $T \in L(H)$. Atëherë,

1. Nëse T ka SVEP në pikën 0, atëherë $\text{ind}(T) \leq 0$.
2. Nëse T^* ka SVEP në pikën 0, atëherë $\text{ind}(T) \geq 0$.

Për operatorin $T \in L(H)$ me $p_{00}(T)$ shënojmë bashkësinë e të gjitha poleve me rang të fundmë të resolventes së operatorit T , pra

$$p_{00}(T) = \{\mu \in P_{00}(T) : \alpha(T - \mu) < \infty\}.$$

Nga përkufizimi i poleve të resolventes rrjedh se vlen

$$(1.5.1) \quad \sigma(T) \setminus \sigma_b(T) = p_{00}(T).$$

Le të jetë

$$P_{00}^a(T) = \{\mu \in \sigma_a(T) : p(T - \mu) < \infty \text{ dhe } (T - \mu)^{p(T-\mu)+1}(H) \text{ është e mbyllur}\},$$

bashkësia e të gjitha poleve të majta të resolventës së operatorit T dhe

$$p_{00}^a(T) = \{\mu \in P_{00}^a(T) : \alpha(T - \mu) < \infty\},$$

bashkësia e të gjitha poleve të majta me rang të fundmë të resolventës së operatorit T .

Nga këtu rrjedh se vlen:

$$(1.5.2) \quad \sigma_a(T) \setminus \sigma_{ub}(T) = p_{00}^a(T).$$

Nga përkufizimi i spektrit të Fredholm-it, Browder-it dhe bashkësisë së pikave akumuluese rrjedh se vlen

$$(1.5.3) \quad \sigma_b(T) = \sigma_e(T) \cup \text{acc}\sigma(T).$$

Përkufizim 1.5.4. Them i se operator i T e plotëson Teoremën e Browder-it në qoftë se

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = p_{00}(T),$$

ndërsa T e plotëson Teoremën e a -Browder-it në qoftë se

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = p_{00}^a(T).$$

Nga ekuacioni (1.5.1) rrjedh se T e plotëson Teoremën e Browder-it në qoftë se,

$$\sigma_w(T) = \sigma_b(T),$$

ndërsa nga ekuacioni (1.5.2) rrjedh se T e plotëson Teoremën e a -Browder-it në qoftë se,

$$\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T).$$

Për $T \in L(H)$ shënojmë me

$$\pi_{00}(T) = \{\mu \in \text{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(T - \mu) < \infty\},$$

bashkësinë e të gjitha vlerave vetjake me shumëfishitet të fundmë të cilat janë të izoluara në spektrin e operatorit T , ndërsa me

$$\pi_{00}^a(T) = \{\mu \in \text{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(T - \mu) < \infty\},$$

bashkësinë e të gjitha vlerave vetjake me shumëfishitet të fundmë të cilat janë të izoluara në spektrin aproksimativ të operatorit T .

Përkufizim 1.5.5. Themë se operatori T e plotëson Teoremën e Weyl-it në qoftë se

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \pi_{00}(T),$$

ndërsa T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it në qoftë se

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{uw}(T) = \pi_{00}^a(T).$$

Teoremë 1.5.5. [1, Theorem 4.51] Operatori T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T e plotëson Teoremën e a -Browder-it dhe $\pi_{00}^a(T) = p_{00}^a(T)$.

Nëse T e plotëson Teoremën e Weyl-it, nuk rrjedh se edhe operatori i adjunguar T^* e plotëson Teoremën e Weyl-it. Për këtë marrim shembullin:

Shembull 1.5.6. [67, Faqe 43] Marrim operatorin e shembullit 1.4.5. Kemi $\alpha(T) = 1$ dhe $\beta(T) = 0$, prej nga rrjedh se $\text{ind}(T) = 1$, që tregon se T nuk është operator i Weyl-it, pra $\sigma_w(T) = \{0\}$. Pasi që $T - \mu$ është invertibil për çdo $\mu \neq 0$, atëherë $\sigma(T) = \{0\}$. Prandaj

$$\sigma(T) \setminus \sigma_w(T) = \emptyset \neq \{0\} = \pi_{00}(T),$$

pra operatori T nuk e plotëson Teoremën e Weyl-it.

Në anën tjetër, marrim operatorin e adjunguar të operatorit T , $T^*e_n = \frac{1}{n+1}e_{n+1}$, pra

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, \frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{3}, \frac{x_3}{4}, \dots).$$

Pasi që $\frac{1}{n+1} \rightarrow 0$, rrjedh se $T^* - \bar{\mu}$ është invertibil për çdo $\mu \neq 0$, pra $\sigma(T^*) = \{0\}$. Po ashtu shohim që $\ker(T^*) = \{0\}$ dhe $\beta(T^*) = 1$, prandaj $\text{ind}(T^*) = -1$, që tregon se T^* nuk është operator i Weyl-it. Atëherë, $\sigma(T^*) = \sigma_w(T^*) = \{0\}$. Nga $\ker(T^*) = \{0\}$ rrjedh se $\pi_{00}(T^*) = \emptyset$. Nga këtu shohim që

$$\sigma(T^*) \setminus \sigma_w(T^*) = \emptyset = \pi_{00}(T^*),$$

që tregon se T^* e plotëson Teoremën e Weyl-it.

Operatorët T dhe T^* në shembullin e mësipërm janë operatorë pothuajse-nilpotent, pra spektri i tyre ka pikën 0 pikë të vetme, pra pikë të izoluar, prandaj si të tillë ata kanë SVEP. Nga ky shembull shohim se nëse T ka SVEP nuk rrjedh se T e plotëson Teoremën e Weyl-it. Mirëpo vlen kjo:

Teoremë 1.5.7. [3, Theorem 3.3] Nëse $T \in L(H)$ është polaroid dhe T ose T^* ka SVEP, atëherë edhe T e T^* e plotësojnë Teoremën e Weyl-it.

Për $T \in L(H)$ dhe numrin e plotë jonegativ m definojmë operatorin $T_{[m]}$ si ngushtim të operatorit T në nënhapësirën $T^m(H)$, pra

$$T_{[m]} = T|_{T^m(H)}: T^m(H) \rightarrow T^m(H).$$

Nëse $m = 0$, atëherë $T_{[0]} = T$.

Përkufizim 1.5.6. [15] Them i se $T \in L(H)$ është

1. Operator i B -Fredholm-it (B -Weyl-it), nëse për ndonjë numër të plotë $m \geq 0$, nënhapësira $T^m(H)$ është e mbyllur dhe $T_{[m]}$ është operator i Fredholm-it (operator i Weyl-it).
2. Operator gjysmë i sipërm (i poshtëm) i B -Fredholm-it, nëse për ndonjë numër të plotë $m \geq 0$, nënhapësira $T^m(H)$ është e mbyllur dhe $T_{[m]}$ është operator gjysmë i sipërm (i poshtëm) i Fredholm-it.
3. Operator gjysmë i sipërm i B -Weyl-it, nëse T është gjysmë i sipërm i B -Fredholm-it dhe $\text{ind}(T) \leq 0$.

Spektri i B -Weyl-it definohe me

$$\sigma_{BW}(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është i } B\text{-Weyl-it}\},$$

ndërsa spektri gjysmë i sipërm i B -Weyl-it definohe si

$$\sigma_{UBW}(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : T - \mu \text{ nuk është gjysmë i sipërm i } B\text{-Weyl-it}\}.$$

Për $T \in L(H)$ shënojmë me

$$\Pi_{00}(T) = \{\mu \in \text{iso}\sigma(T) : 0 < \alpha(T - \mu)\}$$

bashkësinë e të gjitha vlerave vetjake të operatorit T të cilat janë të izoluara në $\sigma(T)$, ndërsa me

$$\Pi_{00}^a(T) = \{\mu \in \text{iso}\sigma_a(T) : 0 < \alpha(T - \mu)\}$$

bashkësinë e të gjitha vlerave vetjake të operatorit T , të cilat janë të izoluara në spektrin aproksimativ të operatorit T .

Them i se operatori T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it [14], nëse

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = \Pi_{00}(T),$$

ndërsa T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it [13], nëse

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{UBW}(T) = \Pi_{00}^a(T).$$

M. Berkani studioi Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, që paraqet zgjerim të Teoremës së Weyl-it, dhe vërtetoi se këtë teoremë e plotësojnë operatorët normal [14] dhe operatorët hipernormal, [16].

Teoremë 1.5.8. [4, Theorem 2.8] *Le të jetë T operator me ascent të fundmë. Atëherë, pohimet e mëposhtme janë ekuivalente*

1. T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it,
2. $\Pi_{00}(T) = P_{00}(T)$,
3. Për çdo $\mu \in \Pi_{00}(T)$, ekziston numri i plotë $p = p(\mu)$ i tillë që $(T - \mu)^m(H) = (T - \mu)^p(H)$ është nënhapësirë e mbyllur për çdo $m \geq p$,
4. Për çdo $\mu \in \Pi_{00}(T)$, ekziston numri i plotë $p = p(\mu)$ i tillë që $\mathcal{H}_0(T - \mu) = \ker((T - \mu)^p(H))$.

Themi se T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Browder-it, nëse

$$\sigma(T) \setminus \sigma_{BW}(T) = P_{00}(T),$$

ndërsa T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it [13], nëse

$$\sigma_a(T) \setminus \sigma_{UBW}(T) = P_{00}^a(T).$$

Teoremë 1.5.9. [5, Theorem 2.18] T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it dhe vlen barazimi $\Pi_{00}^a(T) = P_{00}^a(T)$.

Lemë 1.5.10. [24, Theorem 2.9] Nëse T ka SVEP, atëherë T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Browder-it.

Lemë 1.5.11. [6, Theorem 3.2] Nëse T ose T^* ka SVEP, atëherë T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it.

Lemë 1.5.12. [13, Theorem 3.8] Nëse T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it, atëherë T e plotëson Teoremën e a -Browder-it.

Lemë 1.5.13. [13, Theorem 3.9] Nëse T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, atëherë T e plotëson Teoremën e Weyl-it.

Lemë 1.5.14. [13, Theorem 3.11] Nëse T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it, atëherë T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it.

Lemë 1.5.15. [13, Theorem 3.15] Nëse T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Browder-it, atëherë T e plotëson Teoremën e Browder-it.

1.6 Teorema e pasqyrimit spektral

Le të jetë $p : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ polinom me koeficient kompleks dhe Λ nënbashkësi e bashkësisë së numrave kompleks $\mathbb{C}$. Me imazh të polinomit p kuptojmë bashkësinë:

$$p(\Lambda) = \{p(\mu) : \mu \in \Lambda\}.$$

Lemë 1.6.1. [22] Le të jetë $T \in L(H)$ operator në hapësirën komplekse H dhe p polinom me koeficient kompleks. Atëherë,

$$p(\sigma(T)) = \sigma(p(T)).$$

Lemë 1.6.2. [52, Theorem 48.2] Nëse $T \in L(H)$, atëherë

$$f(\sigma(T)) = \sigma(f(T)),$$

për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$

Lemë 1.6.3. [2, Lemma 3.89] Për $T \in L(H)$ dhe $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) \subseteq f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)).$$

Nëse T është operator isoloid, atëherë

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)).$$

Nëse $H = K$, atëherë $\mathcal{B}(H)$ është ideal në $L(H)$. Nga këtu rrjedh se mund të përkufizojmë hapësirën herës $L(H)/\mathcal{B}(H)$ ku $[T] = T + \mathcal{B}(H)$ janë klasat në këtë hapësirë, e cila quhet Algjebra e Calkinit. Me $\phi : L(H) \rightarrow L(H)/\mathcal{B}(H)$ është dhënë homomorfizmi i definuar me $\phi(T) = T + \mathcal{B}(H)$

Rikujtojmë teoremën e njohur të Atkinsonit: Operatori $T \in L(H)$ është operator i Fredholm-it, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\phi(T)$ është operator invertibil në $L(H)/\mathcal{B}(H)$. Nga këtu rrjedh se

$$\sigma_e(T) = \sigma(\phi(T)).$$

Lemë 1.6.4. [67, Theorem 1.11.1] Nëse $T \in L(H)$, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$f(\sigma_e(T)) = \sigma_e(f(T)).$$

Vërtetim. Pasi që

$$f(\phi(T)) = f(T + \mathcal{B}(H)) = f(T) + f(\mathcal{B}(H)) = f(T) + \mathcal{B}(H) = \phi(f(T)),$$

atëherë do të kemi

$$f(\sigma_e(T)) = f(\sigma(\phi(T))) = \sigma(f(\phi(T))) = \sigma(\phi(f(T))) = \sigma_e(f(T)).$$

□

Lemë 1.6.5. [67, Theorem 1.11.2] Nëse $T \in L(H)$, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$f(\sigma_b(T)) = \sigma_b(f(T)).$$

Vërtetim. Pasi që $f(\text{acc}(F)) = \text{acc}(f(F))$, nga lema e mësipërme dhe nga relacioni (1.5.3) kemi

$$\begin{aligned} f(\sigma_b(T)) &= f(\sigma_e(T) \cup \text{acc}\sigma(T)) \\ &= f(\sigma_e(T)) \cup f(\text{acc}\sigma(T)) \\ &= \sigma_e(f(T)) \cup \text{acc}\sigma(f(T)) \\ &= \sigma_b(f(T)) \end{aligned}$$

□

Po ashtu tregohet se vlen $f(\sigma_a(T)) = \sigma_a(f(T))$, [1, Theorem 4.16].

Lemë 1.6.6. [80, Theorem 3.4] Nëse $T \in L(H)$, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$f(\sigma_{ub}(T)) = \sigma_{ub}(f(T)).$$

Lemë 1.6.7. [67, Theorem 2.3.4] Nëse $T \in L(H)$ atëherë, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$(1.6.1) \quad \sigma_w(f(T) \subset f(\sigma_w(T))).$$

Vërtetim. Vërejmë se relacioni (1.6.1) vlen për çdo funksion konstant f në ndonjë rrethinë të hapur të $\sigma(T)$.

Le të jetë $\mu \notin f(\sigma_w(T))$. Supozojmë se $f(z) - \mu$ ka numër të fundmë zerosh në ndonjë rrethinë të hapur G të $\sigma(T)$, prandaj mund të shkruajmë

$$f(z) - \mu = (z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdot \dots \cdot (z - \mu_n)g(z),$$

ku $\mu_j, j = 1, \dots, n$ janë zero të $f(z) - \mu$ në G , të renditura sipas shumëllojshmërisë, ndërsa $g(z) \neq 0$ për çdo $z \in G$ është funksion invertibil. Prandaj

$$(1.6.2) \quad f(T) - \mu = (T - \mu_1)(T - \mu_2) \cdot \dots \cdot (T - \mu_n)g(T).$$

Nga (1.6.2) kemi se $f(\mu_i) = \mu$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Pra $f(\mu_i) \notin f(\sigma_w(T))$, për çdo $i = 1, 2, \dots, n$, prej nga rrjedh se $\mu_i \notin \sigma_w(T)$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Kjo tregon se $T - \mu_i$ është operator i Weyl-it për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Rrjedhimisht $f(T) - \mu$ është operator i Weyl-it si prodhim i n -operatorëve të Weyl-it, prandaj $\mu \notin \sigma_w(f(T))$. $\square$

Tregojmë me shembull se përfshirja e anasjelltë me përfshirjen (1.6.1) nuk vlen.

Shembull 1.6.8. Le të jetë U operator i zhvendosjes së njëanshme. Marrim operatorin

$$T = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U^* + 2I \end{pmatrix} : l_2 \oplus l_2 \rightarrow l_2 \oplus l_2,$$

dhe funksionin $f(z) = z(z - 2)$. Atëherë, $0 \in f(\sigma_w(T))$ mirëpo $0 \notin \sigma_w(f(T))$.

Vërtetim. Pasi U është operator i zhvendosjes së njëanshme, kemi

$$\sigma_w(T) = \sigma(T) = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq 1\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu + 2| \leq 1\}.$$

Nga këtu shohim se $0 \in \sigma_w(T)$. Ndërsa nga $f(0) = 0$ rrjedh se $0 \in f(\sigma_w(T))$.

Nga ana tjetër

$$f(T) = T(T - 2I) = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U^* + 2I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U - 2I & O \\ O & U^* \end{pmatrix}.$$

Pasi që U është operator i Fredholm-it i tillë që $\text{ind}(U) = -1$, atëherë $\text{ind}(U^*) = 1$. Nga invertibiliteti i operatorëve $U - 2I$ dhe $U^* + 2I$ rrjedh se $T = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U^* + 2I \end{pmatrix}$

është i Fredholm-it me indeks -1, ndërsa $T - 2I = \begin{pmatrix} U - 2I & O \\ O & U^* \end{pmatrix}$ është operator i Fredholm-it me indeks 1, prandaj

$$\text{ind}(f(T)) = \text{ind}(T) + \text{ind}(T - 2I) = 0,$$

që tregon se $f(T)$ është operator i Weyl-it. Rrjedhimisht $0 \notin \sigma_w(f(T))$.

Pra

$$f(\sigma_w(T)) \not\subset \sigma_w(f(T)).$$

□

Lemë 1.6.9. [80, Theorem 3.3] Nëse $T \in L(H)$ atëherë, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$\sigma_{uw}(f(T)) \subset f(\sigma_{uw}(T)).$$

Lemë 1.6.10. [102, Theorem 2.1] Nëse T ka SVEP, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$f(\sigma_{BW}(T)) = \sigma_{BW}(f(T)).$$

Lemë 1.6.11. [24, Lemma 3.3] Nëse T është isolid, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ vlen

$$f(\sigma(T) \setminus \Pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \Pi_{00}(f(T)).$$

1.7 Disa klasë të rëndësishme të operatorëve

Në fund të këtij kapitulli japim përkufizimin për disa klasë të operatorëve të cilët do t'i përmendim gjatë punimit të temës.

Përkufizim 1.7.1. Operatori $T \in L(H)$ quhet hipernormal në qoftë se

$$\|T^*x\| \leq \|Tx\|,$$

për çdo $x \in H$.

Rrjedhimisht T është hipernormal në qoftë se $T^*T \geq TT^*$, pra në qoftë se $|T|^2 \geq |T^*|^2$.

Operatori T quhet p -hipernormal në qoftë se

$$|T|^{2p} \geq |T^*|^{2p},$$

për numrin pozitiv p [8], ndërsa T quhet operator (p, k) -kuazihipernormal, në qoftë se

$$T^{*k}(|T|^{2p} - |T^*|^{2p})T^k \geq O,$$

për numrin e plotë pozitiv k dhe $p > 0$.

Në [91] është përkufizuar klasa e operatorëve log-hipernormal: T është operator log-hipernormal, nëse T është invertibil dhe e plotëson jobarazimin

$$\log T^*T \geq \log TT^*.$$

Klasa e operatorëve log-hipernormal është zgjerim i klasës së operatorëve hipernormal. Po ashtu është e njohur se çdo operator p -hipernormal është operator q -hipernormal për $p \geq q > 0$, nga Jobarazimi Löwner-Heinz. Po ashtu çdo operator invertibil p -hipernormal është operator log-hipernormal pasi që log është funksion monoton.

Përkufizim 1.7.2. Operatori T quhet paranormal, nëse

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$, ose nëse

$$\|Tx\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|,$$

për çdo vektor $x \in H$.

Operatorët paranormal janë përkufizuar nga Furuta, në fund të viteve 60 të shekullit të kaluar në [38] dhe janë përgjithësim i operatorëve normal dhe hipernormal. Përgjithësim i kësaj klase të operatorëve janë operatorët n -paranormal: T quhet n -paranormal, në qoftë se

$$\|Tx\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}x\|\|x\|^n,$$

për çdo $x \in H$.

Një klasë tjetër e rëndësishme e operatorëve është klasa e operatorëve $*$ -paranormal.

Përkufizim 1.7.3. Operatori T quhet $*$ -paranormal, nëse

$$\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$, ose

$$\|T^*x\|^2 \leq \|T^2x\|\|x\|,$$

për çdo vektor $x \in H$.

Kjo klasë e operatorëve është përkufizuar në disertacionin e doktoraturës së S. M. Patel [78], ndërsa disa nga vetitë e operatorëve $*$ -paranormal janë treguar nga Arora dhe Thukral në [10]. Përgjithësim i kësaj klase të operatorëve janë operatorët n - $*$ -paranormal: T quhet n - $*$ -paranormal në qoftë se

$$\|T^*x\|^{n+1} \leq \|T^{n+1}x\|\|x\|^n,$$

për çdo $x \in H$.

Lemë 1.7.1. Nëse T është operator $*$ -paranormal, atëherë

1. [10, Theorem 1.1] T është normaloid,
2. [10, Lemma 2.1] $\ker(T - \mu) \subseteq \ker(T^* - \bar{\mu})$, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$,
3. [92, Corollary 1] Nëse T është pothuajse-nilpotent, atëherë T është nilpotent.

Lemë 1.7.2. [103, Theorem 2.6] Nëse T është operator algjebrikisht $*$ -paranormal pothuajse-nilpotent, atëherë T është nilpotent.

Në fund të shekullit të kaluar, në vitin 1998 janë përkufizuar operatorët e klasës $\mathcal{A}$, nga T. Furuta, M. Ito dhe T. Yamazaki në [40], një klasë tejet e rëndësishme e operatorëve.

Përkufizim 1.7.4. Themë se T është operator i klasës $\mathcal{A}$, në qoftë se

$$|T^2| \geq |T|^2.$$

Tregohet se operatorët e klasës $\mathcal{A}$ janë operatorë paranormal, operatorët log-hipernormal janë operatorë të klasës $\mathcal{A}$, [40, Theorem 1], ndërsa çdo operator hipernormal është operator i klasës $\mathcal{A}$, [27, Theorem 1.2]. Operatorët e klasës $\mathcal{A}$ janë rast i veçantë i operatorëve të klasës $\mathcal{A}(k)$ të përkufizuar po aty.

Përkufizim 1.7.5. Operatori T i takon klasës $\mathcal{A}(k)$ nëse

$$\left(T^*|T|^{2k}T\right)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T|^2,$$

për çdo $k > 0$.

Më pastaj, B. P. Duggal, I. H. Jeon dhe I. H. Kim në [27], kanë përkufizuar operatorët e klasës $\mathcal{A}^*$.

Përkufizim 1.7.6. Operatori $T \in L(H)$ i takon klasës $\mathcal{A}^*$ nëse

$$|T^2| \geq |T^*|^2.$$

Kjo klasë e operatorëve është përgjithësim i operatorëve hipernormal [27, Theorem 1.2], dhe është nënklasë e operatorëve $*$ -paranormal, [27, Theorem 1.3]. Po ashtu kjo klasë e operatorëve është rast i veçantë i klasës së operatorëve $\mathcal{A}(k^*)$ për $k = 1$.

Përkufizim 1.7.7. Operatori T i takon klasës $\mathcal{A}(k^*)$ nëse

$$\left(T^*|T|^{2k}T\right)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T^*|^2.$$

për çdo $k > 0$.

Operatori T i takon k -kuazi-klasës $\mathcal{A}$, nëse

$$T^{*k}(|T^2| - |T|^2)T^k \geq O.$$

Bashkësinë e këtyre operatorëve e shënojmë me $\mathcal{QA}(k)$. Për $k = 1$ marrim operatorët kuazi-klasë $\mathcal{A}$:

$$T^*(|T^2| - |T|^2)T \geq O,$$

bashkësinë e të cilëve e shënojmë me $\mathcal{QA}$.

Përkufizim 1.7.8. Operatori $T \in L(H)$ i takon k -kuazi- $*$ -klasës $\mathcal{A}$, nëse

$$T^{*k} (|T^2| - |T^*|^2) T^k \geq O,$$

për çdo $k > 0$.

Bashkësinë e operatorëve k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ e shënojmë me $\mathcal{QA}^*(k)$.

Për $k = 1$ marrim operatorët kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$:

$$T^*|T^2|T \geq T^*|T^*|^2T,$$

të përkufizuar në [87]. Simbolikisht këtë klasë të operatorëve e shënojmë me $\mathcal{QA}^*$.

Është e qartë se nëse T është i klasës $\mathcal{A}^*$, atëherë T është k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Mirëpo e anasjellta nuk vlen në rastin e përgjithshëm. E tregojmë këtë me shembullin e mëposhtëm.

Shembull 1.7.3. *Le të jetë T operator i definuar me*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Atëherë,

$$|T^2| - |T^*|^2 \not\geq O.$$

Pra T nuk është operator i klasës $\mathcal{A}^$. Mirëpo*

$$T^{*k} (|T^2| - |T^*|^2) T^k = O,$$

për çdo numër pozitiv k , prandaj T është k -kuazi- $$ -klasë $\mathcal{A}$.*

Kapitulli 2

Vetitë spektrale

2.1 Vetitë spektrale për klasën e operatorëve k -kuazi- $*$ -paranormal

Në fillim japim përkufizimin dhe disa veti bazike për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal.

S. Mecheri në [72] ka përkufizuar klasën e operatorëve k -kuazi- $*$ -paranormal. Operatori T quhet k -kuazi- $*$ -paranormal nëse

$$\|T^{k+1}x\|^2 \leq \|T^{k+2}x\| \|T^kx\|,$$

për çdo $x \in H$, ku k është numër natyral. Nëse $k = 1$, marrim operatorët kuazi- $*$ -paranormal:

$$\|T^2x\|^2 \leq \|T^3x\| \|Tx\|,$$

për çdo $x \in H$. Gjithashtu Mecheri në [73] ka përkufizuar klasën e operatorëve kuazi- $*$ -paranormal: operatori T quhet kuazi- $*$ -paranormal nëse

$$\|T^*Tx\|^2 \leq \|T^3x\| \|Tx\|,$$

për çdo $x \in H$.

Duke u mbështetur në këto përkufizime, ne në punimin: *A note on k -quasi- $*$ -paranormal operators*, të botuar në Journal of Inequalities and Applications, kemi përkufizuar operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal që janë përgjithësim i operatorëve kuazi- $*$ -paranormal.

Përkufizim 2.1.1. [54, Definition 1.1] Operatori T quhet k -kuazi- $*$ -paranormal nëse

$$\|T^*T^kx\|^2 \leq \|T^{k+2}x\| \|T^kx\|,$$

për çdo $x \in H$, ku k është numër natyral.

Për $k = 1$ fitojmë operatorët kuazi- $*$ -paranormal, pra operatori 1-kuazi- $*$ -paranormal është operator kuazi- $*$ -paranormal.

Tani për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal do të japim vetitë bazike.

Është i njohur fakti se T është operator $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2 \geq O$$

për çdo $\lambda > 0$, [10]. Në teoremën e mëposhtme, do të vërtetojmë faktin e ngjashëm për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal.

Teoremë 2.1.1. [54, Proposition 2.1] *Operatori $T \in L(H)$ është k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur*

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k \geq O,$$

për çdo $\lambda > 0$.

Vërtetim. Supozojmë se T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë,

$$\|T^*T^kx\|^2 \leq \|T^{k+2}x\|\|T^kx\|,$$

për çdo $x \in H$, ku k është numër natyral. Atëherë,

$$4\|T^*T^kx\|^2 - 4\|T^{k+2}x\|\|T^kx\| \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\|T^{k+2}x\|^2 - 2\lambda\|T^*T^kx\|^2 + \lambda^2\|T^kx\|^2 \geq 0.$$

Relacioni i fundit është ekuivalent me relacionin

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k \geq O,$$

për çdo $\lambda > 0$, çka u deshtë të vërtetohej. □

Nëse T është k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T është $(k+1)$ -kuazi- $*$ -paranormal. Mirëpo e anasjellta nuk është e vërtetë, siç tregon shembulli i mëposhtëm.

Shembull 2.1.2. [57, Example 2.2]

Marrim operatorin e zhvendosjes së njëanshme W_α me peshën $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$, në hapësirën e pafundme të Hilbertit $H = l_2$ të përkufizuar me $W_\alpha e_m = \alpha_m e_{m+1}$ për çdo $m \geq 1$, ku $\{e_m\}_{m=1}^\infty$ është baza kanonike në l_2 . Kemi

$$W_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Dimë se pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

1. W_α është operator $*$ -paranormal,

2. W_α është operator i klasës $\mathcal{A}^*$,
3. $\alpha_m^2 \leq \alpha_{m+1}\alpha_{m+2}$ për çdo $m \geq 1$.

Nga Teorema 2.1.1, rrjedh se W_α është k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$W_\alpha^{*k}(W_\alpha^{*2}W_\alpha^2 - 2\lambda W_\alpha W_\alpha^* + \lambda^2)W_\alpha^k \geq O \text{ për çdo } \lambda > 0.$$

Le të jetë

$$\text{diag}(\{\alpha_m\}_{m=1}^\infty) = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots)$$

matrica diagonale e pafundme në l_2 . Atëherë,

$$\begin{aligned} W_\alpha^{*k} (W_\alpha^{*2}W_\alpha^2 - 2\lambda W_\alpha W_\alpha^* + \lambda^2) W_\alpha^k &= \text{diag}(\{\alpha_m^2\alpha_{m+1}^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{m+k-1}^2\alpha_{m+k}^2\alpha_{m+k+1}^2\}_{m=1}^\infty) \\ &- 2\lambda \text{diag}(\{\alpha_m^2\alpha_{m+1}^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{m+k-2}^2\alpha_{m+k-1}^2\alpha_{m+k}^2\}_{m=1}^\infty) \\ &+ \lambda^2 \text{diag}(\{\alpha_m^2\alpha_{m+1}^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{m+k-1}^2\}_{m=1}^\infty) \end{aligned}$$

Prandaj, W_α është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$\alpha_m^2\alpha_{m+1}^2 \cdot \dots \cdot \alpha_{m+k-1}^2 (\alpha_{m+k}^2\alpha_{m+k+1}^2 - 2\lambda\alpha_{m+k-1}^2 + \lambda^2) \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$, dhe $m \geq 1$. Rrjedhimisht

$$\alpha_{m+k-1}^2 \leq \alpha_{m+k}\alpha_{m+k+1} \text{ për çdo } m \geq 1.$$

Nëse $\alpha_{k+1} \leq \alpha_{k+2} \leq \alpha_{k+3} \leq \alpha_{k+4} \leq \dots$ dhe $\alpha_k > \alpha_{k+1}$, atëherë W_α është $(k+1)$ -kuazi- $*$ -paranormal por nuk është k -kuazi- $*$ -paranormal.

Dimë se operatori $*$ -paranormal është normaloid, Lema 1.7.1. Po ashtu operatori kuazi- $*$ -paranormal është normaloid [71, Theorem 2.6], mirëpo operatori k -kuazi- $*$ -paranormal për $k \geq 2$ nuk është normaloid. Me të vërtetë, nëse $\alpha_1 > \alpha_2$ dhe $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_k = \alpha_{k+1} = \dots$, atëherë

$$\|T\| = \alpha_1 \text{ dhe } r(T) = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T^m\|^{\frac{1}{m}} = \alpha_2.$$

Mirëpo vlen kjo teoremë:

Teoremë 2.1.3. [57, Theorem 2.3] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal për numrin e plotë pozitiv k . Atëherë, vlejné pohimet e mëposhtme:*

1. $\|T^*T^m\|^2 \leq \|T^{m+2}\|\|T^m\|$ për çdo numër të plotë pozitiv $m \geq k$,
2. Nëse $\|T^m\| = \|T\|^m$ për ndonjë numër të plotë pozitiv $m \geq k$, atëherë T është normaloid.

Vërtetim. Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal

1. Nëse T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T është operator $(k+1)$ -kuazi- $*$ -paranormal. Prandaj, mjafton që pohimin ta vërtetojmë për $m = k$, që është i qartë duke u bazuar në përkufizimin e operatorit k -kuazi- $*$ -paranormal.

2. Le të jetë $m \geq k$ për të cilin vlen $\|T^m\| = \|T\|^m$. Nga 1) marrim

$$\begin{aligned} \|T\|^{4m} &= \|T^m\|^4 = \|T^{*m}T^m\|^2 \\ &= \|T^{*(m-1)}T^*T^m\|^2 \\ &\leq \|T^{*(m-1)}\|^2 \|T^*T^m\|^2 \\ &\leq \|T\|^{2(m-1)} \|T^{m+2}\| \|T^m\| \\ &= \|T\|^{2(m-1)} \|T^{m+2}\| \|T\|^m \end{aligned}$$

pra $\|T\|^{m+2} \leq \|T^{m+2}\|$. Nga këtu rrjedh barazimi $\|T\|^{m+1} = \|T^{m+1}\|$.

Tani, duke u bazuar në induksionin matematik marrim $\|T\|^m = \|T^m\|$, për çdo $m \in \mathbb{N}$, që tregon se T është normaloid. □

Lemë 2.1.4. [57, Lemme 2.7] Nëse T është operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal.

Vërtetim. Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Nga Jobarazimi Hölder-McCarthy marrim:

$$\begin{aligned} \|T^*T^kx\|^2 &= \langle T^{*k}|T^*|^2T^kx, x \rangle \\ &\leq \langle |T^2|T^kx, T^kx \rangle \\ &\leq \langle |T^2|^2T^kx, T^kx \rangle^{\frac{1}{2}} \|T^kx\| \\ &= \|T^{k+2}x\| \|T^kx\| \end{aligned}$$

që tregon se T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. □

E anasjellta e teoremës se mësipërme nuk është e vërtetë, fakt që na tregon shembulli i mëposhtëm. Më parë japim këtë Lemë:

Lemë 2.1.5. [57, Lemma 2.8] Le të jetë $S = \oplus_{m=1}^{\infty} H_m$, ku $H_m \cong \mathbb{R}^2$. Për operatorët e dhënë pozitiv A, B në $\mathbb{R}^2$ dhe për numrin e fiksuar $m \in \mathbb{N}$ përkufizojmë operatorin $T = T_{A,B,m}$ në këtë mënyrë:

$$T(x_1, x_2, \dots) = (0, Ax_1, Bx_2, Bx_3, Bx_4, \dots).$$

Atëherë, operatori i adjunguar i operatorit T është

$$T^*(x_1, x_2, \dots) = (Ax_2, Bx_3, Bx_4, Bx_5, \dots),$$

si dhe vlen

1. Operatori $T_{A,B}$ është kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$AB^2A \geq A^4,$$

2. Operatori $T_{A,B}$ është kuazi- $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$A(B^4 - 2\lambda A^2 + \lambda^2)A \geq O, \text{ për çdo } \lambda > 0.$$

Shembull 2.1.6. [57, Example 2.9] Marrim operatorin T për të cilin tregojmë se është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, mirëpo nuk është kuazi- $*$ -paranormal.

Le të jenë dhënë operatorët A dhe B ku

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}^{\frac{1}{4}}.$$

Atëherë,

$$A(B^2 - A^2)A = \begin{pmatrix} -0.3359... & -0.2265... \\ -0.2265... & 0.8244... \end{pmatrix} \not\geq O.$$

Nga Lema 2.1.5 rrjedh se $T_{A,B}$ nuk është kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Mirëpo,

$$A(B^4 - 2\lambda A^2 + \lambda^2)A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} (1-\lambda)^2 & 2(1-\lambda) \\ 2(1-\lambda) & \lambda^2 - 4\lambda + 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{\frac{1}{2}} \geq O,$$

për çdo $\lambda > 0$. Duke u mbështetur në Lemën 2.1.5, rrjedh se $T_{A,B}$ është kuazi- $*$ -paranormal.

Teoremë 2.1.7. [54, Proposition 2.2] Le të jetë M nënhapësirë T -invariante e mbyllur në H . Atëherë, ngushtimi $T|_M$ i operatorit k -kuazi- $*$ -paranormal T në M , është gjithashtu k -kuazi- $*$ -paranormal.

Vërtetim. Le të jetë

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ në } H = M \oplus M^\perp.$$

Pasi T është k -kuazi- $*$ -paranormal, kemi

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{*k} \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^{*2} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^2 - 2\lambda \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^* + \lambda^2 \right\} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}^k \geq O,$$

për çdo $\lambda > 0$.

Atëherë,

$$\begin{pmatrix} A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2\lambda(AA^* + BB^*) + \lambda^2)A^k & E \\ F & G \end{pmatrix} \geq O,$$

për disa operatorë E, F dhe G .

Prandaj,

$$\begin{aligned} \langle (A^{*k}(A^{*2}A^2 - 2\lambda AA^* + \lambda^2)A^k)x, x \rangle \\ \geq \langle (A^{*k}2\lambda BB^*A^k)x, x \rangle \\ = 2|\lambda|\|B^*A^kx\|^2 \geq 0, \end{aligned}$$

për çdo $\lambda > 0$. Nga këtu rrjedh se $A = T|_M$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. $\square$

Teoremë 2.1.8. [54, Proposition 2.3] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Nëse T^k ka rang të dendur, atëherë T është operator $*$ -paranormal.*

Vërtetim. Pasi T^k e ka rangun e dendur, atëherë $\overline{T^k(H)} = H$. Le të jetë $y \in H$. Atëherë, ekziston vargu $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ në H i tillë që $T^k x_m \rightarrow y$ kur $m \rightarrow \infty$. Pasi T është k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë

$$\langle (T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k)x_m, x_m \rangle \geq 0,$$

rrjedhimisht

$$\langle (T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k x_m, T^k x_m \rangle \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$, dhe për çdo $m \in \mathbb{N}$.

Nga vazhdueshmëria e produktit skalar rrjedh

$$\langle (T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)y, y \rangle \geq 0, \text{ për çdo } \lambda > 0 \text{ dhe për çdo } y \in H.$$

Pra, T është operator $*$ -paranormal. $\square$

Le të jetë dhënë operatori

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H \oplus K.$$

Vlen lema:

Lemë 2.1.9. [49, Corollary 7] *Për çdo çift të operatorëve (A, C) vlen*

$$\sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(T) \cup \vartheta$$

ku ϑ është unioni i vrimave në $\sigma(T)$ të cilat janë nënbashkësi të $\sigma(A) \cap \sigma(C)$.

Teoremë 2.1.10. [54, Proposition 2.4] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal ashtu që rangun e T^k nuk është i dendur, dhe*

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Atëherë, A është operator $$ -paranormal në $\overline{T^k(H)}$, $C^k = O$ dhe $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$.*

Vërtetim. Pasi T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe T^k nuk e ka rangun e dendur, atëherë T ka paraqitjen:

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Nga Teorema 2.1.1, marrim

$$T^{*k}(T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)T^k \geq O, \quad \text{për çdo } \lambda > 0.$$

Atëherë,

$$\langle (T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2)x, x \rangle = \langle (A^{*2}A^2 - 2\lambda AA^* + \lambda^2)x, x \rangle \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$ dhe për çdo $x \in \overline{T^k(H)}$.

Prandaj

$$A^{*2}A^2 - 2\lambda AA^* + \lambda^2 \geq O,$$

për çdo $\lambda > 0$. Nga këtu shohim që A është operator $*$ -paranormal në $\overline{T^k(H)}$.

Tregojmë tani se $C^k = O$. Për këtë marrim

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Atëherë,

$$\langle C^k x_2, x_2 \rangle = \langle T^k(I - P)x, (I - P)x \rangle = \langle (I - P)x, T^{*k}(I - P)x \rangle = 0,$$

Prandaj $T^{*k} = O$, rrjedhimisht $C^k = O$.

Në fund tregojmë se $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$. Nga Lema 2.1.9 rrjedh barazimi

$$\sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(T) \cup \vartheta,$$

ku ϑ është union i vrimave në $\sigma(T)$, që janë nënbashkësi të $\sigma(A) \cap \sigma(C)$. Pasi që $\sigma(A) \cap \sigma(C)$ nuk ka pika të brendshme, atëherë

$$\sigma(T) = \sigma(A) \cup \sigma(C) = \sigma(A) \cup \{0\}.$$

□

Teoremë 2.1.11. [54, Proposition 2.5] Nëse T është operator kuazi- $*$ -paranormal, i cili komuton me operatorin izometrik S , atëherë TS është operator kuazi- $*$ -paranormal.

Vërtetim. Le të jetë $A = TS$, $TS = ST$, $S^*T^* = T^*S^*$ dhe $S^*S = I$.

$$\begin{aligned} A^{*3}A^3 - 2\lambda(A^*A)^2 + \lambda^2A^*A &= (TS)^{*3}(TS)^3 - 2\lambda((TS)^*(TS))^2 + \lambda^2(TS)^*(TS) \\ &= T^{*3}T^3 - 2\lambda T^*TT^*T + \lambda^2T^*T \geq O, \end{aligned}$$

prej nga shohim që TS është operator kuazi- $*$ -paranormal. □

Teoremë 2.1.12. [54, Proposition 2.6] *Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal, ashtu që T^n është operator kompakt për $n \geq k + 2$. Atëherë, T^k është kompakt nëse $k \geq 2$ dhe T është kompakt nëse $k = 0$ dhe $k = 1$.*

Vërtetim. Që të vërtetojmë këtë, mjafton të tregojmë se T^{n-1} është operator kompakt. Marrim vektorin njësi $\frac{T^{n-k-2}x}{\|T^{n-k-2}x\|} \in H$, për $n \geq k + 2$. Pasi T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë

$$\left\| T^* T^k \frac{T^{n-k-2}x}{\|T^{n-k-2}x\|} \right\|^2 \leq \left\| T^{k+2} \frac{T^{n-k-2}x}{\|T^{n-k-2}x\|} \right\| \left\| T^k \frac{T^{n-k-2}x}{\|T^{n-k-2}x\|} \right\|,$$

prej nga rrjedh

$$(2.1.1) \quad \|T^* T^{n-2}x\|^2 \leq \|T^n x\| \|T^{n-2}x\| \text{ për çdo } x \in H.$$

Le të jetë $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ varg i vektorëve në H , që plotësojnë kushtin $\|x_m\| = 1$ dhe $x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$. Tani, nga kompaktësia e operatorit T^n dhe nga relacioni (2.1.1), marrim

$$(2.1.2) \quad \|T^* T^{n-2}x_m\| \rightarrow 0, \text{ kur } m \rightarrow \infty.$$

Nëse, $n = 2$, relacioni (2.1.2) implikon kompaktësinë e operatorit T^* , prej nga rrjedh se T është operator kompakt. Nëse $n \geq 3$, relacioni (2.1.2) implikon kompaktësinë e operatorit $T^* T^{n-2}$, prej nga rrjedh se

$$T^{*(n-1)} T^{n-1} = T^{*(n-2)} T^* T^{n-2} T$$

është kompakt. Atëherë, T^{n-1} është kompakt. □

Teoremë 2.1.13. [54, Proposition 3.1] *Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Nëse $\mu \neq 0$ dhe $(T - \mu)x = 0$, atëherë $(T - \mu)^* x = 0$.*

Vërtetim. Supozojmë se $x \neq 0$ dhe $(T - \mu)x = 0$. Pasi T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë

$$\|T^* T^k x\|^2 \leq \|T^{k+2}x\| \|T^k x\|, \text{ për çdo } x \in H.$$

Nga këtu marrim,

$$\|T^* x\|^2 \leq |\mu|^2 \|x\|^2.$$

Prandaj,

$$\begin{aligned} \|(T - \mu)^* x\|^2 &= \langle \bar{\mu}x, \bar{\mu}x \rangle - \langle \bar{\mu}x, T^* x \rangle - \langle T^* x, \bar{\mu}x \rangle + \langle T^* x, T^* x \rangle \\ &\leq |\mu|^2 \|x\|^2 - |\mu|^2 \|x\|^2 - |\mu|^2 \|x\|^2 + |\mu|^2 \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

Rrjedhimisht, $(T - \mu)^* x = 0$. □

Në teoremën e mësipërme është esenciale që $\mu \neq 0$. Nëse $\mu = 0$, tek Lema 2.1.5 marrim

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operatori $T_{A,B}$ është kuazi- $*$ -paranormal, mirëpo $T_{A,B}(x) = 0$ ndërsa $T_{A,B}^*(x) \neq 0$ për $x = (0, 0, 1, -1, 0, 0, \dots, 0)$.

Teoremë 2.1.14. [54, Proposition 3.2] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, $T - \mu$ ka ascent të fundmë, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.*

Vërtetim. Duhet të tregojmë se vlen

$$\ker((T - \mu)^k) = \ker((T - \mu)^{k+1}).$$

Për këtë mjafton të tregojmë përfshirjen $\ker((T - \mu)^{k+1}) \subseteq \ker((T - \mu)^k)$, pasi që përfshirja $\ker((T - \mu)^k) \subseteq \ker((T - \mu)^{k+1})$ vlen për çdo operator të kufizuar.

Le të jetë $x \in \ker((T - \mu)^{k+1})$. Atëherë, $(T - \mu)^{k+1}x = 0$. Konsiderojmë dy raste:

Nëse $\mu \neq 0$, atëherë nga Teorema 2.1.13 marrim $(T - \mu)^*(T - \mu)^k x = 0$. Atëherë,

$$\|(T - \mu)^k\|^2 = \langle (T - \mu)^*(T - \mu)^k x, (T - \mu)^{k-1} x \rangle = 0,$$

prej nga marrim $(T - \mu)^k x = 0$, që implikon $\ker((T - \mu)^{k+1}) \subseteq \ker((T - \mu)^k)$.

Nëse $\mu = 0$, atëherë $T^{k+1}x = 0$ rrjedhimisht $T^{k+2}x = 0$.

Pasi T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, kemi:

$$\begin{aligned} \|T^k x\|^4 &= \langle T^k x, T^k x \rangle^2 \\ &= \langle T^* T^k x, T^{k-1} x \rangle^2 \\ &\leq \|T^* T^k x\|^2 \|T^{k-1} x\|^2 \\ &\leq \|T^{k+2} x\| \|T^k x\| \|T^{k-1} x\|^2, \end{aligned}$$

pra

$$\|T^k x\|^3 \leq \|T^{k+2} x\| \|T^{k-1} x\|^2.$$

Pasi $T^{k+2}x = 0$, atëherë $T^k x = 0$, që implikon $\ker(T^{k+1}) \subseteq \ker(T^k)$. □

Rrjedhim 2.1.15. [54, Corollary 3.3] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, T ka SVEP.*

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Lema 1.4.11 dhe nga Teorema 2.1.14. □

Teoremë 2.1.16. [57, Theorem 3.2] *Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal, dhe $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$ për $\mu \neq 0$. Atëherë, $(T - \mu)^* x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$.*

Vërtetim. Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$. Supozojmë se $\|x_m\| = 1$. Nga supozimi dhe duke përdorur barazimin

$$T^k = (T - \mu + \mu)^k = \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \mu^{k-i} (T - \mu)^i + \mu^k, \text{ për } k \in \mathbb{N},$$

marrim $(T^k - \mu^k)x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$.

Nga

$$|||T^k x_m|| - |\mu|^k| \leq \|(T^k - \mu^k)x_m\|$$

rrjedh se

$$(2.1.3) \quad \|T^k x_m\| \rightarrow |\mu|^k, \text{ kur } m \rightarrow \infty.$$

Po ashtu vlen

$$(2.1.4) \quad \left| \|T^* \mu^k x_m\| - \|T^*(T^k - \mu^k)x_m\| \right| \leq \|T^* T^k x_m\|,$$

dhe pasi që T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal kemi

$$(2.1.5) \quad \|T^* T^k x_m\| \leq \|T^{2+k} x_m\|^{\frac{1}{2}} \|T^k x_m\|^{\frac{1}{2}}.$$

Nga relacionet (2.1.3), (2.1.4) dhe (2.1.5) fitojmë

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|T^* x_m\| \leq |\mu|.$$

Pasi që

$$\begin{aligned} \|(T - \mu)^* x_m\|^2 &= \|T^* x_m\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle T^* x_m, \bar{\mu} x_m \rangle + |\mu|^2 \|x_m\|^2 \\ &= \|T^* x_m\|^2 - 2\operatorname{Re}\langle x_m, \bar{\mu} T x_m \rangle + |\mu|^2 \|x_m\|^2 \end{aligned}$$

atëherë,

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \|(T - \mu)^* x_m\|^2 \leq |\mu|^2 - |\mu|^2 = 0.$$

Kjo e fundit implikon $(T - \mu)^* x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$, çka u deshtë të tregohet. $\square$

Rrjedhim 2.1.17. [57, Corollary 3.3] Nëse T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $\sigma_{ja}(T) \setminus \{0\} = \sigma_a(T) \setminus \{0\}$.

Teoremë 2.1.18. [57, Theorem 3.8] Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe $\sigma(T) = \{\mu\}$. Atëherë, $T = \mu$ nëse $\mu \neq 0$ dhe $T^{k+1} = O$ nëse $\mu = 0$.

Vërtetim. Supozojmë se T është k -kuazi- $*$ -paranormal. Dallojmë dy raste:

I: Nëse $\mu \neq 0$, atëherë rangi i operatorit T^k është i dendur, prandaj T është operator $*$ -paranormal. Nga Lema 1.7.1, kemi $T = \mu$.

II: Nëse $\mu = 0$, T^k nuk e ka rangun e dendur, prandaj nga Teorema 2.1.10 rrjedh se T mund të paraqitet me anë të matricës

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Nga supozimi kemi se $\sigma(T) = \{0\}$, ndërsa nga Lema 2.1.10 rrjedh $\sigma(A) = \{0\}$. Pasi që A është operator $*$ -paranormal, $A = O$ dhe marrim

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} O & BC^k \\ O & C^{k+1} \end{pmatrix} = O.$$

□

Përkufizim 2.1.2. Operatori T quhet algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, në qoftë se ekziston polinomi jo konstant kompleks $h(z)$ i tillë që $h(T)$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal.

Nëse T është k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T është algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Mirëpo e anasjellta nuk është e vërtetë. E tregojmë këtë me shembullin e mëposhtëm.

Shembull 2.1.19. [57, Example 2.5]

Le të jetë $T = \begin{pmatrix} I & O \\ I & I \end{pmatrix} \in L(l_2 \oplus l_2)$. Pasi $T^* = \begin{pmatrix} I & I \\ O & I \end{pmatrix}$, kemi

$$T^{*2} (T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2) T^2 = \begin{pmatrix} (17 - 26\lambda + 5\lambda^2)I & (4 - 10\lambda + 2\lambda^2)I \\ (4 - 10\lambda + 2\lambda^2)I & (1 - 4\lambda + \lambda^2)I \end{pmatrix}.$$

Për $\lambda = 1$, $(17 - 26\lambda + 5\lambda^2)I$ nuk është operator pozitiv, prandaj

$$T^{*2} (T^{*2}T^2 - 2\lambda TT^* + \lambda^2) T^2 \not\geq O,$$

që tregon se T nuk është operator 2-kuazi- $*$ -paranormal.

Në anën tjetër, marrim polinomin kompleks $h(z) = (z - 1)^2$. Atëherë, $h(T) = O$. Nga këtu rrjedh se T është operator algjebrikisht 2-kuazi- $*$ -paranormal.

Teoremë 2.1.20. [57, Theorem 3.9] *Le të jetë T operator pothuajse-nilpotent algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, T është operator nilpotent.*

Vërtetim. Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, ekziston polinomi jokonstant kompleks $h(z)$ i tillë që $h(T)$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal operator. Dallojmë dy raste:

I. Nëse $(h(T)^k)(H)$ është nënhapësirë e dendur, $h(T)$ është operator $*$ -paranormal. Atëherë, T është operator algjebrikisht $*$ -paranormal. Prandaj, në bazë të Lemës 1.7.2, T është operator nilpotent.

II. Nëse $(h(T)^k)(H)$ nuk është nënhapësirë e dendur, nga Teorema 2.1.10 rrjedh se vlen

$$h(T) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{(h(T))^k(H)} \oplus \ker(h(T)^{*k}),$$

ku A është operator $*$ -paranormal në $\overline{(h(T))^k(H)}$, $C^k = O$ dhe $\sigma(h(T)) = \sigma(A) \cup \{0\}$. Pasi T është operator pothuajse-nilpotent, atëherë

$$\sigma(h(T)) = h(\sigma(T)) = \{h(0)\}.$$

Pasi $\sigma(h(T)) = \sigma(A) \cup \{0\}$, atëherë $0 \in \{h(0)\}$, domethënë $h(0) = 0$. Prandaj mund të shkruajmë

$$h(\mu) = a\mu^m \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i),$$

për ndonjë numër natyral m dhe për numrat kompleks μ_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Atëherë,

$$h(T) = aT^m \prod_{i=1}^n (T - \mu_i).$$

Tani nga Teorema 2.1.18 rrjedh

$$a^{k+1}T^{m(k+1)} \prod_{i=1}^n (T - \mu_i)^{k+1} = O.$$

Pasi që $\sigma(T) = \{0\}$, atëherë $T - \mu_i$ është operator invertibil për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Prandaj,

$$T^{m(k+1)} = O.$$

□

Teoremë 2.1.21. [57, Theorem 3.10] Nëse T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $T - \mu$ ka ascent të fundmë për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.

Vërtetim. Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, ekziston polinomi jo konstant kompleks $h(z)$ ashtu që $h(T)$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe vlen

$$h(T) - h(\mu) = a(T - \mu)^m \prod_{i=1}^n (T - \mu_i),$$

ku $a \neq 0$, $\mu_i \neq \mu$ si dhe m dhe n janë numra të plotë pozitiv.

Le të jetë $x \neq 0$. Dallojmë dy raste:

I. Nëse $x \in \ker(T - \mu)^{m+1}$ dhe $h(\mu) \neq 0$, marrim

$$(2.1.6) \quad (h(T) - h(\mu))x = a(T - \mu)^m \prod_{i=1}^n (T - \mu + \mu - \mu_i)x = a \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i)(T - \mu)^m x.$$

Atëherë,

$$(h(T) - h(\mu))^2 x = a^2 \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i)^2 (T - \mu)^{2m} x = 0.$$

Nga Teorema 2.1.13 rrjedh $x \in \ker(h(T) - h(\mu))^2 = \ker(h(T) - h(\mu))$. Atëherë, $(h(T) - h(\mu))x = 0$, dhe nga relacioni (2.1.6) marrim $(T - \mu)^m x = 0$, pra $x \in \ker(T - \mu)^m$.

II. Nëse $h(\mu) = 0$ marrim

$$(2.1.7) \quad h(T)^k x = a^k \prod_{i=1}^n (\mu - \mu_i)^k (T - \mu)^{km} x = b^{-k} (T - \mu)^{km} x.$$

dhe

$$\begin{aligned} \|(T - \mu)^{km} x\|^4 &= \langle (T - \mu)^{km} x, (T - \mu)^{km} x \rangle^2 \\ &= \langle b^k h(T)^k x, b^k h(T)^k x \rangle^2 \\ &= |b|^{4k} \langle h(T)^* h(T)^k x, h(T)^{k-1} x \rangle^2 \\ &\leq |b|^{4k} \|h(T)^* h(T)^k x\|^2 \|h(T)^{k-1} x\|^2 \\ &\leq |b|^{4k} \|h(T)^{k+2} x\| \|h(T)^{k-1} x\|^2 \|h(T)^k x\| \\ &= |b|^{k-1} \|(T - \mu)^{km+2m} x\| \|(T - \mu)^{km-m} x\| \|(T - \mu)^{km} x\| = 0. \end{aligned}$$

Pra,

$$\|(T - \mu)^{km} x\|^3 \leq |b|^{k-1} \|(T - \mu)^{km+2m} x\| \|(T - \mu)^{km-m} x\|.$$

Nëse $x \in \ker(T - \mu)^{km+1}$, atëherë $\ker(T - \mu)^{km} = \ker(T - \mu)^{km+1}$. $\square$

Rrjedhim 2.1.22. [57, Corollary 3.11] Nëse $T \in L(H)$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T ka SVEP.

Vërtetim. Vërtetimi vie direkt nga Teorema 2.1.21 dhe nga Lema 1.4.11. $\square$

Teoremë 2.1.23. [57, Theorem 3.12] Nëse T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T dhe T^* janë operatorë polaroid.

Vërtetim. Le të jetë $\mu \in \text{iso}\sigma(T)$. Nga Teorema 1.4.9 rrjedh $H = \mathcal{H}_0(T - \mu) \oplus K(T - \mu)$, ku $\mathcal{H}_0(T - \mu)$ dhe $K(T - \mu)$ janë nënhapësira të mbyllura. Nga Lema 1.4.8 kemi $(T - \mu)(K(T - \mu)) = K(T - \mu)$ është nënhapësirë e mbyllur dhe $\ker(T - \mu) \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (T - \mu)^n (K(T - \mu))$, prandaj $(T - \mu)|_{K(T - \mu)}$ është operator gjysmë-regular. Po ashtu kemi $\sigma(T|_{\mathcal{H}_0(T - \mu)}) = \{\mu\}$, prej nga rrjedh $\sigma((T - \mu)|_{\mathcal{H}_0(T - \mu)}) = \{0\}$, prandaj $(T - \mu)|_{\mathcal{H}_0(T - \mu)}$ është operator pothuajse-nilpotent. Rrjedhimisht $T - \mu$ e posedon dekompozimin e përgjithshëm Kato. Mirëpo, pasi $T - \mu$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, nga Teorema 2.1.20 rrjedh se $(T - \mu)|_{\mathcal{H}_0(T - \mu)}$ është operator nilpotent, prandaj $T - \mu$ e posedon dekompozimin e tipit Kato. Pasi $\sigma(T)$ nuk e ka pikë grumbulluese pikën μ , atëherë operatorët T dhe T^* kanë SVEP në pikën μ . Nga [1, Theorem 2.45 dhe Theorem 2.46] marrim $p(T - \mu) < \infty$ dhe $q(T - \mu) < \infty$. Nga këtu rrjedh se μ është pol i resolventes së operatorit T , që tregon se T është polaroid, rrjedhimisht T është isoloid. Në fund nga Teorema 1.4.6, rrjedh se T^* është polaroid. $\square$

Lemë 2.1.24. [57, Lemma 3.11] Supozojmë se T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, T është a -polaroid.

Vërtetim. Le të jetë μ pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(T)$. Pasi T^* ka SVEP, nga Lema 1.4.10 rrjedh se μ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$. Nga teorema e mësipërme kemi se T^* është polaroid, prandaj T është polaroid. Prandaj, T është operator a -polaroid. $\square$

Në rastin e përgjithshëm Idempotenti i Riesz-it P_μ nuk është projektor ortogonal. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që P_μ të jetë projektor ortogonal është që P_μ të jetë operator i adjunguar, [22]. Për operatorët hyponormal në [89], Stampfli ka treguar se për çdo pikë të izoluar të spektrit të operatorit T , projektori P_μ është i vetë-adjunguar dhe vlen

$$P_\mu(H) = \ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^*).$$

Në [95], Uchiama e zgjeroi këtë rezultat për operatorët e klasës $\mathcal{A}$ lidhur me pikën e izoluar $\mu \neq 0$ dhe tregoi se Idempotenti i Riesz-it lidhur me këtë klasë në pikën 0 nuk është i vetë-adjunguar dhe $\ker(T) \neq \ker(T^*)$. Në [59], Jeon dhe Kim e zgjeruan rezultatin e Stampflit për operatorët kuazi-klasë $\mathcal{A}$ në pikën $\mu \neq 0$. Ndërsa, në [71], Mecheri e tregoi rezultatin e njëjtë për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ lidhur me pikën $\mu \neq 0$.

Teoremë 2.1.25. [57, Theorem 4.1] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe P_μ Idempotenti i Riesz-it për pikën e izoluar μ nga spektri $\sigma(T)$. Atëherë:*

1. Nëse $\mu \neq 0$, $P_\mu(H) = \ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^*)$, dhe P_μ është i vetë-adjunguar.
2. Nëse $\mu = 0$, atëherë $P_\mu(H) = \ker(T^{k+1})$

Vërtetim. 1). Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe $\mu \neq 0 \in \text{iso}\sigma(T)$. Tregojmë se vlen barazimi $P_\mu(H) = \ker(T - \mu)$.

Nga Teorema 2.1.23 rrjedh se μ është vlerë vetjake e operatorit T , prandaj $(T - \mu)x = 0$, për çdo $x \neq 0 \in H$. Atëherë, $x \in \ker((T - \mu)^m) = P_\mu(H)$, që tregon se $\ker(T - \mu) \subseteq P_\mu(H)$. Në anën tjetër, $\sigma(T|_{P_\mu(H)}) = \{\mu\}$, prandaj bazuar në Teoremën 2.1.7, $T|_{P_\mu(H)}$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal, ndërsa nga Teorema 2.1.18 rrjedh se $T|_{P_\mu(H)} = \mu$. Nëse $x \in P_\mu(H)$, atëherë $Tx = \mu x$, prej nga $x \in \ker(T - \mu)$.

Tani, tregojmë se vlen $\ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^*)$. Pasi që $P_\mu(H) = \ker(T - \mu)$, atëherë $\ker(T - \mu)$ është nënhapësirë e reduktuar në lidhje me operatorin T dhe T mund të shkruhet si

$$T = \mu \oplus T_1 \text{ në } H = \ker(T - \mu) \oplus (\ker(T - \mu))^\perp,$$

ku T_1 është operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe $\sigma(T) = \{\mu\} \cup \sigma(T_1)$.

Duhet të tregojmë se $\mu \notin \sigma(T_1)$. Supozojmë të kundërtën, $\mu \in \sigma(T_1)$. Atëherë, μ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T_1)$. Pasi T_1 është operator k -kuazi- $*$ -paranormal,

$\mu \in \sigma_p(T_1)$, prandaj $\ker(T_1 - \mu) \neq \{0\}$. Pasi $\ker(T_1 - \mu) \subseteq \ker(T - \mu)$ dhe $\ker(T_1 - \mu) \subseteq (\ker(T - \mu))^\perp$, atëherë

$$\{0\} \neq \ker(T_1 - \mu) \subseteq \ker(T - \mu) \cap (\ker(T - \mu))^\perp = \{0\},$$

që është kontradiksion. Prandaj, mbetet që $\mu \notin \sigma(T_1)$, prej nga rrjedh se $T_1 - \mu$ është operator invertibil në $(\ker(T - \mu))^\perp$. Këndej kemi

$$(T - \mu)(\ker(T - \mu))^\perp = (\ker(T - \mu))^\perp,$$

pra $(\ker(T - \mu))^\perp \subseteq (T - \mu)(H)$.

Nga Lemat 2.1.13 dhe 1.2.1, marrim $\ker(T - \mu) \subseteq \ker((T - \mu)^*) = ((T - \mu)(H))^\perp$, rrjedhimisht

$$(T - \mu)(H) \subseteq (\ker(T - \mu))^\perp \subseteq (T - \mu)(H).$$

Pra $(T - \mu)(H) = (\ker(T - \mu))^\perp$, që implikon

$$\ker((T - \mu)^*) = ((T - \mu)(H))^\perp = \ker(T - \mu).$$

Në fund, tregojmë se P_μ është operator i vetë-adjunguar. Nga

$$P_\mu(H) = \ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^*),$$

marrim $T|_{P_\mu(H)} = \mu$. Prandaj,

$$((z - T)^*)^{-1}P_\mu = \overline{(z - \mu)^{-1}}P_\mu$$

dhe kemi

$$\begin{aligned} P_\mu^*P_\mu &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\mu} ((z - T)^*)^{-1}P_\mu d\bar{z} \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\mu} \overline{(z - \mu)^{-1}}P_\mu d\bar{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\mu} (z - \mu)^{-1}dz P_\mu = P_\mu. \end{aligned}$$

Pra $P_\mu^*P_\mu = P_\mu = P_\mu^2$, rrjedhimisht $P_\mu^* = P_\mu$.

2). Pasi që $\ker(T^{k+1}) \subseteq P_0(H)$ vlen për çdo operator të kufizuar, na mbetet të tregojmë përfshirjen $P_0(H) \subseteq \ker(T^{k+1})$. Dihet se $P_0(H)$ është nënhapësirë invariante e operatorit T dhe $\sigma(T|_{P_0(H)}) = \{0\}$, prandaj nga Teorema 2.1.18 kemi $(T|_{P_0(H)})^{k+1} = T^{k+1}|_{P_0(H)} = O$. Nga këtu rrjedh $P_0(H) \subseteq \ker(T^{k+1})$. □

2.2 Vetitë spektrale për operatorët k -kuazi klasë

$\mathcal{A}_n^*$

Në fillim do të përkufizojmë operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, do të japim shembuj, pastaj vetitë bazike dhe në fund vetitë spektrale të kësaj klase të operatorëve.

Në [100], janë përkufizuar operatorët e klasës $\mathcal{A}_n$. Për operatorin $T \in L(H)$ themi se i takon klasës $\mathcal{A}_n$, nëse

$$|T^{n+1}|_{\frac{2}{n+1}} \geq |T|^2,$$

për numrin e plotë jonegativ n .

Ndërsa në këtu kemi përkufizuar operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Përkufizim 2.2.1. [53, Definition 2.1] Themë se $T \in L(H)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nëse

$$T^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k \geq O,$$

për numrat e plotë jonegativ n dhe k .

Nëse $k = 0$, atëherë marrim

$$|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} \geq |T^*|^2,$$

që paraqet operatorët e klasës $\mathcal{A}_n^*$. Nëse $T \in \mathcal{A}_n^*$, atëherë T është operator n -*-paranormal, prandaj si i tillë, T është normaloid, [84].

Nëse $n = 1$, atëherë klasa e operatorëve $\mathcal{A}_1^*$ koïncidon me klasën e operatorëve $\mathcal{A}^*$.

Nëse $n = 1$ dhe $k = 1$, atëherë operatorët 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$ koïncidojnë me operatorët $\mathcal{Q}(\mathcal{A}^*)$.

Pasi që $S \geq 0$ implikon $T^*ST \geq 0$, atëherë vlen: nëse T i takon klasës $\mathcal{A}_n^*$ për ndonjë numër të plotë $n \geq 1$, atëherë T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për çdo numër të plotë pozitiv k .

Lemë 2.2.1. [53, Lemma 2.1] Le të jetë $K = \bigoplus_{m=-\infty}^{\infty} H_m$, ku $H_m \cong \mathbb{R}^2$. Për operatorët e dhënë pozitiv A, B në $\mathbb{R}^2$ dhe për numrin e fiksuar $m \in \mathbb{N}$ përkufizojmë operatorin $S = S_{A,B,m}$ në K si në vijim:

$$S(x_1, x_2, \dots) = (0, Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_m, Bx_{m+1}, \dots).$$

Atëherë, operatori i adjunguar i operatorit T është

$$S^*(x_1, x_2, \dots) = (Ax_2, Ax_3, \dots, Ax_{m+1}, Bx_{m+2}, \dots),$$

si dhe vlen:

Operatori $S = S_{A,B,m}$ është k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ për $n \geq k$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$A^k \left(A^{n+1-i} B^{2i} A^{n+1-i} \right)^{\frac{1}{n+1}} A^k \geq A^{2k+2}, \text{ për } i = k+1, k+2, \dots, n+1.$$

Shembull 2.2.2. [53, Example 2.2] Le të jetë $0 \leq k \leq n$ dhe $S = S_{A,B,m}$ ku

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dhe } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Atëherë, S është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T është operator $(k+1)$ -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Rrjedhimisht, vlejné përfshirjet:

$$1\text{-kuazi klasë } \mathcal{A}_n^* \subseteq 2\text{-kuazi klasë } \mathcal{A}_n^* \subseteq 3\text{-kuazi klasë } \mathcal{A}_n^* \subseteq \dots$$

E anasjellta e këtij pohimi nuk është e vërtetë.

Shembull 2.2.3. Marrim operatorin e zhvendosjes së njëanshme W_α me peshën $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$, të cilin e përkufizuar në shembullin 2.1.2.

Nga përkufizimi kemi, W_α është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ nëse

$$W_\alpha^{*k} \left(|W_\alpha^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |W_\alpha^*|^2 \right) W_\alpha^k \geq O,$$

për numrat e plotë jonegativ n dhe k . W_α është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$(\alpha_{k+m}\alpha_{k+m+1} \cdot \dots \cdot \alpha_{k+m+n})^{\frac{1}{n+1}} \geq \alpha_{k+m-1} \text{ për } m = 1, 2, 3, \dots$$

Nëse $\alpha_{k+1} \leq \alpha_{k+2} \leq \alpha_{k+3} \leq \dots$ dhe $\alpha_k > \alpha_{k+n+1}$, atëherë W_α është operator $(k+1)$ -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, mirëpo nuk është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Tani do të shohim se operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_{n+1}^*$ dhe operatorët $(k+1)$ -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ janë të pavarur.

Shembull 2.2.4. Shembull i një operatori që nuk është operator 2-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$, mirëpo është operator 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_2^*$.

Le të jetë W_α operator i zhvendosjes së njëanshme me vargun e peshave $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$, i dhënë me relacionin:

$$\alpha_m = \begin{cases} 1 & \text{nëse } m = 1 \\ 2 & \text{nëse } m = 2 \\ \frac{1}{4} & \text{nëse } m = 3 \\ 4 & \text{nëse } m = 4 \\ 16 & \text{nëse } m \geq 5. \end{cases}$$

Pas disa llogaritjeve të thjeshta shohim se W_α është operator 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_2^*$, mirëpo W_α nuk është operator 2-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$.

Shembull 2.2.5. Shembull i një operatori i cili nuk është operator 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_2^*$, mirëpo është operator 2-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$.

Le të jetë W_α operator i zhvendosjes së njëanshme me vargun e peshave $\{\alpha_m : m \in \mathbb{N}\}$, i dhënë me relacionin:

$$\alpha_m = \begin{cases} 1 & \text{nëse } m = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{nëse } m = 2 \\ 2 & \text{nëse } m = 3 \\ \frac{1}{4} & \text{nëse } m = 4 \\ 64 & \text{nëse } m \geq 5. \end{cases}$$

Pas disa llogaritjeve të thjeshta, shohim se W_α është operator 2-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$, mirëpo nuk është operator 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_2^*$.

Përkufizim 2.2.2. Operatori T quhet (n, k) -kuazi- $*$ -paranormal [101], nëse

$$\|T^*T^kx\| \leq \|T^{1+n+k}x\|^{\frac{1}{1+n}} \|T^kx\|^{\frac{n}{n+1}},$$

për çdo $x \in H$, dhe për numrat e plotë jonegativ n dhe k .

Teoremë 2.2.6. [53, Theorem 2.5] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T është operator (n, k) -kuazi- $*$ -paranormal.

Vërtetim. Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nga jobarazimi Hölder-McCarthy marrim

$$\begin{aligned} \|T^*T^kx\|^2 &= \langle T^*k|T^*|^2T^kx, x \rangle \\ &\leq \langle T^*k|T^{1+n}|^{\frac{2}{1+n}}T^kx, x \rangle \\ &\leq \langle |T^{1+n}|^2T^k, T^kx \rangle^{\frac{1}{1+n}} \|T^kx\|^{\frac{2n}{n+1}} \\ &= \|T^{1+n+k}x\|^{\frac{2}{1+n}} \|T^kx\|^{\frac{2n}{n+1}}. \end{aligned}$$

Këndeji kemi

$$(2.2.1) \quad \|T^*T^kx\| \leq \|T^{1+n+k}x\|^{\frac{1}{1+n}} \|T^kx\|^{\frac{n}{n+1}}.$$

që tregon se T është operator (n, k) -kuazi- $*$ -paranormal. $\square$

Nga teorema e mësipërme rrjedh se, nëse T është 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T është operator $(n, 1)$ -kuazi- $*$ -paranormal.

Mirëpo e anasjellta e teoremës së mësipërme nuk është e vërtetë.

Lemë 2.2.7. Le të jetë dhënë operatori $T = T_{A,B,m}$ i përkufizuar në Lemën 2.1.5

1. Operatori $T_{A,B,m}$ është operator 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$AB^2A \geq A^4,$$

2. Operatori $T_{A,B,m}$ është operator $(1, 1)$ -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$A(B^4 - 2\lambda A^2 + \lambda^2)A \geq O, \text{ për çdo } \lambda > 0.$$

Shembull 2.2.8. Një operator i cili nuk është 1-kuazi klasë $\mathcal{A}_1^*$, mirëpo është operator $(1, 1)$ -kuazi- $*$ -paranormal.

Shembulli është analog me shembullin 2.1.6.

Teoremë 2.2.9. [53, Theorem 2.3] Nëse $T \in L(H)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ ashtu që T^k nuk e ka rangun e dendur dhe T ka paraqitjen

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}),$$

atëherë, A është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$ në $\overline{T^k(H)}$, $C^k = O$ dhe $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$.

Vërtetim. Le të jetë P projeksion nga H mbi $\overline{T^k(H)}$. Nëse $A = T|_{\overline{T^k(H)}}$, atëherë

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} = TP = PTP.$$

Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, kemi

$$P \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) P \geq O.$$

Vërejmë se

$$P|T^*|^2P = PTT^*P = \begin{pmatrix} AA^* + BB^* & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A^*|^2 + |B^*|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

Tani nga Jobarazimi i Hansenit marrim

$$\begin{aligned} P|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}}P &= P \left(T^{*(n+1)} T^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} P \\ &\leq \left(P T^{*(n+1)} T^{(n+1)} P \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \left((TP)^{*(n+1)} (TP)^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \begin{pmatrix} |A^{n+1}|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}^{\frac{1}{n+1}} \\ &= \begin{pmatrix} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Atëherë,

$$\begin{pmatrix} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \geq P|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}}P \geq P|T^*|^2P = \begin{pmatrix} |A^*|^2 + |B^*|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} |A^*|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

pra A i takon klasës $\mathcal{A}_n^*$ në $\overline{T^k(H)}$.

Vërtetimi i pjesës tjetër të teoremës, është plotësisht analog me vërtetimin në Teoremën 2.1.10. $\square$

Teoremë 2.2.10. [53, Theorem 2.4] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe M është nënhapësirë T -invariante, atëherë ngushtimi $T|_M$ i operatorit T është gjithashtu operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Vërtetim. Le të jetë P projeksion nga H mbi M . Atëherë, T në $H = M \oplus M^\perp$ mund të paraqitet me anë të matricës

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

Vëmë $A = T|_M$ dhe marrim

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & O \end{pmatrix} = TP = PTP.$$

Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, kemi

$$PT^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k P \geq O.$$

Vërejmë se

$$\begin{aligned} PT^{*k} |T^*|^2 T^k P &= PT^{*k} P |T^*|^2 PT^k P \\ &= PT^{*k} P T T^* PT^k P \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k} |A^*|^2 A^k + |B^* A^k|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &\geq \begin{pmatrix} A^{*k} |A^*|^2 A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Duke u bazuar në jobarazimin e Hansenit marrim

$$\begin{aligned} PT^{*k} |T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} T^k P &= PT^{*k} P \left(T^{*(n+1)} T^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} PT^k P \\ &\leq PT^{*k} \left(P T^{*(n+1)} T^{(n+1)} P \right)^{\frac{1}{n+1}} T^k P \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A^{n+1}|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}^{\frac{1}{n+1}} \begin{pmatrix} A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{*k} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Atëherë,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^{*k} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} &\geq PT^{*k} |T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} T^k P \\ &\geq PT^{*k} |T^*|^2 T^k P \\ &\geq \begin{pmatrix} A^{*k} |A^*|^2 A^k & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{aligned}$$

pra A është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ në M . □

Teoremë 2.2.11. [53, Theorem 3.1] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe $(T - \mu)x = 0$ për $x \neq 0$, atëherë $(T - \mu)^*x = 0$ për çdo $\mu \neq 0$.

Vërtetim. Le të jetë $x \neq 0$ dhe M mbështjellësi linear i formuar nga bashkësia $\{x\}$. Atëherë, M është nënhapësirë invariante e operatorit T dhe vlen

$$T = \begin{pmatrix} \mu & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = M \oplus M^\perp.$$

Le të jetë P projeksioni nga H mbi M dhe $T|_M = \mu \neq 0$. Për të vërtetuar teoremën mjafton të tregojmë se $B = O$. Pasi që T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe $x = T^k(\frac{x}{\mu^k}) \in \overline{T^k(H)}$, atëherë

$$P \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) P \geq O.$$

Duke shfrytëzuar jobarazimin e Hansenit kemi

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} |\mu|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix} \\ &= \left(P T^{*(n+1)} T^{(n+1)} P \right)^{\frac{1}{n+1}} \\ &\geq P \left(T^{*(n+1)} T^{(n+1)} \right)^{\frac{1}{n+1}} P \\ &= P |T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} P \geq P |T^*|^2 P \\ &= \begin{pmatrix} |\mu|^2 + |B^*|^2 & O \\ O & O \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

prandaj $B = O$. □

Rrjedhim 2.2.12. [53, Corollary 3.2] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë

$$\sigma_{jp}(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}.$$

Rrjedhim 2.2.13. [53, Corollary 3.3] Nëse T^* është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë për çdo $\mu \neq 0$ vlen

$$\beta(T - \mu) \leq \alpha(T - \mu).$$

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Teorema 2.2.11. □

Teoremë 2.2.14. [53, Theorem 3.4] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, dhe $\alpha, \beta \in \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ të tilla që $\alpha \neq \beta$, atëherë

$$\ker(T - \alpha) \perp \ker(T - \beta).$$

Vërtetim. Le të jetë $x \in \ker(T - \alpha)$ dhe $y \in \ker(T - \beta)$. Atëherë, $Tx = \alpha x$ dhe $Ty = \beta y$. Nga këtu kemi

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle = \langle x, \bar{\beta}y \rangle = \beta \langle x, y \rangle.$$

Pasi $\alpha \neq \beta$, atëherë $\langle x, y \rangle = 0$. Rrjedhimisht,

$$\ker(T - \alpha) \perp \ker(T - \beta).$$

□

Teoremë 2.2.15. [53, Theorem 3.5] Le të jetë T operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ që ka prezentimin

$$T = \mu \oplus A \text{ në } H = \ker(T - \mu) \oplus \ker((T - \mu)^\perp),$$

ku $\mu \neq 0$ është vlerë vetjake e operatorit T . Atëherë, A është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe vlen $\ker(A - \mu) = \{0\}$.

Vërtetim. Le të jetë $T = \mu \oplus A$. Atëherë, $T = \begin{pmatrix} \mu & O \\ O & A \end{pmatrix}$ dhe kemi:

$$\begin{aligned} T^{*k} |T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} T^k - T^{*k} |T^*|^2 T^k &= \begin{pmatrix} |\mu|^{2(k+1)} & O \\ O & A^{*k} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} A^k \end{pmatrix} \\ &- \begin{pmatrix} |\mu|^{2(k+1)} & O \\ O & A^{*k} |A^*|^2 A^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} O & O \\ O & A^{*k} |A^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} A^k - A^{*k} |A^*|^2 A^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë edhe operator A është k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Le të jetë $x_2 \in \ker(A - \mu)$. Atëherë,

$$(T - \mu) \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & O \\ O & A - \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Prej nga rrjedh se $x_2 \in \ker(T - \mu)$. Pasi,

$$\ker(A - \mu) \subseteq \ker((T - \mu)^\perp),$$

atëherë $x_2 = 0$, që tregon se $\ker(A - \mu) = \{0\}$. □

Teoremë 2.2.16. [53, Theorem 3.6] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë

$$\sigma_{ja}(T) \setminus \{0\} = \sigma_a(T) \setminus \{0\}.$$

Vërtetim. Le të jetë $\varphi : L(H) \rightarrow L(K)$, Zgjerimi Berberian. Fillimisht tregojmë që $\varphi(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë

$$\begin{aligned} (\varphi(T))^{*k} \left(|(\varphi(T))^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |(\varphi(T))^*|^2 \right) (\varphi(T))^k &= \varphi(T^{*k}) \left(|\varphi(T^{n+1})|^{\frac{2}{n+1}} - |\varphi(T^*)|^2 \right) \varphi(T^k) \\ &= \varphi(T^{*k}) \left(\varphi(|(T^{n+1})|^{\frac{2}{n+1}}) - \varphi(|(T^*)|^2) \right) \varphi(T^k) \\ &= \varphi \left(T^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k \right) \geq O. \end{aligned}$$

Pra, $\varphi(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Tani, nga Rrjedhimi 2.2.12 dhe Lema 1.4.1 marrim

$$\begin{aligned}\sigma_a(T) \setminus \{0\} &= \sigma_a(\varphi(T)) \setminus \{0\} = \sigma_p(\varphi(T)) \setminus \{0\} \\ &= \sigma_{jp}(\varphi(T)) \setminus \{0\} = \sigma_{ja}(T) \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

□

Teoremë 2.2.17. [53, Theorem 3.7] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe $\mu \in \sigma_a(T) \setminus \{0\}$, atëherë $|\mu| \in \sigma_a(|T|) \cap \sigma_a(|T^*|)$.

Vërtetim. Nëse $\mu \in \sigma_a(T) \setminus \{0\}$, atëherë nga Teorema 2.2.16 rrjedh se ekziston vargu i vektorëve njësi $\{x_m\}$ i tillë që $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ dhe $(T - \mu)^*x_m \rightarrow 0$. Tani, nga Lema 1.4.2 marrim $|\mu| \in \sigma_a(|T|) \cap \sigma_a(|T^*|)$. □

Rrjedhim 2.2.18. Le të jetë T operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe $T = U|T|$ dekompozimi polar i tij T . Nëse $\mu = |\mu|e^{i\theta} \neq 0$ dhe $\mu \in \sigma_a(T)$ atëherë $e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(U)$.

Vërtetim. Le të jetë $\mu \in \sigma_a(T)$. Nga Teorema 2.2.16 kemi $\mu \in \sigma_{ja}(T)$. Atëherë, ekziston vargu i vektorëve njësi $\{x_m\}$, ashtu që $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ dhe $(T - \mu)^*x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$. Nga Lema 1.4.2 kemi $(U - e^{i\theta})x_m \rightarrow 0$ dhe $(U^* - e^{-i\theta})x_m \rightarrow 0$, kur $m \rightarrow \infty$. Prandaj, $e^{i\theta} \in \sigma_{ja}(U)$. □

Rrjedhim 2.2.19. [53, Corollary 3.8] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë

1. $\ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^2)$, nëse $\mu \neq 0$,
2. $\ker(T^k) = \ker(T^{k+1})$, nëse $\mu = 0$.

Vërtetim. 1). Le të jetë $\mu \neq 0$. Për të treguar barazimin nën (1) mjafton të tregojmë përfshirjen $\ker((T - \mu)^2) \subseteq \ker(T - \mu)$, pasi që përfshirja $\ker(T - \mu) \subseteq \ker((T - \mu)^2)$ vlen për çdo operator të kufizuar.

Le të jetë $x \in \ker((T - \mu)^2)$. Atëherë, $(T - \mu)^2x = 0$. Tani, nga Teorema 2.2.11 marrim $(T - \mu)^*(T - \mu)x = 0$. Kemi,

$$\|(T - \mu)x\|^2 = \langle (T - \mu)^*(T - \mu)x, x \rangle = 0.$$

Atëherë, $(T - \mu)x = 0$ që implikon përfshirjen $\ker((T - \mu)^2) \subseteq \ker(T - \mu)$.

- 2). Le të jetë $\mu = 0$ dhe $x \in \ker(T^{k+1})$. Nga relacioni (2.2.1) marrim

$$\|T^*T^kx\| \leq \|T^n(T^{k+1}x)\|^{\frac{1}{1+n}} \|T^kx\|^{\frac{n}{n+1}} = 0.$$

Atëherë, $T^*T^kx = 0$. Nga këtu kemi,

$$\|T^kx\|^2 = \langle T^*T^kx, T^{k-1}x \rangle = 0.$$

Prandaj $x \in \ker(T^k)$.

□

Rrjedhim 2.2.20. [53, Corollary 3.9] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T ka SVEP.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh nga Rrjedhimi i mësipërm dhe nga Lema 1.4.11. $\square$

Operatori $T \in L(H)$ quhet operator i dekompozueshëm, në qoftë se për çdo dy bashkësi të hapura $\{U, V\}$ nga rrafshi kompleks $\mathbb{C}$ ekzistojnë dy nënhapësirat e mbyllura T -invariante Y dhe Z në H të tilla që

$$H = Y + Z, \sigma(T|_Y) \subseteq U \text{ dhe } \sigma(T|_Z) \subseteq V.$$

Lemë 2.2.21. [66, Theorem 1.2.23] Për çdo operator të dekompozueshëm T , barazimi

$$H = H_T(\overline{U}) + H_T(\overline{V}),$$

vlen për çdo dy bashkësi të hapura $\{U, V\}$ nga $\mathbb{C}$.

Teoremë 2.2.22. [55, Theorem 5.1] Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, i tillë që $T \neq zI$ për çdo $z \in \mathbb{C}$. Nëse S është operator i dekompozueshëm dhe është transformim pothuajse-invertibil i operatorit T , atëherë T ka nënhapësirë hiperinvariante jo triviale.

Vërtetim. Nëse S është operator i dekompozueshëm dhe transformim pothuajse-invertibil i operatorit T , atëherë ekziston operatori pothuajse-invertibil A i tillë që $AS = TA$. Duhet të tregojmë se T ka nënhapësirë hiperinvariante jo triviale. Për këtë, supozojmë të kundërtën, se T nuk ka nënhapësirë hiperinvariante jo triviale. Nga këtu dhe nga [65, Lemma 3.6.1] rrjedh se $\sigma_p(T) = \emptyset$ dhe $H_T(F) = \{0\}$, për çdo nënhapësirë të mbyllur të vërtetë F të bashkësisë $\sigma(T)$. Le të jenë $\{U, V\}$ dy bashkësi të hapura në $\mathbb{C}$ të tilla që $\sigma(T) \setminus \overline{U} \neq \emptyset$ dhe $\sigma(T) \setminus \overline{V} \neq \emptyset$.

Tani, nëse $x \in H_S(\overline{U})$, atëherë $\sigma_S(x) \subset \overline{U}$. Prandaj, ekziston funksioni analitik f i përkufizuar në $\mathbb{C} \setminus \overline{U}$ i tillë që $(S - z)f(z) = x$, për çdo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{U}$. Pra,

$$(T - z)Af(z) = A(S - z)f(z) = Ax.$$

Këndeji kemi $\mathbb{C} \setminus \overline{U} \subset \rho_T(Ax)$, që implikon $Ax \in H_T(\overline{U})$. Prandaj,

$$A(H_S(\overline{U})) \subseteq H_T(\overline{U}).$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet se $A(H_S(\overline{V})) \subseteq H_T(\overline{V})$.

Këndeji, pasi S është operator i dekompozueshëm, atëherë $H = H_S(\overline{U}) + H_S(\overline{V})$. Në fund kemi

$$A(H) = A(H_S(\overline{U})) + A(H_S(\overline{V})) \subseteq H_T(\overline{U}) + H_T(\overline{V}) = \{0\},$$

që nuk është e mundur sepse operatori A është injektiv. Kështu kemi arritur në kontradiksion, prandaj mbetet që T ka nënhapësirë hiperinvariante jo triviale. $\square$

Lemë 2.2.23. [66, Theorem 1.3.2] Për çdo operator $T \in L(H)$ vlen

$$\sigma_s(T) = \cup \{\sigma_T(x) : x \in H\}.$$

Nëse T ka SVEP, atëherë $\sigma(T) = \sigma_s(T)$.

Teoremë 2.2.24. [55, Theorem 5.2] Le të jetë $T \in L(H \oplus K)$ operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nëse ekziston vektori jo zero $x \in H \oplus K$ i tillë që $\sigma_T(x) \subsetneq \sigma(T)$, atëherë T ka nënhapësirë hiperinvariante jo triviale.

Vërtetim. Le të vëmë

$$M = H_T(\sigma_T(x)) = \{y \in H \oplus K : \sigma_T(y) \subseteq \sigma_T(x)\}.$$

Nga Lema 1.4.13 rrjedh se M është nënhapësirë hiperinvariante e operatorit T . Tregojmë se M është nënhapësirë jo triviale. Pasi $x \in M$, atëherë $M \neq \{0\}$. Supozojmë se $M = H \oplus K$. Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nga Rrjedhimi 2.2.20 rrjedh se T ka SVEP. Tani nga Lema 2.2.23 rrjedh relacioni

$$\sigma(T) = \cup\{\sigma_T(y) : y \in H \oplus K\} \subseteq \sigma_T(x) \subsetneq \sigma(T),$$

gjë që nuk është e mundur. Prandaj M është nënhapësirë T -hiperinvariante jo triviale. $\square$

Për operatorët $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$ përkufizojmë komutatorin $W(S, T) \in L(L(H, K))$ të dhënë me:

$$W(S, T)(B) = SB - BT \text{ për çdo } B \in L(H, K).$$

Lemë 2.2.25. [66, Theorem 3.5.1] Për çdo dy operatorë $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$, për komutatorin e tyre vlen:

1. $\sigma(W(S, T)) = \sigma(S) \setminus \sigma(T)$,
2. $\sigma_s(W(S, T)) = \sigma_s(S) \setminus \sigma_a(T)$

Rrjedhim 2.2.26. [55, Corollary 2.3] Nëse $T \in L(H)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe ngushtimi i tij A në $\overline{T^k(H)}$ është operator invertibil, atëherë T është i ngjashëm me shumën direkte të një operatori të klasës $\mathcal{A}_n^*$ dhe një operatori nilpotent.

Vërtetim. Supozojmë se

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Nga Teorema 2.2.9 rrjedh se A është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$ dhe C është operator nilpotent me tregues të nilpotencës k . Pasi A është invertibil, atëherë $0 \notin \sigma(A)$. Nga këtu marrim $\sigma(A) \cap \sigma(C) = \emptyset$. Tani nga Lema 2.2.25 rrjedh se komutatori $W(A, C)$ është operator invertibil, prandaj ekziston operatori Z i tillë që $AZ - ZC = B$. Atëherë,

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & Z \\ O & I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Z \\ O & I \end{pmatrix},$$

çka u deshtë të tregohej. $\square$

Lemë 2.2.27. [55, Lemma 2.4] Le të jetë $T \in L(H, K)$ operator i përkufizuar me

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}.$$

Nëse A është operator surjektiv i klasës $\mathcal{A}_n^*$ dhe C operator nilpotent me tregues të nilpotencës k , atëherë T është i ngjashëm me operatorët që i përkasin klasës së operatorëve (n, k) -kuazi*-paranormal.

Vërtetim. Pasi A është surjektiv dhe $C^k = O$, atëherë kemi $\sigma_s(A) \cap \sigma_a(C) = \emptyset$. Nga Lema 2.2.25, kemi se komutatori $W(A, C)$ është surjektiv, prandaj ekziston operatori Z , i tillë që $AZ - ZC = B$. Atëherë,

$$\begin{pmatrix} I & Z \\ O & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Z \\ O & I \end{pmatrix},$$

që tregon se T është i ngjashëm me $R = \begin{pmatrix} A & O \\ O & C \end{pmatrix}$.

Tregojmë se R është operator (n, k) -kuazi*-paranormal. Për këtë marrim vektorin $x = x_1 + x_2 \in H \oplus K$. Pasi A është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$, atëherë A është operator n -*-paranormal. Nga kjo, duke ditur se $C^k = O$ do të kemi

$$\begin{aligned} \|R^*(R^k x)\|^2 &= \|R^*(R^k(x_1 + x_2))\|^2 = \|A^*(A^k(x_1))\|^2 \\ &\leq \|A^{1+n}(A^k(x_1))\|^{\frac{2}{1+n}} \|A^k(x_1)\|^{\frac{2n}{n+1}} \\ &= \|R^{1+n}(R^k(x_1 + x_2))\|^{\frac{2}{1+n}} \|R^k(x_1 + x_2)\|^{\frac{2n}{n+1}} \\ &= \|R^{1+n}(R^k x)\|^{\frac{2}{1+n}} \|R^k(x)\|^{\frac{2n}{n+1}} \end{aligned}$$

pra, R është operator (n, k) -kuazi*-paranormal. □

Lemë 2.2.28. [55, Lemma 2.5] Le të jetë T operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$ ashtu që $\sigma(T) = \{0\}$. Atëherë, $T = O$.

Vërtetim. Pasi T është i klasës $\mathcal{A}_n^*$, T është normaloid. Prandaj

$$\|T\| = \sup\{|\mu| : \mu \in \sigma(T)\} = 0,$$

prej nga rrjedh $T = O$. □

Rrjedhim 2.2.29. [55, Corollary 2.6] Le të jetë T operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nëse T është operator pothuajse-nilpotent, atëherë T është operator nilpotent.

Vërtetim. Supozojmë se T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Konsiderojmë dy raste:

Rasti I: Nëse operatori T^k e ka rangun e dendur, atëherë T është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$. Nga Lema e mësipërme rrjedh se T është operator nilpotent.

Rasti II: Nëse T^k nuk e ka rangun e dendur, nga Teorema 2.2.9 rrjedh se T mund të paraqitet me anë të matricës

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Pasi T është operator pothuajse-nilpotent, $\sigma(T) = \{0\}$. Nga Teorema 2.2.9 marrim $\sigma(A) = \{0\}$. Prandaj, pasi A është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$, rrjedh $A = O$. Nga këtu kemi

$$T^{k+1} = \begin{pmatrix} O & BC^k \\ O & C^{k+1} \end{pmatrix} = O,$$

që tregon se T është operator nilpotent. $\square$

2.3 Operatorët (p, r, q) -*-paranormal dhe absolut- (p, r) -*-paranormal

T. Furuta dhe të tjerët, në [40] kanë përkufizuar klasën e operatorëve absolut- k -paranormal dhe kanë studiuar vetitë e kësaj klase të operatorëve, ku veç tjerash kanë treguar se klasa e operatorëve $\mathcal{A}(k)$ është nënklasë e klasës së operatorëve absolut- k -paranormal, për çdo $k > 0$, [40, Theorem 2]). Operatori T quhet absolut- k -paranormal, nëse

$$\| |T|^k T x \| \geq \| T x \|^{k+1},$$

për çdo $k > 0$ dhe për çdo vektor njësi $x \in H$.

Fujii, dhe të tjerët në [37] kanë përkufizuar operatorët p -paranormal për $p > 0$ që paraqet një tjetër përgjithësim të operatorëve paranormal. Operatori T quhet p -paranormal në qoftë se

$$\| |T|^p U |T|^p x \| \geq \| |T|^p x \|^2,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$ dhe $p > 0$, ku $T = U|T|$ është dekompozimi polar i operatorit T . Është e qartë se klasa e operatorëve 1-paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve paranormal.

Në [99] janë përkufizuar operatorët absolut- (p, r) -paranormal nga Yamazaki dhe Yanagida. Kjo klasë është përgjithësim i klasës së operatorëve absolut- k -paranormal dhe operatorëve p -paranormal. Operatori T quhet absolut- (p, r) -paranormal në qoftë se

$$\| |T|^p U |T|^r x \| \| x \|^p \geq \| |T|^r x \|^{p+r},$$

për çdo $x \in H$.

Fujji dhe Nakomoto në [36] kanë përkufizuar klasën e operatorëve (p, r, q) -paranormal: për çdo $p > 0$, $r \geq 0$ dhe $q > 0$, operatori T është (p, r, q) -paranormal nëse

$$\| |T|^p U |T|^r x \|^{1/q} \geq \| |T|^{p+r} x \|,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$. Klasa e operatorëve (p, r, q) -paranormal është përgjithësim i klasës së operatorëve p -paranormal. Për më shumë, klasa e operatorëve $(p, p, 2)$ -paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve p -paranormal.

Operatori T quhet absolut- k -*-paranormal në qoftë se

$$(2.3.1) \quad \| |T|^k T x \| \geq \| T^* x \|^{k+1},$$

për çdo vektor njësi $x \in H$ dhe për çdo $k > 0$. Tregohet se çdo operator i klasës $\mathcal{A}(k^*)$ është operator absolut- k -*-paranormal për çdo $k > 0$, [77, Theorem 2.4].

Përkufizim 2.3.1. Operatori T quhet p -*-paranormal në qoftë se

$$(2.3.2) \quad \| |T|^p U |T|^p x \| \geq \| |T|^p U^* x \|^2,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$ dhe $p > 0$.

Lemë 2.3.1. [18] Klasa e operatorëve 1-*-paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve *-paranormal.

Vërtetim. Pasi

$$\| |T| U |T| x \|^2 = \langle |T| U |T| x, |T| U |T| x \rangle = \langle |T|^2 U |T| x, U |T| x \rangle = \| T^2 x \|^2,$$

dhe

$$\| |T| U^* x \|^2 = \langle U |T|^2 U^* x, x \rangle = \langle |T^*|^2 x, x \rangle = \| T^* x \|^2,$$

atëherë, klasa e operatorëve 1-*-paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve *-paranormal. $\square$

Duke u mbështetur në përkufizimet e mësipërme, ne këtu kemi përkufizuar klasën e operatorëve absolut- (p, r) -*-paranormal që është përgjithësim i klasës së operatorëve absolut- k -*-paranormal dhe p -*-paranormal. Po ashtu kemi bërë edhe një përgjithësim të disa klasëve të operatorëve duke përkufizuar klasën e operatorëve (p, r, q) -*-paranormal.

Përkufizim 2.3.2. [18, Definition 2.1] Për çdo $p > 0$, $r \geq 0$ dhe $q > 0$, operatori T është (p, r, q) -*-paranormal, nëse

$$(2.3.3) \quad \| |T|^p U |T|^r x \|^{\frac{1}{q}} \geq \| |T|^{\frac{p+r}{q}} U^* x \|,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$.

Nëse marrim $r = p$ dhe $q = 2$ në relacionin (2.3.3), shohim se klasa e operatorëve $(p, p, 2)$ -*-paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve p -*-paranormal.

Nëse $0 < t \leq s$ dhe $\|x\| = 1$, atëherë nga jobarazimi Hölder-McCarthy kemi

$$\| T^t x \|^{2s} = \langle T^{2s \frac{t}{s}} x, x \rangle^s \leq \langle T^{2s} x, x \rangle^{s \frac{t}{s}} = \| T^s x \|^{2t},$$

pra,

$$(2.3.4) \quad \| T^t x \|^s \leq \| T^s x \|^t.$$

Teoremë 2.3.2. [18, Proposition 2.2] Klasa e operatorëve (p, r, q) -*-paranormal është monotono rritëse për $q > 0$.

Vërtetim. Le të jetë T operator (p, r, q) -*-paranormal dhe $q' \geq q > 0$. Për vektorin njësi $x \in H$, nga jobarazimi (2.3.4) marrim

$$\begin{aligned} \left\| |T^*|^{\frac{p+r}{q'}} x \right\| &= \left\| |T^*|^{\frac{p+r}{q} \cdot \frac{q}{q'}} x \right\| \\ &\leq \left\| |T^*|^{\frac{p+r}{q}} x \right\|^{\frac{q}{q'}} \\ &\leq \| |T|^p U |T|^r x \|^{\frac{1}{q} \cdot \frac{q}{q'}} \\ &= \| |T|^p U |T|^r x \|^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Pra, T është operator (p, r, q') -*-paranormal. $\square$

Përkufizim 2.3.3. [18, Definition 2.3] Për numrat realë pozitiv $p > 0$ dhe $r > 0$, operatori T quhet absolut- (p, r) -*-paranormal, nëse

$$(2.3.5) \quad \| |T|^p U |T|^r x \|^r \geq \| |T|^r U^* x \|^{p+r},$$

për çdo vektor njësi $x \in H$, ose

$$(2.3.6) \quad \| |T|^p U |T|^r x \|^r \|x\|^p \geq \| |T|^r U^* x \|^{p+r},$$

për çdo $x \in H$.

Shohim që klasa e operatorëve $(p, r, \frac{p+r}{r})$ -*-paranormal është e barabartë me klasën e operatorëve absolut- (p, r) -*-paranormal.

Rrjedhim 2.3.3. [18, Corollary 2.4] Le të jetë $T \in L(H)$ dhe $T = U|T|$ dekompozim polar i operatorit T .

- 1). Për çdo $k > 0$, T është absolut- k -*-paranormal, nëse T është absolut- $(k, 1)$ -*-paranormal,
- 2). Për çdo $p > 0$, T është p -*-paranormal, nëse T është absolut- (p, p) -*-paranormal,
- 3). T është *-paranormal, nëse T është absolut- $(1, 1)$ -*-paranormal.

Vërtetim. Për të vërtetuar këtë shfrytëzojmë relacionin (2.3.5).

- 1). Vëmë $p = k > 0$ dhe $r = 1$ në relacionin (2.3.5). Atëherë, kemi

$$\| |T|^k T x \| \geq \| T^* x \|^{k+1}.$$

- 2). Vëmë $r = p$ në relacionin (2.3.5). Atëherë, kemi

$$\| |T|^p U |T|^p x \| \geq \| |T|^p U^* x \|^2.$$

- 3). Vëmë $r = p = 1$ në relacionin (2.3.5). Atëherë, kemi

$$\| |T| U |T| x \| \geq \| |T| U^* x \|^2 \text{ so } \| T^2 x \| \geq \| T^* x \|^2.$$

$\square$

Lemë 2.3.4. Për numrat real pozitiv $a > 0$ dhe $b > 0$, vlen

$$\lambda a + \mu b \geq a^\lambda b^\mu$$

ku $\lambda > 0$ dhe $\mu > 0$, të tillë që $\lambda + \mu = 1$.

Teoremë 2.3.5. [18, Proposition 2.6] Le të jetë $T \in L(H)$ dhe $T = U|T|$ dekompozim polar i operatorit T .

1). Për çdo $p > 0$, $r > 0$ dhe $q > 1$, operatori T është (p, r, q) -*-paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$(2.3.7) \quad |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r - q \lambda^{r(q-1)} |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} + \lambda^{rq}(q-1)I \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$.

2). Për çdo $p > 0$ dhe $r > 0$, operatori T është absolut- (p, r) -*-paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$(2.3.8) \quad r|T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r - (p+r)\lambda^p |T^*|^{2r} + p\lambda^{p+r} I \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$.

3). Për çdo $p > 0$, operatori T është p -*-paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$(2.3.9) \quad |T|^p U^* |T|^{2p} U |T|^p - 2\lambda |T^*|^{2p} + \lambda^2 I \geq 0,$$

për çdo $\lambda > 0$.

Vërtetim. 1). Supozojmë se T është operator (p, r, q) -*-paranormal, për $p > 0$, $r > 0$ dhe $q > 1$, d.m.th.,

$$|||T|^p U |T|^r x||^{\frac{1}{q}} \geq |||T|^{\frac{p+r}{q}} U^* x||,$$

për çdo vektor njësi $x \in H$. Nga këtu rrjedh

$$(2.3.10) \quad \langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle^{\frac{1}{q}} \langle x, x \rangle^{\frac{q-1}{q}} \geq \langle U |T|^{\frac{2(p+r)}{q}} U^* x, x \rangle = \langle |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} x, x \rangle,$$

për çdo $x \in H$.

Nga Lema 2.3.4, marrim

$$\begin{aligned} \langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle^{\frac{1}{q}} \langle x, x \rangle^{\frac{q-1}{q}} &= \left(\lambda^{r(1-q)} \langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle \right)^{\frac{1}{q}} (\lambda^r \langle x, x \rangle)^{\frac{q-1}{q}} \\ &\leq \frac{1}{q} \lambda^{r(1-q)} \langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle + \left(\frac{q-1}{q} \right) \lambda^r \langle x, x \rangle \end{aligned}$$

Atëherë,

$$(2.3.11) \quad \frac{1}{q} \lambda^{r(1-q)} \langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle - \langle |T^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} x, x \rangle + \left(\frac{q-1}{q} \right) \lambda^r \langle x, x \rangle \geq 0.$$

Anasjelltas, në relacionin (2.3.11) vëmë

$$\lambda = \left(\frac{\langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} \right)^{\frac{1}{qr}} > 0,$$

në rastin kur $\langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle \neq 0$ dhe lejojmë $\lambda \rightarrow 0^+$ në rastin kur

$$\langle |T|^r U^* |T|^{2p} U |T|^r x, x \rangle = 0.$$

Atëherë, do të marrim relacionin (2.3.10).

2). Në relacionin (2.3.7) vëmë $q = \frac{p+r}{r}$, prej nga marrim relacionin (2.3.8).

3). Në relacionin (2.3.8) vëmë $r = p$ dhe zëvendësojmë $\lambda = \lambda^p$. Nga këtu marrim relacionin (2.3.9). □

Rrjedhim 2.3.6. [18, Corollary 2.7] *Le të jetë $T = U|T|$ dekompozim polar i operatorit T dhe $p > 0$. Operatori T është p -*-paranormal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $T_p = U|T|^p$ është operator *-paranormal.*

Teoremë 2.3.7. [18, Proposition 2.8] *Operatori i cili është unitarisht ekuivalent me operatorin (p, r, q) -*-paranormal është gjithashtu operator (p, r, q) -*-paranormal për çdo $p > 0$, $r > 0$ dhe $q > 1$.*

Vërtetim. Le të jetë $T_1 = U|T_1|$ operator (p, r, q) -*-paranormal dhe $T_2 = W^*T_1W$ ku W është operator unitar. Duhet të tregojmë se T_2 është operator (p, r, q) -*-paranormal.

Nga $T_2 = W^*T_1W$, atëherë $|T_2|^\alpha = W^*|T_1|^\alpha W$ për çdo $\alpha > 0$. Nga Lema 1.3.7 dhe Lema 1.3.8, rrjedh

$$T_2 = W^*T_1W = W^*U|T_1|W = W^*UWW^*|T_1|W$$

dhe

$$\ker(W^*UW) = \ker(W^*|T_1|W).$$

Barazimet e fundit tregojnë se

$$T_2 = (W^*UW)(W^*|T_1|W),$$

është dekompozim polar për operatorin T_2 . Prandaj kemi

$$\begin{aligned} & |T_2|^r (W^*UW)^* |T_2|^{2p} (W^*UW) |T_2|^r - q\lambda^{r(1-q)} |T_2^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} + (q-1)\lambda^{rq} I = \\ & W^* |T_1|^r U^* |T_1|^{2p} U |T_1|^r W - q\lambda^{r(1-q)} W^* |T_1^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} W + (q-1)\lambda^{rq} I = \\ & W^* \left(|T_1|^r U^* |T_1|^{2p} U |T_1|^r - q\lambda^{r(1-q)} |T_1^*|^{\frac{2(p+r)}{q}} + (q-1)\lambda^{rq} I \right) W \geq 0 \end{aligned}$$

për çdo $\lambda > 0$. Pra, T_2 është operator (p, r, q) -*-paranormal. □

Le të jetë T operator nga $L(H)$. Përkufizojmë operatorin

$$E(t) = \chi_{(-\infty, t]}(A),$$

ku $\chi_{(-\infty, t]}$ është funksioni karakteristik. Tregohet se vlen

$$E(t)E(s) = E(l), \text{ ku } l = \min[t, s],$$

prej nga $E^2(t) = E(t)$. Po ashtu pasi që $E(t) \geq 0$, atëherë $E(t) = E^*(t)$. Këto fakte tregojnë se $E(t)$ është projektor.

Familja

$$\{E(t) : -\infty < t < +\infty\},$$

quhet rezolucioni i identitetit për operatorin T .

Teoremë 2.3.8. *(Teorema spektrale mbi operatorin e vetë-adjunguar) Le të jetë T operator i vetë-adjunguar. Atëherë,*

1). *Ekziston rezolucioni i identitetit $E(t)$ për operatorin T i tillë që*

$$T = \int_0^{+\infty} t dE(t).$$

2). *Në qoftë se $f(t)$ është funksion i vazhdueshëm në $[0, +\infty)$, atëherë*

$$f(T) = \int_0^{+\infty} f(t) dE(t).$$

Integrali në teoremën e mësipërme është integral i Stieltjesit.

Teoremë 2.3.9. *[18, Proposition 3.8] Nëse operatori $*$ -paranormal T komuton dyfish me operatorin hipernormal S , atëherë operatori TS është $*$ -paranormal.*

Vërtetim. Le të jetë $\{E(t)\}$ rezolucioni i identitetit për operatorin e vetë-adjunguar S^*S . Në bazë të supozimit T^*T dhe $T^{*2}T^2$ komutojnë me çdo element të $\{E(t)\}$. Pasi S është hipernormal, atëherë

$$S^{*2}S^2 \geq S^*(SS^*)S \geq (S^*S)^2,$$

dhe

$$\langle TT^*SS^*, x, x \rangle \leq \langle TT^*S^*S, x, x \rangle.$$

Pra

$$-TT^*SS^* \geq -TT^*S^*S.$$

Ndërsa, në anën tjetër duke u mbështetur në këto që treguam dhe duke u bazuar në Teoremën 2.3.8, për çdo $\lambda > 0$ marrim:

$$(TS)^{*2}(TS)^2 - 2\lambda(TS)(TS)^* + \lambda^2 = (T^{*2}T^2)(S^{*2}S^2) - 2\lambda(TT^*)(SS^*) + \lambda^2 \geq$$

$$(T^{*2}T^2)(S^*S)^2 - 2\lambda(TT^*)(S^*S) + \lambda^2 = \int_0^\infty (t^2T^{*2}T^2 - 2\lambda tTT^* + \lambda^2) dE(t) \geq 0,$$

Nga këtu, përfundojmë se TS është operator $*$ -paranormal. □

Rrjedhim 2.3.10. [18, Corollary 3.9] Nëse operatori $*$ -paranormal T komuton dyfish me operatorin normal S , atëherë operatori TS është $*$ -paranormal.

Rrjedhim 2.3.11. [18, Corollary 3.10] Nëse operatori p - $*$ -paranormal T komuton dyfish me operatorin p -hipernormal S , atëherë operatori TS është p - $*$ -paranormal, për çdo $p > 0$.

Vërtetim. Le të jenë $T = U|T|$ dhe $S = W|S|$ dekompozime polare përkatëse të operatorëve T dhe S . Atëherë, $T_p = U|T|^p$ është $*$ -paranormal dhe $S_p = W|S|^p$ është operator hipernormal. Nga Lema 1.3.7, kemi T_p komuton dyfish me S_p . Atëherë, nga Teorema 2.3.9 rrjedh

$$(TS)_p = T_p S_p,$$

është operator $*$ -paranormal, respektivisht TS është operator p - $*$ -paranormal. $\square$

Rrjedhim 2.3.12. [18, Corollary 3.11] Nëse operatori p - $*$ -paranormal T komuton dyfish me operatorin hipernormal S , atëherë operatori TS është p - $*$ -paranormal.

Rrjedhim 2.3.13. [18, Corollary 3.12] Nëse operatori p - $*$ -paranormal T komuton dyfish me operatorin normal S , atëherë operatori TS është p - $*$ -paranormal.

Tani do të tregojmë se nëse T është p - $*$ -paranormal dhe T^n është operator kompakt për ndonjë n , atëherë T do të jetë gjithashtu operator kompakt. Në fillim vërtetojmë një lemë ndihmëse.

Lemë 2.3.14. [18, Proposition 3.13] Nëse T është operator p - $*$ -paranormal i tillë që $|T|^p$ është kompakt për $p > 0$, atëherë $|T|$ është kompakt gjithashtu.

Vërtetim. Le të jetë $T = U|T|$ dekompozim polar i operatorit T . Për të vërtetuar lemën, mjafton të tregojmë se operatori $|T|^{p-1}$ është kompakt. Për këtë marrim vektorin njësi $\frac{|T|^{p-1}x}{|||T|^{p-1}x||}$ nga hapësira H . Atëherë, nga relacioni (2.3.2) marrim

$$\left\| |T|^p U |T|^p \frac{|T|^{p-1}x}{|||T|^{p-1}x||} \right\| \geq \left\| |T|^p U^* \frac{|T|^{p-1}x}{|||T|^{p-1}x||} \right\|^2,$$

respektivisht

$$(2.3.12) \quad |||T|^p U^* |T|^{p-1}x||^2 \leq |||T|^{p-1}x|| |||T|^p U |T|^{p-1}x|| |||T|^p x||.$$

Tani, le të jetë $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ një varg vektorësh njësi nga H , i cili konvergjon dobët tek 0. Atëherë, në saje të relacionit (2.3.12) kemi se operatori $|T|^p U^* |T|^{p-1}$ është kompakt. Rrjedhimisht, operatori $|T|^{p-1}$ gjithashtu është kompakt, që paraqet vërtetimin e lemës. $\square$

Teoremë 2.3.15. [18, Proposition 3.13] Le të jetë $T = U|T|$ operator p - $*$ -paranormal dhe $p > 0$. Nëse T^n është operator kompakt për $n > 0$, atëherë T është operator kompakt gjithashtu.

Vërtetim. Marrim vektorin njësi $\frac{T^{n-1}x}{\|T^{n-1}x\|}$ nga H . Nga relacioni (2.3.2) rrjedh

$$(2.3.13) \quad \| |T|^p U^* T^{n-1} x \|^2 \leq \| |T|^p U |T|^p T^{n-1} x \| \| |T|^{n-1} x \| \leq \| |T|^p U |T|^{p-1} \| \| |T|^n x \| \| |T|^{n-1} x \|.$$

Le të jetë $\{y_m\}_{m=1}^\infty$ varg vektorësh njësi i cili konvergjon dobët tek 0. Atëherë, nga (2.3.13) marrim

$$(2.3.14) \quad \| |T|^p U^* T^{n-1} y_m \| \rightarrow 0.$$

Atëherë, nga relacioni (2.3.14) dhe nga Lema 2.3.14 rrjedh T^{n-1} është operator kompakt, respektivisht, T është operator kompakt. □

Teoremë 2.3.16. [18, Proposition 3.1] Nëse T është operator p -*-paranormal, atëherë

$$\ker(T - \mu) \subseteq \ker(T^* - \bar{\mu}),$$

për çdo $\mu \in \mathbb{C}$

Vërtetim. Le të jetë $T = U|T|$ dekompozimi polar i operatorit T . Atëherë, $T_p = U|T|^p$ është operator *-paranormal. Nga Lema 1.7.1 rrjedh relacioni:

$$\ker(T_p - \mu) \subseteq \ker(T_p^* - \bar{\mu}),$$

respektivisht

$$\ker(T - \mu) \subseteq \ker(T^* - \bar{\mu}).$$

□

Rrjedhim 2.3.17. [18, Corollary 3.2] Nëse T është operator p -*-paranormal, atëherë $\sigma_{jp}(T) = \sigma_p(T)$.

Teoremë 2.3.18. [18, Corollary 3.4] Nëse T është operator p -*-paranormal, atëherë $\sigma_{ja}(T) = \sigma_a(T)$.

Vërtetim. Le të jetë $\varphi : L(H) \rightarrow L(Y)$ zgjerimi Berberian dhe le të jetë T operator p -*-paranormal. Në fillim tregojmë se $\varphi(T)$ është operator p -*-paranormal. Le të jetë $T = U|T|$ dekompozimi polar i operatorit T . Atëherë, U është izometri parciale me hapësirën initiale $\overline{|T|(H)}$ dhe $\ker(U) = \ker(|T|)$. Atëherë, $\varphi(T) = \varphi(U)|\varphi(T)|$ është dekompozim polar i operatorit $\varphi(T)$ ku $\varphi(U)$ është izometri parciale me hapësirën initiale $\overline{|\varphi(T)|(H)}$ dhe $\ker(\varphi(U)) = \ker(|\varphi(T)|)$.

Pasi T është operator p -*-paranormal, nga Teorema 2.3.5 dhe Lema 1.4.1 marrim

$$\begin{aligned} |\varphi(T)|^p (\varphi(U))^* |\varphi(T)|^{2p} \varphi(U) |\varphi(T)|^p - 2\lambda |(\varphi(T))^*|^{2p} + \varphi(\lambda^2 I) = \\ \varphi \left(|T|^p U^* |T|^{2p} U |T|^p - 2\lambda |T^*|^{2p} + \lambda^2 I \right) \geq 0. \end{aligned}$$

Prandaj, $\varphi(T)$ është operator p -*-paranormal.

Tani, nga Rrjedhimi 2.3.17 dhe nga Zgjerimi Berberian, rrjedh

$$\begin{aligned} \sigma_a(T) &= \sigma_a(\varphi(T)) = \sigma_p(\varphi(T)) \\ &= \sigma_{jp}(\varphi(T)) = \sigma_{ja}(T). \end{aligned}$$

□

Teoremë 2.3.19. [18, Theorem 3.6] Nëse T është operator p -*-paranormal dhe nëse $\mu \in \sigma_a(T)$, atëherë

$$|\mu| \in \sigma_a(|T|) \cap \sigma_a(|T^*|).$$

Vërtetim. Vërtetimi është analog me vërtetimin e Teoremës 2.2.17. □

Teoremë 2.3.20. [18, Proposition 3.7] Nëse T dhe T^* janë operatorë p -*-paranormal, të tillë që $\ker(T) = \ker(T^*)$, atëherë T është operator normal.

Vërtetim. Le të jenë $T = U|T|$ dhe $T^* = U^*|T^*|$ dekompozime polare përkatëse. Pasi që T dhe T^* janë operatorë p -*-paranormal, atëherë

$$T_p = U|T|^p \text{ dhe } T_p^* = U^*|T^*|^p,$$

janë operatorë *-paranormal, të tillë që $\ker(T_p) = \ker(T_p^*)$. Atëherë, T_p është operator normal, rrjedhimisht T është operator normal. □

Kapitulli 3

Teorema e Weyl-it dhe vazhdueshmëria e spektrit

3.1 Teorema e Weyl-it për operatorët k -kuazi- $*$ -paranormal

Teoremë 3.1.1. [57, Theorem 5.2] Nëse $T \in L(H)$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Supozojmë se T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal dhe le të jetë $\mu \in \Pi_{00}(T)$. Atëherë, μ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$. Për vërtetimin e teoremës përdorim Idempotentin e Riesz-it $P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\mu} (T - \mu)^{-1} d\mu$, ku D_μ është rruzulli i mbyllur me qendër në pikën μ dhe nuk përmban pika tjera të spektrit $\sigma(T)$. Operatorin T mund ta paraqesim me anë të shumës

$$T = T_1 \oplus T_2, \text{ ku } \sigma(T_1) = \{\mu\} \text{ dhe } \sigma(T_2) = \sigma(T) \setminus \{\mu\}.$$

Pasi T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, nga Teorema 2.1.23, rrjedh se T është polaroid. Pra μ është pol i resolventes së operatorit T . Nga Teorema 1.4.4 rrjedh se ekziston numri i plotë pozitiv $p = p(\mu)$ i tillë që

$$T_1 - \mu = (T - \mu)|_{P(H) = \ker((T - \mu)^p)} \text{ dhe } T_2 - \mu = (T - \mu)|_{\ker(P) = (T - \mu)^p(H)}.$$

Pra, $(T - \mu)^p(H)$ është nënhapësirë e mbyllur. Nga Teorema 2.1.21, kemi se $T - \mu$ ka ascent të fundmë për çdo $\mu \in \mathbb{C}$, prandaj $(T - \mu)^n(H) = (T - \mu)^p(H)$ është nënhapësirë e mbyllur për çdo $n \geq p$. Tani, nga Teorema 1.5.8 rrjedh se T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it.

Nga Lema 1.6.10 rrjedh se, $f(\sigma_{BW}(T)) = \sigma_{BW}(f(T))$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$, pasi T ka SVEP. Ndërsa, pasi T është isoloid nga Lema 1.6.11, kemi

$$f(\sigma(T) \setminus \Pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \Pi_{00}(f(T)).$$

Kënde, pasi T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, marrim

$$\sigma(f(T)) \setminus \Pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \Pi_{00}(T)) = f(\sigma_{BW}(T)) = \sigma_{BW}(f(T)).$$

Barazimi i fundit tregon se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Rrjedhim 3.1.2. [57, Corollary 5.3] Nëse T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Nga Teorema 3.1.1 rrjedh se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Tani, nga Lema 1.5.13 rrjedh se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Teoremë 3.1.3. [57, Theorem 5.4] Nëse $T^* \in L(H)$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Le të jetë $\mu \in \Pi_{00}(T)$. Pra μ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$. Nga Teorema 2.1.23 rrjedh se T^* është polaroid, prandaj në bazë të Teoremës 1.4.6, edhe T është polaroid. Atëherë, μ është pol i resolventes së operatorit T . Kënde, bazuar në Teoremën 1.4.4, rrjedh se ekziston numri i plotë pozitiv $p = p(\mu)$, i tillë që $p = p(T - \mu) = q(T - \mu)$. Atëherë, $(T - \mu)^p(H) = (T - \mu)^{(p+1)}(H)$ dhe hapësira $(T - \mu)^n(H)$ është e mbyllur, për çdo $n \geq p$. Nga Teorema 1.5.8, rrjedh se T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it.

Nga Lema 1.6.10, pasi T^* ka SVEP rrjedh se $f(\sigma_{BW}(T)) = \sigma_{BW}(f(T))$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Ndërsa, nga Teorema 2.1.23 rrjedh se T është polaroid, prandaj T është isoloid. Nga Lema 1.6.11, kemi

$$f(\sigma(T) \setminus \Pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \Pi_{00}(f(T)).$$

Pasi T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, rrjedh

$$\sigma(f(T)) \setminus \Pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \Pi_{00}(T)) = f(\sigma_{BW}(T)) = \sigma_{BW}(f(T)).$$

Barazimi i fundit implikon se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Rrjedhim 3.1.4. [57, Corollary 5.5] Nëse $T \in L(H)$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, $f(T)$ ka SVEP. Nga Lema 1.5.10, rrjedh se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Rrjedhim 3.1.5. Nëse $T \in L(H)$ është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e Browder-it për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Vërtetimi i teoremës rrjedh nga Lema 1.5.15 dhe nga Rrjedhimi i mësipërm. $\square$

Teoremë 3.1.6. [57, Theorem 5.6] Supozojmë se T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, Teorema e Përgjithshme e a -Browder-it vlen për $f(T)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Pasi T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, T^* ka ascent të fundmë, dhe si i tillë T^* ka SVEP. Prandaj, nga Lema 1.5.11 rrjedh se $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Teoremë 3.1.7. [57, Theorem 5.7] Supozojmë se T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë, Teorema e Përgjithshme e a -Weyl-it vlen për operatorin T .

Vërtetim. Pasi operatorët algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal kanë ascent të fundmë, atëherë T^* ka SVEP. Nga Teorema 3.1.6 rrjedh se T plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it. Bazuar në Teoremën 1.5.9, që të vërtetojmë teoremën, mjafton të tregojmë se vlen barazimi $\Pi_{00}^a(T) = P_{00}^a(T)$. Pasi përfshirja $P_{00}^a(T) \subseteq \Pi_{00}^a(T)$ vlen për çdo operator, atëherë na mbetet të tregojmë se vlen përfshirja

$$\Pi_{00}^a(T) \subseteq P_{00}^a(T).$$

Le të jetë μ pikë e çfarëdoshme e bashkësisë $\Pi_{00}^a(T)$. Atëherë, μ është pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(T)$. Nga Lema 2.1.24, kemi se μ është pol i resolventes së operatorit T . Prandaj, nga Teorema 1.4.4 rrjedh se ekziston numri pozitiv $p = p(\mu)$, i tillë që $p(T - \mu) = q(T - \mu) = p < \infty$. Atëherë, $(T - \mu)^{p+1}(H) = (T - \mu)^p(H)$ dhe $(T - \mu)^p(H)$ është nënhapësirë e mbyllur, pasi që koincidon me bërthamën e projekcionit ortogonal lidhur me pikën $\{\mu\}$. Rrjedhimisht, $\mu \in P_{00}^a(T)$ $\square$

Teoremë 3.1.8. [57, Theorem 5.8] Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë Teorema e Përgjithshme e a -Weyl-it plotësohet për $f(T)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Pasi T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T^* ka SVEP. Prandaj, operatori $f(T)$ e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Browder-it. Nga Teorema 1.5.9, që të vërtetojmë teoremën tonë, mjafton të tregojmë përfshirjen $\Pi_{00}^a(f(T)) \subseteq P_{00}^a(f(T))$.

Le të jetë $\mu \in \Pi_{00}^a(f(T))$. Atëherë, μ është pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(f(T))$ dhe $0 < \alpha(f(T) - \mu)$. Atëherë, $\mu \in \sigma_a(f(T))$ dhe plotësohet ekuacioni:

$$(3.1.1) \quad f(T) - \mu = c(T - \mu_1)(T - \mu_2) \cdot \dots \cdot (T - \mu_n)g(T)$$

ku $c, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$, dhe $g(T)$ është invertibil.

Pasi μ është pikë e izoluar nga $f(\sigma_a(T))$, nëse $\mu_i \in \sigma_a(T)$, atëherë μ_i është pikë e izoluar në $\sigma_a(T)$, fakt që rrjedh nga relacioni (3.1.1). Pasi T është a -isoloid, atëherë $0 < \alpha(T - \mu_i)$, për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Prandaj $\mu_i \in \Pi_{00}^a(T)$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Nga Teorema 3.1.7, rrjedh se T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it, prandaj $T - \mu_i$ është operator gjysmë i sipërm i B -Fredholm-it dhe $\text{ind}(T - \mu_i) \leq 0$,

për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Rrjedhimisht $f(T) - \mu$ është operator gjysmë i sipërm i B -Fredholm-it. Pasi $\mu \in \text{iso}\sigma_a(f(T))$, atëherë $f(T)$ ka SVEP në pikën μ . Këndeje nga Teorema [1, Theorem 2.89] rrjedh $p(f(T) - \mu) < \infty$. Gjithashtu, pasi T^* ka SVEP edhe $f(T)^*$ ka SVEP në μ . Bazuar në [1, Theorem 2.90] marrim relacionin, $p(f(T) - \mu) = q(f(T) - \mu) = p < \infty$. Prandaj, $(f(T) - \mu)^{p+1}(H) = (f(T) - \mu)^p(H)$ dhe $(f(T) - \mu)^p(H)$ është nënhapësirë e mbyllur. Rrjedhimisht, $\mu \in P_{00}^a(f(T))$. $\square$

Rrjedhim 3.1.9. [57, Corollary 5.9] Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e a -Weyl-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Mbështetur në teoremën e mësipërme dhe nga Lema 1.5.14 rrjedh vërtetimi i rrjedhimit. $\square$

Rrjedhim 3.1.10. Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $f(T)$ e plotëson Teoremën e a -Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Nga teorema e mësipërme dhe nga Lema 1.5.12 rrjedh vërtetimi i rrjedhimit. $\square$

Nëse T është operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë T nuk e plotëson Teoremën e a -Weyl-it [1, Example 4.53], rrjedhimisht T nuk e plotëson Teoremën e Përgjithshme të a -Weyl-it, bazuar në Lemën 1.5.14.

Operatori $T \in L(H)$ quhet polaroid i trashëgueshëm, në qoftë se ngushtimi i tij në çdo nënhapësirë të mbyllur është polaroid. Kjo klasë e operatorëve, është përmendur për herë të parë në [33].

Rrjedhim 3.1.11. [57, Corollary 5.10] Operatorët algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal janë operatorë polaroid të trashëgueshëm.

Vërtetim. Le të jetë $T \in L(H)$ operator algjebrikisht k -kuazi- $*$ -paranormal dhe M nënhapësirë e mbyllur T -invariante në H . Në bazë të supozimit, ekziston polinomi jokonstant h ashtu që $h(T)$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Nga Teorema 2.1.7, rrjedh se ngushtimi i operatorëve k -kuazi- $*$ -paranormal në nënhapësirat e mbyllura është gjithashtu k -kuazi- $*$ -paranormal, pra $h(T)|_M$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Pasi $h(T|_M) = h(T)|_M$, atëherë $T|_M$ është k -kuazi- $*$ -paranormal. Prandaj, nga Teorema 2.1.23 rrjedh se $T|_M$ është polaroid, . $\square$

Teoremë 3.1.12. [57, Theorem 5.11] Le të jetë $T \in L(H)$ operator k -kuazi- $*$ -paranormal dhe operator i Riesz-it. Nëse $\|T^n\| = \|T\|^n$, për ndonjë $n \geq k$, atëherë T është operator kompakt.

Vërtetim. Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Atëherë,

$$\begin{aligned} \pi(T)^{*k} \left(\pi(T)^{*2} \pi(T)^2 - 2\lambda \pi(T) \pi(T)^* + \lambda^2 \right) \pi(T)^k = \\ \pi \left(T^{*k} \left(T^{*2} T^2 - 2\lambda T T^* + \lambda^2 \right) T^k \right) \geq O, \end{aligned}$$

që tregon se $\pi(T)$ është operator k -kuazi- $*$ -paranormal. Në bazë të Teoremës 2.1.3, $\pi(T)$ është normaloid. Pasi T është operator i Riesz-it, në bazë të Teoremës së

Dekompozimit të West-it [96], mund të shkruajmë: $T = S + Q$ ku S është operator kompakt dhe Q është operator pothuajse-nilpotent. Nga përkufizimi i homomorfizmit π , marrim $\pi(T) = \pi(Q)$. Prandaj,

$$\sigma(\pi(T)) = \sigma(\pi(Q)) = \sigma_e(Q) = \{0\},$$

Relacioni i fundit tregon se $\pi(T)$ është operator pothuajse-nilpotent. Rrjedhimisht, $\|\pi(T)\| = r(\pi(T)) = 0$, pra $\pi(T) = O$. Atëherë, T është kompakt. $\square$

Rrjedhim 3.1.13. [57, Corollary 5.12] Nëse T është operator k -kuazi- $*$ -paranormal ashtu që $\sigma_{BW}(T) = \{0\}$, atëherë T është operator normal.

Vërtetim. Nga Teorema 3.1.1, kemi se T e plotëson Teoremën e Përgjithshme të Weyl-it. Nga supozimi, kemi $\sigma(T) \setminus \{0\} = \Pi_{00}(T)$. Pra çdo pikë jo zero e spektrit $\sigma(T)$ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$ dhe vlerë vetjake e operatorit T . Prandaj $\sigma(T) \setminus \{0\}$ është bashkësi e fundme ose bashkësi e pafundme e numërueshme, me pikë të grumbullimit pikën zero.

Le të jetë $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\mu_n\}$, ku $|\mu_1| \geq |\mu_2| \geq \dots > 0$. Pasi μ_n është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$, nga Teorema 2.1.25 rrjedh se $\ker(T - \mu_n)$ është nënhapësirë e reduktuar e T , për $n \in \mathbb{N}$. Le të jetë P_n projektor ortogonal mbi $\ker(T - \mu_n)$. Atëherë, $TP_n = P_nT = \mu_n P_n$ dhe $P_n P_m = 0$ nëse $n \neq m$.

Vëmë $P = \oplus_n P_n$, dhe marrim

$$T = T|_{\ker(I-P)} \oplus T|_{(I-P)(H)} = \oplus_n \mu_n P_n \oplus T|_{(I-P)(H)},$$

ku $\sigma(T|_{(I-P)(H)}) = \sigma(T) \setminus \{\mu_n\} = \{0\}$.

Pasi ngushtimi $T|_{(I-P)(H)}$, është gjithashtu operator k -kuazi- $*$ -paranormal, atëherë $T|_{(I-P)(H)} = O$. Rrjedhimisht $T = \oplus_n \mu_n P_n$. Prandaj, T është operator normal. $\square$

3.2 Teorema e Weyl-it për operatorët k -kuazi klasë

$\mathcal{A}_n^*$

Përkufizim 3.2.1. Operatori $T \in L(H)$ quhet algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ në qoftë se ekziston polinomi jokontant kompleks $h(z)$, ashtu që $h(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Vlen implikimi i mëposhtëm:

$$k\text{-kuazi klasë } \mathcal{A}_n^* \Rightarrow \text{algjebrikisht } k\text{-kuazi klasë } \mathcal{A}_n^*$$

Lemë 3.2.1. [55, Lemma 2.7] Le të jetë $T \in L(H)$ operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe $\sigma(T) = \{\mu_0\}$. Atëherë, $T - \mu_0$ është nilpotent.

Vërtetim. Supozojmë se $h(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për ndonjë polinom jo konstant kompleks $h(z)$. Pasi,

$$\sigma(h(T)) = h(\sigma(T)) = \{h(\mu_0)\},$$

atëherë nga Rrjedhimi 2.2.29 rrjedh se operatori $h(T) - h(\mu_0)$ është nilpotent.

Le të jetë

$$h(z) - h(\mu_0) = a(z - \mu_0)^k (z - \mu_1)^{k_1} \cdot \dots \cdot (z - \mu_n)^{k_n},$$

ku $\mu_i \neq \mu_j$ për $i \neq j$. Atëherë,

$$O = (h(T) - h(\mu_0))^m = a^m (T - \mu_0)^{mk} (T - \mu_1)^{mk_1} \cdot \dots \cdot (T - \mu_n)^{mk_n}.$$

Pasi $T - \mu_i$ për $i = 1, 2, \dots, n$ është operator invertibil, rrjedh se

$$(T - \mu_0)^{mk} = O.$$

Barazimi i fundit tregon se $T - \mu_0$ është operator nilpotent. □

Lemë 3.2.2. Nëse T është algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë edhe $T - \mu$ është algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.

Vërtetim. Supozojmë se T është algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, ekziston polinomi jokonstant h , ashtu që $h(T)$ është algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Le të jetë $\mu \in \mathbb{C}$, dhe marrim polinomin $s(\nu) = h(\nu + \mu)$. Kemi,

$$s(T - \mu) = h((T - \mu) + \mu) = h(T),$$

që tregon se $T - \mu$ është algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$. □

Lemë 3.2.3. [55, Lemma 2.8] Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, T është polaroid .

Vërtetim. Supozojmë se T është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, $h(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ për polinomin kompleks jo konstant h . Le të jetë $\mu \in \text{iso}\sigma(T)$. Për vërtetimin e teoremës përdorim projektoren e Ries-zit $P_\mu = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_\mu} (T - \mu)^{-1} d\mu$. Prandaj operatorin T mund ta paraqesim si shumë direkte:

$$T = T_1 \oplus T_2, \text{ ku } \sigma(T_1) = \{\mu\} \text{ dhe } \sigma(T_2) = \sigma(T) \setminus \{\mu\}.$$

Pasi që $h(T_1)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T_1 është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nga Lema 3.2.2 rrjedh se $T_1 - \mu$ është gjithashtu algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Ndërsa, pasi që $\sigma(T_1 - \mu) = \{0\}$, atëherë nga Lema 3.2.1 rrjedh se $T_1 - \mu$ është operator nilpotent. Prandaj, si i tillë $T_1 - \mu$ ka ascent dhe descent të fundmë. Në anën tjetër, pasi $T_2 - \mu$ është operator invertibil, gjithashtu ka ascent dhe descent të fundmë. Nga këtu rrjedh se edhe shuma e tyre, operatori $T - \mu$ ka ascent dhe descent të fundmë. Prandaj, μ është pol i resolventes së operatorit T . Rrjedhimisht, T është polaroid. Pra, T është isoloid. □

Teoremë 3.2.4. [53, Theorem 3.10] Nëse T ose T^* është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$, vlen

$$\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T)).$$

Vërtetim. Le të jetë T operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, nga Rrjedhimi 2.2.20 rrjedh se T ka SVEP. Tani, nga Lema 1.5.3 rrjedh se vlen $\sigma_w(T) = \sigma_b(T)$. Nga këtu kemi

$$\sigma_w(f(T)) = \sigma_b(f(T)) = f(\sigma_b(T)) = f(\sigma_w(T)).$$

Në mënyrë të ngjashme tregohet barazimi, nëse T^* është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. □

Lemë 3.2.5. [55, Lemma 2.11] Nëse T ose T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë

$$(3.2.1) \quad \sigma_{uw}(f(T)) = f(\sigma_{uw}(T))$$

vlen për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Nga Lema 1.6.9 dimë se përfshirja $f(\sigma_{uw}(T)) \subseteq \sigma_{uw}(f(T))$ vlen për çdo operator të kufizuar. Prandaj, për të treguar barazimin (3.2.1), mjafton të tregojmë përfshirjen

$$f(\sigma_{uw}(T)) \subseteq \sigma_{uw}(f(T)).$$

Le të jetë T operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe le të jetë $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$ i tillë që

$$f(z) - \mu = c(z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdot \dots \cdot (z - \mu_n)g(z).$$

Supozojmë se $\mu \notin \sigma_{uw}(f(T))$. Atëherë, $f(T) - \mu$ është operator gjysmë i sipërm i Weyl-it dhe vlen relacioni

$$(3.2.2) \quad f(T) - \mu = c(T - \mu_1)(T - \mu_2) \cdot \dots \cdot (T - \mu_n)g(T)$$

ku $c, \mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n \in \mathbb{C}$ dhe $g(T)$ është operator invertibil.

Pasi T është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T ka SVEP. Prandaj, nga Lema 1.5.4 rrjedh se

$$\text{ind}(T - \mu_i) \leq 0, \text{ për çdo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Pra, $T - \mu_i$ janë operatorë gjysmë të sipërm të Weyl-it, për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Nga këtu rrjedh se $\mu_i \notin \sigma_{uw}(T)$. Prandaj $\mu = f(\mu_i) \notin f(\sigma_{uw}(T))$, rrjedhimisht

$$f(\sigma_{uw}(T)) \subseteq \sigma_{uw}(f(T)).$$

Tani supozojmë se T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, T^* ka SVEP. Prandaj, nga Lema 1.5.4 rrjedh se

$$\text{ind}(T - \mu_i) \geq 0, \text{ për çdo } i = 1, 2, \dots, n.$$

Pasi që

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \text{ind}(T - \mu_i) = \text{ind}(f(T) - \mu) \leq 0,$$

prej nga rrjedh se $\text{ind}(T - \mu_i) = 0$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Atëherë, $T - \mu_i$ janë operatorë të Weyl-it për çdo $i = 1, 2, \dots, n$, këndej $\mu_i \notin \sigma_{uw}(T)$. Prandaj $\mu = f(\mu_i) \notin f(\sigma_{uw}(T))$, rrjedhimisht

$$f(\sigma_{uw}(T)) \subseteq \sigma_{uw}(f(T)).$$

□

Teoremë 3.2.6. [53, Theorem 3.12] Nëse T ose T^* është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë Teorema e a -Browder-it plotësohet nga $f(T)$ dhe $f(T)^*$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Pasi T ose T^* ka SVEP, atëherë nga Teorema 1.4.12 rrjedh se $f(T)$ dhe $f(T)^*$ kanë SVEP. Atëherë, nga Lema 1.5.3 rrjedh se $f(T)$ dhe $f(T)^*$ e plotësojnë Teoremën e a -Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Dimë se, nëse T e plotëson Teoremën e a -Browder-it, atëherë T e plotëson Teoremën e Browder-it, prandaj kemi rrjedhimin.

Rrjedhim 3.2.7. [53, Corollary 3.13] Nëse T ose T^* është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë $f(T)$ dhe $f(T)^*$ e plotësojnë Teoremën e Browder-it, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Teoremë 3.2.8. [53, Theorem 3.14] Le të jetë T operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nëse operatori S është pothuajse i ngjashëm me T , atëherë S ka SVEP.

Vërtetim. Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nga Rrjedhimi 2.2.20 rrjedh se T ka SVEP. Le të jetë U një bashkësi e hapur dhe $f : U \rightarrow H$ një funksion analitik i tillë që $(S - \mu)f(\mu) = 0$, për çdo $\mu \in U$. Pasi $S \sim T$, atëherë ekziston operatori injektiv X me rang të dendur i tillë që $XS = TX$. Prandaj, $X(S - \mu) = (T - \mu)X$ për çdo $\mu \in U$. Pasi, $(S - \mu)f(\mu) = 0$ për çdo $\mu \in U$, atëherë

$$X(S - \mu)f(\mu) = 0 = (T - \mu)Xf(\mu),$$

për çdo $\mu \in U$. Mirëpo T ka SVEP, rrjedhimisht $Xf(\mu) = 0$, për çdo $\mu \in U$. Pasi operatori X është injektiv, atëherë $f(\mu) = 0$ për çdo $\mu \in U$. Pra, S ka SVEP, çka u deshtë të tregohet. $\square$

Teoremë 3.2.9. [53, Theorem 3.15] Nëse T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe nëse $S \sim T$, atëherë Teorema e a -Browder-it vlen për $f(S)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Pasi $S \sim T$, atëherë nga Teorema 3.2.8 rrjedh se S e plotëson Teoremën e a -Browder-it. Po ashtu vlen $\sigma_{ub}(f(S)) = f(\sigma_{ub}(S))$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Nga këtu marrim

$$\sigma_{ub}(f(S)) = f(\sigma_{ub}(S)) = f(\sigma_{uw}(S)) = \sigma_{uw}(f(S)).$$

Nga barazimi i fundit rrjedh se Teorema e a -Browder-it plotësohet nga $f(S)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Teoremë 3.2.10. [55, Theorem 2.9] Nëse T ose T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë Teorema e Weyl-it plotësohet nga $f(T)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Supozojmë se T është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, $h(T)$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ për ndonjë polinom jo konstant kompleks h . Nga Rrjedhimi 2.2.20 rrjedh se $h(T)$ ka SVEP, prandaj T ka SVEP, në saje

të Teoremës 1.4.12. Tani, pasi T është polaroid, nga Teorema 1.5.7 rrjedh se T e plotëson Teoremën e Weyl-it.

Pasi T është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nga Lema 3.2.3 rrjedh se T është polaroid, rrjedhimisht T është isoloid. Atëherë, nga Lema 1.6.3 marrim

$$f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = \sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)),$$

ndërsa, nga Teorema 3.2.4 marrim

$$\sigma(f(T)) \setminus \pi_{00}(f(T)) = f(\sigma(T) \setminus \pi_{00}(T)) = f(\sigma_w(T)) = \sigma_w(f(T)),$$

gjë që implikon plotësimin e Teoremës së Weyl-it nga $f(T)$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Tani, supozojmë se T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Si i tillë T^* është polaroid. Nga Teorema 1.4.6 rrjedh se T është polaroid, e rrjedhimisht edhe isoloid. Pasi T^* ka SVEP, nga Lema 1.5.3 rrjedh se T e plotëson Teoremën e Browder-it, dhe pasi që T është polaroid, atëherë T e plotëson Teoremën e Weyl-it. Pasi T është isoloid, nga vërtetimi në pjesën e parë rrjedh plotësimi i Teoremës së Weyl-it për $f(T)$, për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. $\square$

Teoremë 3.2.11. [55, Theorem 2.10] Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it.

Vërtetim. Le të jetë T^* operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, T^* ka SVEP dhe nga Lema 1.5.3, rrjedh se T e plotëson Teoremën e a -Browder-it. Për të vërtetuar teoremën tonë, shfrytëzojmë Teoremën 1.5.5. Kështu, ne na mbetet të tregojmë se vlen barazimi $\pi_{00}^a(T) = p_{00}^a(T)$. Pasi që $p_{00}^a(T) \subseteq \pi_{00}^a(T)$ vlen për çdo operator të kufizuar T , na mbetet të tregojmë përfshirjen $\pi_{00}^a(T) \subseteq p_{00}^a(T)$. Le të jetë μ një pikë e çfarëdoshme nga $\pi_{00}^a(T)$. Atëherë, $\mu \in \text{iso}\sigma_a(T)$ dhe $0 < \alpha(T - \mu) < \infty$. Prandaj, $\mu \in \sigma_a(T)$. Ndërsa, pasi T^* ka SVEP, atëherë $\sigma(T) = \sigma_a(T)$, në saje të Lemës 1.4.10. Nga këtu përfundojmë se μ është pikë e izoluar e spektrit $\sigma(T)$, rrjedhimisht $\mu \in \pi_{00}(T)$. Pasi që Teorema e Weyl-it vlen për T , $\mu \notin \sigma_w(T)$. Tani, pasi $T - \mu$ është operator i Fredholm-it dhe T ka SVEP në μ , atëherë nga [1, Theorem 2.45.] rrjedh $p(T - \mu) < \infty$, që tregon se $T - \mu$ është gjysmë i sipërm i Browder-it. Përfundimisht kemi që $\mu \in p_{00}^a(T)$. $\square$

Lemë 3.2.12. [55, Lemma 2.12] Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë T është a -isoloid.

Vërtetim. Le të jetë μ pikë e izoluar nga spektri aproksimativ $\sigma_a(T)$. Pasi T^* ka SVEP, nga Lema 1.4.10 rrjedh se μ është pikë e izoluar nga spektri $\sigma(T)$. Po ashtu, T^* është polaroid, rrjedhimisht T është polaroid. Prandaj, T është isoloid, që tregon se $\mu \in \sigma_p(T)$. Pra, T është a -isoloid. $\square$

Teoremë 3.2.13. [55, Theorem 2.13] Nëse T^* është operator algjebrikisht k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë Teorema e a -Weyl-it plotësohet nga $f(T)$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Le të jetë $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$. Nga Teorema 3.2.11 rrjedh se T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it dhe vlen $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$. Nga këtu rrjedh barazimi

$$\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) = \sigma_{uw}(f(T)),$$

që tregon se $f(T)$ e plotëson Teoremën e a -Browder-it për çdo $f \in Hol(\sigma(T))$.

Tani, që të vërtetojmë këtë teoremë mjafton të tregojmë se vlen

$$\pi_{00}^a(f(T)) \subseteq p_{00}^a(f(T)).$$

Supozojmë se $\mu \in \pi_{00}^a(f(T))$. Atëherë, μ është pikë e izoluar e spektrit aproksimativ $\sigma_a(f(T))$ dhe $0 < \alpha(f(T) - \mu) < \infty$. Prandaj, $\mu \in \sigma_a(f(T))$ dhe plotësohet ekuacioni (3.2.2). Pasi μ është pikë e izoluar nga $f(\sigma_a(T))$, nëse $\mu_i \in \sigma_a(T)$, atëherë nga (3.2.2) rrjedh se μ_i është pikë e izoluar nga spektri aproksimativ $\sigma_a(T)$. Pasi T është a -isoloid, $0 < \alpha(T - \mu_i) < \infty$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Prandaj $\mu_i \in \pi_{00}^a(T)$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Operatori T e plotëson Teoremën e a -Weyl-it, prandaj $T - \mu_i$ është operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it dhe $\text{ind}(T - \mu_i) \leq 0$ për çdo $i = 1, 2, \dots, n$. Atëherë, $f(T) - \mu$ është operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it. Pasi $\mu \in \text{iso}\sigma_a(f(T))$, atëherë $f(T)$ ka SVEP në pikën μ . Tani nga [1, Theorem 2.45] rrjedh $p(f(T) - \mu) < \infty$. Prandaj, $f(T) - \mu$ është operator gjysmë i sipërm i Browder-it, prej nga rrjedh $\mu \in p_{00}^a(f(T))$. $\square$

3.3 Vazhdueshmëria e spektrit në bashkësinë e operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$

Le të jetë $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ varg i nënbashkësive kompakte nga $\mathbb{C}$. Përkufizojmë limitin inferior dhe limitin superior të këtij vargu të bashkësive. Simbolikisht i shënojmë me $\liminf_{m \rightarrow \infty} \{E_m\}$ dhe $\limsup_{m \rightarrow \infty} \{E_m\}$.

- 1). $\liminf_{m \rightarrow \infty} \{E_m\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{në qoftë se për çdo } \epsilon > 0, \text{ekziston } N \in \mathbb{N} \text{ i tillë që } B(\lambda, \epsilon) \cap E_m \neq \emptyset \text{ për çdo } m > N\},$
- 2). $\limsup_{m \rightarrow \infty} \{E_m\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{në qoftë se për çdo } \epsilon > 0, \text{ekziston nënbashkësia e pafundme } J \subseteq \mathbb{N} \text{ e tillë që } B(\lambda, \epsilon) \cap E_m \neq \emptyset \text{ për çdo } m \in J\}.$

Nëse

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \{E_m\} = \limsup_{m \rightarrow \infty} \{E_m\},$$

atëherë themi se ekziston $\lim_{m \rightarrow \infty} \{E_m\}$, që është limiti i zakonshëm i vargut të bashkësive.

Marrim pasqyrimin h të përkufizuar në $L(H)$, i cili pasqyron operatorin T në ndonjërin nga bashkësitë kompakte(spektrale) në $\mathbb{C}$.

Përkufizim 3.3.1. Le të jetë dhënë vargu i operatorëve $\{T_m\}_{m=1}^\infty \subset L(H)$ dhe $T \in L(H)$.

1. Them i se pasqyrimi h është gjysmë i sipërm i vazhdueshëm në T , nëse nga $T_m \rightarrow T$ rrjedh

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} h(T_m) \subset p(T),$$

2. Them i se pasqyrimi h është gjysmë i poshtëm i vazhdueshëm në T , nëse nga $T_m \rightarrow T$ rrjedh

$$h(T) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} h(T_m),$$

3. Nëse pasqyrimi h është gjysmë i sipërm dhe gjysmë i poshtëm i vazhdueshëm, atëherë themi se pasqyrimi h është i vazhdueshëm në T , dhe në këtë rast vlen

$$\lim_{m \rightarrow \infty} h(T_m) = h(T).$$

Spektri i operatorit T , $\sigma : T \rightarrow \sigma(T)$ është gjysmë i sipërm i vazhdueshëm [48, Problem 102], mirëpo nuk është i vazhdueshëm në rastin e përgjithshëm. E tregojmë këtë me shembullin e mëposhtëm.

Shembull 3.3.1. *Le të jetë U operatori i zhvendosjes në $l^2(\mathbb{N})$. Marrim operatorin T dhe vargun e operatorëve $\{T_m\}_{m=1}^\infty$, të përkufizuar në $l^2(\mathbb{N}) \oplus l^2(\mathbb{N})$ me anë të*

$$T = \begin{pmatrix} U & O \\ O & U^* \end{pmatrix} \quad \text{dhe} \quad T_m = \begin{pmatrix} U & \frac{1}{m}(I - UU^*) \\ O & U^* \end{pmatrix}.$$

Nga përkufizimi i vargut të operatorëve shihet se $T_m \rightarrow T$, kur $m \rightarrow \infty$. Pasi çdo operator T_m është i ngjashëm me operatorin T_1 , i cili është operator unitar, atëherë për çdo $m \in \mathbb{N}$ kemi

$$\sigma(T_m) = \sigma(T_1) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\} \quad \text{dhe} \quad \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1\}.$$

Nga këtu shohim që $\sigma(T_m) \not\rightarrow \sigma(T)$, kur $m \rightarrow \infty$.

Vazhdueshmëria e spektrit σ është vërtetuar për disa klasë të operatorëve; duke filluar për operatorët normal dhe operatorët hipernormal që është vërtetuar nga Halmos në [48]. Pastaj ky rezultat është zgjeruar për operatorët p -hipernormal nga Hwang dhe Lee në [58], për operatorët (p, k) -kuazhipernormal dhe operatorët paranormal nga Duggal, Jeon dhe Kim në [28], për operatorët kuazi-klasë $\mathcal{A}(k)$ nga Gao dhe Fang në [45], për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ nga Gao dhe Li në [44]. Ne këtu do të vërtetojmë vazhdueshmërinë e spektrit $\sigma(T)$ për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Lemë 3.3.2. [75] *Le të jetë dhënë vargu i operatorëve $\{T_m\}_{m=1}^\infty \subset L(H)$ dhe $T \in L(H)$. Nëse vargu $\{T_m\}_{m=1}^\infty$ konvergjon sipas normës tek operatori T , atëherë*

$$\text{iso}\sigma(T) \subseteq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(T_m).$$

Lemë 3.3.3. [86, Proposition 4.9] *Nëse $\{T_m\}_{m=1}^\infty$ është varg nga $L(H)$ i tillë që $T_m \rightarrow T$, atëherë*

$$\sigma(T) \setminus \sigma_a(T) \subseteq \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(T_m).$$

Lemë 3.3.4. [26, Theorem 2.2] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator që plotëson teoremën e Weyl-it. Spektri σ_w është i vazhdueshëm në T , atëherë dhe vetëm atëherë, kur σ është i vazhdueshëm në T .*

Lemë 3.3.5. [26, Theorem 2.3] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator që e plotëson teoremën e Weyl-it. Spektri σ_w është i vazhdueshëm në T , atëherë dhe vetëm atëherë, kur σ_b është i vazhdueshëm në T .*

Teoremë 3.3.6. [55, Theorem 6.3] Spektri σ është i vazhdueshëm në bashkësinë e operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ për numrin e plotë pozitiv k .

Vërtetim. Le të jetë $\{T_m\}_m^\infty$ varg i operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|T_m - T\| = 0,$$

ku T është gjithashtu operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Pasi funksioni σ është gjysmë i sipërm i vazhdueshëm, atëherë $\limsup_{m \rightarrow \infty} \sigma(T_m) \subset \sigma(T)$. Prandaj, që të vërtetojmë teoremën, mjafton të vërtetojmë relacionin $\sigma(T) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(T_m)$. Nga Lema 3.3.3 mjafton të vërtetojmë se vlen relacioni

$$(3.3.1) \quad \sigma_a(T) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(T_m).$$

Nga Zgjerimi Berberian $\varphi : L(H) \rightarrow L(K)$ i definuar me $\varphi : T \rightarrow \varphi(T)$ rrjedh se vlen $\sigma_a(T) = \sigma_a(\varphi(T)) = \sigma_p(\varphi(T))$ dhe $\sigma(T) = \sigma(\varphi(T))$. Pasi T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë nga Teorema 2.2.16 rrjedh se $\varphi(T)$ është gjithashtu operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nga këtu rrjedh se relacioni (3.3.1) është ekuivalent me relacionin

$$(3.3.2) \quad \sigma_a(\varphi(T)) \subset \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(\varphi(T_m)).$$

Le të jetë $\lambda \in \sigma_a(\varphi(T))$. Atëherë, $\lambda \in \sigma_p(\varphi(T))$. Nga Teorema 2.2.15, kemi se $\varphi(T)$ ka paraqitjen

$$\varphi(T) = \lambda \oplus A \text{ në } H = \ker(\varphi(T) - \lambda) \oplus (\ker(\varphi(T) - \lambda))^\perp \text{ dhe } \ker(A - \lambda) = \{0\}.$$

Prandaj, $A - \lambda$ është gjysmë i sipërm i Fredholm-it dhe $\alpha(A - \lambda) = 0$. Nga Teorema mbi rrethinën e shpuar, rrjedh se ekziston $\epsilon > 0$ i tillë që $A - (\lambda - \mu_0)$ është gjysmë i sipërm i Fredholm-it, ashtu që

$$\text{ind}(A - (\lambda - \mu_0)) = \text{ind}(A - \lambda) \text{ dhe } \alpha(A - (\lambda - \mu_0)) = 0,$$

për çdo μ_0 të tillë që $0 < |\mu_0| < \epsilon$. Le të vëmë $\mu = \lambda - \mu_0$. Atëherë,

$$\varphi(T) - \mu = (\lambda - \mu) \oplus (A - \mu),$$

është operator gjysmë i sipërm i Fredholm-it, i tillë që $\text{ind}(\varphi(T) - \mu) = \text{ind}(A - \mu)$ dhe $\alpha(\varphi(T) - \mu) = 0$.

Duhet të vërtetojmë se $\lambda \in \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(\varphi(T_m))$. Për këtë supozojmë të kundërtën, $\lambda \notin \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(\varphi(T_m))$. Atëherë, ekziston numri $\delta > 0$ dhe rrethina $D_\delta(\lambda)$ e pikës λ si dhe nënvargu $\{\varphi(T_{m_k})\}$ i vargut $\{\varphi(T_m)\}$, i tillë që $\sigma(\varphi(T_{m_k})) \cap D_\delta(\lambda) = \emptyset$ për çdo $k \geq 1$. Kjo implikon se $\varphi(T_{m_k}) - \mu$ është operator i Fredholm-it me $\text{ind}(\varphi(T_{m_k}) - \mu) = 0$, për çdo $\mu \in D_\delta(\lambda)$ dhe

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|(\varphi(T_{m_k}) - \mu) - (\varphi(T) - \mu)\| = 0.$$

Tani, nga vazhdueshmëria e indeksit të operatorëve të Fredholm-it barazimi $\text{ind}(\varphi(T) - \mu) = 0$ dhe $\varphi(T) - \mu$ është operator i Fredholm-it. Pasi $\alpha(\varphi(T) - \mu) = 0$, $\mu \notin \sigma(\varphi(T))$ për çdo μ në ϵ -rrethinën e pikës λ . Kjo është në kontradiktë me Lemën 3.3.2, prandaj marrim

$$\lambda \in \liminf_{m \rightarrow \infty} \sigma(\varphi(T_m)).$$

□

Rrjedhim 3.3.7. [55, Corollary 6.4] *Spektri i Weyl-it σ_w është i vazhdueshëm në bashkësinë e operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për numrin e plotë pozitiv k .*

Vërtetim. Pasi që Teorema e Weyl-it vlen për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë nga Teorema 3.3.6 dhe Lema 3.3.4 rrjedh se spektri σ_w është i vazhdueshëm. $\square$

Rrjedhim 3.3.8. [55, Corollary 6.5] *Spektri i Browder-it σ_b është i vazhdueshëm në bashkësinë e operatorëve k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, për numrin e plotë pozitiv k .*

Vërtetim. Pasi që Teorema e Weyl-it vlen për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë nga Teorema 3.3.6 dhe Lema 3.3.5 rrjedh se spektri σ_b është i vazhdueshëm. $\square$

3.4 Vetitë spektrale dhe Teorema e Browder-it për operatorët absolut- k -*-paranormal

Teoremë 3.4.1. [17] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Nëse $(T - \mu)x = 0$, atëherë $(T - \mu)^*x = 0$ për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.*

Vërtetim. Për të vërtetuar teoremën, mjafton të tregojmë se vlen përfshirja $\ker(T - \mu) \subseteq \ker(T^* - \bar{\mu})$. Dallojmë dy raste:

1). Le të jetë $\mu = 0$ dhe supozojmë se $x \in \ker(T)$. Atëherë, $Tx = 0$. Pasi T është absolut- k -*-paranormal dhe $Tx = 0$ nga

$$\|T^*x\|^{k+1} \leq \| |T|^k Tx \|,$$

marrim $\|T^*x\|^{k+1} = 0$. Nga këtu rrjedh $T^*x = 0$, që tregon se $x \in \ker(T^*)$.

2). Le të jetë $\mu \neq 0$ dhe supozojmë se $x \in \ker(T - \mu)$. Atëherë, $Tx = \mu x$. Pasi T është absolut- k -*-paranormal, kemi

$$\begin{aligned} \|T^*x\|^{k+1} &\leq \| |T|^k Tx \| \\ &= |\mu| \langle |T|^{2k} x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\mu| \langle |T|^{2k} x, x \rangle^{\frac{k}{2}} \\ &= |\mu|^{k+1}. \end{aligned}$$

Atëherë, $\|T^*x\| \leq |\mu|$ për çdo $x \in \ker(T - \mu)$ për $\|x\| = 1$. Nga këtu rrjedh

$$\begin{aligned} \langle (T - \mu)^*x, (T - \mu)^*x \rangle &= \|T^*x\|^2 - \langle x, \bar{\mu}Tx \rangle - \langle \bar{\mu}Tx, x \rangle + |\mu|^2 \|x\|^2 \\ &\leq |\mu|^2 - |\mu|^2 - |\mu|^2 + |\mu|^2 = 0. \end{aligned}$$

Pra $\|T^* - \bar{\mu}x\| = 0$, që implikon $x \in \ker(T^* - \bar{\mu})$. Kështu treguam se $\ker(T - \mu) \subseteq \ker(T^* - \bar{\mu})$. $\square$

Lemë 3.4.2. [17] *Nëse T është operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$, atëherë $T - \mu$ ka ascent të fundmë për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.*

Vërtetim. Pasi T është operator absolut- k -*-paranormal, atëherë nga Teorema 3.4.1 kemi $\ker(T - \mu) \subset \ker(T^* - \bar{\mu})$, për çdo $\mu \in \mathbb{C}$. Prandaj operatori $T - \mu$ mund të paraqitet si

$$T - \mu = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \text{ në } \ker(T - \mu) \oplus (\ker(T - \mu))^\perp.$$

Le të jetë $x \in \ker((T - \mu)^2)$ dhe le të shkruajmë $x = y + z$, ku $y \in \ker(T - \mu)$ dhe $z \in (\ker(T - \mu))^\perp$. Atëherë,

$$0 = (T - \mu)^2 x = (T - \mu)^2 z,$$

pra

$$(T - \mu)z \in \ker(T - \mu) \cap (\ker(T - \mu))^\perp = \{0\}.$$

Kjo tregon se $z \in \ker(T - \mu)$, prej nga rrjedh se $x \in \ker(T - \mu)$. Prandaj,

$$\ker(T - \mu) = \ker((T - \mu)^2).$$

□

Rrjedhim 3.4.3. [17] Nëse T është operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$, atëherë T ka SVEP.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh direkt nga Lema 3.4.2 dhe nga Lema 1.4.11. □

Rrjedhim 3.4.4. [17] Nëse T^* është operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$, atëherë $\beta(T - \mu) \leq \alpha(T - \mu)$ për çdo $\mu \in \mathbb{C}$.

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh direkt nga Teorema 3.4.1. □

Teoremë 3.4.5. [17] Nëse T ose T^* është operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$, atëherë $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Pasi që përfshirja $\sigma_w(f(T)) \subseteq f(\sigma_w(T))$ vlen për çdo operator, atëherë ne na mbetet që të vërtetojmë përfshirjen

$$(3.4.1) \quad f(\sigma_w(T)) \subseteq \sigma_w(f(T)).$$

Vërejmë se relacioni (3.4.1) vlen për çdo funksion konstant f në ndonjë rrethinë të hapur të $\sigma(T)$.

Le të jetë $\lambda \notin \sigma_w(f(T))$. Supozojmë se $f(z) - \mu$ ka numër të fundmë zerosh në ndonjë rrethinë të hapur G të $\sigma(T)$, prandaj mund të shkruajmë

$$f(z) - \mu = (z - \mu_1)(z - \mu_2) \cdot \dots \cdot (z - \mu_n)g(z),$$

ku $\mu_j, j = 1, \dots, n$ janë zero të $f(z) - \mu$ në G , të renditura sipas shumëllojshmërisë, dhe funksioni invertibil $g(z) \neq 0$ për çdo $z \in G$. Prandaj

$$(3.4.2) \quad f(T) - \mu = (T - \mu_1)(T - \mu_2) \cdot \dots \cdot (T - \mu_n)g(T).$$

Është e qartë se $\mu \in f(\sigma_w(T))$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\mu_j \in \sigma_w(T)$ për ndonjë j . Atëherë, që të vërtetohet përfshirja (3.4.1), mjafton të tregojmë se vlen $\mu_j \notin \sigma_w(T)$ për çdo $j = 1, 2, \dots, n$.

Supozojmë se T është operator absolut- k -*-paranormal. Pasi $f(T) - \mu$ është operator i Weyl-it dhe operatorët $T - \mu_1, T - \mu_2, \dots, T - \mu_n$ komutojnë me njëri tjetrin, atëherë nga Vërejtja 1.5.1 rrjedh se $T - \mu_j$ është operator i Fredholm-it për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Po ashtu, pasi që

$$\ker(T - \mu_j) \subseteq \ker(f(T) - \mu) \text{ dhe } \ker((T - \mu_j)^*) \subseteq \ker((f(T) - \mu)^*),$$

atëherë hapësirat $\ker(T - \mu_j)$ dhe $\ker((T - \mu_j)^*)$ janë me dimension të fundmë, për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Nga Teorema 3.4.1 rrjedh që $\text{ind}(T - \mu_j) \leq 0$, për çdo $j = 1, 2, \dots, n$.

Nga ana tjetër kemi

$$0 = \text{ind}(f(T) - \mu) = \text{ind}(T - \mu_1) + \text{ind}(T - \mu_2) + \dots + \text{ind}(T - \mu_n) + \text{ind}g(T).$$

Pasi që $\text{ind}(T - \mu_j) \leq 0$, atëherë $\text{ind}(T - \mu_j) = 0$ për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Rrjedhimisht, $T - \mu_j$ është operator i Weyl-it, prandaj $\mu_j \notin \sigma_w(T)$, për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Nga këtu marrim $\mu \in f(\sigma_w(T))$.

Supozojmë se T^* është operator absolut- k -*-paranormal. Nga Rrjedhimi 3.4.4 kemi që $\text{ind}(T - \mu) \geq 0$ për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Prandaj,

$$0 \leq \sum_{i=1}^n \text{ind}(T - \mu_j) = \text{ind}(f(T) - \mu) = 0,$$

dhe $T - \mu_j$ është operator i Weyl-it për çdo $j = 1, 2, \dots, n$. Atëherë, $\mu \notin f(\sigma_w(T))$. Rrjedhimisht $\sigma_w(f(T)) = f(\sigma_w(T))$. □

Teoremë 3.4.6. [17] Nëse T ose T^* është operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$, atëherë $\sigma_{uw}(f(T)) = f(\sigma_{uw}(T))$ për çdo $f \in \text{Hol}(\sigma(T))$.

Vërtetim. Vërtetimi është analog me vërtetimin e Teoremës 3.4.5, duke u bazuar në Lemën 3.4.4 dhe Teoremën 3.4.1. □

Teoremë 3.4.7. [17] Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Nëse $S \sim T$, atëherë S ka SVEP.

Vërtetim. Vërtetimi është analog me vërtetimin e Teoremës 3.2.8. □

Teoremë 3.4.8. [17] Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Atëherë, T e plotëson Teoremën e a-Browder-it.

Vërtetim. Duhet të tregojmë se vlen $\sigma_{uw}(T) = \sigma_{ub}(T)$. Dimë se vlen $\sigma_{uw}(T) \subseteq \sigma_{ub}(T)$, për çdo operator $T \in L(H)$. Tregojmë të anasjelltën. Le të jetë $\mu \notin \sigma_{uw}(T)$. Atëherë, $T - \mu$ është operator i sipërm i Weyl-it. Tani pasi që $T - \mu$ ka SVEP, atëherë nga [1, Teorema 2.45] rrjedh se $T - \mu$ ka ascent të fundmë, rrjedhimisht $\mu \notin \sigma_{ub}(T)$. □

Teoremë 3.4.9. [17] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Atëherë, Teorema e a -Browder-it vlen për $f(T)$ për çdo $f \in Hol(\sigma(T))$.*

Vërtetim. Pasi që $\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T))$, atëherë mbështetur në Teoremën 3.4.6, kemi

$$\sigma_{ub}(f(T)) = f(\sigma_{ub}(T)) = f(\sigma_{uw}(T)) = \sigma_{uw}(f(T)),$$

që tregon se Teorema e a -Browder-it plotësohet për $f(T)$ për çdo $f \in Hol(\sigma(T))$. $\square$

Teoremë 3.4.10. [17] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Nëse $S \sim T$, atëherë Teorema e a -Browder-it plotësohet për $f(S)$ për çdo $f \in Hol(\sigma(T))$.*

Vërtetim. Vërtetimi është analog me vërtetimin e Teoremës 3.2.9. $\square$

Teoremë 3.4.11. [17] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator absolut- k -*-paranormal për $0 < k \leq 1$. Nëse $\mu \in \sigma_a(T)$, atëherë $\mu \in \sigma_{ja}(T)$.*

Vërtetim. Supozojmë se $\mu \in \sigma_a(T)$. Atëherë, ekziston vargu i vektorëve njësi $\{x_m\}_{m=1}^\infty$ nga H ashtu që $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$, $m \rightarrow \infty$. Pasi T është absolut- k -*-paranormal,

$$\|T^*x_m\|^{k+1} \leq \| |T|^k T x_m \|$$

për çdo varg të vektorëve njësi $\{x_m\}_{m=1}^\infty \subset H$. Nga këtu rrjedh

$$\begin{aligned} \|T^*x_m\|^{k+1} &\leq \| |T|^k T x_m \| \\ &= \langle |T|^{2k} T x_m, T x_m \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \langle |T|^2 T x_m, T x_m \rangle^{\frac{k}{2}} \|T x_m\|^{1-k} \\ &= \|T^2 x_m\|^k \|T x_m\|^{1-k} \end{aligned}$$

Pasi $(T - \mu)x_m \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$, atëherë

$$\|T x_m\| \rightarrow |\mu| \text{ dhe } \|T^2 x_m\| \rightarrow |\mu|^2.$$

Prandaj $\lim_{m \rightarrow \infty} \|T^*x_m\| \leq |\mu|$. Tani,

$$\begin{aligned} \|(T^* - \bar{\mu})x_m\|^2 &= \langle (T - \mu)^* x_m, (T - \mu)^* x_m \rangle \\ &= \|T^* x_m\|^2 - \langle x_m, \bar{\mu} T x_m \rangle - \langle \bar{\mu} T x_m, x_m \rangle + |\mu|^2 \|x_m\|^2. \end{aligned}$$

Pra $\|(T^* - \bar{\mu})x_m\|^2 \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$ prej nga kemi $(T^* - \bar{\mu})x_m \rightarrow 0$ kur $m \rightarrow \infty$, çka u deshtë të tregohet. $\square$

Kapitulli 4

Veti të tjera për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, $\mathcal{A}(k^*)$ dhe k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$

4.1 Prodhimi tensorial për operatorët k -kuazi klasë

$\mathcal{A}_n^*$

Në fillim japim disa njohuri themelore për prodhimin tensorial.

Le të jenë H dhe K hapësira komplekse jo zero me prodhimet e brendshme përkatëse $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ dhe $\langle \cdot, \cdot \rangle_K$, si dhe le të jetë $H \times K$ prodhimi i drejtëpërdrejtë i hapësirave vektoriale H dhe K .

Përkufizim 4.1.1. Prodhim tensorial të vektorëve $x \in H$ dhe $y \in K$ quajmë pasqyrimin bilinear

$$x \otimes y : H \times K \rightarrow \mathbb{C}$$

të dhënë me

$$(x \otimes y)(u, v) = \langle x, u \rangle_H \langle y, v \rangle_K$$

për çdo $(u, v) \in H \times K$.

Për prodhimin tensorial të përkufizuar më sipër vlejnë vetitë:

1. $\alpha\beta(x \otimes y) = \alpha x \otimes \beta y = \beta x \otimes \alpha y$, për çdo $(x, y) \in H \times K$.
2. $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$, për çdo $x \in H$ dhe $y, z \in K$.
3. $(x + y) \otimes z = x \otimes z + y \otimes z$, për çdo $x, y \in H$ dhe $z \in K$.
4. $(x + y) \otimes (z + w) = x \otimes z + x \otimes w + y \otimes z + y \otimes w$, për çdo $x, y \in H$ dhe $z, w \in K$.

Tregohet se shuma e dy prodhimeve tensoriale nuk është domosdo prodhim tensorial, prandaj shënojmë me

$$H \otimes K = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i : \alpha_i \in \mathbb{C}, (x_i, y_i) \in H \times K, n \in \mathbb{N} \right\}$$

bashkësinë e të gjitha kombinimeve të fundme të prodhimeve tensoriale në $H \times K$.
Ndërtojmë pasqyrimin:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : (H \otimes K) \times (H \otimes K) \rightarrow \mathbb{C}$$

të dhënë me

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i, \sum_{j=1}^m \beta_j z_j \otimes w_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \alpha_i \overline{\beta_j} \langle x_i, z_j \rangle_H \langle y_i, w_j \rangle_K$$

për çdo $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i$ dhe $\sum_{j=1}^m \beta_j z_j \otimes w_j$ nga $H \otimes K$.

Në veçanti kemi

$$\langle x \otimes y, z \otimes w \rangle = \langle x, z \rangle_H \langle y, w \rangle_K,$$

për çdo $x, z \in H$ dhe $y, w \in K$, që është prodhimi i brendshëm në $H \otimes K$.

Hapësira lineare $H \otimes K$ me prodhimin e brendshëm të dhënë më sipër nuk është domosdo complete, për këtë arsye marrim hapësirën $H \hat{\otimes} K$ që është kompletim i hapësirës $H \otimes K$, që për arsye praktike po e shënojmë prapë me $H \otimes K$. Po ashtu, pasi që

$$\alpha_i x_i \otimes y_i = x_i \otimes \alpha_i y_i = \alpha_i^{\frac{1}{2}} x_i \otimes \alpha_i^{\frac{1}{2}} y_i,$$

atëherë shpesh në vend të $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \otimes y_i$ marrim $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$.

Përkufizim 4.1.2. Le të jenë $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$. Prodhim tensorial të operatorëve T dhe S në hapësirën me prodhim të brendshëm $H \otimes K$ quajmë operatorin

$$T \otimes S : H \otimes K \rightarrow H \otimes K$$

të dhënë me

$$(T \otimes S) \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i = \sum_{i=1}^n T x_i \otimes S y_i$$

për çdo $\sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \in H \otimes K$.

Pra, kemi

$$(T \otimes S)(x \otimes y) = T x \otimes S y,$$

për çdo $x \in H$ dhe $y \in K$.

Teoremë 4.1.1. [64] Le të jenë $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $T, T_1, T_2 \in L(H)$ dhe $S, S_1, S_2 \in L(K)$. Atëherë,

1. $T \otimes S \in L(H \otimes K)$ dhe vlen $\|T \otimes S\| = \|T\| \|S\|$,
2. $\alpha \beta T \otimes S = \alpha T \otimes \beta S$,
3. $T \otimes (S_1 + S_2) = T \otimes S_1 + T \otimes S_2$,
4. $(T_1 + T_2) \otimes S = T_1 \otimes S + T_2 \otimes S$,
5. $(T_1 + T_2) \otimes (S_1 + S_2) = T_1 \otimes S_1 + T_2 \otimes S_1 + T_1 \otimes S_2 + T_2 \otimes S_2$,

6. $(T_1 \otimes S_1)(T_2 \otimes S_2) = T_1 T_2 \otimes S_1 S_2,$

7. Nëse T dhe S janë operatorë invertibil, atëherë i tillë është edhe operatori $T \otimes S$ dhe vlen

$$(T \otimes S)^{-1} = T^{-1} \otimes S^{-1}$$

8. $(T \otimes S)^* = T^* \otimes S^*,$

9. $(T^* \otimes S^*)(T \otimes S) = T^* T \otimes S^* S = |T|^2 \otimes |S|^2,$

Nga uniciteti i rrënjëve katrore pozitive kemi

$$|T \otimes S|^r = |T|^r \otimes |S|^r,$$

për çdo numër racional pozitiv r . Ndërsa nga densiteti i bashkësisë së numrave racionalë në bashkësinë e numrave realë marrim

$$|T \otimes S|^p = |T|^p \otimes |S|^p,$$

për çdo numër real pozitiv p .

Është e qartë se vlen

$$I \otimes I = \alpha I \otimes \alpha^{-1} I,$$

për çdo skalar jo zero α .

Gjithashtu

$$O \otimes O = A \otimes O = O \otimes B.$$

Pra $A \otimes B$ është operator zero, atëherë dhe vetëm atëherë, kur njëri nga operatorët A ose B është operator zero.

Lemë 4.1.2. [88] *Le të jenë $T_1, T_2 \in L(H)$, $S_1, S_2 \in L(K)$ operatorë jo negativ. Nëse T_1 dhe S_1 janë operatorë jo zero, atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. $T_1 \otimes S_1 \leq T_2 \otimes S_2,$

2. *Ekziston $c > 0$, e tillë që $T_1 \leq cT_2$ dhe $S_1 \leq c^{-1}S_2$.*

Le të jenë $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$ operatorë jo zero. Tregohet se vetia e normaloidit është invariante ndaj prodhimit tensorial, [85]. Në [88] Stochel ka treguar se $T \otimes S$ është operator normal, atëherë dhe vetëm atëherë, kur T dhe S janë operatorë normal. Mirëpo, kjo nuk vlen në rastin e përgjithshëm, pra nëse operatorët T dhe S i takojnë një klase, jo domosdoshmërisht edhe prodhimi tensorial i takon po ashtu asaj klase të operatorëve. Ando në [9] ka ndërtuar dy operatorë paranormal, prodhimi tensorial i të cilëve nuk është paranormal. Mirëpo ka mjaft klasë të operatorëve për të cilat është vërtetuar fakti i njëjtë me operatorët normal. Për shembull ky rezultat është zgjeruar për klasën $\mathcal{A}$, $*$ -klasë $\mathcal{A}$ dhe klasën $\mathcal{A}(k)$ në [61], [62] dhe [27], respektivisht. Ne në punimin tonë, rezultatin e mësipërm e kemi vërtetuar për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ dhe operatorët e klasës $\mathcal{A}(k^*)$.

Teoremë 4.1.3. [55, Theorem 3.1] Le të jenë $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$ operatorë jo zero. Prodhimi tensorial $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen njëri nga kushtet:

1. T dhe S janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$,
2. $T^{k+1} = O$ ose $S^{k+1} = O$.

Vërtetim. Supozojmë se vlen ndonjëri nga kushtet (1) ose (2). Duke shfrytëzuar vetitë e prodhimit tensorial, marrim

$$\begin{aligned} (T \otimes S)^{*k} \left(|(T \otimes S)^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |(T \otimes S)^*|^2 \right) (T \otimes S)^k = \\ (T \otimes S)^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} \otimes |S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \otimes |S^*|^2 \right) (T \otimes S)^k = \\ T^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k \otimes S^{*k} |S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} S^k + T^{*k} |T^*|^2 T^k \otimes S^{*k} \left(|S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |S^*|^2 \right) S^k. \end{aligned}$$

Nëse vlen kushti (1), pra nëse të dy operatorët T dhe S janë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë nga relacioni i mësipërm rrjedh se $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Po ashtu, nëse vlen kushti (2) $T^{k+1} = O$ ose $S^{k+1} = O$, nga relacioni i mësipërm rrjedh se $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Anasjelltas, supozojmë se $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, për $x \in H$, dhe $y \in K$ marrim

$$\begin{aligned} \left\langle T^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k x, x \right\rangle \left\langle S^{*k} |S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} S^k y, y \right\rangle \\ + \left\langle T^{*k} |T^*|^2 T^k x, x \right\rangle \left\langle S^{*k} \left(|S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |S^*|^2 \right) S^k y, y \right\rangle \geq 0 \end{aligned}$$

Duhet të tregojmë se vlen njëri nga kushtet e teoremës. Për këtë mjafton të tregojmë se nëse kushti (1) nuk vlen, atëherë vlen kushti (2). Supozojmë të kundërtën: $T^{k+1} \neq O$ dhe $S^{k+1} \neq O$, si dhe T nuk është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë, ekziston vektori $x_0 \in H$, i tillë që:

$$\left\langle T^{*k} \left(|T^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} - |T^*|^2 \right) T^k x_0, x_0 \right\rangle = \alpha < 0$$

dhe

$$\left\langle T^{*k} |T^*|^2 T^k x_0, x_0 \right\rangle = \beta > 0.$$

Dy relacionet e fundit i zëvendësojmë në relacionin e mësipërm dhe fitojmë:

$$(\alpha + \beta) \left\langle S^{*k} |S^{n+1}|^{\frac{2}{n+1}} S^k y, y \right\rangle \geq \beta \left\langle S^{*k} |S^*|^2 S^k y, y \right\rangle.$$

Pasi që $\alpha + \beta < \beta$, atëherë S është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Kemi,

$$\left\langle S^{*k} |S^*|^2 S^k y, y \right\rangle = \left\langle |S^*|^2 S^k y, S^k y \right\rangle = \langle S^* S^k y, S^* S^k y \rangle = \|S^* S^k y\|^2$$

Tani duke përdorur jobarazimin Hölder-McCarthy, marrim

$$\begin{aligned}
 \langle S^{*k} | S^{n+1} |^{\frac{2}{n+1}} S^k y, y \rangle &= \left\langle \left(S^{*(n+1)} S^{n+1} \right)^{\frac{1}{n+1}} S^k y, S^k y \right\rangle \\
 &\leq \left\langle S^{*(n+1)} S^{n+1} S^k y, S^k y \right\rangle^{\frac{1}{n+1}} \|S^k y\|^{\frac{2n}{n+1}} \\
 &= \|S^{n+k+1} y\|^{\frac{2}{n+1}} \|S^k y\|^{\frac{2n}{n+1}}
 \end{aligned}$$

Atëherë,

$$(\alpha + \beta) \|S^{n+k+1} y\|^{\frac{2}{n+1}} \|S^k y\|^{\frac{2n}{n+1}} \geq \beta \|S^* S^k y\|^2.$$

Pasi S është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, nga Teorema 2.2.9 rrjedh se S ka dekompozimin

$$S = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \text{ në } H = \overline{S^k(H)} \oplus \ker(S^{*k}),$$

ku $A = S|_{\overline{S^k(H)}}$ është operator i klasës $\mathcal{A}_n^*$. Atëherë,

$$(\alpha + \beta) \|A^{n+1} \mu\|^{\frac{2}{n+1}} \|\mu\|^{\frac{2n}{n+1}} \geq \beta \|S^* \mu\|^2 \geq \beta \|A^* \mu\|^2,$$

për çdo $\mu \in \overline{S^k(H)}$.

Pasi $A \in \mathcal{A}_n^*$, atëherë A është normaloid. Prandaj, duke vepruar me supremum në të dy anët e jobarazimit të mësipërm, marrim

$$(\alpha + \beta) \|A\|^2 \geq \beta \|A^*\|^2 = \beta \|A\|^2,$$

prej nga rrjedh se $A = O$. Tani, nga Rrjedhimi 2.2.29 marrim $S^{k+1} = O$. Kështu, kemi arritur në kontradiksion, me faktin se S^{k+1} nuk është operator zero. Prandaj mbetet që T është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Në mënyrë të ngjashme tregojmë se operatori S është gjithashtu operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. $\square$

4.2 Prodhimi tensorial për operatorët e klasës $\mathcal{A}(k^*)$

Teoremë 4.2.1. [17] *Le të jenë $T \in L(H)$ dhe $S \in L(K)$ operatorë jo zero. Atëherë, operatori $T \otimes S$ i takon klasës $\mathcal{A}(k^*)$, atëherë dhe vetëm atëherë, nëse vlen njëri nga pohimet:*

1. T dhe S janë operatorë të klasës $\mathcal{A}(k^*)$.
2. $|T^*|^2 = O$ ose $|S^*|^2 = O$.

Vërtetim. Kemi

$$\left((T \otimes S)^* |T \otimes S|^{2k} (T \otimes S) \right)^{\frac{1}{k+1}} - |(T \otimes S)^*|^2 =$$

$$\begin{aligned}
 & \left((T^* \otimes S^*) (|T|^{2k} \otimes |S|^{2k}) (T \otimes S) \right)^{\frac{1}{k+1}} - (|T^*|^2 \otimes |S^*|^2) = \\
 & \left(T^* |T|^{2k} T \right)^{\frac{1}{k+1}} \otimes \left(S^* |S|^{2k} S \right)^{\frac{1}{k+1}} - (|T^*|^2 \otimes |S^*|^2) = \\
 & (T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} \otimes (S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} - |T^*|^2 \otimes (S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} + \\
 & |T^*|^2 \otimes (S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} - (|T^*|^2 \otimes |S^*|^2) = \\
 & \left((T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} - |T^*|^2 \right) \otimes (S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} + |T^*|^2 \otimes \left((S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} - |S^*|^2 \right).
 \end{aligned}$$

Supozojmë se vlen pohimi (1). Pra T dhe S janë operatorë të klasës $\mathcal{A}(k^*)$. Atëherë, nga relacioni i mësipërm rrjedh se $T \otimes S$ është operator i klasës $\mathcal{A}(k^*)$. Ngjashëm, nëse vlen pohimi (2) $|T^*|^2 = O$ ose $|S^*|^2 = O$, prap nga relacioni i mësipërm rrjedh se $T \otimes S$ është operator i klasës $\mathcal{A}(k^*)$.

Anasjelltas, supozojmë se $T \otimes S$ është operator i klasës $\mathcal{A}(k^*)$. Duhet të tregojmë se vlen vetëm njëri nga pohimet (1) ose (2). Për këtë, mjafton të tregojmë se nëse nuk vlen pohimi (1), atëherë vlen pohimi (2).

Supozojmë se $|T^*|^2$ dhe $|S^*|^2$ janë operatorë jo zero. Pasi që $T \otimes S$ është operator i klasës $\mathcal{A}(k^*)$, atëherë

$$(T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} \otimes (S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T^*|^2 \otimes |S^*|^2.$$

Tani, nga Lema 4.1.2 rrjedh se ekziston numri real pozitiv c për të cilin vlen

$$(4.2.1) \quad c(T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} \geq |T^*|^2 \text{ dhe } c^{-1}(S^* |S|^{2k} S)^{\frac{1}{k+1}} \geq |S^*|^2.$$

Për vektorin e çfarëdoshëm $x \in H$, nga jobarazimi Hölder-McCarthy kemi

$$\begin{aligned}
 \|T^*\|^2 &= \sup_{\|x\|=1} \langle |T^*|^2 x, x \rangle \leq \sup_{\|x\|=1} \left\langle c(T^* |T|^{2k} T)^{\frac{1}{k+1}} x, x \right\rangle \\
 &\leq c \left(\sup_{\|x\|=1} \langle T^* |T|^{2k} T x, x \rangle \right)^{\frac{1}{k+1}} = c \|T^* |T|^{2k} T\|^{\frac{1}{k+1}} \\
 &\leq c \|T\|^2 = c \|T^*\|^2.
 \end{aligned}$$

Pra,

$$\|T^*\|^2 \leq c \|T^*\|^2.$$

Në mënyrë të njëjtë shohim që

$$\|S^*\|^2 \leq c^{-1} \|S^*\|^2.$$

Nga dy jobarazimet e fundit rrjedh se $c = 1$. Prandaj, nga relacionet (4.2.1) rrjedh se T dhe S janë operatorë të klasës $\mathcal{A}(k^*)$. $\square$

4.3 Teorema e Fuglede-Putnam-it për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$

Le të jenë T dhe S , operatorë komutativ në hapësirën e Hilbert-it H , pra $TS = ST$. Duke ditur se $(ST)^* = T^*S^*$, kemi

$$T^*S^* = (ST)^* = (TS)^* = S^*T^*,$$

që tregon se edhe T^* dhe S^* komutojnë në mes veti. Mirëpo në qoftë se T dhe S komutojnë, në rastin e përgjithshëm nuk rrjedh se T komuton me S^* . E tregojmë këtë me shembullin në vijim:

Shembull 4.3.1. *Le të jetë T operatori i zhvendosjes së njëanshme në $H = l_2$, i dhënë me*

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Është e qartë se operatori i adjunguar i operatorit T është

$$T^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Vlen $TT = TT$. Mirëpo

$$T^*T(x_1, x_2, x_3, \dots) = T^*(0, x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, x_2, x_3, \dots), \text{ pra } T^*T = I.$$

Ndërsa,

$$TT^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = T(x_2, x_3, x_4, \dots) = (0, x_2, x_3, x_4, \dots), \text{ pra } TT^* \neq I.$$

*Nga këtu po shohim se $T^*T \neq TT^*$.*

Mirëpo, B. Fuglede në [35] vërteton këtë:

Teoremë 4.3.2. *Le të jetë $T \in L(H)$ operator normal dhe $X \in L(H)$. Nëse $TX = XT$, atëherë $T^*X = XT^*$.*

Pastaj në rastin e përgjithshëm është formuluar dhe vërtetuar nga C. R. Putnam në [79].

Teoremë 4.3.3. *Le të jenë A dhe B operatorë normal, ndërsa X operator që plotëson barazimin $AX = XB$. Atëherë, $A^*X = XB^*$.*

Teorema e Fuglede-Putnam-it ka përdorim të gjerë në teorinë e operatorëve, për shkak të aplikimeve të shumta. Duhet të kemi parasysh se nga $AX = XB$ nuk rrjedh $AX^* = X^*B$. E tregojmë këtë me shembullin e mëposhtëm.

Shembull 4.3.4. *Le të jenë dhënë operatorët*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ dhe } X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

*Me llogaritje të thjeshta mund të shohim se $AX = XB$. Pasi që A dhe B janë operatorë të vetë-adjunguar, atëherë $A^*X = XB^*$. Mirëpo, pas llogaritjeve shohim se $AX^* \neq X^*B$.*

Supozojmë se $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ është bazë e ortonormuar në H . Me anë të

$$\|T\|_2 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \|Te_m\|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

përkufizojmë normën e Hilbert Schmidt-it për operatorin T . Ky përkufizim i normës nuk varet nga zgjedhja e bazës së ortonormuar në H , [22]. Nëse $\|T\|_2 < \infty$, atëherë themi se T është operator i Hilbert Schmidt-it. Bashkësinë e të gjithë operatorëve të Hilbert Schmidt-it e shënojmë me $\mathcal{C}_2(H)$.

Në shumë punime, nga shumë autorë, Teorema e Fuglede-Putnam-it është vërtetuar për disa klasë të operatorëve jo normal. Në [12], S. Berberian ka zgjeruar këtë rezultat me supozimin se A dhe B^* janë operatorë hipernormal dhe X është operator i Hilbert Schmidt-it. Në [39], Furuta zgjeroi këtë rezultat me supozimin se A dhe B^* janë operatorë subnormal dhe X është operator i Hilbert Schmidt-it. A. Uchiyama dhe K. Tanahashi në [93], treguan se Teorema e Fuglede-Putnam-it vlen për operatorët p -hipernormal dhe operatorët log-hipernormal. S. Mecheri dhe A. Uchiyama në [70] e zgjeruan këtë rezultat duke supozuar se A dhe B^* janë operatorë të klasës $\mathcal{A}$. M. H. M. Rashid dhe M. S. M. Noorani në [82], vërtetuan këtë rezultat duke supozuar se A dhe B^* janë operatorë kuazi-klasë $\mathcal{A}$ dhe plotësojnë kushtin $\| |A^*| \| \| |B|^{-1} \| \leq 1$. Këtu ne kemi treguar se nëse X është operator i Hilbert Schmidt-it, ndërsa A dhe $(B^*)^{-1}$ janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, të tillë që $AX = XB$, atëherë $A^*X = XB^*$.

Le të jetë $\mathcal{C}_1(H)$ bashkësia e operatorëve $\{C = AB : A, B \in \mathcal{C}_2(H)\}$. Përkufizojmë funksionalin linear $tr : \mathcal{C}_1(H) \rightarrow \mathbb{C}$ me anë të

$$tr(C) = \sum_{m=1}^{\infty} \langle Ce_m, e_m \rangle,$$

lidhur me bazën e ortonormuar $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ në H . Në këtë rast, përkufizimi i $tr(C)$ nuk varet nga zgjedhja e bazës së ortonormuar. Me $tr(C)$ kemi përkufizuar gjurmën e operatorit C .

Lemë 4.3.5. [22] *Le të jetë $\langle A, B \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} \langle Ae_m, Be_m \rangle = tr(B^*A) = tr(AB^*)$ për A dhe B në $\mathcal{C}_2(H)$, dhe për çdo bazë të ortonormuar $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ në hapësirën H . Atëherë, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ është prodhimi i brendshëm në $\mathcal{C}_2(H)$, dhe $\mathcal{C}_2(H)$ është hapësirë e Hilbert Schmidt-it lidhur me këtë prodhim.*

Për çdo çift të operatorëve $A, B \in L(H)$, ekziston operatori $\Gamma_{A,B}$ i përkufizuar në $\mathcal{C}_2(H)$ me anë të formulës

$$\Gamma_{A,B}(X) = AXB.$$

Nga Lema 4.3.5 marrim

$$\begin{aligned} \langle \Gamma^* X, Y \rangle &= \langle X, \Gamma Y \rangle = \langle X, AYB \rangle = tr((AYB)^* X) \\ &= tr(XB^*Y^*A^*) = tr(A^*XB^*Y^*) = \langle A^*XB^*, Y \rangle. \end{aligned}$$

Pra, operatori i adjunguar i operatorit Γ jepet me anë të formulës

$$\Gamma^* X = A^*XB^*.$$

Teoremë 4.3.6. [55, Theorem 4.4] Le të jenë $A \in L(H)$ dhe $B \in L(H)$. Operatori $\Gamma_{A,B}$ është k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ në $\mathcal{C}_2(H)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen njëri nga kushtet:

1. $A^{k+1} = O$ ose $B^{k+1} = O$,
2. A dhe B^* janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$.

Vërtetim. Operatori unitar $U : \mathcal{C}_2(H) \rightarrow H \otimes H$ i përkufizuar me $x \otimes y^* \rightarrow x \otimes y$ indukton *-izomorfizmin $\Psi : L(\mathcal{C}_2(H)) \rightarrow L(H \otimes H)$ të dhënë me $X \rightarrow UXU^*$. Atëherë, marrim $\Psi(\Gamma_{A,B}) = A \otimes B^*$, [19]. Kompletimi i vërtetimit të teoremës rrjedh nga Teorema 4.1.3. $\square$

Teoremë 4.3.7. [55, Theorem 4.5] Le të jenë A dhe $(B^*)^{-1}$ operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Nëse $AX = XB$ për $X \in \mathcal{C}_2(H)$, atëherë $A^*X = XB^*$.

Vërtetim. Le të jetë dhënë operatori Γ , i përkufizuar në $\mathcal{C}_2(H)$, me anë të barazimit $\Gamma Y = AYB^{-1}$. Pasi A dhe $(B^*)^{-1}$ janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë nga Teorema 4.3.6, rrjedh se Γ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ në $\mathcal{C}_2(H)$.

Pasi $AX = XB$, atëherë $\Gamma X = AXB^{-1} = XBB^{-1} = X$. Pra, $(\Gamma - I)X = O$. Kjo tregon se X është vektor vetjak i operatorit Γ . Nga Teorema 2.2.11 rrjedh $(\Gamma - I)^*X = O$. Pra, $\Gamma^*X = X$. Nga këtu rrjedh $A^*X(B^{-1})^* = X$. Rrjedhimisht,

$$A^*X = XB^*,$$

çka u deshtë të tregohej. $\square$

4.4 Vetia e Fuglede-Putnam-it për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$

Në fillim japim disa të dhëna hyrëse, përkufizime dhe pohime pa vërtetim.

Lemë 4.4.1. [71, Lemma 2.1] Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, T^k nuk e ka rangun e dendur, dhe T ka paraqitjen

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \quad \text{në } H = \overline{T^k(H)} \oplus \ker(T^{*k}).$$

Atëherë, A është operator i klasës $\mathcal{A}^*$ në $\overline{T^k(H)}$, $C^k = O$ dhe $\sigma(T) = \sigma(A) \cup \{0\}$.

Përkufizim 4.4.1. [63] Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet kontraksion, në qoftë se $\|Tx\| \leq \|x\|$, për çdo $x \in H$.
2. Operatori T quhet kontraksion i vërtetë, në qoftë se $\|Tx\| < \|x\|$, për çdo vektor jo zero $x \in H$.
3. Operatori T quhet kontraksion i saktë, në qoftë se $\|T\| < 1$, d.m.th. nëse

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < 1.$$

Është e qartë se çdo kontraksion i saktë, është kontraksion i vërtetë, dhe çdo kontraksion i vërtetë është kontraksion. Mirëpo, e anasjellta nuk është e vërtetë, siç tregon shembulli i mëposhtëm.

Shembull 4.4.2. a). Le të jetë T izometri. Pra, $\|Tx\| = \|x\|$ për çdo $x \in H$. Atëherë, $\|Tx\| \leq \|x\|$, për çdo $x \in H$. Mirëpo, $\|Tx\| \not\leq \|x\|$ për $x \neq 0$. Prandaj, T nuk është kontraksion i vërtetë.

b). Le të jetë $T_a : l_+^2 \rightarrow l_+^2$ operatori diagonal i dhënë me

$$T_a x = \{\alpha_k \xi_k\}_{k=0}^\infty,$$

ku $x = \{\xi_k\}_{k=0}^\infty \in l_+^2$ dhe $a = \{\alpha_k\}_{k=0}^\infty$ varg i kufizuar. Pra, operatori T_a ka paraqitjen matricore

$$T_a = \text{diag}(\{\alpha_k\}_{k=0}^\infty) = \text{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots).$$

Nëse $a = \left\{\frac{k+1}{k+2}\right\}_{k=0}^\infty$, atëherë kemi

$$T_a = \text{diag} \left\{ \frac{k+1}{k+2} \right\}_{k=0}^\infty = \text{diag} \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots \right\}.$$

Shohim se T është kontraksion i vërtetë në l_+^2 , sepse $\|T_a x\| < \|x\|$, për çdo $x \in l_+^2$. Mirëpo, pasi që

$$\|T_a\| = \sup_n \left\{ \frac{k+1}{k+2} \right\}_{k=0}^\infty = 1,$$

T nuk është kontraksion i saktë.

Përkufizim 4.4.2. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Operatori T quhet uniformisht stabil, në qoftë se vargu $\{T^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon uniformisht te operatori zero, pra nëse

$$\|T^n\| \rightarrow 0.$$

2. Operatori T quhet fuqishëm stabil, në qoftë se vargu $\{T^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon fuqishëm te operatori zero, pra nëse

$$\|T^n x\| \rightarrow 0, \text{ për çdo } x \in H.$$

Përkufizim 4.4.3. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Për operatorin T themi se i takon klasës C_0 , nëse T është fuqishëm stabil dhe është kontraksion.

2. Për operatorin T themi se i takon klasës C_0 , nëse T^* është fuqishëm stabil dhe kontraksion.

3. Për operatorin T themi se i takon klasës C_1 , nëse $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\| > 0$ (pra, nëse $T^n x \not\rightarrow 0$ për çdo vektor jo zero $x \in H$) dhe është kontraksion.

4. Për operatorin T themi se i takon klasës C_1 , nëse $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{*n} x\| > 0$ (pra, nëse $T^{*n} x \not\rightarrow 0$ për çdo vektor jo zero $x \in H$) dhe është kontraksion.

Në këtë mënyrë kemi përkufizuar klasët $C_{\alpha\beta}$ për $\alpha, \beta = 0, 1$ me $C_{\alpha\beta} = C_\alpha \cap C_\beta$. Këto quhen klasët kontraksion të Nagy-Foiaş [90, p.72]. Duke i marrë të gjitha kombinimet, fitojmë klasët C_{00} , C_{01} , C_{10} dhe C_{11} . Në veçanti, nëse T dhe T^* janë kontraksione fuqishëm stabile, atëherë T është kontraksion i klasës C_{00} .

Teoremë 4.4.3. [56] *Le të jetë T kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Atëherë, operatori jonegativ*

$$D = T^{*k} \left(|T^2| - |T^*|^2 \right) T^k$$

*është kontraksion, vargu i fuqive të tij $\{D^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon fuqishëm tek projektori P dhe vlen $T^*T^kP = O$.*

Vërtetim. Supozojmë se T është kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Atëherë,

$$D = T^{*k} \left(|T^2| - |T^*|^2 \right) T^k \geq O.$$

Le të jetë $R = D^{\frac{1}{2}}$ rrënja katrore e operatorit jonegativ D , e cila si e tillë është unike. Atëherë, për çdo x nga H dhe për numrin e plotë jonegativ n , marrim

$$\begin{aligned} \langle D^{n+1}x, x \rangle &= \|R^{n+1}x\|^2 \\ &= \langle DR^n x, R^n x \rangle \\ &= \langle T^{*k} |T^2| T^k R^n x, R^n x \rangle - \langle T^{*k} |T^*|^2 T^k R^n x, R^n x \rangle \\ &\leq \| |T^2|^{\frac{1}{2}} T^k R^n x \|^2 - \| T^* T^k R^n x \|^2 \\ &\leq \| R^n x \|^2 - \| T^* T^k R^n x \|^2 \\ &\leq \| R^n x \|^2 \\ &= \langle D^n x, x \rangle \end{aligned}$$

Prandaj R (dhe D) është kontraksion, sepse duke marrë $n = 0$ fitojmë $\|D\| \leq 1$. Po ashtu, vargu $\{D^n\}_{n=1}^\infty$ është varg zvogëlues i kontraksioneve jonegative. Atëherë, $\{D^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon fuqishëm tek një projektion, të cilin po e shënojmë me P .

Tani, na ka mbetur të tregojmë se $T^*T^kP = O$. Nga jobarazimi i mësipërm kemi

$$\sum_{n=0}^m \|T^*T^k R^n x\|^2 \leq \sum_{n=0}^m \left(\|R^n x\|^2 - \|R^{n+1}x\|^2 \right) = \|x\|^2 - \|R^{m+1}x\|^2 \leq \|x\|^2,$$

për çdo numër të plotë jonegativ m dhe për çdo $x \in H$. Atëherë,

$$\|T^*T^k R^n x\| \rightarrow 0 \text{ kur } n \rightarrow \infty.$$

Prandaj,

$$T^*T^k P x = T^*T^k \lim_{n \rightarrow \infty} D^n x = \lim_{n \rightarrow \infty} T^*T^k R^{2n} x = 0,$$

për çdo $x \in H$. Rrjedhimisht $T^*T^kP = O$. □

B. P. Duggal, I. H. Jeon dhe C. S. Kubrusly në [29] kanë treguar se nëse T është kontraksion dhe operator nga klasa $\mathcal{A}$, atëherë ose T ka nënhapësirë invariante jotriviale, ose T është kontraksion i vërtetë dhe operatori jonegativ $D = |T^2| - |T|^2$ është fuqishëm stabil. B. P. Duggal dhe të tjerët në [31], e zgjeruan këtë rezultat për klasën e operatorëve $\mathcal{QA}$. I. H. Jeona dhe I. H. Kim në [60] e zgjeruan këtë rezultat për klasën e operatorëve $\mathcal{QA}(k)$. F. Gao dhe X. Li [43] kanë vërtetuar se nëse T është kontraksion nga klasa $\mathcal{A}^*$ dhe T nuk ka nënhapësirë invariante jotriviale, atëherë vlen:

- (a) T është kontraksion i vërtetë, dhe
- (b) Operatori jonegativ $D = |T^2| - |T^*|^2$ është kontraksion, fuqishëm stabil.

Në punimin tonë, do të vërtetojmë këtë rezultat, për operatorët k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, për çdo $k > 0$.

Teoremë 4.4.4. [56] *Le të jetë T kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, për çdo $k > 0$. Nëse T nuk ka nënhapësirë invariante jo triviale, atëherë*

- 1). T është kontraksion i vërtetë,
- 2). Operatori jonegativ

$$D = T^{*k} (|T^2| - |T^*|^2) T^k$$

është kontraksion, fuqishëm stabil.

Vërtetim. Supozojmë se operatori T është operator jo zero.

1). Nëse ndonjëra nga nënhapësirat $\ker(T)$ ose $\overline{T^k(H)}$ është nënhapësirë jo triviale, pra në qoftë se $\ker(T) \neq \{0\}$ ose $\overline{T^k(H)} \neq H$, atëherë T ka nënhapësirë invariante jotriviale. Në të kundërtën, duhet që $\ker(T) = \{0\}$ dhe $\overline{T^k(H)} = H$. Nga këtu rrjedh se T është injektiv dhe me rang të dendur. Atëherë, nga Teorema 4.4.1 rrjedh se T është operator i klasës $\mathcal{A}^*$. Tani për vërtetimin e mëtutjeshëm të kësaj pike bazohemi në [43, Theorem 2.2].

Nga [63, Theorem 3.6] rrjedh

$$T^*Tx = \|T\|^2x, \text{ atëherë dhe vetëm atëherë, kur } \|Tx\| = \|T\|\|x\| \text{ për çdo } x \in H.$$

Vëmë

$$M = \{x \in H : \|Tx\| = \|T\|\|x\|\} = \ker(|T|^2 - \|T\|^2),$$

dhe shohim se M është nënhapësirë e mbyllur në H . Tregojmë se M është nënhapësirë T -invariante.

Pasi që T është operator i klasës $\mathcal{A}^*$, atëherë T është operator $*$ -paranormal. Prandaj, për çdo $x \in M$ kemi

$$\begin{aligned} \|T(Tx)\|^2 &\leq \|T\|^2\|Tx\|^2 = \|T\|^4\|x\|^2 = \|\|T\|^2x\|^2 = \|T^*Tx\|^2 \\ &\leq \|T^2Tx\|\|Tx\| = \|T^2Tx\|\|T\|\|x\|. \end{aligned}$$

Prandaj,

$$\|T\|^3\|x\| \leq \|T^2Tx\|.$$

Pasi që ana tjetër e jobarazimit vlen gjithmonë, atëherë

$$\|T\|^3\|x\| = \|T^2Tx\|.$$

Tani, nga

$$\|T\|^3\|x\| = \|T^2Tx\| \leq \|T\|\|TTx\|,$$

rrjedh,

$$\|T\|^2\|x\| \leq \|T(Tx)\| \implies \|T\|^2\|x\| = \|T(Tx)\|.$$

Pra,

$$\|T(Tx)\| = \|T\|^2\|x\| = \|T\|\|Tx\|,$$

që tregon se M është nënhapësirë T -invariante.

Tani, le të jetë T kontraksion, d.m.th $\|Tx\| \leq \|x\|$ për çdo $x \in H$. Dallojmë:

I. Nëse $\|T\| < 1$, atëherë T është kontraksion i vërtetë trivial.

II. Nëse $\|T\| = 1$, atëherë $M = \{x \in H : \|Tx\| = \|x\|\}$. Pasi që T nuk ka nënhapësirë jo triviale invariante, atëherë $M = \{0\}$ ose $M = H$. Nëse $M = H$, atëherë T është izometri. Pasi që izometritë kanë nënhapësira invariante, atëherë M nuk mund të jetë H . Prandaj, mbetet që $M = \{0\}$. Nga këtu rrjedh $\|Tx\| < \|x\|$, për çdo vektor jo zero $x \in H$. Kjo tregon se T është kontraksion i vërtetë.

2). Le të jetë T kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Nga teorema e mësipërme kemi se D është kontraksion, $\{D^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon fuqishëm te projeksioni P , dhe $T^*T^kP = O$. Prandaj, $PT^{*k}T = O$. Supozojmë se T nuk ka nënhapësirë invariante triviale. Pasi $\ker(P)$ është nënhapësirë invariante jo zero për T , në qoftë se $PT^{*k}T = O$ dhe $T \neq O$, atëherë rrjedh $\ker(P) = H$. Atëherë, $P = O$. Kjo tregon se $\{D^n\}_{n=1}^\infty$ konvergjon fuqishëm te operatori O . Prandaj, D është kontraksion fuqishëm stabil. Pasi që D është operator i vetë-adjunguar, atëherë $D \in C_{00}$. $\square$

Rrjedhim 4.4.5. [56] *Le të jetë T kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Nëse T nuk ka nënhapësirë invariante jo triviale, atëherë T dhe operatori jonegativ*

$$D = T^{*k}(|T|^2 - |T^*|^2)T^k$$

janë kontraksione të vërteta.

Vërtetim. Se T është kontraksion i vërtetë, rrjedh nga teorema e mësipërme. Dimë se një operator i vetë-adjunguar është kontraksion i vërtetë, atëherë dhe vetëm atëherë, kur ai është kontraksion C_{00} . Prandaj, nga teorema e mësipërme kemi se D është kontraksion i vërtetë. $\square$

Operatori T quhet komplet jo unitar (k.j.u) nëse ngushtimi i operatorit T në çdo nënhapësirë të mbyllur T -invariante të hapësirës H është operator jo unitar.

Përkufizim 4.4.4. Nëse kontraksioni T është shumë direkte e një operator unitar dhe një operator C_0 (k.j.u), atëherë themi se T ka dekompozimi të tipit-Wold.

Përkufizim 4.4.5. [32] Për operatorin $T \in L(H)$ themi se plotëson vetinë komutative të Fuglede-Putnam-it, (shkurt: vetinë PF) nëse $T^*X = XJ$ për çdo $X \in L(K, H)$ dhe çdo izometri $J \in L(K)$, të tillë që $TX = XJ^*$.

Lemë 4.4.6. [30, 76] *Le të jetë T kontraksion. Kushtet e mëposhtme janë ekuivalente:*

1. *Për çdo varg të kufizuar $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \subset H$ të tillë që $Tx_{n+1} = x_n$, vargu $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ është konstant,*
2. *T ka dekompozimi të tipit-Wold,*
3. *T plotëson vetinë PF.*

Duggal dhe Cubrusly në [30] kanë vërtetuar: çdo kontraksion k -paranormal ka dekompozimin e tipit-Wold. P. Pagacz në [76] ka vërtetuar faktin e njëjtë, si dhe ka vërtetuar gjithashtu se çdo operator k -*-paranormal ka dekompozimin e tipit-Wold. Ne këtu do të bëjmë zgjerimin e kësaj vetie për operatorët kontraksion nga $\mathcal{QA}^*(k)$.

Teoremë 4.4.7. [56] *Le të jetë T kontraksion dhe operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Atëherë, T ka dekompozim të tipit-Wold.*

Vërtetim. Pasi që operatori T është kontraksion, vargu zvogëlues $\{T^n T^{*n}\}_{n=1}^{\infty}$ konvergjon fuqishëm te një kontraksion jonegativ. Prandaj mund të shënojmë

$$S = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} T^n T^{*n} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Operatorët T dhe S plotësojnë barazimin $T^* S^2 T = S^2$. Po ashtu $0 \leq S \leq I$ dhe S është operator i vetë-adjunguar. Nga [34], rrjedh se ekziston izometria $V : \overline{S(H)} \rightarrow \overline{S(H)}$ e tillë që $VS = ST^*$. Prandaj, $SV^* = TS$ dhe $\|SV^m x\| \rightarrow \|x\|$ për çdo $x \in \overline{S(H)}$. Izometria V mund të zgjerohet në një izometri në H , të cilën gjithashtu po e shënojmë me V .

Për $x \in \overline{S(H)}$, përkufizojmë $x_n = SV^n x$ për $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atëherë, për çdo numër të plotë jonegativ m , marrim

$$T^m x_{n+m} = T^m SV^{m+n} x = SV^{*m} V^{m+n} x = SV^n x = x_n,$$

dhe për çdo $m \leq n$ kemi

$$T^m x_n = x_{n-m}.$$

Le të jetë T operator k -kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Atëherë, për vektorin jotrivial $x \in \overline{S(H)}$ kemi

$$\begin{aligned} \|x_n\|^4 &= \|T^k x_{n+k}\|^4 \\ &= \langle T^* T T^{k-1} x_{n+k}, T^{k-1} x_{n+k} \rangle^2 \\ &\leq \|T^* T^k x_{n+k}\|^2 \|T^{k-1} x_{n+k}\|^2 \\ &= \langle T^{*k} |T^*|^2 T^k x_{n+k}, x_{n+k} \rangle^2 \|x_{n+1}\|^2 \\ &\leq \langle T^{*k} |T|^2 T^k x_{n+k}, x_{n+k} \rangle^2 \|x_{n+1}\|^2 \\ &\leq \langle |T|^2 T^k x_{n+k}, T^k x_{n+k} \rangle^{\frac{1}{2}} \|T^k x_{n+k}\|^{2(1-\frac{1}{2})} \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \|T^{k+2} x_{n+k}\| \|T^k x_{n+k}\| \|x_{n+1}\|^2 \\ &= \|x_{n-2}\| \|x_n\| \|x_{n+1}\|^2 \end{aligned}$$

Pra,

$$\|x_n\|^3 \leq \|x_{n-2}\| \|x_{n+1}\|^2.$$

Tani nga një formulë e njohur për të mesmet aritmetike dhe gjeometrike kemi

$$\|x_n\| \leq \|x_{n-2}\|^{\frac{1}{3}} \|x_{n+1}\|^{\frac{2}{3}} \leq \frac{1}{3} (\|x_{n-2}\| + 2\|x_{n+1}\|).$$

Prej nga rrjedh

$$2(\|x_{n+1}\| - \|x_n\|) \geq \|x_n\| - \|x_{n-2}\| = (\|x_n\| - \|x_{n-1}\|) + (\|x_{n-1}\| - \|x_{n-2}\|).$$

Vëmë

$$b_n = \|x_n\| - \|x_{n-1}\|,$$

dhe do të marrim

$$(4.4.1) \quad 2b_{n+1} \geq b_n + b_{n-1}.$$

Pasi $x_n = Tx_{n+1}$, marrim

$$\|x_n\| = \|Tx_{n+1}\| \leq \|x_{n+1}\| \text{ për çdo } n \in \mathbb{N}.$$

Nga ku shohim se vargu $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ është rritës. Nga,

$$SV^n = SV^*V^{n+1} = TSV^{n+1}$$

marrim

$$\|x_n\| = \|SV^n x\| = \|TSV^{n+1}x\| \leq \|SV^{n+1}x\| \leq \|x\|,$$

për çdo $x \in \overline{S(H)}$ dhe $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Atëherë, vargu $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ është i kufizuar. Nga kjo rrjedh se $b_n \geq 0$ dhe $b_n \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$.

Duhet të tregojmë se $b_n = 0$ për çdo numër natyral n . Supozojmë të kundërtën, se ekziston numri natyral $i \geq 1$ ashtu që $b_i > 0$. Duke përdorur jobarazimin (4.4.1) marrim $b_{i+1} > 0$ dhe $b_{i+2} > 0$. Prandaj, ekziston $\epsilon > 0$ i tillë që $b_{i+1} > \epsilon$ dhe $b_{i+2} > \epsilon$. Nga kjo, dhe duke përdorur prapë jobarazimin (4.4.1), nga induksioni matematik rrjedh $b_n > \epsilon$ për çdo $n > i$, gjë që nuk është e mundur. Prandaj, mbetet që $b_n = 0$ për çdo $n \in \mathbb{N}$. Pra, $\|x_{n-1}\| = \|x_n\|$ për të gjithë $n \geq 1$, që tregon se vargu $\{\|x_n\|\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ është varg konstant.

Nga Lema 4.4.6 rrjedh se T ka dekompozimi të tipit-Wold.

□

Për operatorin $T \in L(H)$ dhe vektorin $x \in H$, bashkësia $\{T^n x\}_{n=0}^{\infty}$ quhet orbitë e vektorit x lidhur me operatorin T . Simbolikisht shënohet me $\mathcal{O}(x, T)$.

Përkufizim 4.4.6. Le të jetë $T \in L(H)$.

1. Nëse mbështjellësi linear i orbitës $\mathcal{O}(x, T)$ është i dendur sipas normës në H , atëherë x quhet vektor ciklik për operatorin T , dhe T quhet operator ciklik.

2. Nëse orbita $\mathcal{O}(x, T)$ është e dendur sipas normës në H , atëherë x quhet vektor hiperciklik për operatorin T , ndërsa operatori T quhet hiperciklik.

4. Operatori T quhet superciklik në qoftë se ekziston vektori $x \in H$ i tillë që bashkësia

$$\mathbb{C}\mathcal{O}(x, T) = \{\lambda T^n x : \lambda \in \mathbb{C}, n = 0, 1, 2, \dots\},$$

është e dendur sipas normës në H .

Teoremë 4.4.8. [56] *Le të jetë $T \in L(H)$ operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ i tillë që $\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$. Nëse inversi i operatorit T është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë T nuk është operator superciklik.*

Vërtetim. Le të jetë $T \in L(H)$ operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Pasi që

$$\sigma(T) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\},$$

atëherë T është operator invertibil. Nga [71] rrjedh se T është normaloid, pra $\|T\| = r(T) = 1$. Nga supozimi kemi se $T^{-1} \in \mathcal{Q}(\mathcal{A}^*)$. Prandaj, $\|T^{-1}\| = 1$. Rrjedhimisht, T është operator unitar. Pasi që operatorët unitar në hapësirat e Hilbert-it me dimension të pafundmë nuk mund të jenë operatorë superciklik, atëherë T nuk është operator superciklik. $\square$

Vërejtje 4.4.1. Kushti që operatori invers i operatorit T të jetë kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ nuk mund të largohet nga Teorema 4.4.8, sepse ekzistojnë operatorë invertibil që janë operatorë kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, por inversi i tyre nuk është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Këtë e tregojmë me shembullin e mëposhtëm.

Marrim vargun e kufizuar të numrave kompleks $\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$, (që quhet vargu i peshave) dhe le të jetë $H = l_2$, hapësira e Hilbert-it me dimension të pafundmë, me bazën kanonike $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Përkufizojmë operatorin T me anë të

$$Te_n = \alpha_n e_{n+1},$$

për çdo $n \in \mathbb{Z}$, të cilin e quajmë operator i zhvendosjes së dyanshme me peshë.

Lemë 4.4.9. [56] *Le të jetë T operator i zhvendosjes së dyanshme me vargun e peshave $\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Operatori T është kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur*

$$|\alpha_n|^2 \leq |\alpha_{n+1}| |\alpha_{n+2}|,$$

për çdo $n \in \mathbb{Z}$.

Lemë 4.4.10. *Le të jetë T operatori jo zero i zhvendosjes së dyanshme me vargun e peshave $\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$. Operatori T^{-1} është kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur*

$$|\alpha_{n-1}|^2 \geq |\alpha_{n-2}| |\alpha_{n-3}|,$$

për çdo $n \in \mathbb{Z}$.

Shembull 4.4.11. [56] *Marrim operatorin e zhvendosjes së dyanshme T me vargun e peshave $\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$, të dhënë me relacionin:*

$$\alpha_n = \begin{cases} 1 & \text{if } n \leq 1 \\ 2 & \text{if } n = 2 \\ 1 & \text{if } n = 3 \\ 4 & \text{if } n = 4 \\ 1 & \text{if } n = 5 \\ 16 & \text{if } n \geq 6. \end{cases}$$

Nga Lema 4.4.9 rrjedh se T është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$. Pasi që $\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\}$ është varg i kufizuar i numrave pozitiv që plotësojnë kushtin $\inf\{\alpha_n : n \in \mathbb{Z}\} > 0$, atëherë T është operator invertibil, [23, Proposition II. 6.8]. Mirëpo, nga Lema 4.4.10 për $n = 4$ rrjedh se T^{-1} nuk është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$.

Lemë 4.4.12. [74, Theorem 6] Nëse T është operator superciklik dhe invertibil, atëherë edhe T^{-1} është operator superciklik.

Lemë 4.4.13. [74, Corollary 3] Nëse T është kontraksion dhe $\|T^n x\| \not\rightarrow 0$ për çdo $x \neq 0$, atëherë T nuk është superciklik.

Teoremë 4.4.14. [56] Le të jetë $T \in L(H)$ operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$ dhe $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Nëse T^* është operator hiperciklik dhe për çdo nënhapësirë hiperinvariante $M \subseteq H$ të operatorit T , inversi i operatorit $T|_M$, sa herë ekziston është normaloid, atëherë

$$\sigma(T|_M) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset \text{ dhe } \sigma(T|_M) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset.$$

Vërtetim. Supozojmë se T^* është operator hiperciklik. Atëherë, ekziston vektori $x \in H$ i tillë që $\overline{\{(T^*)^n x\}_{n=0}^\infty} = H$. Le të jetë $S = T|_M$ për ndonjë nënhapësirë T -invariant dhe le të jetë P projeksioni ortogonal nga H mbi M . Pasi $(S^*)^n Px = P(T^*)^n x$ për çdo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, atëherë

$$\overline{\{(S^*)^n(Px)\}_{n=0}^\infty} = P\overline{\{(T^*)^n x\}_{n=0}^\infty} = P(H) = M,$$

që tregon se S^* është operator hiperciklik.

Nga Lema 4.4.13, marrim $\|S^*\| > 1$. Pasi që S është operator kuazi- $*$ -klasë $\mathcal{A}$, atëherë S është normaloid. Prandaj $r(T|_M) = \|S\| = \|S^*\| > 1$. Nga këtu rrjedh

$$\sigma(T|_M) \cap (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}) \neq \emptyset.$$

Duhet të tregojmë se $\sigma(T|_M) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset$. Supozojmë të kundërtën,

$$\sigma(T|_M) \subset (\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}).$$

Atëherë, $\sigma(S^{-1}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, dhe pasi që S^{-1} është normaloid, atëherë $\|S^{-1}\| = r(S^{-1}) \leq 1$. Pasi që S^* është operator hiperciklik, nga Lema 4.4.12 rrjedh se edhe $(S^*)^{-1}$ është operator hiperciklik, prandaj $\|(S^*)^{-1}\| > 1$. Këndeje kemi $\|S^{-1}\| = \|(S^*)^{-1}\| > 1$, që është kontradiksion. Prandaj, mbetet që

$$\sigma(T|_M) \cap \mathbb{D} \neq \emptyset.$$

□

Përfundim

Në këtë punim të doktoraturës kemi përkufizuar operatorët: k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, k -kuazi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal dhe absolut- (p, r) - $*$ -paranormal.

Për këto klasë të operatorëve janë studiuar vetitë bazike, vetitë spektrale si dhe rrjedhimet nga ato veti. Për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$ po ashtu kemi vërtetuar disa veti për nënhapësirën invariante.

Pastaj, kemi vërtetuar Teoremën e Weyl-it dhe versionet e saj për operatorët k -quasi- $*$ -paranormal dhe k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Po ashtu kemi vërtetuar Teoremën e Browder-it dhe versionet e saj për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$. Më tutje kemi treguar se spektri i operatorit, spektri i Weyl-it dhe spektri i Browder-it i kësaj klase është i vazhdueshëm. Një pikë të veçantë ia kemi kushtuar vetive spektrale për operatorët absolut- k^* -paranormal, teoremës spektrale si dhe Teoremës së Browder-it për këtë klasë të operatorëve.

Në vazhdim kemi vërtetuar teoremën: Prodhimi tensorial $T \otimes S$ është operator k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen njëri nga kushtet:

1. T dhe S janë operatorë k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$,
2. $T^{k+1} = O$ ose $S^{k+1} = O$,

si dhe kemi vërtetuar teoremën analoge për klasën e operatorëve $\mathcal{A}(k^*)$.

Kemi vazhduar me vërtetimin e Teoremës së Fuglede-Putnamit për operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}_n^*$, e cila është rrjedhim i vetive spektrale të kësaj klase të operatorëve. Ndërsa në fund të këtij punimi kemi treguar se operatorët k -kuazi klasë $\mathcal{A}^*$ e plotësojnë dekompozimin e tipit Wold.

Për këto klasë të operatorëve rekomandojmë të bëhen këto punime:

1. Të llogaritet spektri aproksimativ dhe llojet e spektrave tjerë të këtyre klasëve të operatorëve.
2. Të studiohet vetia e Bishopit për operatorët $*$ -paranormal. Për këtë veti janë bërë shumë punime, mirëpo asnjë prej tyre nuk e ka mbyllur vetinë e Bishopit për operatorët $*$ -paranormal, prej nga do të rrjedh se kjo veti plotësohet për klasët e operatorëve të cilat i kemi përkufizuar ne.
3. Të studiohen nën cilat kushte këto klasë të operatorëve kanë orbitat e vektorëve të dendura, pra të tregohet se a mund këto klasë të operatorëve të jenë hiperciklik, superciklik, N-ciklik, etj.
4. Të studiohet Teorema e Berger-Shaw për këto klasë të operatorëve.

Conclusion

In this dissertation, we have defined these operator classes: k - class $\mathcal{A}_n^*$, k -quasi- $*$ -paranormal, (p, r, q) - $*$ -paranormal and absolute- (p, r) - $*$ -paranormal, and we have also studied their basic properties. Then, we have studied spectral properties of the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, k -quasi- $*$ -paranormal, particularly of p - $*$ -paranormal operators, as well as corollaries from these properties. Later, for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operator, we have proved some properties for the invariant subset.

Further, we have proved the Weyl's Theorem and its versions for the k -quasi- $*$ -paranormal operators. Next, we have worked on Weyl's Theorem for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, where we have also proved the Browder's Theorem and its versions for this class of operators. Moreover, we have shown that the spectrum, the Weyl and Browder's spectrum of this class is continuous. We have continued with spectral properties for absolute- k - $*$ -paranormal operators, the spectral theorem and with the Browder's Theorem for this class of operators.

In addition, we have proved the theorem: The tensorial product $T \otimes S$ is k -quasi class operator $\mathcal{A}_n^*$ if and only if one of the conditions holds:

1. T and S are k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$ operators,
 2. $T^{k+1} = O$ or $S^{k+1} = O$,
- as well as the analogue theorem for the class $\mathcal{A}(k^*)$.

Finally, we have given the Fuglede-Putnam theorem for the k -quasi class $\mathcal{A}_n^*$, which is a corollary of the spectral properties of this class of operators. In the end, we have shown that the k -quasi- $*$ -class $\mathcal{A}$ operators satisfy the decomposition of the Wold type. For these classes, we recommend these works to be done:

1. To be computed the approximative spectrum, and other spectra types of these operators' classes.
2. To be studied the Bishop's property for the $*$ -paranormal operator. Many paper works have been done for this property, however, none of them has closed the Bishop's property for $*$ -paranormal operators, from where it follows that this property is also fulfilled for the classes of operators that we defined.
3. To be studied the conditions under which these classes of operators have dense vector orbits, thus to be told whether these classes can be hypercyclic, supercyclic, N-cyclic, etc.
4. To be studied the Berger-Shaw theorem for these classes of operators.

Biografia dhe lista e punimeve

Jam i lindur më 21.02.1972 në fshatin Bellanicë, komuna e Malishevës. Shkollën fillore e kam kryer në vendlindje, ndërsa shkollën e mesme në Gjimnazin "Abdyl Frashëri" në Malishevë.

Në vitin shkollor 1992/1993 kam filluar studimet universitare, drejtimi i Matematikës në Fakultetin e Shkencave Matematiko-Natyrore pranë Universitetit të Prishtinës. Kam diplomuar në vitin 1996, dhe po të njëjtin vit kam filluar të punoj në Gjimnazin "Abdyl Frashëri" në Malishevë, në të cilin kam punuar deri më 31 gusht 2010.

Në vitin akademik 2006/2007 kam regjistruar studimet Master në FSHMN, Departamenti i Matematikës dhe Shkencave Kompjuterike, Drejtimi i Përgjithshëm, në të cilin kam diplomuar më 12 korrik 2011 duke mbrojtur me sukses temën e Masterit:

Teorema e Weylit në disa klasë të operatorëve,

dhe duke fituar titullin Master në Matematikë të përgjithshme.

Në vitin akademik 2009/2010 jam angazhuar që të mbaj ushtrime në disa lëndë në FSHMN, Departamenti i Matematikës dhe Shkencave Kompjuterike, ku vazhdoj edhe tani të punoj.

Në vitin akademik 2012/2013 kam regjistruar studimet e doktoraturës në Universitetin Politeknik të Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Matematikës, në Programin Analizë. Deri tani kam kryer provimet dhe kam përgatitur punimin e doktoraturës me titull:

Teorema e Weylit dhe vetitë spektrale në disa klasë të operatorëve.

Në bashkëpunim me mentorin tim, profesorin Naim L. Braha, kam botuar këto punime:

1. I. Hoxha, *Spectral Properties, Contractions and Fuglede-Putnam Theorem for $\mathcal{A}_n^*$ Operator*, International Journal of Mathematical Analysis, Vol.7, 2013, no.63, 3097-3108.
2. I. Hoxha and N. L. Braha, *A note on k -quasi- $*$ -paranormal operators*, Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:350.

3. I. Hoxha and N. L. Braha, *On k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^*$ Operators*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 6 Issue 1(2014), Pages 23-33.
4. N. L. Braha and I. Hoxha, *(p, r, q) -*-paranormal and absolute- (p, r) -*-paranormal operators*, Journal of Mathematical Analysis, Volume 4 Issue 3(2013), pages 14-22.
5. I. Hoxha and N. L. Braha, *Weyl's theorem, Tensor Product, Fuglede-Putnam Theorem and Continuity Spectrum for k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^*$ Operators*, Journal of the Korean Mathematical Society 51(2014), no.5, pp. 1089-1104.
6. I. Hoxha and N. L. Braha, *The k -quasi*-class $\mathcal{A}$ contractions have property **PF***, Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:433.
7. N. L. Braha, I. Hoxha and S. Mecheri, *On class $\mathcal{A}(k^*)$ operators*, Annals of Functional Analysis 6(2015), no 4, 90-106..
8. I. Hoxha, N. L. Braha and A. Tato, *Riesz idempotent and Weyl's theorem for k -quasi*-paranormal operators*, preprint.
9. N. L. Braha, I. Hoxha and K. Tanahashi, *Some properties of (p, k) -quasiposinormal operators*, Journal of Mathematical Analysis, Volume 6 Issue 2(2015), Pages 13-21.

Gjithashtu kam marrë pjesë në konferencat:

1. **The 1st International Conference On Research And Education-Challenger Towards the Future- ICRAE 2013**, të organizuar nga Universiteti i Shkodrës "Luigj Gurakuqi" të mbajtur më 24-25 maj 2013 në të cilën konferencë kam prezantuar punimin:

Spectral Properties of Quasi-Class $\mathcal{A}_n^$ Operators,*

i cili është botuar në revistën e këtij Universiteti.

link:<http://icrae2013.unishk.edu.al/>

2. **1st International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences IWBCMS - 2013**, të organizuar nga Universiteti i Elbasanit "Aleksander Xhuvani", Universiteti i Prishtinës dhe Universiteti Politeknik i Tiranës, të mbajtur më 30-31 maj dhe 1 qershor të vitit 2013, në të cilën konferencë kam prezantuar punimin:

On k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^$ Operators.*

link: <http://www.iwbcms.org/>

3. **Algerian-Turkish International Days on Mathematics**, të organizuar nga Fatih University- Istanbul, Turkey, të mbajtur më 12-14 shtator 2013, në të cilën konferencë kam prezantuar punimin:

On n --Perinormal Contractions and Hyper-Invariant Subspaces.*

link: <http://atim.fatih.edu.tr>

4. **International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2014)** të organizuar nga Ekrem Savas dhe të tjerë, të mbajtur më 6-9 nëntor në Antalya të Turqisë, në të cilën kam prezantuar punimin:

Riesz Idempotent and generalized Weyl's theorem for k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^$ Operators.*

link: <http://www.icrapam.org/index-2.html>

Literatura

- [1] P. Aiena, *Semi-Fredholm operators, perturbations theory and localized SVEP*, Merida, Venezuela, 2007.
- [2] P. Aiena, *Fredholm and Local Spectral Theory, with Applications to Multipliers*, Kluwer Academic Publisher, 2004.
- [3] P. Aiena, E. Aponte and E. Bazan, *Weyl type theorems for left and right polaroid operators*, Integral Equations and Operator Theory **66**(2010), 1-20.
- [4] P. Aiena and M. Berkani, *Generalized Weyl's theorem and quasi-affinity*, Studia Mathematica **198**(2010), 105-120.
- [5] P. Aiena and T. L. Miller, *On generalized a -Browder's theorem*, Studia Mathematica **180**(2007), 285-300.
- [6] M. Amouch, *Generalized a -Weyl's theorem and the SVEP*, Extracta Mathematicae Vol.**21**(2006), No.1, 51-65.
- [7] A. Aluthge and D. Wang, *The joint approximate point spectrum of an operator*, Hokkaido Mathematical Journal **31**(2002), 187-197.
- [8] A. Aluthge, *On p -hyponormal operators for $0 < p < 1$* , Integral Equations and Operator Theory **13**(1990), No.3, 307-315.
- [9] T. Ando, *Operators with a norm condition*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **33**(1972), 169-178.
- [10] S. C. Arora and J. K. Thukral, *On a class of operators*, Glasnik Matematički. **21**(1986), 381-386.
- [11] S. K. Berberian, *Approximate proper vectors*, Proceedings of the American Mathematical Society **10**(1959), 175-182.
- [12] S. K. Berberian, *Note on a theorem of Fuglede and Putnam*, Proceedings of the American Mathematical Society **10**(1959), 175-182.
- [13] M. Berkani and J. Koliha, *Weyl type theorems for bounded operators*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **69**(2003), no. 1-2, 359-376.

- [14] M. Berkani, *Index Of B-Fredholm operators and generalization of a Weyl theorem*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 130, no.6(2001), 1717-1723.
- [15] M. Berkani, *On a class of quasi-Fredholm operators*, Integral Equations and Operator Theory **34**(1999), 244-249.
- [16] M. Berkani and A. Arroud, *Generalized Weyl's theorem and hyponormal operators*, Journal of the Australian Mathematical Society **76**(2004), 291-302.
- [17] N. L. Braha, I. Hoxha and S. Mecheri, *On class $\mathcal{A}(k^*)$ operators*, Annals of Functional Analysis **6**(2015), no 4, 90-106.
- [18] N. L. Braha and I. Hoxha, *(p, r, q) -*-paranormal and absolute- (p, r) -*-paranormal operators*, Journal of Mathematical Analysis, Volume 4 Issue **3**(2013), pages 14-22.
- [19] A. Brown and C. Pearcy, *Spectra of tensor products of operators*, Proceedings of the American Mathematical Society **17**(1966), 162-166.
- [20] M. Cho and T. Yamazaki, *An operator transform from class $\mathcal{A}$ to the class of hyponormal operators and its application*, Integral Equations and Operator Theory **53**(2005), no.4, pp. 497-508.
- [21] L. A. Coburn, *Weyl's theorem for nonnormal operators*, The Michigan Mathematical Journal **13**(1966), 285-288.
- [22] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [23] J. B. Conway, *The Theory of Subnormal Operators*, Mathematical Surveys and Monographs **36**, American Mathematical Society.
- [24] R. E. Curto and Y. M. Han, *Generalized Browder's and Weyl's theorems for Banach space operators*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **336**(2007), 1424-1442.
- [25] C. Kubrusly, *The elements of Operator Theory*, Second Edition, Birkhäuser, 2011.
- [26] S. V. Djordjević and D. S. Djordjević, *Weyl's theorems, continuity of the spectrum and quasihyponormal operators*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **64**(1998), 259-269.
- [27] B. P. Duggal, I. H. Jeon and I. H. Kim, *On *-paranormal contractions and properties for *-class $\mathcal{A}$ operators*, Linear Algebra and Its Applications **436**(2012), no. 5, 954-962.

- [28] B. P. Duggal, I. H. Jeon and I. H. Kim, *Continuity of the spectrum on a class of upper triangular operator matrices*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **370**(2010), 584-587.
- [29] B. P. Duggal, I. H. Jeon and C. S. Kubrusly, *Contractions satisfying the absolute value property $|A|^2 \leq |A^2|$* , Integral Equations and Operator Theory **49**(2004), 141-148.
- [30] B. P. Duggal and C. S. Kubrusly, *Paranormal contractions have property PF*, Far East Journal of Mathematical Sciences **14**(2004), 237-249.
- [31] B. P. Duggal, I. H. Jeon and I. H. Kim, *On quasi-class $\mathcal{A}$ contractions*, Linear Algebra and Its Applications **436**(2012), 3562-3567.
- [32] B. P. Duggal, *On Characterising contractions with C_{10} pure part*, Integral Equations and Operator Theory **27**(1997), 314-323.
- [33] B. P. Duggal, *Hereditarily polaroid operators, SVEP and Weyl's theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **340**(2008), no.1, 366-373.
- [34] E. Durszt, *Contractions as restricted shifts*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **48**(1985), 129-134.
- [35] B. Fuglede, *A Commutativity theorem for normal operator*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **36**(1950), 35-40.
- [36] M. Fujii and R. Nakamoto, *Some classes operators derived from Furuta Inequality*, Scientiae Mathematicae, Vol.3. **1**(2000), 87-94.
- [37] M. Fujii, S. Izumino and R. Nakamoto, *Classes of operators determined by the Heinz-Kato-Furuta inequality and the Hölder-McCarthy inequality*, Nihonkai Mathematical Journal **5** (1994), 61-67.
- [38] T. Furuta, *On The Class of Paranormal Operators*, Proceedings of the Japan Academy **43**(1967), 594-598.
- [39] T. Furuta, *An Extension of the Fuglede-Putnam Theorem to subnormal operators using Hilbert-Schmidt norm inequality*, Proceedings of the American Mathematical Society, Volume 81, no. **2**(1981) 240-242.
- [40] T. Furuta, M. Ito and T. Yamazaki, *A subclass of paranormal operators including class of log-hyponormal and several classes*, Scientiae Mathematicae **1**(1998), no. 3, 389-403.
- [41] T. Furuta, *On the polar decomposition of an operator*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **46**(1983), no.1-4, 261-26.
- [42] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor and Francis, London, New York, 2002.

- [43] F. Gao and X. Li, *On $\ast$ -class $\mathcal{A}$ contractions*, Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:239 doi:10.1186/1029-242X-2013-239.
- [44] F. Gao and X. Li, *Tensor Products and the Spectral Continuity for k -quasi- $\ast$ -class $\mathcal{A}$ Operators*, Banach Journal of Mathematical Analysis **8**(2014), no. 1, 47-54.
- [45] F. Gao and X. C. Fang, *Generalized Weyl's theorem and spectral continuity for quasi-class $(\mathcal{A}, k)$ operators*, Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged) **78**(2012), 241-250.
- [46] I. Gohberg, S. Goldberg and M. A. Kashoek, *Basic Classes of Linear Operators*, Basel, 2003.
- [47] I. Gohberg, S. Goldberg and M. A. Kashoek, *Classes of Linear Operators*, Vol. I. Basel, 1990.
- [48] P. R. Halmos, *A Hilbert Space Problem Book*, Springer-Verlag, New York, 1982.
- [49] J. K. Han, H. Y. Lee and W. Y. Lee, *Invertible completions of 2×2 upper triangular operator matrices*, Proceedings of the American Mathematical Society **128**(2000), no.1, pp. 119-123.
- [50] F. Hansen, *An operator inequality*, Mathematische Annalen **246**(1980), 249-250.
- [51] E. Heinz, *Beitrage zur Störungstheorie der Spektralzerlegung*, Mathematische Annalen **123**(1951), 415-438.
- [52] H. Heuser, *Functional Analysis*, Marcel Dekker, New York, 1982.
- [53] I. Hoxha and N. L. Braha, *On k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^*$ Operators*, Bulletin of Mathematical Analysis and Applications, Volume 6 Issue **1**(2014), Pages 23-33.
- [54] I. Hoxha and N. L. Braha, *A note on k -quasi- $\ast$ -paranormal operators*, Journal of Inequalities and Applications 2013, 2013:350.
- [55] I. Hoxha and N. L. Braha, *Weyl's theorem, Tensor Product, Fuglede-Putnam Theorem and Continuity Spectrum for k -Quasi Class $\mathcal{A}_n^*$ Operators*, Journal of the Korean Mathematical Society **51**(2014), No. 5, pp. 1089-1104.
- [56] I. Hoxha and N. L. Braha, *The k -quasi- $\ast$ -class $\mathcal{A}$ contractions have property $\mathbf{PF}$* , Journal of Inequalities and Applications 2014, 2014:433.
- [57] I. Hoxha, N. L. Braha and A. Tato, *Riesz idempotent and Weyl's theorem for k -quasi- $\ast$ -paranormal operators*, preprint.
- [58] I. S. Hwang and W. Y. Lee, *The spectrum is continuous on the set of p -hyponormal operators*, Mathematische Zeitschrift **235**(2000), 151-157.

- [59] I. H. Jeon and I. H. Kim, *On operators satisfying $T^*|T^2|T \geq T^*|T|^2T$* , Linear Algebra and Its Applications **418**(2006), 854-862.
- [60] I. H. Jeon and I. H. Kim, *On k -quasi class $\mathcal{A}$ contractions*, Korean Journal of Mathematics **22**(2014), No.1, pp. 85-89.
- [61] I. H. Kim, *Weyl's theorem and tensor product for operators satisfying $T^{*k}|T^2|T^k \geq T^{*k}|T|^2T^k$* , Journal of the Korean Mathematical Society **47**(2010), No.2, 351-361.
- [62] I. H. Kim, *On spectral continuities and tensor products of operators*, Journal of the Chungcheong Mathematical Society, Volume **24**, No.1, March 2011.
- [63] C. S. Kubrusly and N. Levan, *Proper contractions and invariant subspace*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences **28**(2001), 223-230.
- [64] C. S. Kubruslu, *A concise introduction to tensor product*, Far East Journal of Mathematical Science **22**(2006), 137-174.
- [65] R. Lange and S. Wang, *New approaches in spectral decomposition*, Contemporary Mathematics **128**, American Mathematical Society, 1992.
- [66] K. B. Laursen and M. M. Neumann, *An introduction to Local Spectral Theory*, London Mathematical Society Monographs, Oxford 2000.
- [67] W. Y. Lee, *Lecture notes on Operator Theory*, Seoul-Korea, 2008.
- [68] K. Löwner, *Über monotone Matrixfunktionen*, Mathematische Zeitschrift **38**(1934), 177-216.
- [69] C. A. McCarthy, *C_p* , Israel Journal of Mathematics **5**(1967), 249-271.
- [70] S. Mecheri and A. Uchiyama, *An extension of the Fuglede-Putnam's theorem to class $\mathcal{A}$ operators*, Mathematical Inequalities and Applications **13**(2010), no. 1, 57-61.
- [71] S. Mecheri, *Isolated points of spectrum of k -quasi- $*$ -class $\mathcal{A}$ operators*, Studia Mathematica **208**(2012), 87-96.
- [72] S. Mecheri, *Bishops property β and Riesz idempotent for k -quasi-paranormal operators*, Banach Journal of Mathematical Analysis **6** (2012), No.1, 147-154.
- [73] S. Mecheri, *On quasi $*$ -paranormal operators*, Annals of Functional Analysis **3**(2012), No.1, 86-91.
- [74] V. G. Miller, *Remarks on finitely hypercyclic and finitely supercyclic operators*, Integral Equations and Operator Theory **29**(1997), 110-115.
- [75] J. D. Newburgh, *The variation of Spectra*, Duke Mathematical Journal **18**(1951), 165-176.

- [76] P. Pagacz, *On Wold-type decomposition*, Linear Algebra and Its Applications **436**(2012), 3065-3071.
- [77] S. Panayappan and A. Radharamani, *A Note on p -*-Paranormal Operators and Absolute k -*-Paranormal Operators*, International Journal of Mathematical Analysis **2**(2008), no.25-28, 1257-1261.
- [78] S. M. Patel, *Contributions to the study of spectraloid operators*, Ph.D. Thesis, Delhi University, 1974.
- [79] C. R. Putnam, *On Normal operators on Hilbert space*, American Journal of Mathematics **73**(1951), 357-362.
- [80] V. Rakočević, *Approximate point spectrum and commuting compact perturbations*, Glasgow Mathematical Journal **28**(1986), 193-198.
- [81] V. Rakočević, *Operators obeying a -Weyl's theorem*, Revue Roumaine de Mathematique Pures et Appliquees **34**(1989), no.10, 915-919.
- [82] M. H. M. Rashid and M. S. M. Noorani, *On relaxation normality in the Fuglede-Putnam's theorem for a quasi-class $\mathcal{A}$ operators*, Tamkang Journal of Mathematics **40**(2009), no.3, 307-312.
- [83] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.
- [84] C. S. Ryoo and P. Y. Sik, *k^* -paranormal operators*, Pusan Kyongnam Mathematical Journal **11**(1995), no.2, 243-248.
- [85] T. Saito, *Hyponormal operators and related topics*, Lecture notes in Mathematics, Springer-Verlag, **247**(1971).
- [86] S. Sanchez-Perales and V. A. Cruz-Barriguet, *Continuity of approximate point spectrum on the algebra $B(X)$* , Communications of the Korean Mathematical Society **28**(2013), no.3, pp. 487-500.
- [87] J. L. Shen, F. Zuo and C. S. Yang, *On Operators Satisfying $T^*|T^2|T \geq T^*|T^*|^2T$* , Acta Mathematica Sinica, English Series, Nov., Vol. **26**(2010), no.11, pp. 2109-2116.
- [88] J. Stochel, *Seminormality of operators from their tensor products*, Proceedings of the American Mathematical Society **124**(1996), 435-440.
- [89] G. Stampfli, *Hyponormal operators and spectral density*, Transactions of the American Mathematical Society, **117**(1965), 469-476.
- [90] B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, *Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space*, North-Holland, Amsterdam, 1970.
- [91] K. Tanahashi, *On log-hyponormal operators*, Integral Equations and Operator Theory **34**(1999), 364-372.

- [92] K. Tanahashi and A. Uchiyama, *A note on $*$ -paranormal operators and related classes of operators*, Bulletin of the Korean Mathematical Society **51**(2014), no.2, pp. 357-371.
- [93] A. Uchiyama and K. Tanahashi, *Fuglede-Putnam's theorem for p -hyponormal or log-hyponormal operators*, Glasgow Mathematical Journal **44**(2002), 397-410.
- [94] A. Uchiyama, *Weyl's theorem for class $\mathcal{A}$ operators*, Mathematical Inequalities and Applications **4**(2001), no.1, pp. 143-150.
- [95] A. Uchiyama, *On the isolated points of the spectrum of paranormal operators*, Integral Equations and Operator Theory, **vol. 55**(2006), no.1, pp. 145-151.
- [96] T. T. West, *The decomposition of Riesz operators*, Proceedings of the London Mathematical Society **16**(1966), 737-752.
- [97] H. Weyl, *Über beschränkte quadratische Formen, deren Differenz vollsteig ist*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **27**(1909), 373-392.
- [98] D. Xia, *Spectral Theory of Hyponormal Operators*, Birkhauser, Switzerland 1983.
- [99] T. Yamazaki and M. Yanagida, *A further generalization of paranormal operators*, Scientiae Mathematicae **3**(2000), no.1, 23-31.
- [100] J. Yuan and Z. Gao, *Weyl Spectrum of Class $A(n)$ and n -paranormal Operators*, Integral Equations and Operator Theory **60**(2008), 289-298.
- [101] Q. Zeng and H. Zhong, *On (n, k) -quasi- $*$ -paranormal operators*, arXiv 1209.5050v1 [math. FA], 2012.
- [102] H. Zguitti, *A note on generalized Weyl's theorem*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **316**(2006), 373-381.
- [103] L. Zhang, A. Uchiyama, K. Tanahashi and M. Cho, *On polynomially $*$ -paranormal operators*, Functional Analysis Approximation and Computation, **5:2**(2013), 11-16.