

REPUBLIKA E SHQIPERISE

UNIVERSITETI POLITEKNIK – TIRANE

FAKULTETI INXHINIERISE MATEMATIKE & INXHINIERISE FIZIKE

Departamenti i Inxhinierise Matematike

**PROGRAMI I STUDIMIT:
Statistikë dhe Kërkime Operacionale**

TEZË DOKTORATURE

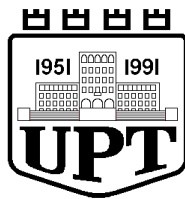
**NDËRTIMI DHE VLERËSIMI I MODELEVE
STATISTIKORE PËR SHPËRNDARJEN E DËMEVE QË
LINDIN NGA KONTRATAT E SIGURIMIT TË JETËS E
TË JO – JETËS**

Doktoranti:

Oriana ZAÇAJ

Udhëheqësi:

PROF. DR. Shpëtim SHEHU



REPUBLIKA E SHQIPERISE
UNIVERSITETI POLITEKNIK – TIRANE
FAKULTETI INXHINIERISE MATEMATIKE & INXHINIERISE FIZIKE
Departamenti i Inxhinierise Matematike

DISERTACION

i

Paraqitur nga

M.Sc. Oriana Zaçaj

Për marrjen e gradës

Doktor

Specialiteti Statistikë dhe Kerkime Operacionale

Tema: Ndërtimi dhe vlerësimi i modeleve që statistikore për shpërndarjen e
dëmeve që lindin nga kontratat e sigurimit të jetës dhe të jo – jetës

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Shpëtim Shehu

Mbrohet më datë ____/____/2015 para jurisë:

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 1. <u>Prof. Dr. Shpëtim LEKA</u> | Kryetar |
| 2. <u>Prof.Asoc. Luela PRIFTI</u> | Anëtar, Oponent |
| 3. <u>Prof.Dr. Lulëzim HANELLI</u> | Anëtar |
| 4. <u>Prof. Dr. Llukan PUKA</u> | Anëtar, Oponent, i jashtëm |
| 5. <u>Prof.Asoc. Valentina SINAJ</u> | Anëtar, i jashtëm |

PËRMBAJTJA

	Falenderime	iv
	HYRJE	v
Kapitulli 1	MODELIMI I DËMEVE NË SIGURIMIN E JO-JETËS	1
1.1	Modele të dëmeve	2
1.1.1	Shpërndarja e frekuencës së dëmeve	2
1.1.1.1	Përmbledhje e statistikës	3
1.1.1.2	Disa shpërndarje diskrete	4
1.1.1.3	Disa metoda për ndërtimin e shpërndarjeve të reja	8
1.1.2	Shpërndarja e ashpërsisë së dëmit	11
1.1.2.1	Pritja matematike e funksionit të një ndryshoreje rasti	11
1.1.2.2	Shpërndarja e funksionit të një ndryshoreje rasti	12
1.1.2.3	Disa shpërndarje të vazhdueshme për ashpërsinë e dëmeve	12
1.1.2.4	Metodat për krijimin e shpërndarjeve të reja	14
1.1.2.5	Tiparet e zgjatimeve në skaje të ashpërsisë së dëmit	16
1.1.3	Modele të dëmeve totale	17
1.1.3.1	Modelet individuale e kolektive të rrezikut	17
1.1.3.1.1	Modeli individual i rrezikut	18
1.1.3.1.2	Modeli i rrezikut kolektiv	20
1.2	Ndërtimi dhe vlerësimi i modelit	23
1.2.1	Njohuri bazë për vlerësimin i modelit	24
1.2.1.1	Vlerësimi	24
1.2.2	Vlerësimi joparametrik i modelit	25
1.2.2.1	Vlerësimi mbi të dhëna individuale	26
1.2.2.1.1	Shpërndarja empirike	26
1.2.2.1.2	Vlerësimi sipas Kernel për densiteti	28
1.2.2.2	Vlerësimi mbi të dhënat e grupuara	29
1.2.3	Modeli parametrik i vlerësimit	30
1.2.3.1	Metoda e momenteve dhe e percentileve	30
1.2.3.2	Metoda e vlerësimit të Bayes	33
1.2.3.3	Metoda e vlerësimit të fqinjësisë maksimale	36
1.2.3.4	Modelet shumëpërmasore	40
1.2.3.4.1	Modeli i përgjithshëm linear	40
1.2.3.5	Modelimi i funksioneve shumëpërmasorë duke përdorur Kopulas	40
1.2.4	Përzgjedhja dhe vlerësimi i modelit	43
1.2.4.1	Përdorimi i metodave grafike	44
1.2.4.2	Testet e moskorrektësisë dhe kontrollet diagnostikuese	44
1.2.4.3	Kriteret e informacionit për përzgjedhjen e modelit	48
1.3	Ndërtimi dhe vlerësimi i modeleve statistikore për portofolin e sigurimit të përgjegjësisë ndaj palëve të treta të përdoruesve të mjeteve motorrike brënda territorit të Republikës së Shqipërisë	48
1.3.1	Përmbledhje e sigurimit përgjegjësisë ndaj palëve të treta të përdoruesve të mjeteve motorrike	48
1.3.2	Analiza e totalit të dëmeve	49
1.3.2.1	Shpërndarja e ashpërsisë së dëmeve	49
1.3.2.2	Shpërndarja e frekuencës së dëmeve	51
1.3.3	Analiza e ashpërsisë së dëmeve duke analizuar dëmet individuale pasurore e trupore më vehte	54
1.3.3.1	Analiza mbi të dhënat për gjithë periudhën 2005 – 2014	54

1.3.3.1.1	Dëmet trupore	54
1.3.3.1.2	Dëmet pasurore	56
1.3.3.2	Analiza mbi të dhënat e vlerës së dëmeve pasurore për seicilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014 të ndarë më vehte	59
1.4	Përfundime	102
Kapitulli 2	KRIJIMI I NJË METODOLOGJIE PËR PËRLLOGARITJEN E REZERVAVE TEKNIKE TË DËMEVE TË SHOQËRISË SË SIGURIMIT TË JO – JETËS	106
2.1	Metodat e shkallëzimit zinxhir	106
2.1.1	Llogaritja e rezervës së dëmeve të sigurimit MTPL me metodën e shkallëzimit zinxhir	108
2.2	Metoda bootstrap	110
2.3	Përfundime	115
Kapitulli 3	SIGURIMI I JETËS	117
3.1	Sigurimi i Jetës - ç'është?	117
3.1.1	Fusha e mbulimit	117
3.1.2	Rëndësia e sigurimit të Jetës	117
3.1.3	Roli i sigurimeve të jetës në zhvillimin ekonomik	119
3.2	Pamje e përgjithshme e sigurimit të Jetës	120
3.3	Llojet e policave të sigurimit të Jetës	121
3.3.1	Policat e Sigurimit të Jetës me Afat	121
3.3.2	Policat me Kursim	122
3.4	Kushtet për kryerjen e sigurimeve / karakteristikat e nevojshme për rrezikun e sigurueshëm	122
3.4.1	Numër i madh njësisë të pavarura dhe homogjene	123
3.4.1.1	Njësi të Pavarura	123
3.4.1.2	Njësi Homogjene	123
3.4.1.3	Numër i Madh Njësisë	123
3.4.2	Humbje aksidentale	125
3.4.3	Të dhëna të sakta për shumën e pagueshme	125
3.4.4	Prime ekonomikisht të pranueshme	125
3.4.4.1	Objektivat në llogaritjen e primit	126
3.4.4.1.1	Mjaftueshmëria	126
3.4.4.1.2	Të krahasueshme	126
3.4.4.1.3	Ekonomikisht të pranueshme	126
3.4.4.2	Elementët e primit	126
3.4.4.2.1	Shpenzimet e vdekshmërisë	127
3.4.4.2.2	Të ardhurat nga interesi	127
3.4.4.2.3	Shpenzimet e policës	127
3.4.4.2.4	Vijueshmëria	128
3.5	Sigurimi i Jetës me Kursim (Endowment)	129
3.5.1	Koncepti Matematik	129
3.5.2	Koncepti Ekonomik	130
3.6	Llogaritjet aktuariale të primeve e të rezervave matematike	130
3.6.1	E ardhmja për një person të moshës x	130
3.6.2	Funksionet bazë për llogaritjet aktuariale të sigurimit të jetës	130
3.6.3	Tabela e vdekshmërisë	145
3.6.4	Rasti i përfshirjes së dy jetëve	141
3.6.5	Koncepti i Interesit	141
3.6.6	Primet e rezervat matematike	140
3.6.6.1	Endowment i thjeshtë	139

3.6.6.2	Term	139
3.6.6.3	Endowment i zakonshëm	139
3.7	Testi i përfitueshmërisë për kontratën e sigurimit endowment	138
3.7.1	Metodologjia	138
3.7.1.1	Vlerësimi	138
3.7.1.1.1	Përafrimi marginal	138
3.7.1.1.2	Përafrimi i veçuar (deterministik)	137
3.7.1.1.3	Përafrimi i veçuar (rastësor)	137
3.7.1.2	Analiza e rrjedhës së parasë	137
3.7.2	Supozimet për vlerësimin më të mirë	136
3.7.2.1	Shpenzimet fillestare	136
3.7.3	Supozimet për portofolin e produktit të ri	135
3.7.4	Rezultatet kyçe	135
3.7.5	Ndjeshmëritë	134
3.7.6	Masat kyçe	134
3.8	Ndërtimi i një kontrate sigurimi endowment për shoqëritë shqiptare të sigurimit të jetës	133
3.8.1	Llogaritjet për primet e rezervat për kontratën endowment të shoqërisë së sigurimit të jetës	133
3.8.2	Testi i përfitueshmërisë për produktin endowment të shoqërisë së sigurimit të jetës	131
3.9	Përfundime	147
	Bibliografia	148

FALENDERIME

Përfundimi i kësaj teze doktorature ishte një rrugëtim i gjatë, i mundimshëm, frutdhënës dhe surprizues. Kam nevojë të falenderoj shumë persona të cilët më kanë ndihmuar dhe mbështetur, që kanë besuar tek unë jo vetëm në vitet e doktoraturës por edhe më herët.

Së pari, dua të falenderoj udhëheqësin tim profesor Shpëtim Shehu për mbështetjen e tij të vazhdueshme, këshillat dhe nxitjen për të kërkuar gjithmonë më të mirën në ndërtimin e këtij punimi. Falenderoj edhe Dr Eralda Gjika për ndihmën e paçmueshme gjatë këtij rrugëtimi. Gjithashtu një falenderim shkon dhe për gjithë kolegët e mi të cilët më kanë ndihmuar me vërejtjet dhe këshillat e tyre.

Falenderoj shoqërinë e sigurimit Sigal Uniqa Group Austria për mundësimin e të dhënave e të kushteve materiale e teknike në realizimin e kësaj teze.

Një falenderim i veçantë shkon për familjen time, për mbështetjen që në propozimet e para të kësaj teze dhe në udhëtimin e gjatë e të vështirë deri në përfundimin e saj. Faleminderit, bashkëshortit tim Edvin, për mbështetjen dhe durimin që ke treguar me mua gjatë këtij rrugëtimi. Faleminderit Eno dhe Laura jeni ju bashkëpunëtorët e mi më të rëndësishëm.

H Y R J E

Veprimtaria e sigurimeve

Ekzistojnë përkufizime të ndryshme në lidhje me atë ç'ka konsiderohet veprimtari siguruese. Kjo ndoshta edhe për shkak të evoluimit të konceptit dhe mënyrës së organizimit të veprimtarisë.

Në fillimet e vehta veprimtaria siguruese mbarte aspekte thjesht sociale, të ndihmës reciproke në rast fatkeqësish, duke krijuar një fond të përbashkët - kryesisht jomonetar, por në të mira materiale, fond i cili u shpërndahej individëve / grupeve shoqërore të prekura nga ngjarje të cilat përkeqësonin gjendjen e tyre ekonomike (psh grurë në periudha jo prodhuese, etj.).

Këto organizime nuk kanë pasur qëllime fitimprurëse dhe vijnë të ekzistojnë edhe sot në formë shoqërisht reciproke kryesisht në fushën e sigurimeve të bujqësisë (Francë) dhe marinës (P&I Clubs).

Më tej, veprimtaria siguruese mori karakter industrial me krijimin e shoqërive të sigurimit / risigurimit si investime, pra për qëllime fitimi.

Megjithatë, edhe kjo mënyrë organizimi në bazë të saj ka konceptin social të ndihmës / përfitimit të individëve / veprimtarive ekonomike të prekura nga ngjarje që shkaktojnë dëme.

Në përgjithësi, kontrata e sigurimit është një kontratë ku njera palë (siguruesi), bie dakord të paguajë një shumë monetare (ose përfitime të ngjashme) në rast të ndodhjes së një ngjarjeje të paparashikuar / të pasigurtë që ka pasoja negative, në këmbim të pagesës së një shume monetare (prim i sigurimit).

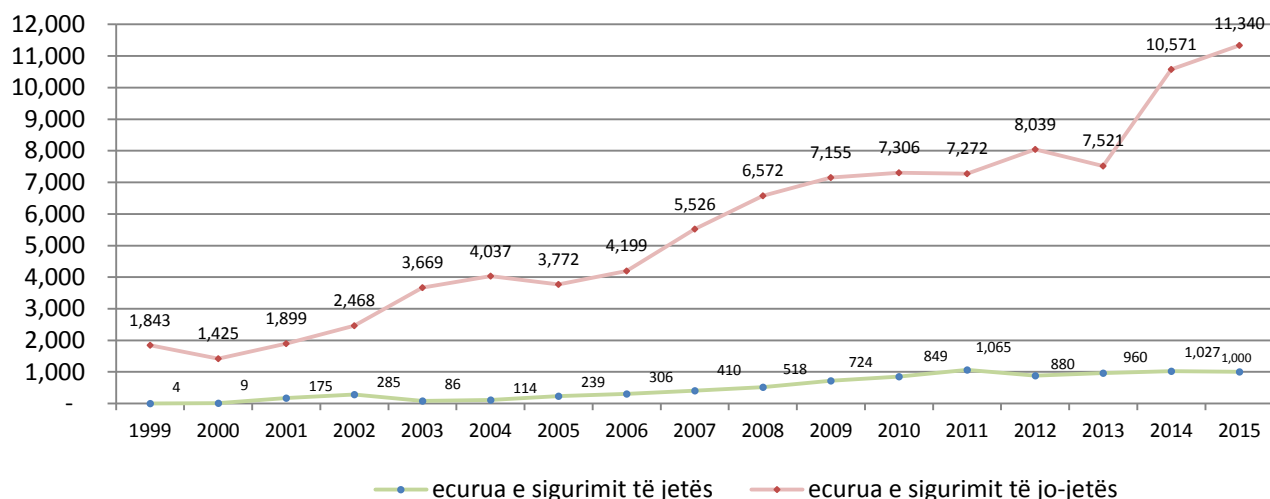
Pamje e përgjithshme e tregut të sigurimeve në Shqipëri

Veprimtaria e sigurimeve në Shqipëri ka filluar relativisht vonë, në fillim të viteve 1990, me krijimin e shoqërisë së sigurimeve INSIG.

Më parë kanë ekzistuar veprimtari sigurimesh për periudha kohore të shkurtëra (para vitit 1944 nga degë të shoqërive Italiane të sigurimeve) ose për fusha të kufizuara (pas vitit 1944) dhe jo gjithmonë në formën e një shoqërie sigurimesh, por në kuadrin e institucioneve të tjera financiare (si departamente në banka).

Megjithë punën e mirë të kryer nga shoqëria e sigurimeve INSIG, deri në liberalizimin e tregut në fund të viteve '90 veprimtaria e sigurimeve kishte ende natyrë mjaft të kufizuar, kjo për shkak edhe të nivelit ende jo të zhvilluar të ekonomisë, me të cilin zhvillimi i veprimtarisë së sigurimeve është ngushtësisht i lidhur.

Me liberalizimin e tregut dhe fillimin e veprimtarisë së shoqërive të tjera siguruese, konkurrenca dhe faktorë të tjerë si: zhvillimi i ekonomisë, ndikimi në rritje i shoqërive siguruese / risiguruese / ndërmjetësuese ndërkombëtare, ngritja e nivelit të profesionalizmit të siguruesve, etj., sollën si rrjedhojë rritjen me ritme më të shpejta të tregut (Figurë 1). [21]



Figurë1. Ecuria e tregut të sigurimeve (Jetë, Jojetë) në vite (të dhënat në mln ALL)

Legjislacioni i fushës së sigurimeve është i ngjashëm me atë të EU dhe ndryshohet në vijimësi për t'iu përshatur ndryshimeve të kuadrit ligjor të EU.

Aktualisht, ligji bazë që rregullon veprimtarinë e sigurimeve në Shqipëri është Ligji Nr. 52, datë 22/05/2014. Ndër të tjera, ky ligj përcakton se mbikqyrja e veprimtarisë së sigurimeve në Shqipëri kryhet në bazë rrezikun, që kërkon në vetvehte kapacitete shtesë aktuariale si për rregullatorin (Autoritetin e Mbikqyrjes Financiare) ashtu edhe për shoqëritë e sigurimeve. Po ashtu, kjo nxjerr të nevojshme kryerjen e studimeve aktuariale në nivel portofolësh sigurimi, shoqërisht dhe tregut të sigurimeve.

Duke pasur parasysh zhvillimet në legjislacionin EU, pritet që në një kohë të afërt të fillojë edhe në Shqipëri zbatimi i kërkesave të sistemit Solvency II. Një pjesë e shoqërive (me aksionerë shoqëri të vendeve EU) kanë filluar gradualisht implementimin e këtij sistemi, ndërkohë që pjesa tjetër e tregut do të duhet të adoptohet me hyrjen në fuqi të legjislacionit përkatës.

Akt tjetër tjetër ligjor i rëndësishëm është Ligji Nr. 10236, datë 12/02/2009 – ‘Për sigurimin e detyrueshëm në sektorin e transportit’, duke qenë se i përket një pjese të konsiderueshme të tregut të sigurimeve me ekspozim relativisht të lartë rrezikun.

Rëndësia e studimeve në fushën e sigurimeve

Megjithë zhvillimin e vullshëm të veprimtarisë së sigurimeve në Shqipëri në këto 25 vite, mund të themi se aspekti akademik / studimor nuk ka pasur zhvillime të njëjta.

Produktet, procedurat, sistemet tarifore dhe ato të mbrojtjes së portofoleve të sigurimeve janë zhvilluar mbi bazën e përvojës ndërkombëtare, kjo edhe për shkak të mungesës së përvojës vendore dhe mungesës relative të bazave përkatëse të të dhënave në masën e kërkuar për kryerje studimesh.

Ndërkohë që marrja e përvojës ndërkombëtare ka influencuar shumë pozitivisht zhvillimin e shoqërive dhe tregut të sigurimeve, mendojmë se është e domosdoshme që të kryhen studime

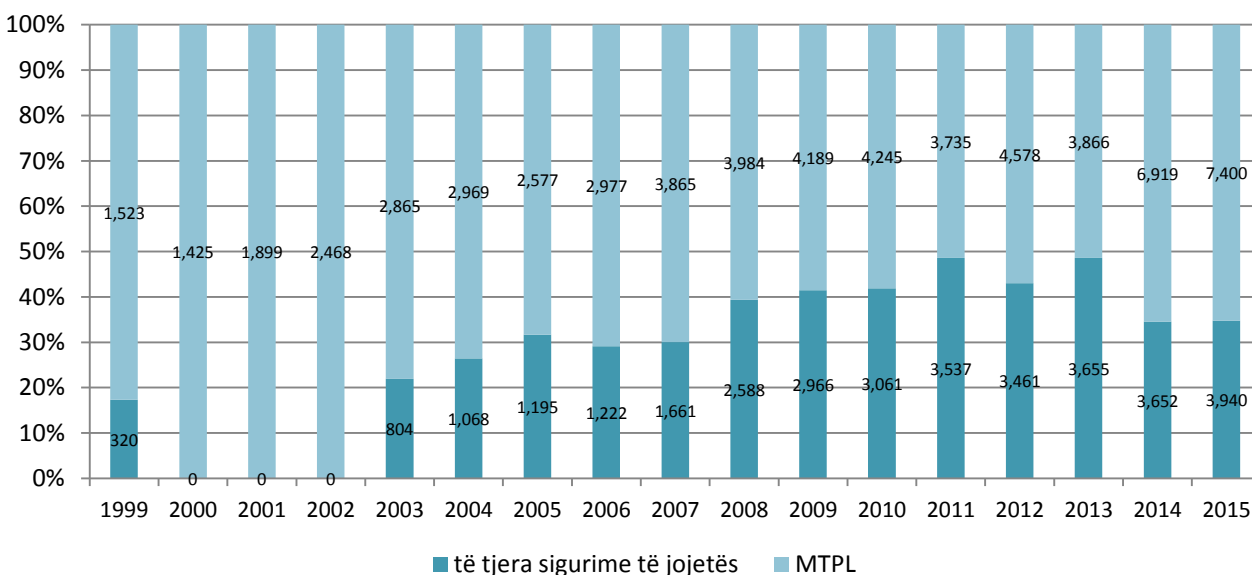
vendore sidomos për portofole sigurimesh për të cilat të dhënat janë të mjaftueshme (sigurime motorrike, të jetës, etj.).

Duke u kombinuar edhe me përvojën ndërkombëtare, kjo do të shërbejë trajtimit të çështjeve që janë specifike për tregun vendor.

Sigurimet motorrike të përgjegjësisë ndaj palëve të treta

Sigurimet Motorrike të Përgjegjësisë ndaj Palëve të Treta, edhe pse teknikisht i përkasin sigurimeve të përgjegjësisë civile, marrin një rëndësi të veçantë përshkak se janë të detyrueshme dhe rregullohen me legjislacion të veçantë, si për marrjen në sigurim, ashtu edhe për trajtimin (procedurat, kufijtë, etj.) e kërkesave për dëmshpërblim.

Në Shqipëri këto sigurime zenë një pjesë të rëndësishme të vëllimit të përgjithshëm të të ardhurave (primeve) dhe shpenzimeve (shpenzime administrative, marrje në sigurim dhe dëmshpërblime). Megjithë zhvillimin e klasave të tjera të sigurimeve, sidomos pas vitit 2000, sërish sigurimet e përgjegjësisë motorrike përbëjnë bazën e sigurimeve (Figurë 2). [21]



Figurë2. Ecuria e portofolit të sigurimeve MTPL ndaj totalit të tregut të sigurimit të jojetës në vite (në mln ALL)

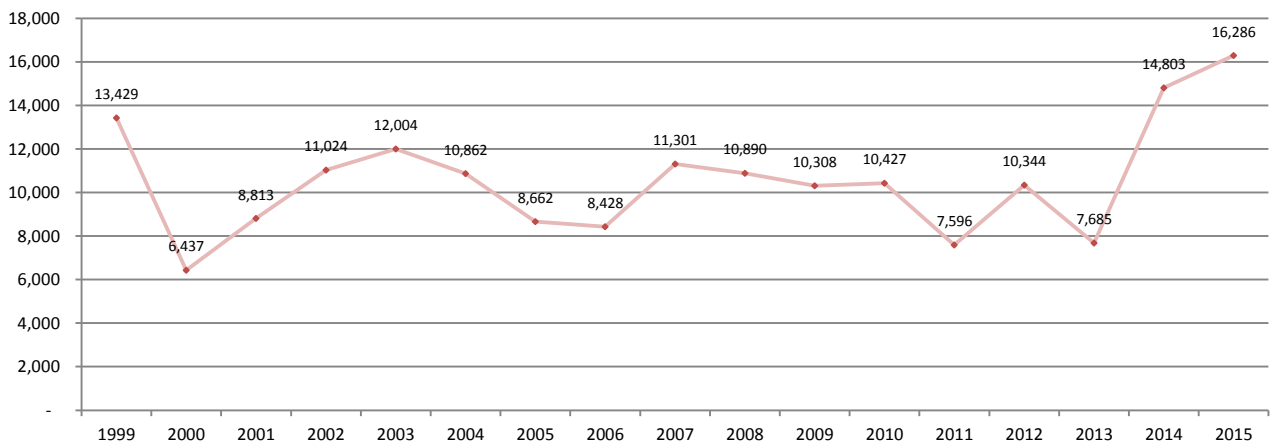
Mund të rendisim një sërë arsyesh për rëndësinë e studimeve të lidhura me portofolin MTPL:

- edhe pse llojet e tjera të sigurimeve (sigurimet e Pasurisë, Shëndetësore, etj.) kanë pasur zhvillime pozitive, ende portofoli MTPL ze mbi 50% të vëllimit të të ardhurave të tregut, pra është portofoli kryesor;
- rritja e ekspozimit ndaj rrezikut. Kufijtë minimalë të përgjegjësisë, edhe pse mjaft më të ulëta se në vendet e EU (më disa prej tyre janë përgjegjësia motorrike është e pakufizuar), kanë ardhur në rritje për shkak të rritjes së nivelit të jetesës dhe përafrimit të legjislacionit me atë të EU. Sidomos kufijtë e përgjegjësisë së lidhura me dëmet trupore, të cilat kanë pasur rritje dhe shtuar me elementë të tillë si 'dëmi moral', pritet të rriten më tej dhe elementët përbërës

të dëmshpërblimit mund të përfshijnë elementë të mëtejshëm si 'dhimbje e vuajte, etj. të cilët rrisin ekspozimin dhe ndërlikojnë llogaritjet e primit të sigurimit;

- tarifatat e primit të sigurimit në tregun shqiptar të sigurimeve kanë pësuar luhatje të ndjeshme (Figurë 3), që ka ndikuar ndjeshëm në rezultatet e veprimtarisë së shoqërive të sigurimit. Këto luhatje kanë qenë pasojë e konkurrencës, por edhe e mungesës së studimeve të detajuara për strukturën dhe nivelin e tarifave të sigurimit MTPL sipas kategorive të mjeteve motorrike;

Ky portofol, për shkak të numrit relativisht të madh të të siguruarve dhe kërkesave për dëmshpërblim, përbën grupin më të përshtatshëm për llogaritje aktuariale dhe premtion rezultate të sakta në llogaritje. [21]



Figurë3. Luhatjet e primeve mesatare të portofolit DMTPL në vite (në ALL)

Sigurimet e jetës me kursim (Endowment)

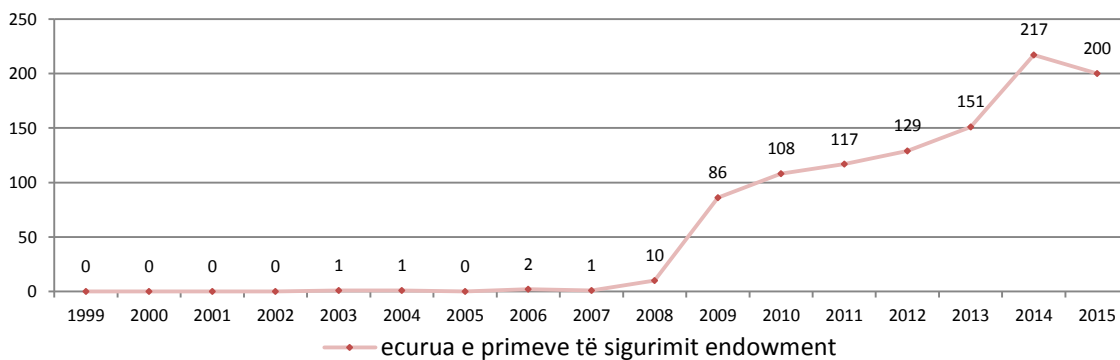
Sigurimet e Jetës me Kursim (Endowment) janë një produkt i ri në tregun shqiptar të sigurimeve (prej vitit 2009) dhe ende në vëllim të ulët të ardhurash.

Megjithatë, duke pasur parasysh përvojën e vendeve të ngjashme këto sigurime pritet të zenë peshën kryesore në sigurimet e Jetës. Sigurimet e Jetës me Kursim kanë element kryesor normën e interesit të investimit (të garantuar ose jo), që është edhe një tregues i cili ndikon në ekspozimin e shoqërisë së sigurimit ndaj rreziqeve të tregut të investimeve, duke konsideruar këtu edhe aspektin afatgjatë të këtij lloji sigurimi.[21]

Elementi i dytë më i rëndësishëm në sigurimin e jetës me kursim janë tabelat e vdekshmërisë të cilat lidhen drejtpërdrejt me mbijetesën apo vdekjen e të siguruarit kundrejt periudhës së sigurimit

Po ashtu, elementë të tjerë janë shpenzimet administrative e të shitjes, ecuria e të cilave ndikon ndjeshëm në rezultatin e portofolit.

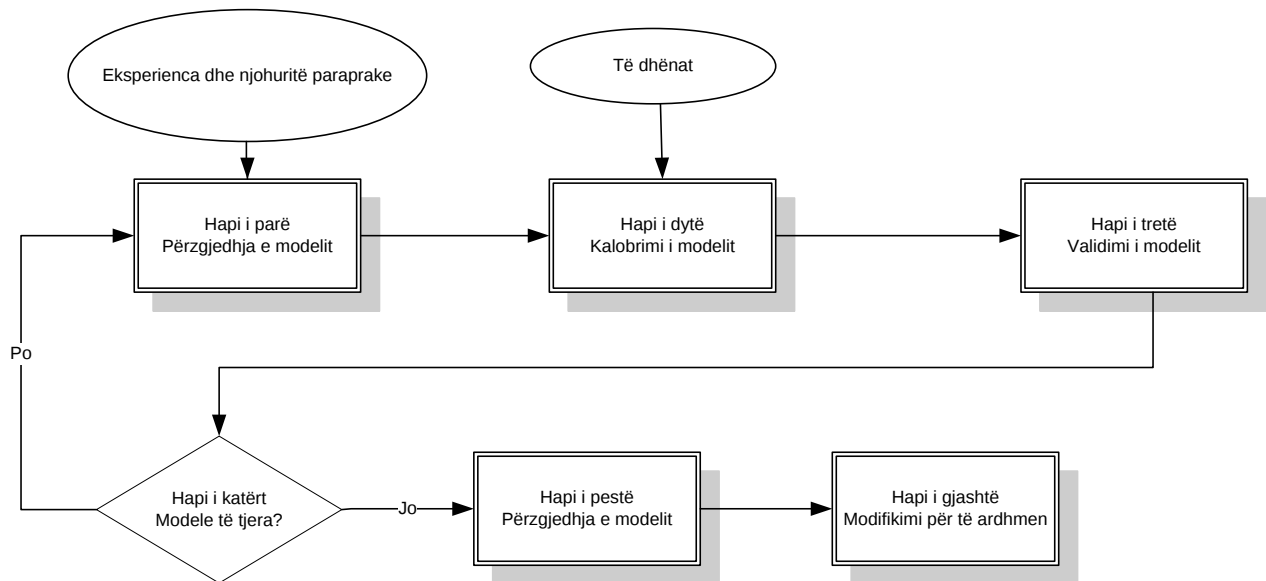
Mënyra më e mirë për analizën e portofoleve të sigurimit të jetës e sidomos të sigurimit të Jetës me Kursim janë nëpërmjet analizave LAT e testit të përfitueshmërisë.



Figurë4. Ecuria e portofolit të sigurimit Endowment në vite (të dhënat në mln ALL)

Kapitulli 1. MODELIMI I DËMEVE NË SIGURIMIN E JO-JETËS

Proçesi i modelimit të dëmeve kalon nëpër gjashtë faza sipas diagramës më poshtë



Hapi i parë: përzgjidhen një apo disa modele bazuar në njohuritë paraprake dhe në eksperiencë, si dhe duke parë sjelljen e të dhënave reale.

Hapi i dytë: kryhet kalibrimi (përshtatja) e modelit bazuar në të dhënat të cilat janë marrë në shqyrtim

Hapi i tretë: modeli i kalibruar vlerësohet për nivelin e përshtatshmërisë ndaj të dhënave. Mund të kryhen teste të ndryshme, siç është përsëmbull testi i Kolmogorov Smirnov, apo edhe të natyrës cilësore siç është A.I.C.. Përzgjedhja e testit mund të lidhet në mënyrë të drejtpërdrejtë me modelin e përzgjedhur.

Hapi i katërt: në këtë pikë jepet mundësia e analizimit të më shumë se një modeli. Kjo është e dobishme veçanërisht nëse në hapin e tretë rezultojnë që modelet paraardhëse janë të papërshtatshme. Gjithashtu mund të rezultojë që kemi më shumë se një model në konsideratë për analiza të mëtejshme.

Hapi i pestë: të gjithë modelet e vlefshme që tashmë i kanë kaluar hapat 1 – 4, krahasohen duke përdorur disa kriteret në mënyrë përzgjedhje midis tyre. Kjo mund të kryhet duke rianalizuar kriteret e përdorura në hapat paraardhës ose edhe duke përdorur kriteret e tjera. Në momentin e përzgjedhjes së një modeli, modelet e tjera mund t'i mbajmë për analiza sensitiviteti.

Hapi i gjashtë: së fundmi kryhet adoptimi i modelit të përzgjedhur për të ardhmen. kjo mund të përfshijë axhistime të parametrave në mënyrë për të reflektuar ndryshimin e inflacionit që nga koha kur janë marrë të dhënat, në kohën kur do aplikohet modeli

1.1 Modele të dëmeve

Në këtë pjesë të punimit do të diskutohen modele aktuariale për dëmet. Dy përbërësit e dëmit të cilat janë frekuenca e dëmit dhe ashpërsia e dëmit, modelohen në mënyrë të ndarë e më pas kombinohen në mënyrë që të përftojmë shpërndarjen e dëmit të plotë. Ne do të diskutojmë shpërndarjen e frekuencës së dëmit si shpërndarjen e një ndryshoreje rasti diskrete jonegative, duke përmendur disa teknika për modelimin e ndryshoreve të rastit diskrete jonegative. Gjithashtu do të diskutohen teknika të modelimit të ndryshoreve të rastit të vazhdueshme jonegative, të cilat mund të shërbejnë për ashpërsinë e dëmit. Më tej do të diskutojmë modelin kolektiv të rrezikut dhe modelin individual të rrezikut për analizimin e dëmit të plotë. Për llogaritjen e shpërndarjes së dëmit të plotë, do të përdoren teknika të konvolucionit dhe metodat rekursive.[5] [6] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15]

1.1.1 Shpërndarja e frekuencës së dëmeve

Në modelimin e dëmeve që lindin nga kontratat e sigurimit, interesi qëndron në kontratat e sigurimit të jo – jetës të cilat mbulojnë një periudhë kohe të caktuar, siç është rasti i sigurimit të përgjegjësisë ndaj palëve të treta të drejtuesve të mjeteve motorike (MTPL). Një matës shumë i rëndësishëm i dëmeve është frekuenca e dëmeve, e cila është numri i dëmeve të ndodhura në një grup kontratash sigurimi. Megjithatë frekuenca e dëmeve nuk lidhet në mënyrë të drejtëpërdrejtë me shumën monetare të dëmeve, ajo është një ndryshore shumë e rëndësishme në modelimin e dëmeve.[5] [6] [9] [10] [11] [13] [14] [15]

Më poshtë do paraqesim në mënyrë të shkurtuar disa nga çështje kryesore të teorisë së probabilitetit, siç janë funksioni prodhues i momenteve dhe funksioni gjenerues i probabilitetit. Do të përmenden disa nga shpërndarjet diskrete jonegative më të përdorshme për modelimin e frekuencës së dëmeve, si edhe do të prezantohe familja $(a, b, 0)$ e shpërndarjeve për ndryshoret e rastit diskrete jonegative e cila përfshin të gjitha shpërndarjet që do të përmenden në këtë paragraph. Kjo klasë shpërndarjesh diskrete gjen zbatim gjerësisht në literaturën aktuariale.

Gjithashtu do të përmenden metoda për krijimin e shpërndarjeve të tjera për ndryshore rasti diskrete jonegative, në mënyrë të veçantë, klasa $(a, b, 1)$ e shpërndarjeve, shpërndarjet e përbëra, dhe shpërndarjet mikse

Më tej do të konsiderojmë një bllok policash të lidhura gjatë një periudhe të caktuar kohe. Dëmi total të lindura nga këto polica sigurimi është shuma e të gjitha vlerave të dëmeve të ndodhura nga këto kontrata sigurimi. Numri i këtyre dëmeve do të quhet frekuenca e dëmit, vlera monetare e cdo dëmi do të quhet ashpërsi e dëmit. Mënyra më e zakonshme për modelimin e dëmeve, është analizimi në mënyrë të vecuar të secilit prej këtyre dy përbërësve të dëmit, e më tej kombinimi i tyre në përfitim të modelit për dëmin total. Në mënyrë të natyrshme, frekuenca e dëmit modelohet si ndryshore rasti diskrete jonegative, ndërkohë ashpërsia e dëmit modelohet si ndryshore rasti e vazhdueshme jonegative.

Në këtë pjesë të parë të këtij kapitulli, do të përqëndrohemi në shpërndarjen e frekuencës së dëmeve. Do të paraqiten disa metoda për ndërtimin e ndryshoreve të rastit diskrete jonegative. Duke qenë se sigurimi i jo – jetës konsiderohet si sigurim afatshkurtër, elemente si vlera në kohë e parasë janë të parëndësishme për këtë lloj sigurimi. Fillimisht do të rikujtojmë një përmbledhje të shkurtër të disa mjeteve për modelimin e shpërndarjeve statistikore.

1.1.1.1 Përmbledhje e statistikës

Le të jetë X një ndryshore rasti me funksion shpërndarjeje $F_X(x)$ i përcaktuar nga

$$F_X(x) = \Pr(X < x) \quad (1.1)$$

Në qoftë se $F_X(x)$ është një funksion i vazhdueshëm, atëherë X do të quhet ndryshore rasti e vazhdueshme. Për më tepër, në qoftë se F_X është i derivueshëm, densiteti i X , shënohet me $f_X(x)$, është i përcaktuar si

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \quad (1.2)$$

Nëse X merr vetëm vlera diskrete, atëherë ajo do të quhet ndryshore rasti diskrete. Po të shenojmë $\Omega_X = \{x_1, x_2, \dots\}$ bashkësinë e vlerave që mund të marrë X . Atëherë Ω_X do të quhet mbështetës i X . Densiteti i një ndryshoreje rasti diskrete X , gjithashtu shënohet me $f_X(x)$ përcaktohet si mëposhtë

$$f_X(x) = \begin{cases} \Pr(X = x) & x \in \Omega_X \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases} \quad (1.3)$$

Momenti i r – të i X është:

$$E(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_X(x) dx \text{ për rastin e vazhdueshëm,} \quad (1.4)$$

$$E(X^r) = \sum_{x \in \Omega_X} x^r \Pr(X = x) \text{ për rastin diskret} \quad (1.5)$$

Funksioni gjenerues i momenteve $M_X(t)$ në rast se ekzistojnë pritjet matematike të rendit t , është një funksion i t , i përcaktuar nga

$$M_X(t) = E(e^{tX}) \quad (1.6)$$

Nëse ekziston $M_X(t)$ për t në një interval pranë $t = 0$, atëherë ekzistojnë edhe momentet e X , dhe mund të gjenden në mënyrë të njëpasnjëshme duke derivuar $M_X(t)$ në lidhje me t në pikën $t = 0$.

Në qoftë se $X_1, X_2, \dots, X_n$ janë ndryshore rasti te pavarura dhe me shpërndarje të njëjtë me funksion gjenerues të momenteve $M_X(t)$, dhe po të shënojmë $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, atëherë funksioni gjenerues i momenteve për X është :

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = E(e^{t(X_1+X_2+\dots+X_n)}) = \prod_{i=1}^n E(e^{tX_i}) = (M(t))^n \quad (1.7)$$

Funksioni prodhues i momenteve ka vetinë shumë të rëndësishme të unicitetit për funksionin e shpërndarjes. Pra nëse dy ndryshore rasti kanë të njëjtin funksion prodhues të momenteve, atëherë ata detyrimisht do të kenë të njëjtën shpërndarje.

Në qoftë se X është një ndryshore rasti që mund të marrë vlera të plota jo – negative, funksioni gjenerues i probabilitetit, shënohet me $P_X(t)$, dhe në rast se ekzistojnë pritjet matematike $E(t^X)$ është i përcaktuar si:

$$P_X(t) = E(t^X) \quad (1.8)$$

Lidhja midis funksionit prodhues të momenteve dhe funksionit prodhues të probabiliteteve është:

$$P_X(t) = M_X(\log t) \quad (1.9)$$

Një formulë e rëndësishme duke marrë derivatin e r – të të $P_X(t)$, është:

$$P_X^r(0) = r! f_X(r) \quad (1.10)$$

Dhe si rrjedhim mund të përftojme funksionin e probabiliteteve si:

$$f_X(r) = \frac{P_X^r(0)}{r!} \quad (1.11)$$

1.1.1.2 Disa shpërndarje diskrete

Më poshtë do të shqyrtojmë disa rezultate kyçe të katër shpërndarjeve diskrete. Këto shpërndarje mund të marrin vetëm vlera të plota jonegative, kështu që mund të përdoren për modelimin e shpërndarjes së frekuences së demit. Përzgjedhja midis tyre për modelimin më të përshtatshëm të numrit të dëmeve do të diskutohet në paragrafin 1.2 më poshtë

– Shpërndarja Binomiale

Një ndryshore rasti X ka shpërndarje binomial me parametra n dhe θ , $\mathcal{BN}(n, \theta)$, ku $n \in \mathbb{N}$ dhe $\theta \in (0,1)$, nëse densiteti i X jepet nga:

$$f_X(x) = C_n^x \theta^x (1 - \theta)^{n-x} \text{ për } x = 0, 1, 2, \dots, n \quad (1.11)$$

Ku

$$C_n^x = \frac{n!}{x!(n-x)!} \quad (1.12)$$

Pritja matematike dhe dispersioni i X janë:

$$E(X) = n\theta; \quad \text{Var}(X) = n\theta(1 - \theta) \quad (1.13)$$

Vërejmë se dispersioni i X është gjithmonë më i vogël se pritja matematike e tij.

Funksioni prodhues i momenteve të X është:

$$M_X(t) = (\theta e^t + 1 - \theta)^n \quad (1.14)$$

Funksioni prodhues i probabilitetit të X është:

$$P_X(t) = (\theta t + 1 - \theta)^n \quad (1.15)$$

Shprehja për densitetin tregon mundësinë e marrjes së x sukseseve në n prova të pavarura secila me probabilitet suksesi θ . Shpërndarja është simetrike për $\theta = 0.5$ është me pjerrësi pozitive (anon në të djathtë), nëse $\theta < 0.5$, dhe është me pjerrësi negative (anon në të majtë), nëse $\theta > 0.5$. Kur n është i madh, X është përafërsisht i shpërndarë normalisht. Konvergenca në shpërndarjen normale është më e shpejtë sa me afër 0.5 është θ .

Ekziston një formulë rekursive për $f_X(x)$, e cila mund të lehtësojë llogaritjet funksionit të probabilitetit: $f_X(0) = (1 - \theta)^n$, dhe për $x = 1, 2, \dots, n$ kemi që:

$$\frac{f_X(x)}{f_X(x-1)} = \frac{(n-x+1)\theta}{x(1-\theta)} \Rightarrow f_X(x) = f_X(x-1) \left[\frac{(n-x+1)\theta}{x(1-\theta)} \right] \quad (1.16)$$

– **Shperndarja gjeometrike**

Një ndryshore rasti diskrete jonegative X ka shperndarje gjeometrike me parameter θ , $\mathcal{GM}(\theta)$, ku $\theta \in (0,1)$, densiteti i tij jepet me:

$$f_X(x) = \theta(1 - \theta)^x \text{ për } x = 0,1,2, \quad (1.17)$$

Pritja matematike dhe dispersioni i X janë:

$$E(X) = \frac{1-\theta}{\theta} \text{ Var}(X) = \frac{1-\theta}{\theta^2} \quad (1.18)$$

Vërejmë se në kontrast nga shpërndarja binomiale, në shpërndarjen gjeometrike kemi që pritja matematike e X është gjithmonë më e vogël se dispersion i saj

Shprehja për funksionin e probabilitetit për shpërndarjen gjeometrike nënkupton marrjen e x dështimeve para marrjes së suksesit të parë në një bashkësi provash të Bernoulli – t me probabilitet suksesi θ .

Funksioni prodhues i momenteve të X është:

$$M_X(t) = \frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t} \quad (1.19)$$

Funksioni prodhues i probabilitetit të X është:

$$P_X(t) = \frac{\theta}{1-(1-\theta)t} \quad (1.20)$$

Një shprehje rekursive për $f_X(x)$, e cila mund të lehtësojë llogaritjen e funks.të probabilitetit, është:

$$f_X(0) = \theta, \text{ dhe për } x = 1,2, \text{ kemi } f_X(x) = f_X(x-1)(1-\theta) \quad (1.21)$$

Vërejmë se densiteti i X është zbritës në x .

Shpërndarja gjeometrike është një rast i veçantë i shpërndarjes binomiale negative me $r = 1$.

– **Shperndarja binomiale negative**

Një ndryshore rasti X ka shperndarje binomiale negative me parametra r dhe θ , $\mathcal{NB}(r, \theta)$, ku $r \in \mathbb{N}$ dhe $\theta \in (0,1)$, nëse densiteti i X jepet me:

$$f_X(x) = C_{x+r-1}^{r-1} \theta^r (1-\theta)^x \text{ për } x = 0,1,2, \dots \quad (1.22)$$

Pritja matematike dhe dispersioni i X janë:

$$E(X) = \frac{r(1-\theta)}{\theta} \text{ Var}(X) = \frac{r(1-\theta)}{\theta^2} \quad (1.23)$$

Njësoj si në rastin e shpërndarjes gjeometrike, edhe në shpërndarjen binomiale negative, vërejmë se në kontrast nga shpërndarja binomiale, kemi që pritja matematike e X është gjithmonë më e vogël se dispersion i saj.

Funksioni prodhues i momenteve të X është.

$$M_X(t) = \left[\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^t} \right]^r \quad (1.24)$$

Funksioni prodhues i probabilitetit të X është:

$$P_X(t) = \left[\frac{\theta}{1-(1-\theta)t} \right]^r \quad (1.25)$$

Vërejmë se koeficienti C_{x+r-1}^{r-1} në formulën (1.22) mund të shkruhet:

$$C_{x+r-1}^{r-1} = \frac{(x+r-1)!}{(r-1)!x!} = \frac{(x+r-1)(x+r)\dots(r+1)r}{x!}$$

Kjo shprehje është e mirëpërcaktuar për çfarëdoq numri $r > 0$ (jo domosdoshmërisht i plotë) dhe për çfarëdoq numri të plotë jonegativ x . Si rrjedhim nëse përcaktojmë:

$$C_{x+r-1}^{r-1} = \frac{(x+r-1)(x+r)\dots(r+1)r}{x!} \quad (1.26)$$

Ne mund përdorim ekuacionin (1.22) si densitet edhe kur r merr vlera jo të plota. Në fakt mund të vërtetohet se

$$\sum_{x=0}^{\infty} C_{x+r-1}^{r-1} \theta^r (1-\theta)^x = 1 \text{ për } r > 0 \text{ dhe për } 0 < \theta < 1.$$

Zgjerimi i bashkësisë së vlerave përparametrin r të shpërndarjes binomiale negative në bashkësinë e numrave realë jonegativë është mjaft i rëndësishëm dhe do të na ndihmojë në modelimet për dëmet.

Shprehja (1.22) për densitetin tregon mundësinë e marrjes së x dështimeve paraprake për tek suksesi i r -të në një seri provash të pavarura të Bernulit me probabilitet suksesi θ . Rrjedhimisht, $\mathcal{NB}(r, \theta)$, është shuma e r ndryshoreve me shpërndarje të pavarur $\mathcal{GM}(\theta)$.

Formula rekursive për funksionin e probabilitetit, merr formën:

$$f_X(0) = \theta^r, \text{ dhe për } x = 1, 2, \dots \text{ kemi } f_X(x) = f_X(x-1) \left[\frac{(x+r-1)(1-\theta)}{x} \right] \quad (1.27)$$

– Shpërndarja Poisson

Një ndryshore rasti X ka shpërndarje Poisson me parametër λ , $\mathcal{PN}(\lambda)$, ku $\lambda > 0$, nëse densiteti i X jepet me:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \text{ për } x = 0, 1, \dots \quad (1.28)$$

Pritja matematike dhe dispersioni i X janë:

$$E(X) = \lambda \quad \text{Var}(X) = \lambda \quad (1.29)$$

Funksioni prodhues i momenteve të X është:

$$M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)} \quad (1.30)$$

Funksioni prodhues i probabilitetit të X është:

$$P_X(t) = e^{\lambda(t-1)} \quad (1.31)$$

Shpërndarja Poisson është një nga shpërndarjet diskrete më të përdorura gjerësisht në aplikimet empirike. Zakonisht aplikohet për të modeluar numrin e ardhjeve të ngjarjeve brenda një

periudhe të caktuar kohe (të tilla si numri i dëmeve të sigurimit gjatë një viti, numri i artikujve të dëmtuar në prodhim), si dhe një përafrim i shpërndarjes binomiale.

Shprehja rekursive për fdwnsitetin merr formën

$$f_X(0) = e^{-\lambda}, \text{ dhe për } x = 1, 2, \text{ kemi } f_X(x) = f_X(x-1) \left(\frac{\lambda}{x}\right) \quad (1.32)$$

Gjithashtu për λ shumë të mëdha, $\mathcal{PN}(\lambda)$ është pothuajse e shpërndarë normalisht.

Shpërndarja e Poisson ka dy karakteristika të rëndësishme:

Karakteristika 1 Në qoftë se $X_1, X_2, \dots, X_n$ janë të shpërndara në mënyrë të pavarur me shpërndarje përkatësisht $X_i \sim \mathcal{PN}(\lambda_i)$, për $i = 1, 2, \dots, n$, atëherë $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ ka shpërndarje Poisson me parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$

Gjithashtu ka vend dhe rezultati i anasjelltë:

Karakteristika 2 Supozojmë se një ngjarje A mund të copëtohet në m ngjarje të ndara A_i për $i = 1, 2, \dots, m$. Le të jetë X numri i rasteve që ka ndodhur ngjarja A , dhe X_i të jetë numri i rasteve që ka ndodhur ngjarja A_i , në mënyrë që $X = X_1 + X_2 + \dots + X_m$. Le të jetë p_i probabiliteti i ndodhjes se ngjarjes A_i me kusht ndodhjen e ngjarjes A , $Pr(A_i|A) = p_i$, me $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Atëherë nëse $X \sim \mathcal{PN}(\lambda)$, kemi që $X_i \sim \mathcal{PN}(\lambda_i)$, ku $\lambda_i = \lambda p_i$. Dhe për më tepër, $X_1, X_2, \dots, X_m$ janë të shpërndara në mënyrë të pavarur.

– Klasa e shpërndarjeve $(a, b, 0)$

Shpërndarjet diskrete jonegative të përmëndura më sipër, i përkasin të ashtuquajturës klasa $(a, b, 0)$ e shpërndarjeve, në literaturën aktuariale.

Përkufizim 1.1: Një ndryshore rasti diskrete jonegative i përket klasës $(a, b, 0)$ të shpërndarjeve nëse densiteti i saj do të ndjekë rekursionin:

$$f_X(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) f_X(x-1) \text{ për } x = 1, 2, \dots \quad (1.33)$$

ku a dhe b janë konstante dhe $f_X(0)$ është i njohur.

Klasa e shpërndarjeve $(a, b, 0)$ përcaktohet nga rekursioni i filluar në hapin $x = 1$, duke pasur një vlerë fillestare $f_X(0)$.

Në mënyrë analoge mund të përcaktohet klasa e shpërndarjeve diskrete jonegative e quajtur klasa $(a, b, 1)$, ku rekursioni fillon në hapin $x = 2$ duke pasur një vlerë fillestare $f_X(1)$

Përkufizim 1.2: Një ndryshore rasti diskrete jonegative i përket klasës $(a, b, 1)$ të shpërndarjeve nëse densiteti i tij do të ndjekë rekursionin:

$$f_X(x) = \left(a + \frac{b}{x}\right) f_X(x-1) \text{ për } x = 2, 3, \dots \quad (1.34)$$

Ku a dhe b janë konstante dhe $f_X(1)$ është i njohur.

Vërejmë se klasat e shpërndarjeve $(a, b, 0)$ dhe $(a, b, 1)$ kanë të njëjta formula të rekursivitetit, por ndryshojnë në momentin e fillimit të llogaritjes së formulave rekursive. Gjithashtu densiteti $f_X(0)$ i ndryshoreve të rastit me shpërndarje që i përkasin klasës së shpërndarjeve $(a, b, 1)$, duhet

të jetë domosdoshmërisht i ndryshëm nga zero. Kështu, është e mundur të krijohet një shpërndarje me një probabilitet specifik në pikën $x = 0$ dhe përsëri me pamje të njëjtë me shpërndarjet që i përkasin klasës $(a, b, 0)$. Ky fleksibilitet është i rëndësishëm pasi dëmet për ngjarjet me rrezikshmëri të ulët kanë pak mundësi të ndodhin. Mund të jetë e pëlqyeshme që të përftojmë një përshtatje të mirë të shpërndarjes në zero dëme, bazuar në eksperiencën empirike, dhe sërish të ruhet forma në mënyrë që të koïncidojë me ndonjë shpërndarje të thjeshtë parametrike. Kjo mund të arrihet duke specifikuar probabilitetin në pikën zero, kur përshtasim rekursionin $(a, b, 1)$ për të imituar një shpërndarje të caktuar nga klasa e shpërndarjeve $(a, b, 0)$.

Le të jetë $f_X(x)$ densiteti i një shpërndarjeje nga $(a, b, 0)$, e quajtur shpërndarja bazë. Do shënojmë me $f_X^M(x)$ modifikimin e $f_X(x)$ ku $f_X^M(x)$ është funksion probabilitar i një shpërndarjeje nga klasa $(a, b, 1)$. Probabiliteti në pikën zero $f_X^M(0)$ është i specifikuar dhe $f_X^M(x)$ lidhet me $f_X(x)$ si më poshtë:

$$f_X^M(x) = c f_X(x) \text{ për } x = 1, 2, \dots \quad (1.35)$$

ku c është një konstante e përshtatshme.

Në mënyrë që $f_X^M(x)$ të jetë densitet, duhet të kemi:

$$1 = f_X^M(0) + \sum_{x=1}^{\infty} f_X^M(x) = f_X^M(0) + c \sum_{x=1}^{\infty} f_X(x) = f_X^M(0) + c(1 - f_X(0)) \quad (1.36)$$

Dhe si përfundim:

$$c = \frac{f_X^M(0)}{(1 - f_X(0))} \quad (1.37)$$

Ka vend kjo Teoremë:

Teoremë 1.1: Nëse shënojmë me X ndryshoren e rastit me shpërndarje binomiald, gjeometrike, negative binomiale ose Poisson, atëherë funksioni prodhues i probabilitetit $P_X(t)$ mund të shkruhet:

$$P_X(t|\beta) = Q_X[\beta(t - 1)] \quad (1.38)$$

ku β është një parametër i X dhe $Q_X(\cdot)$ është një funksion vetëm i $\beta(t - 1)$.

Me fjalë të tjera β dhe t shfaqen në funksionim prodhues të probabilitetit të X vetëm në formën $\beta(t - 1)$.

Si rrjedhim do të kemi:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{BN}(n, \theta) & P_X(t|\beta) = [1 + \theta(t - 1)]^n = [1 + \beta(t - 1)]^n & \text{ku } \beta = \theta \\ \mathcal{NB}(r, \theta) & P_X(t|\beta) = \left[\frac{\theta}{1 - (1 - \theta)t} \right]^r = \left[\frac{1}{1 - \beta(t - 1)} \right]^r & \text{ku } \beta = \frac{1 - \theta}{\theta} \\ \mathcal{PN}(\lambda) & P_X(t|\beta) = \exp[\lambda(t - 1)] = \exp[\beta(t - 1)] & \text{ku } \beta = \lambda \end{array} \quad (1.39)$$

1.1.1.3 Disa metoda për ndërtimin e shpërndarjeve të reja

Më poshtë paraqiten dy modele shpërndarjesh që ndihmojnë krijimin e shpërndarjeve të reja. Ato janë shpërndarja e përbërë dhe shpërndarja mikse. Këto dy shpërndarje ndihmojnë si në krijimin e shpërndarjeve diskrete ashtu edhe të shpërndarjeve të vazhdueshme.

– **Shpërndarja e përbërë**

Le të jenë $X_1, \dots, X_N$ ndryshore rasti diskrete jonegative të pavarura e me shpërndarje të njëjtë me X . Shënojmë me S shumën e këtyre ndryshoreve të rastit:

$$S = X_1 + \dots + X_N \quad (1.40)$$

Nëse N në vetvete është një ndryshore rasti diskrete jonegative e shpërndarë në mënyrë të pavarur nga $X_1, \dots, X_N$, atëherë S thuhet se ka një shpërndarje të përbërë ku shpërndarja e N do të quhet shpërndarje primare dhe shpërndarja e X do të quhet shpërndarje dytësore apo sekondare. Shpërndarja e përbërë mund edhe të quhet shpërndarje primare – sekondare. Ndërkohë që ndryshorja e rastit N mund të jetë vetëm shpërndarje diskrete jonegative, shpërndarja e X në përgjithësi mund të jetë edhe e vazhdueshme jonegative. Megjithatë më poshtë analizohen vetëm rastet kur të dy shpërndarjet janë vetëm diskrete jonegative, dhe rrjedhimisht edhe S është ndryshore rasti diskrete jonegative.

Konsiderojmë rastin e thjeshtë kur N ka shpërndarje degjeneruese që merr vlerën n me probabilitet 1. Rrjedhimisht S është shuma e n tremave X_i , ku n është e fiksuar. Nëse përshembull $n = 2$ atëherë $S = X_1 + X_2$ dhe do të kishim

$$f_S(s) = P(X_1 + X_2 = s) = \sum_{x=0}^s P(X_1 = x, X_2 = s - x) = \sum_{x=0}^s f_X(x) f_X(s - x) \quad (1.41)$$

Ky ekuacion shpreh densitetin e $f_S(\cdot)$, si konvolucion të $f_X(\cdot)$ që e shënojmë me $(f_X * f_X)(\cdot)$. Me fjalë të tjera:

$$f_{X_1+X_2}(s) = (f_X * f_X)(s) = \sum_{x=0}^s f_X(x) f_X(s - x) \quad (1.42)$$

Konvolucioni mund të llogaritet në mënyrë recursive, në rastin kur $n = 3$ do të kemi:

$$f_{X_1+X_2+X_3}(s) = (f_{X_1} * f_{X_2} * f_{X_3})(s) = (f_X * f_X * f_X)(s) \quad (1.43)$$

Pra nëse vazhdojmë për $n > 2$ funksioni probabilitar për S do të jetë $(f_X * f_X * \dots * f_X)(\cdot)$

Megjithatë, konvolucioni bëhet i lodhshëm për t'u llogaritur kur n merr vlera të mëdha

Në rast se N ka densitet $f_N(\cdot)$, duke përdorur ligjin për probabilitetin e plotë, përftojmë funksionin e probabilitetit të S si:

$$f_S(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_N = s | N = n) f_N(n) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = s) f_N(n) \quad (1.44)$$

ku $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n = s)$ mund të llogaritet si konvolucion i $f_X(\cdot)$.

Sidoqofte kur n merr vlera të mëdha llogaritjet mund të bëhen shumë të lodhshme

Teoremë 1.2: Le të jete S me shpërndarje të përbërë. Nëse shpërndarja primare e N ka funksion prodhues të momenteve $M_N(t)$ dhe shpërndarja sekondare për X ka funksion prodhues të momenteve $M_X(t)$, atëherë S ka funksion prodhues të momenteve $M_S(t) = M_N(\log M_X(t))$, dhe për më tepër nëse funksioni prodhues i probabilitetit për N është $P_N(t)$ dhe nëse X ka shpërndarje diskrete jonegative me funksion prodhues të probabilitetit $P_X(t)$, atëherë funksioni prodhues i probabilitetit për S , $P_S(t)$ do të jetë $P_S(t) = P_N[P_X(t)]$.

Rrjedhimisht nga funksioni prodhues i probabiliteteve, mund të përftojmë densitetin për S :

$$f_S(0) = P_S(0) = P_N[P_X(0)], f_S(1) = P_S'(0), \dots, f_S(t) = \frac{P_S^{(t)}(0)}{t!} \quad (1.45)$$

Teoremë 1.3:Nëse shpërndarja e N i përket klasës $(a, b, 0)$ të shpërndarjeve dhe X është ndryshore rasti diskrete jonegative, atëhere densiteti për S do të mërret nëpërmjet rekursionit:

$$f_S(s) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{x=1}^s \left(a + \frac{bx}{s}\right) f_X(x) f_S(s-x), s = 1, 2, \dots \quad (1.46)$$

me vlera fillestare $f_S(0)$ të dhëna sipas ekuacioneve (1.45)

Teoremë 1.4:Konsiderojmë shpërndarjen e përbërë të përcaktuar sinë ekuacionin (1.40). Shënojmë $E(N) = \mu_N$ dhe $D(N) = \sigma_N^2$ si edhe $E(X) = \mu_X$ dhe $D(X) = \sigma_X^2$. Atëhere pritja matematike dhe dispersion për S do të jepen:

$$E(S) = \mu_N \mu_X, \quad D(S) = \mu_N \sigma_X^2 + \mu_X \sigma_N^2 \quad (1.47)$$

Teoremë 1.5:Supozojmë se $S_1, \dots, S_n$ janë të pavarura e kanë shpërndarje të përbërë Poisson, me parametër Poisson përkatësisht $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dhe funksioni gjenerues i probabilitetit për shpërndarjen sekondare është përkatësisht $P_1(\cdot), \dots, P_n(\cdot)$. Atëhere $S = S_1 + \dots + S_n$ ka shpërndarje të përbërë Poisson me parametër të Poisson $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ dhe me funksion prodhues të probabilitetit të shpërndarjes sekondare të S : $P(t) = \sum_{i=1}^n w_i P_i(t)$ ku $w_i = \lambda_i / \lambda$.

Shënojmë së $P(t)$ është e përcaktuar më së miri duke qenë një kombinim konveks i n fuknsioneve prodhuese të probabilitetit të mirëpërcaktuara.

Shënojmë gjithashtu se nëse $f_i(\cdot)$ është densiteti i shpërndarjes sekondare të S_i , atëhere densiteti për shpërndarje sekondare të S , $f(\cdot)$ përcaktohet nga:

$$f(x) = \sum_{i=1}^n w_i f_i(x) \text{ për } x = 0, 1, \dots \quad (1.48)$$

– Shpërndarja mikse

Shpërndarjet mund të krijohen edhe duke marrë kombinim të shpërndarjeve të tjera. Supozojmë se $X_1, X_2, \dots, X_n$ janë ndryshore rasti me densitet përkatësisht $f_{X_1}(\cdot), f_{X_2}(\cdot), \dots, f_{X_n}(\cdot)$ nën të njëjtën hapësirë Ω . Nga këto ndryshore rasti mund të krijohet densiteti i një ndryshoreje rasti të re $X f_X(\cdot)$ sipas barazimit:

$$f_X(x) = p_1 f_{X_1}(x) + p_2 f_{X_2}(x) + \dots + p_n f_{X_n}(x), x \in \Omega \quad (1.49)$$

ku $p_i \geq 0$ për $i = 1, 2, \dots, n$ dhe $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Rrjedhimisht $\{p_i\}$ formon një shpërndarje probabilitare të mirëpërcaktuar, si dhe mund të përcaktojmë një ndryshore rasti Y të tillë që $p(Y = i) = f_Y(i) = p_i, i = 1, \dots, n$. Rrjedhimisht X mund të shikohet si një ndryshore rasti e cila merr vlerë X_i me probabilitet p_i , dhe Y mund të interpretohet si një ndryshore rasti e cila merr vlerën i atëhere dhe vetëm atëhere kur $X = X_i$.

Vërejmë se $f_X(x)$ i përcaktuar në ekuacionin (1.49) përcakton një densitet. Duke qenë se në këtë pikë jemi të interesuar për shpërndarjen e frekuencës së dëmeve, do të konsiderojmë rastin kur $X_1, X_2, \dots, X_n$ janë ndryshore rasti diskrete jonegative. Supozojmë se pritja matematike dhe dispersion për X_i janë përkatësisht μ_i dhe σ_i^2 , atëhere pritja matematike dhe dispersion i X do të jenë përkatësisht

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^n p_i \mu_i, \quad D(X) = \sum_{i=1}^n p_i [(\mu_i - \mu)^2 + \sigma_i^2] \quad (1.50)$$

Një ndryshore rasti X me densitet si në ekuacionin (1.49) thuhet se ka shpërndarje mikse. Ndryshorja e rastit Y e cila përcakton probabilitetin e ndodhjes së X_i , do të quhet shpërndarja miksuese. Duke qenë se Y është ndryshore rasti diskrete, X është quajtur shpërndarje mikse diskrete, pavarësisht faktit që X mund të ketë shpërndarje të vazhdueshme nëse X_i kanë shpërndarje të vazhdueshme. Shënojmë se X është i ndryshëm nga $X^* = \sum_{i=1}^n p_i X_i$. Shpërndarja e saktë e X^* në përgjithësi është e vështirë për t'u përllogaritur. Nëse supozojmë se $\{X_i\}$ janë të pavarura, për të llogaritur shpërndarjen e X^* , na nevojitet përdorimi i metodave të konvolucionit. Gjithashtu ndërkohë që pritja matematike e X^* është e njëjtë me pritjen matematike të X , dispersioni i X^* është $\sum_{i=1}^n p_i^2 \sigma_i^2$ i cili është më e vogël se dispersioni i X .

1.1.2 Shpërndarja e ashpërsisë së dëmit

Ashpërsia e dëmeve i referohet humbjeve monetare të lindura nga një ngjarje sigurimi quajtur dëm. Ndryshe nga frekuenca e dëmit, ashpërsia e dëmit zakonisht modelohet si një ndryshore rasti e vazhdueshme jonegative. Në varësi të karakteristikave përkatëse, ashpërsia e dëmit mund të modelohet edhe si shpërndarje mikse. Në vazhdim paraqesim një përmbledhje të shkurtër të disa mjeteve statistikore për analizimin e shpërndarjeve të vazhdueshme, si dhe do të shqyrtohen disa shpërndarje standarde të vazhdueshme për modelimin e ashpërsisë së dëmit. Gjithashtu trajtojmë metodat për krijimin e shpërndarjeve të reja për ashpërsinë e dëmit të tilla si metoda e shpërndarjes së përzier. Duke qenë se dëmet që janë në pjesën ekstreme të djathtë të shpërndarjes së ashpërsisë së dëmeve, do të analizojmë edhe disa cilësi të zgjatimit në të djathtë të shpërndarjeve. [5] [6] [9] [10] [12] [13] [14] [15]

Disa ndryshore rasti mund të jenë pjesërisht të vazhdueshme e pjesërisht diskrete në pjesë të ndryshme të tyre. Një ndryshore rasti thuhet se është e tipit mikse, nëse funksioni i shpërndarjes së saj $F_X(x)$, është i vazhdueshëm e i derivueshëm përveç një numri të shumtën të numërueshëm pikash në një hapësirë të shumtën të numërueshme Ω_X . Pra nëse X ka një shpërndarje mikse, atëherë ekziston një funksion $f_X(x)$ i tillë që:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f_X(x) dx + \sum_{x_i \in \Omega_X, x_i \leq x} P(X = x_i) \quad (1.51)$$

Funksionet $f_X(x)$ dhe $P(X = x_i)$ janë përkatësisht densiteti për pjesën ku funksioni është i vazhdueshëm dhe densiteti për pjesën ku ai është diskret për ndryshoren e rastit mikse X . Pra për një ndryshore rasti çfarëdo (e vazhdueshme, diskrete apo mikse) mund të shkruajmë në mënyrë të përmbledhur:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b dF_X(x) = \begin{cases} \int_a^b f_X(x) dx & \text{nëse } X \text{ është i vazhdueshëm} \\ \sum_{x_i \in \Omega_X, a \leq x_i \leq b} P(X = x_i) & \text{nëse } X \text{ është diskret në } \Omega_X \\ \int_a^b f_X(x) dx + \sum_{x_i \in \Omega_X, a \leq x_i \leq b} P(X = x_i) & \text{nëse } X \text{ është mikse} \end{cases} \quad (1.52)$$

1.1.2.1 Pritja matematike e funksionit të një ndryshoreje rasti

Supozojmë se kemi një funksion $g(\cdot)$. Pritja matematike e $g(X)$, e cila shënohet me $E[g(X)]$ është e barabartë me:

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx + \sum_{x_i \in \Omega_X} g(x_i) P(X = x_i) \quad (1.53)$$

1.1.2.2 Shpërndarja e funksionit të një ndryshoreje rasti

Le të jetë $g(\cdot)$ një funksion i vazhdueshëm e i derivueshëm, dhe le të jetë X një ndryshore rasti e vazhdueshme me densitet $f_X(x)$. Shënojmë me $Y = g(X)$, i cili është gjithashtu një ndryshore rasti. Supozojmë se $y = g(x)$ është një transformim injektiv. Shënojmë vlerën e x që i korrespondon y me $g^{-1}(y)$ ku $g^{-1}(\cdot)$ do të quhet transformimi i anasjelltë. Atëhere për densitetin e Y do të kemi Teoremën:

Teoremë 1.6: Le të jetë X një ndryshore rasti e vazhdueshme që merr vlera në segmentin $[a, b]$ me densitet $f_X(x)$ dhe le të jetë $g(\cdot)$ një funksion injektiv i vazhdueshëm dhe i derivueshëm. Shënojmë me $a' = g(a)$ dhe $b' = g(b)$. Densiteti i $Y = g(X)$ është i barabartë me:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{dg^{-1}(y)}{dy} \right| & \text{për } y \in [a', b'] \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.54)$$

1.1.2.3 Disa shpërndarje të vazhdueshme për ashpërsinë e dëmeve

Në këtë kapitull do të shqyrtojmë disa rezultate kyçe të disa shpërndarjeve të vazhdueshme. Këto shpërndarje mund të marrin vetëm vlera jonegative, dhe mund të përdoren për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmit. Përzgjedhja e shpërndarjes më të përshtatshme për modelimin e ashpërsisë së dëmeve do të diskutohet në paragrafet më poshtë.

– Shpërndarja eksponenciale

Një ndryshore rasti X ka shpërndarje eksponenciale me parameter λ , shënuar me $\mathcal{E}(\lambda)$, nëse densiteti i saj është:

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ për } x \geq 0, \lambda > 0 \quad (1.55)$$

Funksioni i shpërndarjes së X është:

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (1.56)$$

Pritja matematike, dispersioni dhe funksioni prodhues i momenteve të X janë përkatësisht:

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}, D(X) = \frac{1}{\lambda^2}, M_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} \quad (1.57)$$

Shpërndarja eksponenciale përdoret shpesh për të përshkruar kohën ndërmjet ndodhjes së një ngjarjeje, të tilla si avari e një makine. Ajo është e lidhur me shpërndarjen e Poisson. Në qoftë se koha e ndërmjet ndodhjes së një ngjarjeje shpërndahet si një ndryshore e rastit eksponenciale me parametër λ , e cila është reciproke e kohës së pritjes për ngjarjen, atëhere numri i hereve që ndodh ngjarja, në një interval kohor njësi, ka shpërndarje Poisson me parametër λ .

– Shpërndarja Gamma

Thuhet se X ka shpërndarje gamma me parametra $\alpha > 0$ dhe $\beta > 0$, shëhohet me $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, nëse densiteti i tij është:

$$f_X(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} e^{-\frac{x}{\beta}} \text{ për } x \geq 0 \text{ dhe } \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy \quad (1.58)$$

Funksioni i shpërndarjes për ndryshoret e rastit me shpërndarje gamma, nuk mund të gjëndet në mënyrë analitike.

Pritja matematike, dispersioni dhe funksioni prodhues i momenteve të X janë përkatësisht:

$$E(X) = \alpha\beta, \quad D(X) = \alpha\beta^2, \quad M_X(t) = \frac{1}{(1-\beta t)^\alpha} \text{ për } t < \frac{1}{\beta} \quad (1.59)$$

Shënojmë se shpërndarja eksponenciale është një rast i veçantë i shpërndarjes gamma (densiteti i shpërndarjes $\mathcal{E}(\frac{1}{\beta})$ është i njëjtë me densitetin e shpërndarjes $\mathcal{G}(1, \beta)$)

Supozojmë se $X_1, X_2, \dots, X_n$ janë të pavarura dhe të shpërndara njelloj si $X \sim \mathcal{E}(\frac{1}{\beta})$ dhe shënojmë $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, atëherë funksioni prodhues i momenteve për Y është:

$$M_Y(t) = [M_X(t)]^n = \frac{1}{(1-\beta t)^n} \quad (1.60)$$

i cili është funksioni prodhues i momenteve ër shpërndarjen $\mathcal{G}(n, \beta)$.

Kështu, shumta e shpërndarjeve eksponenciale të pavarura e më shpërndarje të njëjtë, jep një shpërndarje gamma me të α plotë e pozitive.

– Shpërndarja Weibull

Një ndryshore rasti X ka shpërndarje Weibull me 2 parametra $\mathcal{W}(\alpha, \lambda)$ $\alpha > 0, \lambda > 0$ nëse densiteti i tij është:

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\right], \quad x \geq 0 \quad (1.61)$$

ku α është parametri për formën dhe λ është parametri për shkallën.

Funksioni i shpërndarjes së X është:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\alpha\right], \quad x \geq 0 \quad (1.62)$$

Pritja matematike dhe dispersioni i X janë përkatësisht:

$$E(X) = \lambda \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right), \quad Var(X) = \lambda^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \mu^2 \quad (1.63)$$

Një shpërndarje Weibull me $\lambda = 1$ do të quhet shpërndarje standarte Weibull me densitet $\alpha x^{\alpha-1} \exp(-x^\alpha)$

– **Shpërndarja Pareto**

Një ndryshore rasti X ka shpërndarje Pareto me parametra $\alpha > 0$ dhe $\gamma > 0$, shënohet me $\mathcal{P}(\alpha, \gamma)$, nëse densiteti i saj është:

$$f_X(x) = \frac{\alpha\gamma^\alpha}{(x+\gamma)^{\alpha+1}}, \quad x \geq 0 \quad (1.64)$$

Funksioni i shpërndarjes së X është:

$$F_X(x) = 1 - \left(\frac{\gamma}{x+\gamma}\right)^\alpha, \quad x \geq 0 \quad (1.65)$$

Për $\alpha > 2$, pritja matematike dhe dispersion i X janë:

$$E(X) = \frac{\gamma}{\alpha-1}, \quad D(X) = \frac{\alpha\gamma^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} \quad (1.66)$$

Shpërndarja Pareto nuk ka funksion prodhues të momenteve. Shpërndarje Pareto mund të lindë nga një përzierje e shpërndarjeve eksponenciale.

1.1.2.4 Metodat për krijimin e shpërndarjeve të reja

Në këtë pjesë diskutojmë disa metoda për krijimin e shpërndarjeve të reja. Në veçanti, konsiderojmë metodat e transformimit, shpërndarjen e përzier, dhe metodat e bashkimit të tyre.

– **Transformimi i një ndryshore rasti**

Shpërndarjet e reja mund të krijohen duke transformuar një ndryshore të rastit me një shpërndarje të njohur. Transformimi më i lehtë është ndoshta shumëzimi ose pjesëtimi nga një konstante.

Për shembull, nëse $X \sim \mathcal{W}(\alpha, \lambda)$ atëherë $Y = g(X) = \frac{X}{\lambda} \sim \mathcal{W}(\alpha, 1)$.

Një transformim tjetër i zakonshëm është transformimi fuqi.

Për shembull n.q.s $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ atëherë $Y = g(X) = X^{\frac{1}{\alpha}} \sim \mathcal{W}\left(\alpha, 1/\lambda^{\frac{1}{\alpha}}\right)$

Një tjetër transformim i zakonshëm është transformimi eksponencial:

Le të jetë $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$. X mund të marrë vlera negative, dhe rrjedhimisht nuk është i përshtatshëm për analizimin e ashpërsisë së demit.

Megjithatë, mund të krijohet një ndryshore rasti e re duke marrë eksponencialin e X .

Kështu, përcaktojmë:

$Y = e^X \Rightarrow X = \log Y$, dhe densiteti i Y është:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} \exp\left(-\frac{(\log y - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (1.67)$$

Ndryshorja e rastit Y me densitet si në ekuacionin (67) quhet se ka shpërndarje lognormale me parametra μ dhe σ^2 , $Y \sim \mathcal{L}(\mu, \sigma^2)$.

Pritja matematike dhe dispersion i saj janë:

$$E(Y) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right), \quad D(Y) = [\exp(2\mu + \sigma^2)][\exp(\sigma^2) - 1] \quad (1.68)$$

– Shpërndarjet mikse

Përkufizimin e shpërndarjes mikse e kemi marrë në paragrafin 1.1.1.3 më sipër. Më poshtë do e zgjerojmë këtë përkufizim në shpërndarjet mikse të vazhdueshme

Përkufizim 1.3 Le të jetë X një ndryshore rasti e vazhdueshme me densitet $f_X(x | \lambda)$, e cila varet nga parametri λ . Pranojmë se λ është një rezultat i një ndryshoreje rasti Λ në hapësirën Ω_Λ dhe densitet $f_\Lambda(\lambda | \theta)$, ku θ është parametri që përcakton shpërndarjen e Λ , ndonjëherë i quajtur hiperparameter. Atëhere mund të krijohet një ndryshore rasti e re Y nga përzierja e densitetit $f_X(x | \lambda)$ për të formuar densitetin:

$$f_Y(y | \lambda) = \int_{\lambda \in \Omega_\Lambda} f_X(y | \theta) f_\Lambda(\lambda | \theta) d\lambda \quad (1.69)$$

Kështu, Y është një shpërndarje e përzier dhe densiteti i saj varet nga θ , shpërndarja e Y është një përzierje e vazhdueshme, meqë shpërndarja e përzier e saj përfaqësohet nga densiteti $f_\Lambda(\lambda | \theta)$.

Për shembull supozojmë $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, dhe le të jetë parametri λ i shpërndarë sipas $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Atëhere shpërndarja e përzier do të jetë:

$$f_Y(y | \theta) = \frac{\alpha \gamma^\alpha}{(x + \gamma)^{\alpha+1}} \text{ ku } \gamma = \frac{1}{\beta} \quad (1.70)$$

Pra, shpërndarja gama-eksponenciale ka një shpërndarje Pareto. Gjithashtu shohim se shpërndarja e përzierjes varet nga α dhe β .

Mund të gjejmë pritjen matematike dhe dispersionin duke e konsideruar shpërndarjen eksponenciale si një shpërndarje me kusht, kur jepet parametri Λ dhe e shënojmë me $X | \Lambda \sim \mathcal{E}(\Lambda)$. Shpërndarja e Λ është shpërndarja mikse, me shpërndarje si shpërndarja e pakushtëzuar e X . Meqë në shpërndarjen Pareto për $\alpha > 2$:

$$E(X) = \frac{1}{(\alpha - 1)\beta}, \quad D(X) = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)\beta^2}$$

Dhe në fakt në rastin tonë kemi:

$$E(X) = E(E(X | \Lambda)) = E\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \frac{1}{(\alpha - 1)\beta} \quad (1.71)$$

$$D(X) = E(D(X | \Lambda)) + D(E(X | \Lambda)) = E\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) + D\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = 2E\left(\frac{1}{\Lambda^2}\right) + \left[E\left(\frac{1}{\Lambda}\right)\right]^2 = \frac{\alpha}{(\alpha - 1)^2(\alpha - 2)\beta^2} \quad (1.72)$$

Pra janë të njëjta rezultate si në shpërndarjen Pareto

– Gërshetimi

Gërshetimi është një teknikë për të krijuar një shpërndarje të re nga shpërndarjet standarde duke përdorur densitete të ndryshme në pjesë të ndryshme të hapësirës. Supozojmë se kemi k densitete, të shënuara me $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ të përcaktuara në hapësirën $\Omega_X = [0, \infty[$, mund të përkufizojmë një densitet të ri $f_X(x)$ si më poshtë:

$$f_X(x) = \begin{cases} p_1 f_1^*(x) & x \in [0, c_1[\\ p_2 f_2^*(x) & x \in [c_1, c_2[\\ \vdots & \vdots \\ p_k f_k^*(x) & x \in [c_{k-1}, \infty[\end{cases} \quad (1.73)$$

Ku $p_i \geq 0$ për $i = 1, \dots, n$, me $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $c_0 = 0 < c_1 < c_2 < \dots < c_{k-1} < \infty = c_k$ dhe $f_i^*(x)$ është një densitet duke konsideruar $f_i(x)$ në intervalin $[c_{i-1}, c_i[$ për $i = 1, \dots, k$.

Në mënyrë që kushti i fundit të ketë kuptim përcaktojmë:

$$f_i^*(x) = \frac{f_i(x)}{\int_{c_{i-1}}^{c_i} f_i(t) dt}, \text{ për } x \in [c_{i-1}, c_i[\quad (1.74)$$

Vërejmë se megjithëse $f_X(x)$ formon një densitet, X në përgjithësi nuk është e vazhdueshme, meqë skajet e gërshetimit ndahen në pikat $c_1, c_2, \dots, c_{k-1}$.

1.1.2.5 Tiparet e zgjatimeve në skaje të ashpersisë së demit

Dëmet me vlera të mëdha minojnë jetësinë e kontratave siguruese. Pra në modelimin e dëmeve, i duhet kushtuar vëmendje analizimit të vlerave ekstreme. Për ashpersinë e demit, vlerat ekstreme janë në skajin më të lartë të shpërndarjes. Një shpërndarje me probabilitet të lartë humbjeje është e thënë të ketë një fund (tail) të trashë, të rëndë, ose fund të dendur. Përderisa është e vështirë për të përcaktuar trashësinë, disa përmasa mund të përdoren si tregues. Së pari, ekzistenca e momenteve është një tregues nëse shpërndarja ka një fund (bisht) të trashë. Për shembull, shpërndarja gamma ka momente të të gjitha rendeve, e cila tregon se probabiliteti i vlerave ekstreme zbret mjaft shpejt. Shpërndarja Pareto ka momente vetëm deri në rendin α .

Prandaj, në qoftë se $\alpha < 2$, shpërndarja Pareto nuk ka dispersion. Ky është një tregues i një shpërndarje me fund të trashë.

Për të analizuar trashësinë midis dy shpërndarjeve, mund të marrim limitin e raporteve të densiteteve. Sa më shpejt densiteti i afrohet zeros aq më i trashë është bishti. Ky limit mund të gjendet nëpërmjet formulave të L'Hopitalit:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (1.75)$$

Ne gjithashtu mund t'i përcaktojmë dëmet ekstreme duke përdorur kuantilet në fundin e sipërm të shpërndarjes së demit. Funksioni i kuantileve është inversi i funksionit të shpërndarjes.

$$x_\delta = F_X^{-1}(\delta) \quad (1.76)$$

Në qoftë se jepet probabiliteti i tolerancës $1 - \delta$, kuantili x_δ tregon humbjen e cila do të tejkalohet me probabilitet $1 - \delta$. Sidoqoftë ajo nuk jep informacion në lidhje se sa e keqe do jetë humbja nëse ajo e tejkalon këtë prag. Për t'i dhënë përgjigje kësaj çështjeje mund të

përllogarisim pritjet matematike me kusht të dëmeve në lidhje me pragun që tejkalohet. Ne e quajmë atë pritja matematike me kusht e bishtit me probabilitet tolerance $1 - \delta$ të cilën e shënojmë PMB_δ dhe përcaktohet me formulë:

$$PMB_\delta = E(X|X > x_\delta) = \frac{\int_{x_\delta}^{+\infty} x f_X(x) dx}{1 - \delta} \quad (1.77)$$

1.1.3 Modele të dëmeve totale

Pas diskutimit të modeleve në lidhje me frekuencën dhe ashpërsinë e dëmvë në mënyrë të veçantë tani i kthehemi modelimit të dëmit total në një grup policash sigurimi. Ka dy përafrime kryesore në modelimin e dëmit total të cilat janë: modeli individual i rrezikut dhe modeli kolektiv i rrezikut. Fillimisht do të merremi me modelin individual të rrezikut, në të cilin supozojmë se kemi n dëme të pavarura në këtë bllok policash. Duke qënë se një kontratë mund të ketë ose mund të mos ketë një dëm, shpërndarja e ndryshores së dëmeve në këtë model është e formës mikse, ajo përbëhet nga një densitet në masën zero dhe një përbërës të vazhdueshëm për dëmet pozitive. Në përgjithësi shpërndarja ekzakte e dëmit total mund të merret vetëm nëpërmjet metodës së konvolucionit. Rekursi i De Pril sidoqoftë është një teknikë e fuqishme për të llogaritur shpërndarjen ekzakte në mënyrë rekursive kur blloku i policave ndjek një strukturë të caktuar.

Nga ana tjetër modeli i rrezikut kolektiv e trajton dëmin total nëpërmjet shpërndarjes së përbërë me shpërndarje primare frekuencën e dëmeve dhe me shpërndarje sekondare ashpërsinë e dëmit. Rekursi i Panjer mund të përdoret për përllogaritjen e shpërndarjes së dëmit total nëse shpërndarja e frekuencës së dëmit i përket klasës $(a, b, 0)$ të shpërndarjeve dhe shpërndarja e ashpërsisë së dëmeve kthehet në diskrete apo përafrohet nëpërmjet një shpërndarje diskrete. Nëveçanti, shpërndarja e përbërë Poisson ka disa veçori të përdorshme në aplikime dhe gjithashtu mund të përdoret si një përafrim për modelin e rrezikut individual. [5] [6] [9] [10] [11] [12] [13] [14] [15] [25] [26] [27]

1.1.3.1 Modelet individuale e kolektive të rrezikut

Humbja totale në një bllok të policash sigurimi është shumë e të gjitha dëmeve të ndodhura në bllok. Ajo mund të modelohet nëpërmjet dy qasjeve: modelit individual të rrezikut dhe modelit kolektiv të rrezikut. Në modelin individual të rrezikut, shënojmë numrin e policave në bllok me n . Ne supozojmë se dëmet për çdo policë, të shënuara me X_i , për $i = 1, \dots, n$, të jenë të pavarura dhe me shpërndarje të njëjtë me X . Rrjedhimisht dëmi totale në grupin e policave, të cilën po e shënojmë me S , jepet nga:

$$S = X_1 + \dots + X_n \quad (1.78)$$

Rrjedhimisht, S është shuma e n ndryshoreve të rastit të pavarura e me shpërndarje të njëjtë me X , ku n është një numër fiks. Vërejmë se zakonisht shumica e policave kanë vlerën e dëmit zero, rrjedhimisht $X_i = 0$ për këto polica. Me fjalë të tjera, X ndjek një shpërndarje të përzier me një densitet diskret në pikën zero. Megjithatë X_i në formulën (1.78) janë të përcaktuara si të pavarura e me shpërndarje të njëjtë, supozimi për shpërndarje të njëjtë nuk është i nevojshëm.

Vlera totale e dëmit mund të llogaritet gjithashtu duke përdorur modelin kolektiv të rrezikut, në të cilin dëmi total është supozuar të ndjekë një shpërndarje të përbërë.

Le jetë N numri i dëmeve në grupin e policave dhe X_i le të jetë vlera e dëmit të i -të, për $i = 1, \dots, N$. Atëhere dëmi total S është dhënë nga:

$$S = X_1 + \dots + X_N \quad (1.79)$$

$X_1, \dots, X_N$ supozohen të jenë të pavarura e me shpërndarje të njëjtë me ndryshoren e ashpërsisë së dëmit X , e cila është shpërndarja sekondare e shpërndarjes së përbërë; ndërkohë që N është ndryshorja e rastit për frekuencën e dëmit, përfaqëson shpërndarjen primare. Për më tepër, N dhe X janë të supozuara të jenë të pavarura. Vërejmë se, X_i janë të përcaktuar në mënyrë të ndryshme në ekuacionet (1.78) dhe (1.79). Në ekuacionin e parë X_i është dëmi i policës së i -të (e cila mund të jetë zero), ndërsa në ekuacionin e dytë X_i është shuma e dëmit në rastin e i -të dhe është pozitive me probabilitet 1.

Ka disa avantazhe në modelimin në mënyrë të veçantë të frekuencës dhe ashpërsisë së dëmit, dhe më pas kombinimin e tyre për të përcaktuar shpërndarjen totale të dëmit. Për shembull, zgjerimi i biznesit të sigurimit mund të ketë ndikim në frekuencën e dëmit, por jo mbi ashpërsinë e dëmit.

Nga ana tjetër, kontrolli me kosto (apo rritje të përgjithshme me kosto) dhe risi në teknologji mund të ndikojnë në ashpërsinë e dëmit dhe jo në frekuencën e dëmit. Modelimi i dy komponentëve më vete do të na mundësojë për të identifikuar efektet e këtyre modifikimeve në dëmin total.

1.1.3.1.1 Modeli individual i rrezikut

Ekuacioni bazë i modelit individual të rrezikut i përcaktuar në ekuacionin (1.78) specifikon dëmin total S si shumë të n ndryshoreve të rastit të pavarura e me shpërndarje të njëjtë me X . Kështu, pritja matematike dhe dispersioni i S jepen nga:

$$E(S) = nE(X) \text{ dhe } D(S) = nD(X) \quad (1.80)$$

Për të llogaritur pritjen matematike dhe dispersionin e S , na duhet pritja matematike dhe dispersioni i X . Le jetë θ probabiliteti i një dëmi dhe $1 - \theta$ probabiliteti i mos së paturit të një dëmi. Për më tepër, supozojmë se kemi një dëm me vlerë Y , i cili është një ndryshore rasti e vazhdueshme pozitive me pritje matematike μ_Y dhe dispersion σ_Y^2 . Rrjedimisht, $X = Y$ me probabilitet θ , dhe $X = 0$ me probabilitet $1 - \theta$. Pra mund të shkruajmë:

$$X = IY \quad (1.81)$$

ku I është një ndryshore rasti e Bernulit e shpërndarë në mënyrë të pavarur nga Y , në mënyrë që:

$$I = \begin{cases} 0 & \text{me probabilitet } 1 - \theta \\ 1 & \text{me probabilitet } \theta \end{cases} \quad (1.82)$$

Rrjedhimisht, pritja matematike dhe dispersion i X janë:

$$E(X) = E(I)E(Y) = \theta\mu_Y \quad (1.83)$$

dhe

$$D(X) = [E(Y)]^2 D(I) + E(I^2) D(Y) = \mu_Y^2 \theta(1 - \theta) + \theta \sigma_Y^2, \quad (1.84)$$

Pra pritja matematike dhe dispersioni i S janë:

$$E(S) = n\theta\mu_Y \text{ dhe } D(S) = n[\mu_Y^2 \theta(1 - \theta) + \theta \sigma_Y^2] \quad (1.85)$$

– **Shpërndarja e saktë duke përdorur konvolucionin**

Teknika e përgjithshme për të llogaritur shpërndarjen e saktë të shumës së ndryshoreve të pavarura të rastit është me konvolucion. Metoda e konvolucionit është diskutuar në paragrafin 1.1.1.3më sipër.

– **Shpërndarja e saktë duke përdorur rekursin De Pril:**

Rekursi De Pril ofron një metodë për të llogaritur shpërndarjen totale të dëmit për modelin individual të rrezikut. Kjo metodë vlen për grupet e policave të sigurimit të cilat mund të shtresëzohen sipas shumës së siguruar dhe probabilitetit të dëmit.

Ne supozojmë se portofoli i policave të sigurimit konsiston në rreziqe me J probabilitete dëmsh të ndryshme θ_j , për $j = 1, 2, \dots, J$, dhe çdo policë ka një shumë sigurimi prej I njësish ku $i = 1, 2, \dots, I$. Ne supozojmë se kemi n_{ij} polica të pavarura me shumë sigurimi i njësi dhe probabilitet dëmi θ_j për $i = 1, 2, \dots, I$ dhe $j = 1, 2, \dots, J$. Atëhere nëse shënojmë dëmin total në grupin e policave me S dhe densitetim e S me $f_S(s)$, $s = 0, \dots, n$, ku $n = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J i n_{ij}$, atëhere $f_S(s)$ kënaq ekuacionin e mëposhtëm:

$$f_S(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{\min\{s, I\}} \sum_{k=1}^{\left\lfloor \frac{s}{i} \right\rfloor} f_S(s - ik) h(i, k) \text{ për } s = 1, \dots, n \quad (1.86)$$

ku

$$h(i, k) = \begin{cases} i(-1)^{k-1} \sum_{j=1}^J n_{ij} \left(\frac{\theta_j}{1-\theta_j} \right)^k & \text{për } i = 1, \dots, I \\ 0 & \text{përndryshe} \end{cases} \quad (1.87)$$

dhe formula rekursive ka vlerë fillimi

$$f_S(0) = \prod_{i=1}^I \prod_{j=1}^J (1 - \theta_j)^{n_{ij}} \quad (1.88)$$

Formula e rekursit të De Prilit është shumë e kumplikuar në përlllogaritje për vlera të mëdha të s dhe I . Sidoqoftë duke qënë se θ_j është zakonisht e vogël, $h(i, k)$ zakonisht është afër zeros për k

të mëdha, mund të arrihet një përafrim duke përdorur një paramet trunkimi K në shumimin mbi k në ekuacionin (1.86). Densitetin përkatës e shënojmë me $f_S^K(s)$ dhe jepet:

$$f_S^K(s) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{\min\{x, I\}} \sum_{k=1}^{\min\{K, \lceil \frac{s}{i} \rceil\}} f_S^K(s - ik) h(i, k) \quad (1.89)$$

ku $f_S^K(0) = f_S(0)$

– **Përafrime të modelit individual të rrezikut:**

Meqë dëmi total S , është shuma e n ndryshoreve të rastit të pavarura e me shpërndarje të njëjtë, shpërndarja e saj është përafërsisht normale kur n është e madhe në bazë të Teoremës Qendrore Limite. Pritja matematike dhe dispersioni i S mund të përdoren për përllogaritjen e shpërndarjes së përafërt të S :

$$Pr(X \leq s) = \Phi\left(\frac{s - E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) \quad (1.90)$$

Përafrimi normal qëndron edhe kur rreziqet individuale nuk janë me shpërndarje të njëjtë. Si në rastin e strukturës së De Prilit probabiliteti i dëmeve është i ndryshueshëm. Megjithatë pritja matematike dhe dispersion i S , mund të llogariten duke supozuar pavarësinë e rreziqeve si më poshtë:

$$E(S) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J i n_{ij} \theta_j (1 - \theta_j) \quad D(S) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J i^2 n_{ij} \theta_j (1 - \theta_j) \quad (1.91)$$

Megjithëse përllogaritja duke përdorur rekursin ekzakt të De Pril është shumë efikase aplikimi i saj varet nga supozimi që portofoli i policave të sigurimit mund të shtresëzohet sipas një strukture të caktuar.

1.1.3.1.2 Modeli i rrezikut kolektiv

Modeli kolektiv i rrezikut përcakton dëmin total S si shumë të N dëmeve, të cilat janë të pavarura dhe me shpërndarje të njëjtë me ndryshoren e rastit të ashpërsisë të dëmit X . Rrjedhimisht, S ndjek një shpërndarje të përbërë, me N si shpërndarje primare dhe X shpërndarja dytësore.

Megjithëse në paragrafin 1.1.1.3 me sipër janë diskutuar shpërndarjet e përbëra të tilla që edhe shpërndarja primare edhe shpërndarja sekondare paraqiten si shpërndarje diskrete jonegative, disa nga vetitë e tyre kanë zbatim edhe në modelin kolektiv të rrezikut ku shpërndarja sekondare është e vazhdueshme jonegative. Më poshtë do analizojmë disa nga këto veti dhe do i aplikojmë ato në modelin kolektiv të rrezikut. Gjithashtu do të përdoren si metoda rekursive ashtu edhe metoda e përafrimit në modelimin e vlerës totale të dëmit

– **Veti të shpërndarjeve të përbëra**

Së pari funksioni prodhues i momenteve për vlerën totale të dëmit jepet nëpërmjet formulës:

$$M_S(t) = M_N(t)[\log M_X(t)] \quad (1.92)$$

ku $M_N(t)$ dhe $M_X(t)$ janë përkatësisht funksionet prodhues të momenteve për N dhe X .

Për më tepër nëse X merr vlera diskrete jonegative, S është gjithashtu diskrete jonegative, dhe funksioni prodhues i probabilitetit të saj jepet nga formula:

$$P_S(t) = P_N[P_X(t)] \quad (1.93)$$

Ku $P_N(t)$ dhe $P_X(t)$ janë përkatësisht funksionet prodhues të probabilitetit për N dhe X . Gjithashtu pritja matematike dhe dispersion për S janë:

$$E(S) = E(N)E(X), \quad D(S) = E(N)D(X) + D(N)[E(X)]^2 \quad (1.94)$$

Këto veti kanë vend pavarësisht nëse X është diskret apo i vazhdueshëm. Gjithashtu nëse S_i kanë shpërndarje Poisson të përbërë me shpërndarje të ashpërsisë së dëmit X_i e cila mund të jetë e vazhdueshme apo diskrete për $i = 1, \dots, n$ atëherë $S = S_1 + \dots + S_n$ ka gjithashtu shpërndarje Poisson të përbërë me parametër $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ ku λ_i është parametri i S_i për $i = 1, \dots, n$. Për më tepër shpërndarja sekondare X e S është shpërndarje mikse e $X_1, \dots, X_n$ ku denduria e X_i është λ_i/λ

Kur X është i vazhdueshëm mund të përftojme densitetin e S nëpërmjet formulës:

$$f_S(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{X_1+X_2+\dots+X_n|n}(s) f_N(n) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{*n}(s) f_N(n) \quad (1.95)$$

ku $f^{*n}(\cdot)$ është konvolucioni i n -të:

$$f^{*n}(s) = f_{X_1+X_2+\dots+X_n}(s) = \int_0^s f_n(s-y) f^{*(n-1)}(y) dy \quad (1.96)$$

Rrjedhimisht, densiteti ekzakt i S është një shumë konvolucionesh, dhe llogaritjet janë mjaft të komplikuar.

Megjithatë ekzistojnë raste speciale ku mund të nxirret në mënyrë analitike shpërndarja e përbërë, siç paraqitet edhe në Teoremë më poshtë:

Teoremë 1.7: Supozojmë se për shpërndarjen e përbërë të dhënë sipas formulave (1.79), $X_1, \dots, X_n$ janë të pavarura e me shpërndarje $\mathcal{E}(\lambda)$ dhe $N \sim \mathcal{GM}(\theta)$. Atëherë shpërndarja e përbërë S ka shpërndarje diskrete në pikën 0 me vlerë θ dhe shpërndarje të vazhdueshme për vlerat e tjera me shpërndarje $\mathcal{E}(\lambda\theta)$ me probabilitet $1 - \theta$

Zgjidhjet analitike të shpërndarjeve të përbëra në përgjithësi nuk janë të mundshme, ndaj më poshtë do të diskutojmë disa përafrime duke përdorur metoda të rekursionit, si edhe përafrimin normal duke supozuar se kemi mjaftueshmërisht të dhëna.

– **Rekursi i Panjer**

Teorema 1.3 jep një metodë rekursi efikase të Panjerit për të llogaritur shpërndarjet ekzakte të një procesi të përbërë e cila kënaq kushtet që shpërndarja primare i perket klasës $(a, b, 0)$ të shpërndarjeve dhe shpërndarja sekondare është jo negative dhe diskrete, pra nëse një shpërndarje e vazhdueshme për ashpërsinë e dëmeve mund të kthehet në shpërndarje diskrete dhe shpërndarja primare i perket klasës $(a, b, 0)$ të shpërndarjeve mund të përdorim përafrimin e Panjerit për të llogaritur shpërndarjen e dëmit total.

– **Përafrime të modelit kolektiv të rrezikut**

Në modelin individual të rrezikut nëse numri n është i madh, bazuar në Teoremen Qendrore Limite dëmi total mund të përafrohet nëpërmjet shpërndarjes normale. Në rastin e modelit kolektiv të rrezikut situata është më komplekse, duke qenë se termi N është ndryshore rasti. Sidoqoftë nëse pritja matematike e numrit të dëmeve është e madhe, mund të presim që përafrimi normal të funksionojë. Rrjedhimisht duke përdorur formulat për S në ekuacionin (1.94) mund të llogarisim:

$$P(S \leq x) = \Phi\left(\frac{x - E(S)}{\sqrt{D(S)}}\right) \quad (1.97)$$

Përafrimi normal përdor vetëm dy momentet e para të S . Mund të nxirren moment të rrethave më të larta për S dhe mund të përdoren për të ndihmuar në përmirësimin e përafrimit. Vërejmë se procesi i përbërë i Poisson është i anuar në të djathtë pavarësisht nga paraqitja e shpërndarjes sekondare.

– **Shpërndarja e përbërë e Poisson dhe modeli individual i rrezikut**

Konsiderojmë modelin individual të rrezikut sipas formulës (1.78) për n polica. Dëmet e policave janë të shpërndara në mënyrë të pavarur me densitete $f_{X_i}(\cdot)$, të cilët nuk është e thënë të jenë identik. Vërejmë se X_i mund të konsiderohen si të shpërndara me shpërndarje të përbërë Bernuli. Shpërndarja primare N_i për X_i merr vlera zero me probabilitet $(1 - \theta_i)$ dhe vlerën 1 me probabilitet θ_i dhe shpërndarja sekondare ka densitet $f_{Y_i}(\cdot)$, të tillë që:

$$f_{X_i}(x) = \begin{cases} 1 - \theta_i & x = 0 \\ \theta_i f_{Y_i}(x) & x > 0 \end{cases} \quad (1.98)$$

Pra S është shuma e n shpërndarjeve të përbëra të Bernulit. Kjo shpërndarje në përgjithësi është e vështirë dhe është e nevojshme të përdoren metodat të konvolucionit për llogaritjen e shpërndarjes ekzakte.

Sidoqoftë nga Teorema 1.5 dimë që shuma e n ndryshoreve të rastit Poisson është gjithashtu Poisson. Duke qenë se rekursi i Panjerit jep një metodë efikase për llogaritjen e shpërndarjes së

përbërë të Poisson, një metodë e përafërt për të llogaritur shpërndarjen e S mund të jepet duke përafëruar shpërndarjet e përbëra të Bernulit X_i nëpërmjet shpërndarjeve të përbërë të Poissonit $\tilde{X}_i$.

Kështue përcaktojmë $\tilde{X}_i$ si një shpërndarje të përbërë Poissoni ku parametri i Poisson është $\lambda_i = \theta_i$ dhe shpërndarja sekondare ka densitet $f_{Y_i}(\cdot)$. Rrjedhimisht pritja matematike për shpërndarjen primare të X_i dhe $\tilde{X}_i$ është e njëjtë dhe ato kanë të njëjten shpërndarje sekondare.

Tani përcaktojmë

$$\tilde{S} = \tilde{X}_1 + \dots + \tilde{X}_n \quad (1.99)$$

E cila bazuar në Teoremën 1.5 ka shpërndarje të përbërë Poisson me parametër:

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = \theta_1 + \dots + \theta_n \quad (1.100)$$

Densiteti i shpërndarjes sekondare të $\tilde{S}$ është

$$f_{\tilde{S}}(x) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{Y_i}(x) \quad (1.101)$$

Shpërndarja e $\tilde{S}$ mund të përlllogaritet nëpërmjet kthimit në diskrete të $f_{\tilde{S}}(\cdot)$ duke përdorur metodën e rekursit të Panjer, e cila jep një përafrim të shpërndarjes së S .

Së fundmi nëse X_i kanë shpërndarje të njëjtë me $\theta_i = \theta$ dhe $f_{Y_i}(\cdot) = f_Y(\cdot)$ për $i = 1, \dots, n$, atëherë do të kemi:

$$\lambda = n\theta, \quad f_{\tilde{S}}(\cdot) = f_Y(\cdot) \quad (1.102)$$

1.2 Ndërtimi dhe vlerësimi i modelit

Ndërtimi dhe vlerësimi i modelit janë dy aspekte shumë të rëndësishme të implementimit empirik të modeleve të shpërndarjes së dëmeve. Për të ndërtuar një model parametrik për shpërndarjen e dëmeve, është e nevojshme të kryhet vlerësimi i parametrave të shpërndarjes bazuar më të dhënat e vëzhguara. Ndërkohë me mund të kryejmë vlerësimin e funksionit shpërndarës apo densitetit pa specifikuar formën funksionale të tij, rast në të cilin përdoren metoda joparametrike. Pas ndërtimit të një modeli shpërndarës, është e nevojshme të kryhen vlerësime për përshtatshmërinë e tij në lidhje me të dhënat e vëzhguara. Kështu modelet e përzgjedhura krahasohen duke përdorur metoda të kriterëve përzgjedhëse të modelit, duke përfshirë këtu edhe teste të mirësisë së përshtatjes.

Simulimet kompjuterike duke përdorur numra të rastit janë një pjesë shumë e rëndësishme në analizimin e modelit kur metoda analitike janë të vështira për t'u përdorur. Këto metoda ndihmojnë në vlerësimin e gabimit mesatar katror të një vlerësuesi, në vlerësimin e p - vlerës të një kontrolli hipoteze, etj.[5] [6] [9] [10] [13] [14] [15] [16] [17]

1.2.1 Njohuri bazë për vlerësimin i modelit

Nëse supozojmë se një ndryshore rasti për dëmet ka një shpërndarje parametrike të caktuar, për analizën empirike lidhur me vetitë e dëmeve, është e nevojshme të kryhet vlerësimi i parametrave. Më poshtë kryejmë një përmbledhje të elementëve të teorisë së vlerësimit të parametrave.

Përveç përjasjes parametrike, mund të kryejmë vlerësimin e funksionit të shpërndarjes dhe densitetit, për ndryshoren e rastit të dëmeve, në mënyrë të drejtpërdrejtë, pa pretenduar për ndonjë formë parametrike. Kjo përjasje është quajtur vlerësim joparametrik. Në këtë paragraf jepen në mënyrë të përgjithshme metodat e vlerësimit, dhe duke i lënë pjesët e detajuara në paragrafet pasardhëse.

1.2.1.1 Vlerësimi

Nëse shënojmë me X ndryshoren e rastit të dëmeve, dhe supozojmë se $F(x; \theta)$ dhe $f(x; \theta)$ janë përkatësisht funksioni i shpërndarjes dhe densiteti i X , ku θ është parametrik për densitetin dhe për funksionin e shpërndarjes. Parametri θ mund të jetë një numer i vetëm apo edhe një vektor, por më tej për lehtësi shënimesh do të trajtohet si numër. Në rast se θ është i njohur, kemi që shpërndarja për X është plotësisht e përcaktuar dhe mund të përlllogariten elementë të ndryshëm si pritja matematike apo dispersioni. Praktikisht θ është e panjohur, ndaj duhet të vlerësohet bazuar në të dhënat e vëzhguara. Le të jetë $[X_1, \dots, X_n]$ një zgjedhje prej n vëzhgimesh nga X . Shënojmë me $\hat{\theta}$ si vlerësues të θ bazuar në n vëzhgimet nga X . Si rrjedhim $F(x; \hat{\theta})$ dhe $f(x; \hat{\theta})$ janë vlerësuesit parametrik përkatësisht të funksionit të shpërndarjes e të densitetit të X .

Nga ana tjetër $F(x)$ dhe $f(x)$ mund të vlerësohen për të gjitha vlerat x pa supozuar ndonjë formë parametrike specifike. Një mënyrë për të kryer këtë është nëpërmjet histogramës së të dhënave

– Vlerësimi pikësor e vlerësimi intervalor

Duke qenë se $\hat{\theta}$ lidh një vlerë specifike me θ , ajo do të quhet vlerësues pikësor. Në ndryshim nga kjo, vlerësuesi intervalor për një parametër të panjohur, është një interval, i ndërtuar nga të dhënat e zgjedhjes, i cili mbulon vlerën e vërtetë të θ me një probabilitet të caktuar. Në mënyrë specifike, nëse kemi $\hat{\theta}_P$ dhe $\hat{\theta}_S$ funksione të elementëve të zgjedhjes $[X_1, \dots, X_n]$ të tilla që $\hat{\theta}_P < \hat{\theta}_S$, intervali $(\hat{\theta}_P, \hat{\theta}_S)$ do të quhet interval i besimit me siguri $100(1 - \alpha)\%$ për θ nëse $P(\hat{\theta}_P < \theta < \hat{\theta}_S) = 1 - \alpha$

– **Veti të vlerësuesve**

Duke qenë se për të njëjtin parametër mund të ekzistojnë më shumë se një vlerësues, është e rëndësishme se cili prej tyre duhet përzgjedhur. Ne duam që vlerësuesi i përzgjedhur të jetë sa më afër parametrin tonë, gjë e cila çon në kriterin e të qenurit i pazhvendosur:

Përkufizim 1.4: Një vlerësues $\hat{\theta}$ për θ , do të quhet i pazhvendosur atëhere dhe vetëm atëhere kur $E(\hat{\theta}) = \theta$

Të qenurit vlerësues i pazhvendosur i $\hat{\theta}$ për θ , kërkon që $E(\hat{\theta}) = \theta$ për të gjitha zgjedhjet si do që të jenë këto. Ndërkohë në disa aplikime mund të ndodhë që megjithëse ky barazim s'ka vend për zgjedhje të fundme, $\hat{\theta}$ mund t'i afrohet θ në zgjedhje të mëdha.

Përkufizim 1.5: Thuhet se vlerësuesi $\hat{\theta}$ është asimptotikisht i pazhvendosur për θ nëse $\lim_{n \rightarrow \infty} E(\hat{\theta}) = \theta$

Ndërkohë mund të ndodhë që të kemi më shumë se një vlerësues të pazhvendosur $\hat{\theta}$ për θ , ndaj kriteri i të qenurit i pazhvendosur mund të kthehet si i pamjaftueshëm për vlerësimin tonë të mëtejshëm. Nëse kemi dy vlerësues të pazhvendosur, logjikisht vlerësuesi me dispersion më të vogël preferohet më shumë:

Përkufizim 1.6: Nëse $\hat{\theta}$ dhe $\tilde{\theta}$ janë dy vlerësues të pazhvendosur për θ , vlerësuesi $\hat{\theta}$ do të quhet më i mirë se vlerësuesi $\tilde{\theta}$, nëse $D(\hat{\theta}) < D(\tilde{\theta})$. Për më tepër nëse dispersioni i një vlerësuesi $\hat{\theta}$ të θ do të quhet vlerësues i pazhvendosur me dispersion minimal, nëse dispersioni i tij është më i vogël se dispersioni i çdo vlerësuesi tjetër të pazhvendosur për θ .

Ndërkohë që të qenurit asimptotikisht i pazhvendosur kërkon që pritja matematike e $\hat{\theta}$ të jetë shumë afër θ për zgjedhje të mëdha, një kusht edhe më i fortë është që vetë $\hat{\theta}$ t'i afrohet mjaft θ në zgjedhje të mëdha:

Përkufizim 1.7: $\hat{\theta}$ është një vlerësues i qëndrueshëm i θ nëse si konvergjon në probabilitet drejt θ , që do të thotë se për çdo $\delta > 0$ kemi që $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \delta) = 1$

Bazuar më këto përkufizime rrjedh Teorema e mëposhtme:

Teoremë 1.8: $\hat{\theta}$ është një vlerësues i qëndrueshëm për θ , nëse ai është asimptotikisht i pazhvendosur dhe $D(\hat{\theta}) \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$

1.2.2 Vlerësimi joparametrik i modelit

Në këtë paragraf, fokusi maksimal do të vihet mbi vlerësimin e funksionit të shpërndarjes dhe mbi densitetin e ndryshores së dëmeve. Metodatat që përdoren varen nëse vëzhgimet janë individuale apo të grupuara.

Për vëzhgimet individuale, shpërndarja e dendurive relative e elementëve të vëzhgimit, përcakton një shpërndarje diskrete e cila quhet shpërndarje empirike. Momentet dhe funksioni i shpërndarjes reale të dëmeve, mund të vlerësohen duke përdorur funksionin empirik. Gjithashtu për vlerësimin e densitetit e të funksionit të shpërndarjes mund të përdoret metoda Kernel.

Nëse të dhënat janë të grupuara, mund të përdoren teknika të lëmueshmërisë për vlerësimin e momenteve, kuantileve e të funksionit të shpërndarjes.

1.2.2.1 Vlerësimi mbi të dhëna individuale

Në këtë pjesë do të diskutojmë metoda të vlerësimit të funksionit të shpërndarjes, të kuantileve e të momenteve për të dhënat e dëmeve.

1.2.2.1.1 Shpërndarja empirike

Supozojmë se kemi një zgjedhje me n vëzhgime dëmsh në X , të shënuara me $x_1, \dots, x_n$. Supozojmë se këto vëzhgime i rendisim në rendin rritës dhe i shënojmë $0 < y_1 < \dots < y_m$, $m \leq n$. Vlera y_j përsëritet w_j , dhe rrjedhimisht kemi që $\sum_{j=1}^m w_j = n$. Gjithashtu shënojmë me g_j shumën e numrit të të gjitha vëzhgimeve më të vogla se y_j , pra $g_j = \sum_{h=1}^j w_h$.

Shpërndarje empirike e të dhënave, përcaktohet si shpërndarje diskrete e cila merr vlerat $y_1, \dots, y_m$ me probabilitete përkatësisht $\frac{w_1}{n}, \dots, \frac{w_m}{n}$. Nëse shënojmë me $\hat{f}(\cdot)$ dhe $\hat{F}(\cdot)$ përkatësisht densitetin dhe funksionin e shpërndarjes së shpërndarje empirike, atëherë do të kemi

$$\hat{f}(y) = \begin{cases} \frac{w_j}{n} & \text{për } y = y_j, j = 1, \dots, m \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.103)$$

Dhe:

$$\hat{F}(y) = \begin{cases} 0 & y < y_1 \\ \frac{g_j}{n} & y_j \leq y < y_{j+1}, j = 1, \dots, m-1 \\ 1 & y_m < y \end{cases} \quad (1.104)$$

Rrjedhimisht pritja matematike e shpërndarjes empirike do të jetë:

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{n} y_j = \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x} \quad (1.105)$$

Dhe densiteti i shpërndarjes empirike do të jetë

$$\sum_{j=1}^m \frac{w_j}{n} (y_j - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (1.106)$$

E cila nuk është e barabartë me dispersionin e zgjedhjes $x_1, \dots, x_n$ dhe është vlerësues i zhvendosur për dispersionin e X .

Vlerësuesit për momentet e X , mund të llogariten duke përdorur analogët e tyre për zgjedhjen.

$\hat{F}(y)$ e përcaktuar sipas formulës (1.104) më sipër, do të quhet funksioni i shpërndarjes empirike për X .

Për të llogaritur një vlerësues për funksionin e shpërndarjes së një vlerë y e cila nuk ndodhet në bashkësinë $y_1, \dots, y_m$, mund ta lëmojmë funksionin empirik të shpërndarjes në mënyrë përfundim e $\tilde{F}(y)$ si më poshtë:

$$\tilde{F}(y) = \frac{y - y_j}{y_{j+1} - y_j} \hat{F}(y_{j+1}) + \frac{y_{j+1} - y}{y_{j+1} - y_j} \hat{F}(y_j) \quad (1.107)$$

ku $y_j \leq y < y_{j+1}$ për $j = 1, \dots, m - 1$.

Në këtë mënyrë $\tilde{F}(y)$, i cili shprehet si interpolim linear i $\hat{F}(y_{j+1})$ dhe i $\hat{F}(y_j)$, do të quhet shpërndarje empirike e lëmuar.

Për të llogaritur kuantilet e shpërndarjes, sërisht përdorim interpolimin linear. Përdorim y_i si vlerësues për kuantilin $\left(\frac{g_j}{n+1}\right)$ (apo percentilin $\left(\frac{100g_j}{n+1}\right)$ të X . δ -kuantili i X i shënuar me $\hat{x}_\delta$, mund të llogaritet si:

$$\hat{x}_\delta = \left[\frac{(n+1)\delta - g_j}{w_{j+1}} \right] y_{j+1} + \left[\frac{g_{j-1} - (n+1)\delta}{w_{j+1}} \right] y_j \quad (1.108)$$

ku $\frac{g_j}{n+1} \leq \delta < \frac{g_{j+1}}{n+1}$, për $j = 1, \dots, m - 1$

Kështu $\hat{x}_\delta$ është një vlerësues i lëmueshëm i kuantileve të zgjedhjes dhe mund të merret duke interpoluar linearisht y_j dhe y_{j+1} . Vërehet se nëse $\delta = \frac{g_j}{n+1}$ atëherë $\hat{x}_\delta = y_j$. Për më tepër kur nuk ka varësi midis vëzhgimeve, kemi që $w_j = 1$ dhe $g_j = j$ për $j = 1, \dots, n$, dhe rrjedhimisht do të kemi:

$$\hat{x}_\delta = [(n+1)\delta - j]y_{j+1} + [j - 1 - (n+1)\delta]y_j \quad (1.109)$$

Shënojmë se $\hat{F}(y)$ mund të shkruhet ndryshe si:

$$\hat{F}(y) = \frac{Y}{n} \quad (1.110)$$

Ku Y është numri i vëzhgimeve më të vogla apo të barabarta me y , të tilla që $Y \sim \mathcal{BN}(n, F(y))$.

Duke përdorur rezultatet për shpërndarjen binomial do të kemi:

$$E(\hat{F}(y)) = \frac{E(Y)}{n} = \frac{nF(y)}{n} = F(y) \quad (1.111)$$

dhe:

$$D(\hat{F}(y)) = \frac{F(y)[1-F(y)]}{n} \quad (1.112)$$

Si rrjedhim, $\hat{F}(y)$ është një vlerësues i pazhvendosur për $F(y)$, dhe dispersioni i tij i afrohet zeros ndërkohë që n i afrohet infinitit, duke implikuar kështu që $\hat{F}(y)$ është një vlerësues i qëndrueshëm i $F(y)$. Duke qenë se $F(y)$ është e panjohur mund të vlerësojmë $D(\hat{F}(y))$ duke zëvendësuar $F(y)$ me $\hat{F}(y)$. Më tej në zgjedhje të mëdha, një vlerësues intervalor me nivel besimi $100(1 - \alpha)$ për $F(y)$, mund të ndërtohet si:

$$\hat{F}(y) \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{F}(y)[1-\hat{F}(y)]}{n}} \quad (1.113)$$

1.2.2.1.2 Vlerësimi sipas Kernel për densitetin

Funksioni empirik i shpërndarjes i përmbledh të dhënat si një shpërndarje diskrete. Ndërkohë nëse ndryshoret për të cilat jemi të interesuar janë të vazhdueshme, është e dëshërueshme të llogaritet densiteti i tyre. Kjo mund të kryhet nëpërmjet metodës së Kernel për vlerësimin e densitetit.

Le të konsiderojmë vëzhgimin x_i në zgjedhjen tonë. Funksioni empirik i shpërndarjes e lidh x_i me një masë probabilitare $\frac{1}{n}$. Nëse X është e vazhdueshme, mund të duam që ta shpërndajmë probabilitetin në një fqinjësi të x_i . Supozojmë se kërkojmë ta shpërndajmë probabilitetin në mënyrë të njëjtë në intervalin $[x_i - b, x_i + b]$ për një $b > 0$, të quajtur fashë. Për këtë përcaktojmë funksionin $f_i(x)$ si më poshtë:

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{0.5}{b} & \text{per } x_i - b \leq x \leq x_i + b \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.114)$$

Ky funksion është kënddrejtë në formë me një gjatësi të bazës $2b$ dhe lartësi $\frac{0.5}{b}$, kështu që sipërfaqja e tij është 1. Kjo mund të interpretohet densiteti i ndërtuar nga vëzhgimi x_i . Vërejmë se $f_i(x)$ është gjithashtu densiteti i një ndryshoreje rasti me shpërndarje $\mathcal{U}(x_i - b, x_i + b)$. Kështu vetëm vlerat x në intervalin $[x_i - b, x_i + b]$ mund të marrin vlerë densiteti të ndërtuar nga vëzhgimi x_i . Dhe meqë çdo x_i vjen me një masë probabilitare prej $\frac{1}{n}$, densiteti i X , tashmë mund të llogaritet si:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(x) \quad (1.115)$$

$f_i(x)$ mund ta shkruajmë si:

$$f_i(x) = \begin{cases} \frac{0.5}{b} & \text{për } -1 \leq \frac{x-x_i}{b} \leq 1 \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.116)$$

Dhe përcaktojmë:

$$K_R(\psi) = \begin{cases} 0,5 & \text{për } -1 \leq \psi \leq 1 \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.117)$$

Kjo, pasi kemi zëvendësuar $f_i(x) = \frac{1}{b} K_R(\psi_i)$ ku $\psi_i = \frac{x-x_i}{b}$.

$K_R(\psi)$ nuk varet nga të dhënat, por sidoqoftë $K_R(\psi_i)$ është një funksion i x . Ekuacioni (1.115) mund të shkruhet kështu:

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n K_R(\psi_i) \quad (1.118)$$

Funksioni $K_R(\psi)$ do të quhet funksioni drejtkëndor i Kernelit. $\tilde{f}(x)$ e përcaktuar në ekuacionin (1.117) është vlerësuesi i densitetit të X duke përdorur funksionin drejtkëndor të Kernelit.

Vërehet që $K_R(\psi) \geq 0$ për $-\infty < \psi < +\infty$ dhe $\int_{-\infty}^{+\infty} K_R(\psi) d\psi = 1$. Rrjedhimisht $K_R(\psi)$ formon në vetvehte densitetin e një ndryshoreje rasti. Në fakt çdo funksion $K(\psi)$ që kënaq këto kushte mund të quhet funksion i kernelit. Për më tepër shprehja në ekuacionin (1.118), nëse zëvendësojmë $K_R(\psi_i)$ me $K(\psi)$, do të quhet vlerësuesi Kernel i densitetit. Përveç funksionit drejtkëndor të Kernelit, dy forma të tjera të Kernel janë Kernel trekëndor, dhe Kernel Gaussian. Kernel trekëndor përcaktohet:

$$K_T(\psi) = \begin{cases} 1 - |\psi| & \text{per } -1 \leq \psi \leq 1 \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases} \quad (1.119)$$

dhe Kernel Gaussian përcaktohet:

$$K_T(\psi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\psi^2}{2}} \text{ per } -1 \leq \psi \leq 1 \quad (1.120)$$

i cili është thjeshtë densiteti i shpërndarjes normale standarte $\mathcal{N}(0,1)$

Funksioni i shpërndarjes i vlerësuesit të Kernel që shënohet me $\tilde{F}(x)$ del nga integrimi i densitetit të tij:

$$\tilde{F}(x) = \int_0^x \tilde{f}(x) dx = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n \int_0^x K\left(\frac{x-x_i}{b}\right) dx = \frac{1}{nb} \sum_{i=1}^n \int_{-x_i/b}^{(x-x_i)/b} K(\psi) d\psi \quad (1.121)$$

1.2.2.2 Vlerësimi mbi të dhënat e grupuara

Supozojmë se të dhënat e dëmeve x_1 janë gupuar në k intervale $(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$ ku $0 \leq c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_k$. Supozojmë se kemi n vëzhgime të x në zgjedhje, me n_j vëzhgime në intervalin $(c_{j-1}, c_j]$, rrjedhimisht $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Nëse supozojmë se vëzhgimet në seicilin prej intervaleve janë të shpërndara uniformisht, densiteti empirik ndryshore së dëmeve X mund të shkruhet:

$$\hat{f}(x) = \sum_{j=1}^k p_j f_j(x) \quad (1.122)$$

ku $p_j = \frac{n_j}{n}$ dhe $f_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{c_j - c_{j-1}} & \text{për } c_{j-1} < x \leq c_j \\ 0 & \text{ndryshe} \end{cases}$

Kështu $\hat{f}(x)$ është densiteti i një shpërndarjeje mikse. Për llogaritjen e momenteve të X kemi parasysh se:

$$\int_0^\infty f_j(x) x^r dx = \frac{1}{c_j - c_{j-1}} \int_{c_{j-1}}^{c_j} x^r dx = \frac{c_j^{r+1} - c_{j-1}^{r+1}}{(r+1)(c_j - c_{j-1})} \quad (1.123)$$

Rrjedhimisht, pritja matematike e densitetit empirik do të jetë:

$$E(X) = \sum_{j=1}^k p_j \left[\frac{c_j^2 - c_{j-1}^2}{2(c_j - c_{j-1})} \right] = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} \left[\frac{c_j + c_{j-1}}{2} \right] \quad (1.124)$$

dhe moment i r – të do të jetë:

$$E(X^r) = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n} \left[\frac{c_j^{r+1} - c_{j-1}^{r+1}}{(r+1)(c_j - c_{j-1})} \right] \quad (1.125)$$

1.2.3 Modeli parametrik i vlerësimit

Disa modele supozojnë se ndryshorja e dëmeve ndjek një lloj të caktuar shpërndarjeje, të specifikuar deri në një numër parametrash të panjohur. Për te llogaritur sasi të tilla si mesatarja e dëmeve apo vlerësimi i rrezikut, janë të domosdoshme të llogariten parametrat e shpërndarjeve.

Në këtë pjesë do diskutojmë metoda të ndryshme të vlerësimit të parametrave, metoda e momenteve dhe e percentileve janë dy metoda të ndryshme të thjeshta të vlerësimit parametrik. Këto metoda janë subjekt i vendimmarrjes për bashkësinë e percentileve apo momenteve për t'u përdorur. Metoda më e rëndësishme e vlerësimit në literaturën klasike të statistikës, është ndoshta metoda e përgjasisë maksimale. Kjo metodë është e përdorshme në një klasë të gjërë problemesh: për ndryshoret diskrete apo të vazhdueshme, apo për të dhëna të vëzhgimeve të plota apo jo të plota. Nga ana tjetër, përafrimi Bayesian, paraqet një prespektivë alternative për vlerësimin parametrik, dhe është ndërtuar më e thjeshtë për t'u përdorur falë zhvillimeve në teknikave kompiuterike.

Gjithashtu mund të përdoren Copulas në modelimin e vektorëve të rastit pra kur kemi varësi midis elementëve apo faktorëve të ndryshëm që mund të ndikojnë shpërndarjen e dëmit.

1.2.3.1 Metoda e momenteve dhe e percentileve

Le të jetë $f(\cdot, \theta)$ densiteti i ndryshores së rastit të dëmeve X , ku $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ është një vektor parametrash me k –elemente. Shënojmë me μ'_r momentin e r –të të X , dhe supozojmë se e dimë varësinë e μ'_r ndaj θ , kështu që mund t'i shkruajmë momentet si $\mu'_r(\theta)$. Nëse kemi një

zgjedhje të rastit $x = (x_1, \dots, x_n)$ nga X , atëhere analogët e $\mu'_r(\theta)$ (pra momentet e zgjedhjes) që do i shënojmë me $\hat{\mu}'_r$ do të llogariten si:

$$\hat{\mu}'_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^r \quad (1.126)$$

Vlerësuesi i metodës së momenteve $\hat{\theta}$, është zgjidhja e θ në ekuacionet:

$$\mu'_r(\theta) = \hat{\mu}'_r \text{ per } r = 1, \dots, k \quad (1.127)$$

Pra, kemi një bashkësi prej k ekuacionesh që përfshijnë k të panjohura $\theta_1, \dots, \theta_k$. Ne supozojmë se ekziston një zgjidhje për ekuacionin (1.126), por sidoqoftë mund të kemi më shumë se një zgjidhje për ekuacionet tona, në këtë rast metoda e momenteve nuk është unike.

Vlerësuesit për shpërndarjet Poisson $\mathcal{PN}(\lambda)$, Binomiale $\mathcal{BN}(n, \theta)$ e Gjeometrike $\mathcal{GM}(\theta)$ do të jenë përkatësisht

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\lambda) \quad E(X) = \lambda = \bar{x} &\Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x} \\ \mathcal{B}(n, \theta) \quad E(X) = n\theta = \bar{x} &\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{\bar{x}}{n} \\ \mathcal{GM}(\theta) \quad E(X) = \frac{1-\theta}{\theta} = \bar{x} &\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{x}} \end{aligned}$$

Ndërsa për shpërndarjet Gamma $\mathcal{G}(\alpha, \beta)$, Pareto $\mathcal{P}(\alpha, \gamma)$, dhe Uniforme $\mathcal{U}(a, b)$, do të kemi:

Për secilën nga shpërndarjet numri i parametrave është 2, pra $k = 2$, si rrjedhim

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\alpha, \beta) \quad \hat{\alpha} &= \frac{\hat{\mu}'_1}{\hat{\beta}} = \frac{\hat{\mu}'_1^2}{\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2} & \hat{\beta} &= \frac{\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2}{\hat{\mu}'_1} \\ \mathcal{P}(\alpha, \gamma) \quad \hat{\alpha} &= \frac{2(\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2)}{\hat{\mu}'_2 - 2\hat{\mu}'_1^2} & \hat{\gamma} &= (\hat{\alpha} - 1)\hat{\mu}'_1 \\ \mathcal{U}(a, b) \quad \hat{a} &= \hat{\mu}'_1 - \sqrt{3(\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2)} & \hat{b} &= \hat{\mu}'_1 + \sqrt{3(\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2)} \end{aligned}$$

Vërejmë se në modelin për shpërndarjen pareto nëse $\hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_1^2 < 0$, atëhere $\hat{\alpha} < 0$ dhe modeli $\mathcal{P}(\hat{\alpha}, \hat{\gamma})$ nuk është i mirëpërcaktuar.

Ndërkohë në modelin për shpërndarjen uniforme nëse $\min\{x_1, \dots, x_n\} < \hat{a}$ apo nëse $\max\{x_1, \dots, x_n\} > \hat{b}$, atëhere $\mathcal{U}(\hat{a}, \hat{b})$ është i papërshtatshëm me të dhënat e ashpërsisë së dëmeve

Megjithëse metoda e momenteve në përgjithësi është e thjeshtë për t'u përdorur, rezultatet jo gjithnjë mund të jenë të kënaqshme. Mund të ndodhë që vlerësuesit të mos jenë të paltueshëm me parashikimet e modelit. Sidoqoftë, duke qenë se momentet e zgjedhjes janë vlerësues të qëndrueshme lidhur me momentet e popullatës nëse momentet e shpërndarjes mund të marrin zgjidhje në mënyrë të vetme nga momentet e popullatës, vlerësuesit me metodën e momenteve janë të qëndrueshëm për parametrat e modelit. Kuptohet nëse zgjedhja është e vogël mund të mos kemi pajtueshmëri.

Metoda klasike e momenteve mund të bëhet edhe më fleksibël. Së pari në vend që të marim momentet e thjeshta, konsiderojmë një funksion vektor me p –elemente, $h(w, \theta)$, ku w përfshin ndryshoren tonë të dëmeve (përsirë këtu variabla të ndryshëm si mosha e të siguruarit apo kategoria e mjetit) dhe θ është një vektor k – përmasor i parametrave. Funksioni $h(w, \theta)$ përcaktohet në mënyrë të tillë që $E[h(w, \theta_0)] = 0$ në vlerën e vërtetë të parametrut θ_0 . $h(w, \theta)$ është quajtur kushti i ortogonalitetit. Për shembull kur aplikojmë metodën e momenteve për të përshtatur dy momentet e para, $h(w, \theta)$ përcaktohet si:

$$h(w, \theta) = \begin{bmatrix} X - \hat{\mu}'_1(\theta) \\ X^2 - \hat{\mu}'_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.128)$$

ndërsa për vlerësuesin $\hat{h}(\theta)$ do të kishim:

$$\hat{h}(\theta) = \begin{bmatrix} \hat{\mu}'_1 - \hat{\mu}'_1(\theta) \\ \hat{\mu}'_2 - \hat{\mu}'_2(\theta) \end{bmatrix} \quad (1.129)$$

Metoda klasike e momenteve jep zgjidhje për $\hat{\theta}$ të tilla që vlerësuesi i zgjedhjes $\hat{h}(\theta)$ të llogaritet për $\hat{\theta} = 0$. Sidoqoftë, në përgjithësi kjo zgjidhje mund të mos ekzistojë, sidomos kur $p > k$ (kemi kushte ortogonaliteti më shumë sesa kemi parametra). Rrjedhimisht modifikojmë objektivin për të gjetur vlerën e $\hat{\theta}$ të tillë që shuma e katrorëve të përbërësve të $\hat{h}(\hat{\theta})$ të minimizohet. Në mënyrë alternative mund të konsiderojmë minimizimin e shumës me ngarkesa të katrorëve $\hat{h}(\hat{\theta})' \Omega \hat{h}(\hat{\theta})$ ku Ω është një matricë ngarkesash e përshtatshme në varësi të të dhënave. Kjo metodë mund të gjendet nën emrin metoda e përgjithësuar e momenteve.

Dihet se për disa lloj shpërndarjesh siç është rasti i shpërndarjes Cauchy, nuk ekzistojnë momentet e çfarëdolloj rendi, e rrjedhimisht nuk ka mundësi të përdoret metoda e momenteve.

Nga ana tjetër duke qenë se kuantilet apo percentilet e shpërndarjeve ekzistojnë gjithmonë, mund të vlerësojmë modelin nëpërmjet krahasimit të percentileve apo të kuantileve. Ky përafrim do të quhet metoda e vlerësimit të kuantileve apo percentileve.

Le të konsiderojmë k –kuantile $0 < \delta_1 < \delta_2 < \dots, \delta_k < 1$ dhe le të jetë $\delta_i = F(x_{\delta_i}; \theta)$ e tillë që $x_{\delta_i} = F^{-1}(\delta_i; \theta)$ ku θ është një vektor me k –elementë të parametrave të funksionit të shpërndarjes. Kështu x_{δ_i} është kuantili i δ_i për ndryshoren e dëmit X , të cilën mund ta shkruajmë si $x_{\delta_i}(\theta)$ duke konsideruar varësinë e tij ndaj θ . Le të jetë x_{δ_i} kuantili i δ_i e llogaritur nga zgjedhja, ashtu siç është dhënë në ekuacionet (1.108) dhe (1.109). Metoda e kuantileve zgjidhet për vlera të $\hat{\theta}$ të tilla që:

$$x_{\delta_i}(\hat{\theta}) = \hat{x}_{\delta_i} \text{ për } i = 1, \dots, k \quad (1.130)$$

Sërisht supozojmë se ekziston një zgjidhje $\hat{\theta}$ për këto ekuacione, të cilën e quajmë vlerësuesi i me metodën e percentileve apo të kuantileve.

Për shpërndajet weibull $\mathcal{W}(\alpha, \lambda)$ dhe pareto $\mathcal{P}(\alpha, \gamma)$, vlerësuesit do të ishin përkatësisht

$$\mathcal{W}(\alpha, \lambda) \quad \hat{\alpha} = \frac{\log \left[\frac{\log(1 - \delta_1)}{\log(1 - \delta_2)} \right]}{\log \left(\frac{\hat{x}_{\delta_1}}{\hat{x}_{\delta_2}} \right)} \quad \hat{\lambda} = \frac{\hat{x}_{\delta_1}}{[-\log(1 - \delta_1)]^{\frac{1}{\hat{\alpha}}}} = \frac{\hat{x}_{\delta_2}}{[-\log(1 - \delta_2)]^{\frac{1}{\hat{\alpha}}}}$$

$$\mathcal{P}(\alpha, \gamma) \quad \hat{\alpha} = \frac{\log(1 - \delta_1)}{\log \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{x}_{\delta_1} - \hat{\gamma}} \right)} = \frac{\log(1 - \delta_2)}{\log \left(\frac{\hat{\gamma}}{\hat{x}_{\delta_2} - \hat{\gamma}} \right)} \quad \hat{\gamma} : \frac{\log \left(\frac{\gamma}{\hat{x}_{\delta_1} - \hat{\gamma}} \right)}{\log \left(\frac{\gamma}{\hat{x}_{\delta_2} - \hat{\gamma}} \right)} = \frac{\log(1 - \delta_1)}{\log(1 - \delta_2)}$$

Siç edhe vihet re nga këto dy shpërndarje metoda e vlerësimit të kuantileve mund të funksionojë më së miri për disa shpërndarje, por mund të kërkojë metoda numerike për shpërndarje të tjera.

Një pyetje që mbetet është bashkësia e kuantileve δ_i zgjedhur. Duke pasur të njëjtën bazë të dhënash, përdorimi i kuantileve të ndryshme mund të japë vlerësime të ndryshme të parametrut.

Megjithatë metoda e vlerësimit me kuantile mund të jetë e dobishme edhe në rastet kur zgjidhjet analitike janë të pamundura dhe kërkojnë zgjidhje numerike.

1.2.3.2 Metoda e vlerësimit të Bayes

Problemi për vlerësuesin e Bayes shtrohet si më poshtë:

Shënojmë me X ndryshoren e rastit të dëmit (frekuenca, ashpërsia e dëmit apo edhe dëmi total) për një grup të caktuar rreziku. Shpërndarja e X varet nga parametri θ , cili ndryshon në varësi të grupit të rrezikut dhe rrjedhimisht trajtohet si rezultat i një ndryshoreje rasti θ .

θ ndjek një shpërndarje statistikore dhe do të quhet shpërndarje paraardhëse. Densiteti paraardhës i θ shënohet me $f_{\theta}(\theta|\gamma)$ ose thjeshtë $f_{\theta}(\theta)$, e cila varet nga parametri γ i quajtur hiperparameter.

Densiteti me kusht i X kur jepet parametri θ do të shënohet $f_{X|\theta}(x|\theta)$. Supozojmë se $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ është një zgjedhje e rastit nga X dhe $x = \{x_1, \dots, x_n\}$ rezultatet e X . Densiteti me kusht i X është:

$$f_{X|\theta}(x|\theta) = \prod_{i=1}^n f_{X|\theta}(x_i|\theta) \quad (1.131)$$

Funksioni $f_{X|\theta}(x|\theta)$ do të quhet funksioni i fqinjësisë. Shpërndarja e θ ndryshon në varësi të rezultateve të zgjedhjes x . Densiteti me kusht i θ kur jepet x është quajtur shpërndarje posteriore, dhe shënohet me $f_{\theta|X}(\theta|x)$. Një vlerësues i pritjes matematike të ndryshores së rastit të dëmit, i cili është funksion i θ , përlllogaritet duke përdorur densitetin posterior të θ . Ky vlerësues i cili quhet vlerësuesi i Bayes është gjithashtu parashikuesi për dëmet e ardhshme.

– **Shpërndarja posteriore e parametrave**

Nëse jepet shpërndarja parësore e θ dhe funksioni i fqinjësisë i X , densiteti i përbashkët për θ dhe X mund të përftohet:

$$f_{\theta X}(\theta x) = f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta) \quad (1.132)$$

$$f_X(x) = \int_{\theta \in \Omega_{\theta}} f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta)d\theta \quad (1.133)$$

$$f_{\theta|X}(\theta|x) = \frac{f_{\theta X}(\theta x)}{f_X(x)} = \frac{f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta)}{\int_{\theta \in \Omega_{\theta}} f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta)d\theta} \quad (1.134)$$

ku Ω_{θ} është hapësira për θ

Densiteti posterior përshkruan shpërndarjen e θ bazuar në informacion paraprak lidhur me θ dhe me të dhënat e zgjedhjes x . Vlerësimi i Bayes siç përshkruhet në parametrin e rrezikut θ , bazohet më tej në densitetin posterior.

Vërejmë se emëruesi në ekuacionin (1.134) është funksion i x por jo i θ . Nëse shënojmë

$$K(x) = \frac{f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta)}{\int_{\theta \in \Omega_{\theta}} f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta)d\theta},$$

atëhere ekuacioni (1.134) merr formën:

$$f_{\theta|X}(\theta|x) = f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta) * K(x) = \alpha f_{X|\theta}(x|\theta)f_{\theta}(\theta) \quad (1.135)$$

Konsiderojmë problemin e vlerësimit të $\mu_X(\theta) = E(X|\theta)$, kur jepen të dhënat e vëzhguara x . Me qëllim vlerësimin e parametrin të panjohur θ në një model, përafrimi Bayesian e trajton θ si një një ndryshore rasti θ . Vlerësuesi Bayesian i θ është një rregull vendimmarës në vendosjen e një vlere ndaj $\mu_X(\theta)$ bazuar në të dhënat e vëzhguara. Kështu le të jetë $w(x)$ një vlerësues për $\mu_X(\theta)$, përcaktohet një funksion jonegativ $L[\mu_X(\theta), w(x)]$ i quajtur funksion i humbjes i cili jep penalitetin në marrjen e një vendimi të gabuar në lidhje me $\mu_X(\theta)$. Sa më e madhe distance ndërmjet $w(x)$ dhe $\mu_X(\theta)$, aq më e madhe është humbja $L[\mu_X(\theta), w(x)]$. Një funksion gjerësisht i përdorur si funksion kumbjeje është funksioni i gabimit katror i përcaktuar me:

$$L[\mu_X(\theta), w(x)] = [\mu_X(\theta) - \ddot{e}(x)]^2 \quad (1.136)$$

Nëse kemi rregullin për vendimmarrjen dhe të dhënat, atëhere humbja e pritshme në vlerësimin e $\mu_X(\theta)$ do të jetë:

$$E\{L[\mu_X(\theta), w(x)]|x\} = \int_{\theta \in \Omega_{\theta}} L[\mu_X(\theta), w(x)]f_{\theta|X}(\theta|x)d\theta \quad (1.137)$$

Ne do kërkojmë që rregulli për vendimmarrje të japë një humbe sa më të vogël të mundshme.

Kështu për çdo x të dhënë, nëse rregulli i vendimmarrjes $w(x)$ i cakton një vlerë $\mu_X(\theta)$ e cila minimizon pritshmërinë e humbjes, atëhere rregulli vendimmarës $w(x)$ do të quhet vlerësues i

Bayes për $\mu_X(\theta)$ në varësi të funksionit të zgjedhur. Me fjalë të tjera vlerësuesi i Bayes të cilin po e shënojmë me $w^*(x)$ kënaq barazimin:

$$E\{L[\mu_X(\theta), w^*(x)]|x\} = \min_{w(\cdot)} E\{L[\mu_X(\theta), w(x)]|x\} \quad \forall x \quad (1.138)$$

Nëse përdorim funksionin e gabimit katror, rregulli vendimmarës $w^*(x)$ që minimizon $E[\mu_X(\theta) - w(x)]^2$ do të jetë:

$$w^*(x) = E[\mu_X(\theta)|x] \quad (1.139)$$

Rrjedhimisht për funksionin e humbjes së gabimit katror vlerësuesi i Bayes për $\mu_X(\theta)$ është pritja matematike posteriore e shënuar me $\tilde{\mu}_X(\theta)$ e tillë që:

$$\tilde{\mu}_X(\theta) = E[\mu_X(\theta)|x] = \int_{\theta \in \Omega_\theta} \mu_X(\theta) f_{\theta|X}(\theta|x) d\theta \quad (1.140)$$

– Shpërndarjet e konjuguara

Një vështirësi në aplikimin e përshtatjes nëpërmjet vlerësuesit të Bayes, është llogaritja e ligjit probabilitar posterior, i cili kërkon llogaritjen e shpërndarjeve të veçanta për të dhënat. Sidoqoftë, duke qenë se vlerësuesi i Bayes me funksionin e humbjes atë të katrorëve të gabimit, është pritja matematike e posteriorit, vlerësuesi nuk mund të llogaritet pa njohur shpërndarjen posteriore.

Ekzistojnë klasa densitetesh priore të cilat së bashku me funksione specifike të fqinjësisë, i japin formë densiteteve posteriore të cilat i përkasin të njëjtës klasë me densitetin prior. Të tilla densitete priore e funksione të fqinjësisë do të quhen çifte të konjuguar.

Përkufizim 1.8: Le të jetë $f_\theta(\theta|\lambda)$, ku λ është hiperparametri, densiteti prior i θ . Densiteti prior $f_\theta(\theta|\lambda)$ është i konjuguar me funksionin e fqinjësisë $f_{X|\theta}(x|\theta)$, nëse densiteti posterior është i barabartë me $f_\theta(\theta|\lambda^*)$, e cila ka të njëjtën formë funksionale si densiteti prior por në përgjithësi një hiperparametër λ^* të ndryshëm.

Me fjalë të tjera densiteti prior e densiteti posterior i takojnë të njëjtës familje shpërndarjesh.

– Shpërndarja e konjuguar Gamma – Poisson

Letë jetë $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ të pavarura e me shpërndarje të njëjtë $\mathcal{PN}(\lambda)$. Supozojmë se $\Lambda \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Shpërndarja posteriore e Λ është $\mathcal{G}(\alpha^*, \beta^*)$, ku:

$$\alpha^* = \alpha + n\bar{x}, \quad \beta^* = \left[n + \frac{1}{\beta}\right]^{-1} = \frac{\beta}{n\beta + 1} \quad (1.141)$$

Pra densiteti prior gamma është i konjuguar me fqinjësinë e Poisson

– **Shpërndarja e konjuguar beta – gjeometrike**

Letë jetë $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ të pavarura e me shpërndarje të njëjtë $\mathcal{GM}(\alpha, \beta)$. Nëse densiteti prior i θ është $\mathcal{B}(\alpha, \beta)$, shpërndarja posteriore e θ është $\mathcal{B}(\alpha^*, \beta^*)$, ku

$$\alpha^* = \alpha + n, \quad \beta^* = \beta + n\bar{x} \quad (1.142)$$

Pra densiteti prior beta është i konjuguar me fqinjësinë e gjeometrikës

– **Shpërndarja e konjuguar gamma – eksponenciale**

Le të jetë $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ të pavarura e me shpërndarje të njëjtë $\mathcal{E}(\lambda)$. Supozojme se $\Lambda \sim \mathcal{G}(\alpha, \beta)$. Shpërndarja posteriore e Λ është $\mathcal{G}(\alpha^*, \beta^*)$, ku:

$$\alpha^* = \alpha + n, \quad \beta^* = \left[\frac{1}{\beta} + n\bar{x} \right]^{-1} = \frac{\beta}{1 + \beta n\bar{x}} \quad (1.143)$$

Pra densiteti prior gamma është i konjuguar me fqinjësinë e eksponenciales

1.2.3.3 Metoda e vlerësimit të fqinjësisë maksimale

Supozojmë se kemi një zgjedhje të rastit me n vrojtime nga X , të përcaktuara nga $x = (x_1, \dots, x_n)$. Kur kemi të dhënë densitetin e X , $f(\cdot; \theta)$, atëherë funksionin e fqinjësisë së zgjedhjes e përcaktojmë si prodhim i $f(x_i; \theta)$, dhe e shënojmë me $L(\theta; x)$. Rrjedhimisht do të kemi:

$$L(\theta, x) = \prod_{i=1}^n f(x_i, \theta) \quad (1.144)$$

i cili merret si një funksion i θ për x të dhënë. Meqë vëzhgimet janë të pavarura, $L(\theta, x)$ është densiteti i përbashkët i vrojtimeve.

Më tej përcaktojmë funksionin logaritmik të fqinjësisë si logaritmin e $L(\theta, x)$, dmth:

$$\log L(\theta, x) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta) \quad (1.145)$$

Vlera e θ që maksimizon funksionin e fqinjësisë, që shënohet me $\hat{\theta}$, quhet vlerësues i fqinjësisë maksimalesë θ . Meqë logaritmi është një funksion monoton jozbrites, $\hat{\theta}$ gjithashtu maksimizon funksionin logaritmik të fqinjësisë. Dhe vërtet, shpesh herë maksimizimi i funksionit logaritmik të fqinjësisë është më i lehtë se sa maksimizimi i funksionit të fqinjësisë, meqë funksionit logaritmik i fqinjësisë është shuma e n termave përfshirë dhe θ , kurse funksioni i fqinjësisë është një prodhim.

Tani do të diskutojmë vetitë asimptotike të vlerësuesit të fqinjësisë maksimale dhe aplikimet e saj. Së pari konsiderojmë rastin ku X është i pavarur dhe i shpërndarë njëlloj. Ky është rasti kur kemi vrojtime dëmsh individuale. Më pas zgjerojmë diskutimin për rastin kur X nuk është i shpërndarë njëlloj, të tilla si të dhënat e grupuara. Vetitë e vlerësuesit të fqinjësisë maksimale janë të mirëpërcaktuara në literaturën e statistikës dhe vlefshmëria e tyre varet nga disa kushte

teknike, të cilave iu referohemi si kushtet e rregullsisë. Nuk do të trajtojmë kushtet e rregullsisë për vetitë e vlerësuesit të fqinjësisë maksimale. Në vend të kësaj, do të trajtojmë vetëm vetitë standarde asimptotike të vlerësuesit të fqinjësisë maksimale dhe do diskutojmë aplikimet e saj në problemet në lidhje me të dhënat aktuariale.

Do të përmbledhim disa nga vetitë e funksionit të fqinjësisë. Së pari konsiderojmë rastin ku θ është një konstante. Informacioni Fisher për një vëzhgim të vetëm, i përcaktuar nga $I(\theta)$ përcaktohet si

$$I(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log f(X, \theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] = E \left[- \frac{\partial^2 \log f(X, \theta)}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.146)$$

veç kësaj, informacioni Fisher për një zgjedhje rasti X , shënohet me $I_n(\theta)$, përcaktohet si

$$I_n(\theta) = E \left[\left(\frac{\partial \log L(\theta; X)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \quad (1.147)$$

i cili është n herë informacioni i Fisher-it në një vëzhgim të vetëm, pra:

$$I_n(\theta) = nI(\theta) \quad (1.148)$$

Gjithashtu $I_n(\theta)$ mund të llogaritet si:

$$I_n(\theta) = E \left[- \frac{\partial^2 \log L(\theta; X)}{\partial \theta^2} \right] \quad (1.149)$$

Për çdo vlerësues të pazhvendosur $\tilde{\theta}$ të θ , mosbarazimi Kramer – Rao pohon se:

$$D(\tilde{\theta}) \geq \frac{1}{I_n(\theta)} = \frac{1}{nI(\theta)} \quad (1.150)$$

dhe një vlerësues i pazhvendosur thuhet se është efikas nëse ai arrin kufirin e poshtëm Cramer-Rao.

Vlerësuesi i fqinjësisë maksimale $\hat{\theta}$ formalisht përcaktohet si:

$$\hat{\theta} = \max_{\theta} \{L(\theta; x)\} = \max_{\theta} \{\log L(\theta; x)\} \quad (1.151)$$

i cili mund të llogaritet duke zgjidhur kushtin e rendit të parë:

$$\frac{\partial \log L(\theta; x)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \log f(x_i; \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (1.152)$$

Në vijim trajtojmë vetitë asimptotike të vlerësuesit të fqinjësisë maksimale për zgjedhjen e rastit.

Teoremë 1.9: Sipas kushteve të caktuara të rregullsisë, shpërndarja e $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ konvergon në shpërndarjen normale me pritje matematike 0 dhe dispersion $1/I(\theta)$.

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{I(\theta)}\right) \quad (1.153)$$

ku me $\xrightarrow{D}$ shënohet konvergjenca në shpërndarje.

Teorema 1.9 ka disa implikime të rëndësishme. Së pari, $\hat{\theta}$ është asimptotikisht e pazhvendosur dhe e qëndrueshme. Së dyti, në zgjedhje të mëdha $\hat{\theta}$ është afërsisht me shpërndarje normale me pritje matematike θ dhe dispersion $1/I(\theta)$. Së treti, meqë dispersion i $\hat{\theta}$ konvergjon në kufirin e poshtëm tëKramer-Rao, atëhere $\hat{\theta}$ është asimptotikisht efikase.

Përgjithësojmë rezultatet në rastin kur $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_k)'$ është një vektor k – elementësh. Matrica e informacionit Fisher në një vëzhgim përcaktohet si matrice $k \times k$:

$$I(\theta) = E \left[\frac{\partial \log f(X, \theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \log f(X, \theta)}{\partial \theta'} \right] = E \left[\frac{\partial^2 \log f(X, \theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] \quad (1.154)$$

Matrica e informacionit të Fisher në një zgjedhje rasti të n vrojtimeve është $I_n(\theta) = nI(\theta)$. Le të jetë $\tilde{\theta}$ një vlerësues i pazhvedosur i θ . Shënojmë me $D(\tilde{\theta})$ matricën e dispersionit të $\tilde{\theta}$. Kështu elementi diagonal i i – të në matricën $D(\tilde{\theta})$ është $D(\tilde{\theta}_i)$, dhe elementi (i, j) është $Cov(\tilde{\theta}_i, \tilde{\theta}_j)$.

Duke shënuar $I_n^{-1}(\theta)$ inversin e $I_n(\theta)$, nga modeli shumëpërmasor i mosbarazimit Cramer-Rao kemi se:

$$D(\tilde{\theta}) - I_n^{-1}(\theta) \quad (1.155)$$

është një matricë e përcaktuar jo negative. Si një veti e matricës së përcaktuar jonegative, elementet diagonal të $D(\tilde{\theta}) - I_n^{-1}(\theta)$ janë jonegative, p.sh kufiri i poshtëm i $D(\tilde{\theta}_i)$ është elementi diagonal i i – të në $I_n^{-1}(\theta)$. Një vlerësues i pazhvendosur thuhet se është efikas në qoftë se ai arrin kufirin e poshtëm të mosbarazimit Cramer-Rao $I_n^{-1}(\theta)$.

Për të llogaritur vlerësuesin e fqinjësisë maksimale $\hat{\theta}$ zgjidhim kushtin e rendit të parë në ekuacionin (1.152)

Një model shumëpërmasor i Teoremës 1.8 është si më poshtë:

Teoremë1.10: Sipas kushteve të caktuara të rregullsisë, shpërndarja e $\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ konvergjon në shpërndarjen Normale shumëpërmasore me pritje matematike vektorin 0 dhe dispersion matricën $I^{-1}(\theta)$:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta)) \quad (1.156)$$

Sërisht, Teorema 1.10 tregon se vlerësuesi i fqinjësisë maksimale është asimptotikisht i pazhvendosur, i qëndrueshëm, asimptotikisht normal dhe efikas. Kështu, vetitë e saj janë shumë të dëshirueshme, gjë që shpjegon dhe popullaritetin e saj.

Vlerësuesi i fqinjësisë maksimale ka vetinë e përshtatshme që plotëson parimin e invariancës. Supozojmë se $g(\cdot)$ është një funksion një – më – një dhe $\hat{\theta}$ është vlerësues i fqinjësisë maksimale i θ , atëhere bazuar në parimin e invariancës $g(\hat{\theta})$ është vlerësues i fqinjësisë maksimale për $g(\theta)$.

– **Të dhëna individuale të plota**

Në tabelën më poshtë jepen vlerësuesi i fqinjësisë maksimale për parametrat për disa nga shpërndarjet:

shpërndarja	vlerësuesi
$\mathcal{PN}(\lambda)$	$\hat{\lambda} = \bar{x}$
$\mathcal{GM}(\theta)$	$\hat{\theta} = \frac{1}{1+\bar{x}}$
$\mathcal{E}(\lambda)$	$\hat{\lambda} = \frac{1}{\bar{x}}$
$\mathcal{U}(0, \theta)$	$\hat{\theta} = \max\{x_1, \dots, x_n\}$
$\mathcal{G}(\alpha, \beta)$	$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\alpha}, \alpha$ është e njohur
$\mathcal{P}(\alpha, \gamma)$	$\hat{\alpha} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \log(x_i + \gamma) - n \log \gamma}, \gamma$ është e njohur

(1.157)

Shpërndarja asimptotike për vlerësuesin e fqinjësisë maksimale për $\mathcal{PN}(\lambda)$ dhe $\mathcal{GM}(\theta)$, si dhe intervali i besimit me nivel $100(1 - \alpha)\%$ do jenë përkatësisht:

$$\begin{aligned} \mathcal{PN}(\lambda) \quad I(\lambda) = \frac{1}{\lambda} &\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \lambda) & \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\bar{x}}{n}} = \bar{x} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{S}{\sqrt{n}} \\ \mathcal{GM}(\theta) \quad I(\theta) = \frac{1}{\theta^2(1-\theta)} &\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \theta^2(1-\theta)) & \hat{\theta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{\theta}^2(1-\hat{\theta})}{n}} \end{aligned} \quad (1.158)$$

– **Të dhëna të grupuara**

Kur të dhënat e zgjedhjes janë të grupuara, vëzhgimet janë jo më të pavarura e me shpërndarje të njëjtë. Sidoqoftë, sërisht mund të përdorim funksionin e fqinjësisë dhe të llogarisim vlerësuesin e fqinjësisë maksimale.

Konsiderojmë rastin kur kemi vëzhgime të plota të grupuara në k intervale $(c_0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, c_k]$ ku $0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_k = \infty$. Supozojmë se numri i elementeve në intervalin $(c_{j-1}, c_j]$ është n_j ku $\sum_{j=1}^k n_j = n$. Nëse jepet një funksion shpërndarjeje parametrike $F(\cdot, \theta)$, probabiliteti që një vëzhgim të jetë në intervalin $(c_{j-1}, c_j]$ do të jetë $F(c_j, \theta) - F(c_{j-1}, \theta)$. Duke supozuar se vëzhgimet individuale janë të pavarura e me shpërndarje të njëjtë, fqinjësia e të pasurës së n_j vëzhgimeve në intervalin $(c_{j-1}, c_j]$ për $j = 1, \dots, k$ do të jetë:

$$L(\theta; n) = \prod_{j=1}^k [F(c_j, \theta) - F(c_{j-1}, \theta)]^{n_j} \quad (1.159)$$

Dhe funksioni i logfqinjësisë do të jetë:

$$\log L(\theta; n) = \sum_{j=1}^k \log [F(c_j, \theta) - F(c_{j-1}, \theta)] \quad (1.160)$$

Teoremë 1.11: Nëse shënojmë me $\hat{\theta}$ vlerësuesin e fqinjësisë maksimale të parametrin θ me k elemente për funksionin e fqinjësisë $L(\theta; x)$, nën disa kushtë mbi rregullsinë, shpërndarja e

$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta)$ konvergjon në shpërndarjen Normale shumëpërmasore me vektor të pritjes matematike 0 dhe me matricë dispersive $\mathfrak{I}^{-1}(\theta)$ pra:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta} - \theta) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, \mathfrak{I}^{-1}(\theta)) \quad (1.161)$$

ku:

$$\mathfrak{I}(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left(-\frac{1}{n} \frac{\partial^2 \log L(\theta; x)}{\partial \theta \partial \theta'} \right) \quad (1.162)$$

Shënojmë se $\mathfrak{I}(\theta)$ kërkon vlerësimin e një pritshmërie dhe varet nga parameter i panjohur θ . Në aplikime praktike ajo mund të vlerësohet nëpërmjet plotësit të saj. Pas vlerësimit të $\mathfrak{I}(\theta)$, mund të llogariten intervalet e besimit për θ .

1.2.3.4 Modelet shumëpërmasore

Deri më tani modelet për shpërndarjen e dëmeve janë konsideruar homogjene, në kuptimin që e njëjta shpërndarje aplikohet në seicilin prej subjekteve të siguruara, pavarësisht veçorive që mund të jenë të rëndësishme. Praktikisht sidoqoftë mund të ndodhë ndryshe: përqindjet e aksidenteve në adoleshentë e të rritur mund të jenë të ndryshme. Më poshtë do të diskutohet modeli i përgjithshëm linear si një përafrim për modelimin e ndryshores të dëmeve ku paraqiten të tilla cilësi individuale të quajtura modele shumë përmasore.

1.2.3.4.1 Modeli i përgjithshëm linear

Ndërkohë që pritja matematike për dëmin mund të jetë ose jo një parametër i drejtpërdrejtë i funksionit të shpërndarjes, zakonisht është një element i një rëndësie shumë të madhe. Nëse disa ndryshore pritet që të ndikojnë në shpërndarjen e dëmeve, mund të dalë natyrshëm supozimi që ato do të përcaktojnë pritjen matematike të dëmeve. Rrjedhimisht, një strategji modeli është supozimi që pritja matematike e ndryshores së dëmit X e shënuar me μ , është një funksion i ndryshores Z . Për t'u siguruar që pritja matematike e dëmit është pozitive, mund të përshtasim modelin e mëposhtëm:

$$E(X) = \mu = \exp(\beta'z) \quad (1.163)$$

Ky model është quajtur Modeli i Përgjithshëm Linear. Funksioni eksponencial i përdorur në ekuacionin e mësipërm është quajtur funksion lidhës.

1.2.3.5 Modelimi i funksioneve shumëpërmasorë duke përdorur Kopulas

Në shumë aplikime praktike, shpesh kërkohet analizimi i disa rreziqeve brënda të njëjtit grup rreziku, rreziqe të ngjashme në grupe të ndryshme rreziku, apo aspekte të ndryshme të një grupi rreziku. Rrjedhimisht lindin të nevojshëm krijimi i teknikave për modelimin e shpërndarjeve me

shumë ndryshore (vektorët e rastit). Ndërkohë që modelimi i drejtpërdrejtë i shpërndarjes së këtyre ndryshoreve mund të japë një përgjigje, praktikisht ky përafrim mund të paraqesë disa probleme. Së pari mund të mos ketë një shpërndarje e cila mund të jetë e përshtatshme për modelin tonë. Së dyti shpërndarjet standarde shumëpërmasore kanë shpërndarje të veçanta të së njëjtës familje, dhe kjo mund të sjellë kushtëzime të ashpra për zgjidhjen e problemit. Së treti pas pranimit shpërndarjeve të veçanta që i përshtatet të dhënave, është e dëshërueshme që t'i përdorim këto shpërndarje për modelimin e shpërndarjes shumëpërmasore.

Përdorimi i kopulave jep një përafrim fleksibël për modelimin e shpërndarjeve shumëpërmasore. Në fakt literatura lidhur me kopulat po pëson një zhvillim të shpejtë, dhe vërehen shumë aplikime të saj në shkencat aktuariale e në financë. Më tej do të paraqitet një hyrje e shkurtër mbi këtë teknikë. Do të konsiderohen ndryshoret e vazhdueshme dy përmasore.

Përkufizim 1.9: Një kopula me dy ndryshore $C(u_1, u_2)$ është një pasqyrim i $[0,1]^2$ në $[0,1]$. është rritës për secilin nga komponentët dhe kënaq kushtet:

1. $C(1, u_2) = u_2$, $C(u_1, 1) = u_1$, për çdo $0 \leq u_1, u_2 \leq 1$
2. për çdo $0 \leq a_1 \leq b_1 \leq 1$, dhe $0 \leq a_2 \leq b_2 \leq 1$, $C(b_1, b_2) - C(a_1, b_2) - C(b_1, a_2) + C(a_1, a_2) \geq 0$ (1.164)

Në fakt një kopula dy përmasore është funksioni i shpërndarjes i një vektori rasti në $[0,1]^2$ me shpërndarje të veçanta uniforme d.m.th. $C(u_1, u_2) = P(U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2)$ ku U_1 dhe U_2 janë të shpërndara në mënyrë uniforme në $[0,1]$. Kushti i parë më sipër, implikon që secila nga shpërndarjet e veçanta të kopulës janë uniforme, ndërkohë kushti i dytë na siguron që $P(a_1 \leq U_1 \leq b_1, a_2 \leq U_2 \leq b_2)$ është jonegative

Le të jetë $F_{X_1 X_2}(\cdot, \cdot)$ funksioni i përbashkët i shpërndarjes për X_1 dhe X_2 me shpërndarje të veçanta $F_{X_1}(\cdot)$ dhe $F_{X_2}(\cdot)$. Teorema në poshtë e quajtur Teorema e Sklar, përcakton paraqitjen e densitetit të përbashkët duke përdorur kopula. Kjo Teoremë gjithashtu tregon se si një funksion i përbashkët shpërndarjeje mund të krijohet nëpërmjet kopulave.

Teoremë 1.11: Nëse jepen funksioni i shpërndarjes së përbashkët si edhe funksionet e shpërndarjes së veçanta për X_1 dhe X_2 , atëhere ekziston një kopula e vetme $C(\cdot, \cdot)$ e tillë që:

$$F_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \quad (1.164)$$

Dhe anasjelltas nëse $C(\cdot, \cdot)$ është një kopula dhe $F_{X_1}(x_1)$, $F_{X_2}(x_2)$ janë funksione shpërndarjeje përkatësisht për X_1 dhe X_2 , atëhere $C(F_{X_1}(\cdot), F_{X_2}(\cdot))$ shërben si një funksion shpërndarjeje me dy ndryshore të cilat kanë shpërndarje të veçanta $F_{X_1}(x_1)$ dhe $F_{X_2}(x_2)$.

Nëse ekzistojnë funksionet e anasjellta $F_{X_1}^{-1}(\cdot)$ dhe $F_{X_2}^{-1}(\cdot)$, atëhere kopula që kënaq ekuacionin (1.164) do të merrte formën:

$$C(u_1, u_2) = F_{X_1 X_2}(F_{X_1}^{-1}(u_1), F_{X_2}^{-1}(u_2)) \quad (1.165)$$

Pjesa e dytë e Teoremës 1.11, na tregon se si të ndërtojmë një funksion shpërndarjeje për dy ndryshore duke pasur funksionet e shpërndarjeve të veçanta. Pra nëse kemi një kopula të mirë përcaktuar që kënaq Përkufizimin 1.9, atëherë $C(F_{X_1}(\cdot, x_1), F_{X_2}(x_2))$ përcakton një funksion shpërndarës të dy ndryshoreve me funksione të veçanta shpërndarjeje të njohura. Kjo mund të përshkruhet si një përafrim nga poshtë lart për krijimin e funksioneve të shpërndarjeve të dy ndryshoreve të rastit.

Teorema më poshtë e quajtur si Kufinjtë Frechet për kopulat, përcakton minimumin e maksimumin për një kopula

Teoremë 1.12: Kufinjtë e mëposhtëm aplikohen për çdo kopula dy përmasore:

$$\max\{0, u_1 + u_2 - 1\} \leq C(u_1, u_2) \leq \min\{u_1, u_2\} \quad (1.166)$$

Funksioni i fqinjësisë për një funksion shpërndarjeje me dy ndryshore e krijuar nga një kopula mund të përlogaritët duke përdorur teoremën më poshtë:

Teoremë 1.13: Nëse X_1 dhe X_2 janë dy ndryshore rasti të vazhdueshme me densitete përkatësisht $f_{X_1}(\cdot)$ dhe $f_{X_2}(\cdot)$ përkatësisht, dhe nëse funksionet e shpërndarjes së veçanta për X_1 dhe X_2 jepen sipas barazimit (1.164), atëherë densiteti i tyre i përbashkët mund të shkruhet si:

$$f_{X_1 X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) c(F_{X_1}(\cdot, x_1), F_{X_2}(x_2)) \quad (1.167)$$

ku

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} \quad (1.168)$$

është quajtur densiteti i kopulës.

Nga Teorema 1.13 mund të dalim në konkluzionin që funksioni logaritmik i fqinjësisë për një shpërndarje të dy ndryshoreve më shpërndarje të përcaktuar sipas formulave (1.164), është:

$$\log[f_{X_1 X_2}(x_1, x_2)] = \log[f_{X_1}(x_1)] + \log[f_{X_2}(x_2)] + \log\left[c(F_{X_1}(\cdot, x_1), F_{X_2}(x_2))\right] \quad (1.169)$$

E cila është log fqinjësia për dy vëzhgime të pavaruara X_1 dhe X_2 plus një term që mat varësinë.

Më poshtë jepen disa kopula të njohura

Kopula e Klayton: e shënuar me $C_C(u_1, u_2)$ jepet me formulën:

$$C_C(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-\frac{1}{\alpha}}, \alpha > 0 \quad (1.170)$$

ku densiteti jepet me formulën:

$$c_C(u_1, u_2) = \frac{1+\alpha}{(u_1 u_2)^{1+\alpha}} (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-2-\frac{1}{\alpha}} \quad (1.171)$$

Kopula e Frank: e shënuar me $C_F(u_1, u_2)$ jepet me formulën:

$$C_F(u_1, u_2) = \frac{-1}{\alpha} \log \left[1 + \frac{(e^{-\alpha u_1} - 1)(e^{-\alpha u_2} - 1)}{e^{-\alpha} - 1} \right], \alpha \neq 0 \quad (1.172)$$

Ku densiteti jepet me formulën:

$$c_F(u_1, u_2) = \frac{\alpha e^{-\alpha(u_1+u_2)}(1-e^{-\alpha})}{[e^{-\alpha(u_1+u_2)} - e^{-\alpha u_1} - e^{-\alpha u_2} + e^{-\alpha}]^2} \quad (1.173)$$

Kopula e Gauss: e shënuar me $C_G(u_1, u_2)$ jepet me formulën:

$$C_G(u_1, u_2) = \Psi_\alpha(\phi^{-1}(u_1), \phi^{-1}(u_2)), -1 < \alpha < 1 \quad (1.174)$$

Ku $\phi^{-1}(\cdot)$ është funksioni i anasjelltë i shpërndarjes standarte normale dhe $\Psi_\alpha(\cdot, \cdot)$ është funksioni i shpërndarjes standart normale dypërmasore

Densiteti do jepet me formulën:

$$c_G(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} \exp\left(-\frac{\eta_1^2 - 2\alpha\eta_1\eta_2 + \eta_2^2}{2(1-\alpha^2)}\right) \exp\left(\frac{\eta_1^2 + \eta_2^2}{2}\right) \quad (1.175)$$

ku $\eta_i = \phi^{-1}(u_i)$ për $i = 1, 2$.

1.2.4 Përzgjedhja dhe vlerësimi i modelit

Pasi një model është përzgjedhur, duhet ta vlerësojmë atë për të konstatuar nëse supozimet e zbatuara janë të pranueshme dhe i përshtaten të dhënave. Kjo duhet të bëhet para se ta përdorim modelin për parashikimet lidhur me analizat aktuariale. Vlerësimi i modelit mund të kryhet duke përdorur metoda grafike, teste formale të keqspecifikimit dhe kontrole diagnostikuese.

Metodat joparametrike kanë avantazhin e përdorimit të supozimeve minimale dhe duke i lejuar të dhënat për të përcaktuar modelin. Megjithatë, ato janë më të vështira për të analizuar teorikisht.

Nga ana tjetër, metodat parametrike janë të afta për të përmbledhur modelin në një numër të vogël parametrash, megjithëse me rrezikun e imponimit të strukturës së gabuar dhe thjeshtëzimit.

Duke krahasuar grafikët për densitetin apo funksionin e shpërndarjes të vlerësuar, mund të zbulojmë nëse modeli i vlerësimit parametrik ka ndonjë devijim jonormal nga të dhënat.

Testet formale të keqspecifikimit mund të kryhen për të krahasuar modelin e vlerësuar (parametrik ose joparametrik) kundrejt një modeli hipotezë. Kur interesi kryesor është krahasimi i densitetit, mund të përdorn testin Kolmogorov- Smirnov dhe testin Anderson-Darling. Testi Hi katror i mirësisë së përshtatjes është një alternativë për testimin e supozimeve të shpërndarjes, duke krahasuar frekuencat e vrojtura kundrejt frekuencave teorike. Testi i raportit të fqinjësisë është i zbatueshëm për të testuar vlefshmërinë e kufizimeve në një model, dhe mund të përdoret për të vendosur nëse një model mund të thjeshtohet.

Kur disa modele të vlerësuara kalojnë shumicën e diagnostifikimeve, miratimi e një model të veçantë mund të vendoset duke përdorur disa kriterë të informacionit, të tilla si kriteri informacioni Akaike ose kriteri informacioni Schwarz.

1.2.4.1 Përdorimi i metodave grafike

Kur disponojmë vëzhgime individuale të plota, shpërndarja empirike, jep një vlerësues të qëndrueshëm të densitetit të të dhënave pa imponuar ndonjë supozim lidhur me parametrat. Në rastin e përdorimit të modeleve parametrike, mund të përdoret metoda e përgjasise maksimale, ose metoda të tjera të vlerësimit të parametrave. Sidoqoftë, në mënyrë që parametrat të jenë të përshtatshme për vlerat e vërteta, shpërndarja e supozuar duhet të jetë korrekte. Një mënyrë për vlerësimin e korrektësisë së modelit probabilitar të përzgjedhur, është krahasimi i të dhënave reale me modelin e propozuar nëpërmjet paraqitjes grafike. Nëse modeli i propozuar është jokorrekt, presim që dy grafikët të ndryshojnë.

Mund të përdorim shpërndarjen empirike apo modelin sipas Kaplan – Meier, të cilat bazohen tërësisht në të dhëna dhe t'i krahasojmë këto me shpërndarjet e propozuara parametrat e të cilave janë vlerësuar me një nga metodat përkatëse të vlerësimit.

Një mënyrë tjetër grafike e vlerësimit të korrektësisë së shpërndarjes së propozuar është p-p plot, në i rendisim vlerat e vrojtura $x = (x_1, \dots, x_n)$ në rendin rritës $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, ku $x_{(i)}$ është statistika e rendit të i – të. Përafrojmë si probabilitet i të pasurit të një vëzhgimi me vlerë jo më të madhe se $x_{(i)}$ vlerën $p_i = \frac{i}{n+1}$. Më tej ndërtojmë edhe hipotezën apo probabilitetin me parametrat e vlerësuar përkatësisht të një vëzhgimi me vlerë jo më të madhe se $x_{(i)}$ të cilin po e shënojmë $F^*(x_{(i)})$. Nëse shpërndarja e propozuar është e përshtatshme për të dhënat tona, presim që p – p plot të ndjekë një vijë me kënd prej 45° .

Po ashtu mund të përdorim paraqitjen q – q plot e cila në ndryshim nga p – p plot krahason $x_{(i)}$ me $F^{*-1}(x_{(i)})$. Nëse shpërndarja e propozuar është e përshtatshme për të dhënat tona, presim që q-p plot të ndjekë një vijë të drejtë.

1.2.4.2 Testet e moskorrektësisë dhe kontrollet diagnostikuese

Ndërkohë që metodat grafike japin një ndihme vizuale për të vlerësuar nëse një model i përshtatet të dhënave, ato nuk japin matje sasiore për ndonjë devijim nga modeli hipotetik. Një test formal për rëndësinë ka avantazhin e dhënies së një vlerësuesi probabilitar nëse një vendim lidhur me modelin e përzgjedhur, të ketë shance të jetë i gabuar.

Një test formal rëndësie mund të ndërtohet nëse përcaktojmë një hipotezë null në lidhje me shpërndarjen e dëmeve. Kjo hipotezë testohet në lidhje me shpërndarjen e dëmeve. Hipoteza testohet përballë të dhënave nëpërmjet përdorimit të testit statistikor. Me dhënien e një niveli

rëndësie të paracaktuar, mund të ndërtojmë një zonë kritike në mënyrë të tillë që testi statistikor të jetë brenda zones kritike, dhe në këtë mënyrë arrijmë në konkluzionin që të dhënat nuk e mbështesin hipotezën null. Në mënyrë alternative mund të llogarisim probabilitetin e përfutimit të një testi statistikor më ekstrem sesa vlera e përlogaritur nëse hipoteza null është korrekte, dhe e quajmë këtë vlerë vlera p . Sa më e vogël të jetë vlera p aq më pak mundësi kemi që hipoteza null të jetë korrekte. Këto teste quhen teste të moskorrektësisë. At janë gjithashtu teste diagnostikuese për supozimet për modelin përpara përdorimit të tij.

– Testi Kolmogorov – Smirnov:

Specifikojmë një hipotezë null në lidhje me densitetin e një ndryshoreje rasti të vazhdueshme dhe e shënojmë me $F^*(\cdot)$. Për të ekzaminuar nëse të dhënat mbështesin hipotezën null, krahasojmë $F^*(\cdot)$ përballë densitetit empirik $\hat{F}(\cdot)$ dhe konsiderojmë statistikën:

$$\max_{x_1 \leq x \leq x_n} |\hat{F}(x) - F^*(x)| \quad (1.176)$$

Ku x_1 dhe x_n janë përkatësisht vlera minimum dhe vlera maksimum e vëzhgimeve tona.

Sidoqoftë duke ditur se funksioni $\hat{F}(\cdot)$ është një funksion i shkallëzuar rritës në të djathtë dhe funksioni $F^*(\cdot)$ është gjithashtu rritës, neve na duhet të kontrollojmë diferencat në pikat e vëzhgimeve përkatësisht $x_{(1)}, \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Për më tepër maksimumi mund të arrihet vetëm në një nga pikat $x_{(i)}$ ose menjëherë në të majtë të tij. Statistika e përcaktuar në këtë mënyrë shënohet me D , quhet statistikë Komogorov – Smirnov, dhe mund të shkruhet:

$$D = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\{ \max_{x_1 \leq x \leq x_n} \{ |\hat{F}(x_{(i-1)}) - F^*(x_{(i)})|, |\hat{F}(x_{(i)}) - F^*(x_{(i)})| \} \right\} \quad (1.177)$$

ku $\hat{F}(x_{(0)}) = 0$. Duke qenë se kemi të dhëna individuale të plota, atëhere:

$$\hat{F}(x_{(i)}) = \frac{i}{n} \quad (1.178)$$

Ndaj D mund të shkruhet tashmë:

$$D = \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} \left\{ \max_{x_1 \leq x \leq x_n} \left\{ \left| \frac{i-1}{n} - F^*(x_{(i)}) \right|, \left| \frac{i}{n} - F^*(x_{(i)}) \right| \right\} \right\} \quad (1.179)$$

Nëse funksioni i vërtetë i shpërndarjes së të dhënave nuk është $F^*(\cdot)$, presim që D të jetë mjaft e madhe. Nëse na jepet një nivel rëndësie α , atëhere hipoteza null që të dhënat kanë funksion shpërndarës $F^*(\cdot)$ refuzohet nëse D është më e madhe se vlera kritike. Kur $F^*(\cdot)$ është totalisht e specifikuar (siç është rasti kur nuk kemi parametra të panjohur në funksionin e shpërndarjes), vlera kritike për D për vlerën e përzgjedhur të α , jepet sipas tabelës më poshtë

Niveli i rëndësisë α	0.10	0.05	0.01
Vlera kritike	$\frac{1.22}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.36}{\sqrt{n}}$	$\frac{1.63}{\sqrt{n}}$

Vërejmë që këto vlera kritike aplikohen mbi të gjitha funksionet e shpërndarjes për sa kohë ata janë totalisht të specifikuar. Sidoqoftë, çdo parametër i panjohur në funksionin e shpërndarjes, duhet vlerësuar për llogaritjen e $F^*(x_{(i)})$, dhe nuk aplikohen vlerat kritike të mësipërme. Metoda si ajo e Monte – Karlos mund të përdoren për përllogaritjen e vlerave kritike për shpërndarjet null me vlera parametrash të panjohur.

– Testi Kramer –Von-Misses

Ky test vjen si një alternativë për testin Kolmogorov smirnov. Statistika e tij përcaktohet

$$T = n\omega^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{2i-1}{2n} - F(x_i) \right]^2 \quad (1.180)$$

– Testi i Anderson –Darling

Në mënyrë të ngjashme me testin e Kolmogorov – Smirnov, testi Anderson – Darling mund të përdoret për testimin e hipotezës null që do të thote se ndryshorja për të cilën jemi të interesuar ka shpërndarje $F^*(\cdot)$. Duke supozuar që kemi vëzhgime individuale të renditura në rendin rritës $x_{(1)}, \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$, statistika Anderson – Darling e shënuar me A^2 përcaktohet:

$$A^2 = -\frac{1}{n} \left[\sum_{j=1}^n (2j-1) \{ \log[F^*(x_{(j)})] + \log[1 - F^*(x_{(n+1-j)})] \} \right] - n \quad (1.181)$$

Kur $F^*(\cdot)$ është totalisht e specifikuar, vlera kritike për D për vlerën e përzgjedhur të α , jepet sipas tabelës më poshtë:

Niveli i rëndësisë α	0.10	0.05	0.01
Vlera kritike	1.933	2.492	3.857

Gjithashtu jepen edhe vlera kritike për disa shpërndarje me parametra të panjohur, si dhe mund të përdoren metodat Monte – Karlo përllogaritjen e vlerave kritike për shpërndarjet e tjera null me vlera parametrash të panjohur.

– Testi Hi – katror për mirësinë e përshtatjes

Ky test aplikohet nëse përdorim të dhëna të grupuara. Supozojmë se të dhënat nga vëzhgimet janë klasifikuar në intervalet $(0, c_1], (c_1, c_2], \dots, (c_{k-1}, \infty)$, me përkatësisht n_j vëzhgime në $(c_{j-1}, c_j]$ të tilla që $\sum_{j=1}^n n_j = n$. Numri i pritshëm i vëzhgimeve në $(c_{j-1}, c_j]$ bazuar në $F^*(\cdot)$, do të jetë:

$$e_j = n[F^*(c_j) - F^*(c_{j-1})] \quad (1.182)$$

Për të testuar hipotezen null sipas së cilës shpërndarja $F^*(\cdot)$ i përshtatet të dhënave, përcaktohet statistika e mirësisë së përshtatjes Hi katror X^2 e tillë që:

$$X^2 = \sum_{j=1}^k \frac{(e_j - n_j)^2}{e_j} = \left[\sum_{j=1}^k \frac{n_j^2}{e_j} \right] - n \quad (1.183)$$

Nëse $F^*(\cdot)$ është tërësisht e përcaktuar, atëherë X^2 shpërndahet me shpërndarje χ_{k-1}^2 , nën hipotezën null kur n është mjaftueshëm e madhe. Në mënyrë që testi të veprojë mirë, gjithashtu kërkojmë që numri i vëzhgimeve në secilën prej klasave, të jetë jo më i vogël se 5.

Nëse parametrat e $F^*(\cdot)$ janë vlerësuar duke përdorur metodën për përgjasinë maksimale shumëpërmasore, atëherë shpërndarja asipmptotike e X^2 do jetë χ_{k-r-1}^2 . Për përllogaritjen e përgjasisë maksimale shumëpërmasore, përdorim funksionin e log fqinjësisë:

$$\log L(\theta, n) = \sum_{j=1}^k n_j \log [F^*(\theta, c_j) - F^*(\theta, c_{j-1})] \quad (1.184)$$

Ku θ është elementi i r - të i vektorit të parametrave. Më tej $\log L(\theta, n)$ maksimizohet në lidhje me θ për të përftuar $\hat{\theta}$. Frekuenca e pritshme e_j në intervalin $(c_{j-1}, c_j]$ do të jetë:

$$e_j = n[F^*(\hat{\theta}, c_j) - F^*(\hat{\theta}, c_{j-1})] \quad (1.185)$$

– Testi i raportit të fqinjësisë

Testi i raportit të fqinjësitë krahason dy hipoteza njera nga të cilat është një rast i veçantë i hipotezës tjetër në kuptimin që parametrat e modelit janë vendosur për të kënaqur disa kufizime. Modeli i pakushtëzuar është hipoteza alternative dhe hipoteza e kushtëzuar është hipoteza null.

Kushtet e vendosura mbi vektorin e parametrave θ mund të jenë të formës kushtëzime zero (pra një pjesë e parametrave janë zero), kushtëzime lineare, ose edhe kushtëzime jolineare. Shënojmë me $\hat{\theta}_U$ vlerësuesin e fqinjësisë maksimale të pakushtëzuar si hipotezë alternative, $\hat{\theta}_R$ vlerësuesin e fqinjësisë maksimale të kushtëzuar si hipotezë null, dhe shënojmë me r numrin e kushtëzimeve. Fqinjësitë e maksimizuara të pakushtëzuara e të kushtëzuara do të jenë përkatësisht $L(\hat{\theta}_U, x)$ dhe $L(\hat{\theta}_R, x)$. Statistika për raportin e fqinjësisë të cilën e shënojmë me ℓ do të jetë:

$$\ell = 2 \log \left[\frac{L(\hat{\theta}_U, x)}{L(\hat{\theta}_R, x)} \right] = 2 [\log L(\hat{\theta}_U, x) - \log L(\hat{\theta}_R, x)] \quad (1.186)$$

duke qenë se $\hat{\theta}_U$ dhe $\hat{\theta}_R$ janë përkatësisht maksimumi i pakushtëzuar dhe maksimumi i kushtëzuar $L(\hat{\theta}_U, x) \geq L(\hat{\theta}_R, x)$. Nëse kushtëzimet nën hipotezën null janë të vërteta, presim që diferenca midis $L(\hat{\theta}_U, x)$ dhe $L(\hat{\theta}_R, x)$ të jetë e vogël. Pra një distancë e madhe midis $L(\hat{\theta}_U, x)$ dhe $L(\hat{\theta}_R, x)$ është një tregues që hipoteza null është jokorrekte. Rrjedhimisht duhet të refuzojmë hipotezën null për vlera të mëda të ℓ . Për më tepër, kur hipoteza null është e vërtetë, ℓ konvergjon drejt një shpërndarjeje χ_r^2 kur numri n i elementëve të zgjedhjes shkon drejt ∞ .

Rrjedhimisht rregulla për refuzimin e hipotezës null është që $\ell > \chi_{r,1-\alpha}^2$ me nivel rëndësie α ku $\chi_{r,1-\alpha}^2$ është percentili i $100(1 - \alpha)$ i shpërndarjes χ_r^2

1.2.4.3 Kriteret e informacionit për përzgjedhjen e modelit

Kur krahasohen dy modele, modeli më i gjerë e me më shumëparametra ka avantazhin e përshtatshmërisë ndaj të dhënëve me një funksion më fleksibël dhe kështu ndoshta log – fqinjësi më të madhe. Për të krahasuar modele në kushte më të barabarta, mund të adoptohen log – fqinjësi të penalizuara. Kriteri i informacionit Akaike, përcaktuar nga AIC, propozon të penalizimin e modeleve të mëdha duke zbritur numrin e parametrave në modelin e tij log – fqinjësisë. Kështu, AIC është përcaktuar si:

$$AIC = \log L(\hat{\theta}, x) - p \quad (1.187)$$

Ku $\log L(\hat{\theta}, x)$ është log – fqinjësia e llogaritur me Metodën e Përgjasisë Maksimale dhe p është numri i parametrave të vlerësuar në model.

Përveç kësaj mund të përdoret Kriteri i Informacionit Bayesian BIC:

$$BIC = \log L(\hat{\theta}, x) - \frac{p}{2} \log(n) \quad (1.188)$$

1.3 Ndërtimi dhe vlerësimi i modeleve statistikore për portofolin e sigurimit të përgjegjësisë ndaj palëve të treta të përdoruesve të mjeteve motorrike brënda territorit të Republikës së Shqipërisë

1.3.1 Përmbledhje e sigurimit përgjegjësisë ndaj palëve të treta të përdoruesve të mjeteve motorrike

Sigurimi i Përgjegjësisë Motorrike është sigurimi i përgjegjësisë së pronarit ose të përdoruesit të mjetit motorrik për dëmet e shkaktuara palëve të treta nga përdorimi i këtij mjeti.

Duke pasur parasysh nivelin e lartë të rrezikshmërisë së drejtimit të mjetit motorrik, organet shtetërore krijojnë me ligj dhe zbatojnë sisteme mbrojtëse financiare për të kompensuar financiarisht palën e dëmtuar për dëmtime trupore apo materiale si rrjedhojë e një aksidenti rrugor. Në mënyrë të veçantë synohet mbrojtja financiare për viktimat e aksidenteve (me pasojë humbjen e jetës ose dëme të pjesshme trupore). Të dhënat e Organizatës Botërore të Shëndetësisë tregojnë se si pasojë e aksidenteve rrugore çdo vit humbasin jetën rreth 1.2 milionë njerëz dhe pësojnë dëmtime të tjera trupore mbi 20 milionë njerëz. [21]

Sistemet mbrojtëse financiare parashikojnë sigurimin e detyrueshëm të pronarit/përdoruesit të mjetit motorrik për përgjegjësinë ndaj palëve të treta, pra për t'u siguruar që pavarësisht gjendjes financiare të shkaktarit të aksidentit, pala e dëmtuar të përfitojë dëmshpërblimin e duhur nga

shoqëria e sigurimit (për rastet kur pronari/përdoruesi i mjetit motorrik, në kundërshtim me kërkesat ligjore është i pasiguruar, atëhere dëmshpërblimi paguhet nga një fond i veçantë i krijuar për këtë qëllim).

Në një pjesë të vendeve ku zbatohet ky sistem (përfshirë Shqipërinë) sigurimi i detyrueshëm i përgjegjësisë motorrike përbën portofolin kryesor të sigurimeve - në Shqipëri në vitin 2014 sigurimi i detyrueshëm motorrik zinte rreth 65% të ardhurave nga primet dhe mbi 70% të dëmeve të paguara (AMF - Buletini Statistikor i Tregut të Sigurimeve).

Prandaj, ndërsa përgjithësisht përcaktimi i drejtë i çmimit të sigurimit të detyrueshëm motorrik është i rëndësishëm për të garantuar se shoqëria e sigurimit do të mund të çdo rast të paguajë dëmshpërblimin palës së dëmtuar, në vende si Shqipëria kjo bëhet edhe më e rëndësishme nëse kihet parasysh se probleme të mundshme në portfolin motorrik ndikojnë drejtpërdrejt në stabilitetin e tregut për shkak të vëllimit relativisht shumë të lartë të këtij sigurimi ndaj totalit të tregut.

Në Shqipëri sigurimi i detyrueshëm motorrik ka filluar të zbatohet prej datës 1 Janar 1993. Aktualisht ky sigurim rregullohet me Ligjin nr. 10076, datë 12 Shkurt 2009 'Për Sigurimin e Detyrueshëm në Sektorin e Transportit' (ndryshuar me Ligjin nr. 10455, datë 21 Korrik 2011).

Në përputhje edhe me praktikën ndërkombëtare, llojet e dëmeve të njohura nga legjislacioni shqiptar janë (sipas kufijve minimalë të mbulimit në sigurim të përcaktuara në ligj):

- Dëme Pasurore, me pasojë humbjen e jetës, dëmtime shëndetësore dhe përkeqësime të shëndetit
- Dëme Jopasurore, Dëmi Moral / Ekzistencial / Biologjik - dëmshpërblim për kompensimin dhe lehtësimin e vuajtjeve fizike/mendore si rrjedhojë e dëmtimeve trupore shkaktuar viktimës dhe/ose një personi të afërm)
- Dëme të Pronës, të lidhura më dëmtimin apo shkatërrimin e pronës

1.3.2 Analiza e totalit të dëmeve

1.3.2.1 Shpërndarja e ashpërsisë së dëmeve

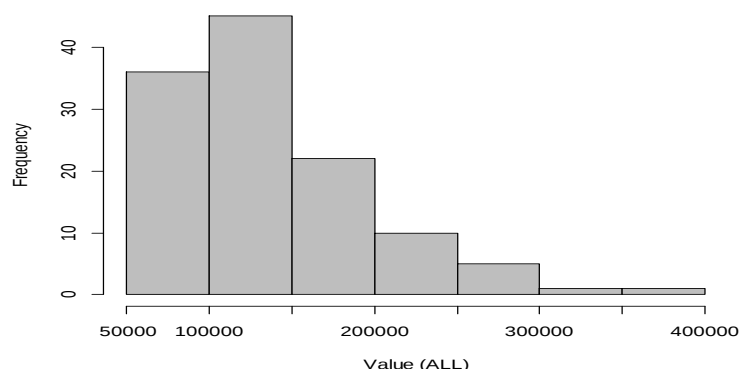
Tabela 1.1 më poshtë paraqet një përmbledhje të karakteristikave bazë të vlerave mujore të ashpërsisë së dëmeve për periudhën 2005 – 2014. Këto statistika konsiderohen të nevojshme si një hap paraprak për gjetjen e natyrës së shpërndarjes së të dhënave e më pas gjetjen e një funksioni shpërndarës të përshtatshëm [5] [6] [9] [12] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [22] [23] [30]

Tabelë1.1: Statistika përshkruese për ashpërsinë e dëmeve

n	Min	Maks	Mesatarja	Mediana	Kuartili i parë.	Kuartili i tretë	Lakueshmëria	Kurtosis
---	-----	------	-----------	---------	------------------	------------------	--------------	----------

120	54,930	363,600	138,800	124,600	91,840	165,500	1.2	4.248
-----	--------	---------	---------	---------	--------	---------	-----	-------

Nga histograma e të dhënave (Figura 1.1) dallojmë një anim në të djathtë të të dhënave



Figurë 1.1: Histograma e të dhënave për ashpërsinë e të dhënave

Lidhur me këto të dhëna, modelet e analizuara për përshtatshmëri janë modelet e shpërndarjeve gamma, weibull, lognormal. Parametrat janë vlerësuar nëpërmjet metodës së përgjasisë maksimale (duke përdorur software R). Tabela 1.2 paraqet karakteristikat e shpërndarjes për dy prej këtyre shpërndarjeve weibull dhe lognormal pasi për shpërndarjen gamma rezultatet nuk ishin të kënaqshme.

Tabelë 1.2: Përmbledhje e rezultateve të vlerësimit për ashpërsinë e dëmeve

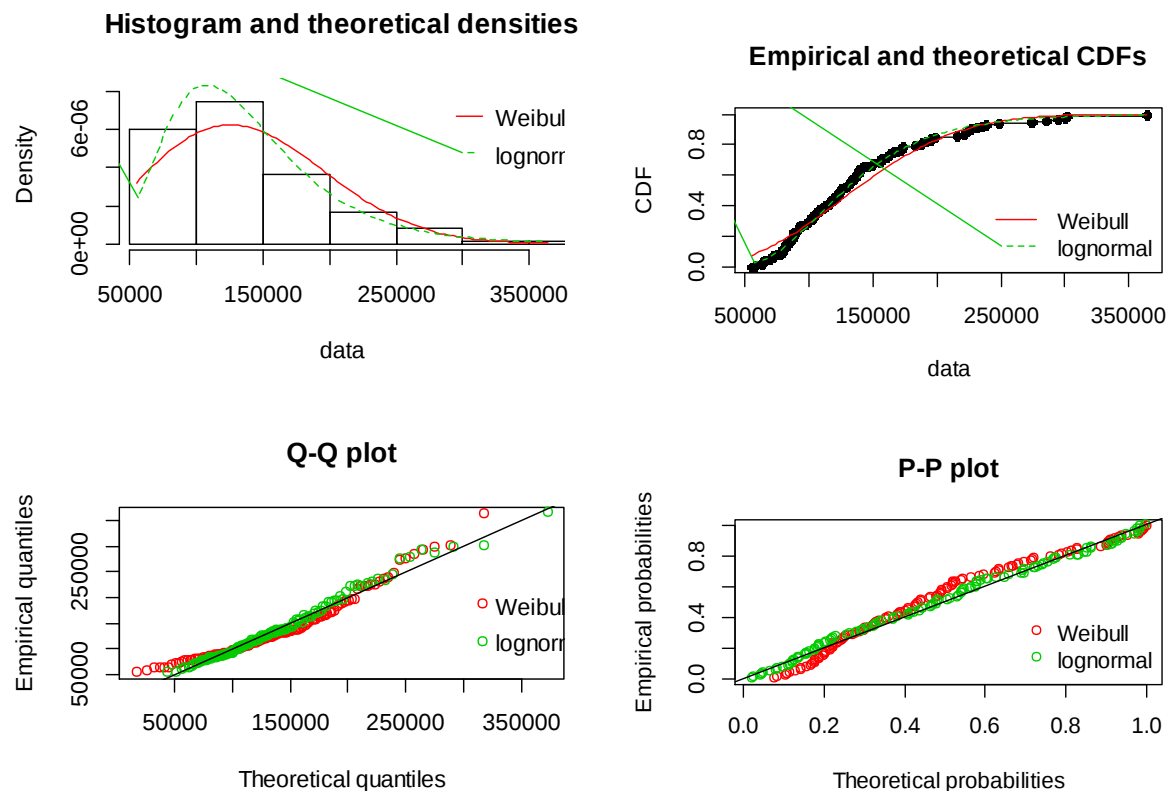
Shpërndarja	Forma	Shkalla	AIC	BIC	Logfquinjësia
Weibull	2.413	1.57	2,974.721	2,980.296	-1,485.36
Lognormal	11.755	0.407	2,950.179	2,955.754	-1,473.09

Ne do kërkojmë shpërndarjen që i përshtatet më mirë të dhënave. Nga Tabela 1.2, vërejmë se shpërndarja lognormale ka AIC më të vogël. Ky është një tregues paraprak që tregon që ndoshta shpërndarja lognormale i përshtatet më mirë të dhënave tona. Gjithsesi më tej do të kryejmë edhe teste të tjera për përzgjedhjen e modelit më të mirë.

Më tej janë ndërtuar histograma me densitetet teorike si dhe funksionet e shpërndarjes p – p plot dhe q – q plot (Figura 1.2) për të parë më mirë shpërndarjen më të përshtatshme për të dhënat tona.

Siç edhe vihet re nga këta katër teste grafik, sërisht shpërndarja lognormale është ajo që i përshtatet më mirë të dhënave tona.

Më tej është kryer kontrolli i hipotezave duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.3) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona. Këto teste janë të mundshme vetëm për parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale.



Figurë 1.2: Histograma me densitetet teorike, q – q plot, shpërndarja empirike, dhe p – p plot

Siç edhe shihet nga rezultatet e këtyre statistikave (Tabela 1.3), rikonfirmojmë rezultatet e dy analizave të mësipërme që ndërmjet dy shpërndarjeve lognormale apo weibull, ajo që i përshtatet më mirë të dhënave tona është shpërndarja **lognormale**

Tabelë 1.3: Rezultatet e statistikave për disa teste

	Weibull	Lognormal
Statistika Kolmogorov-Smirnov	0.1142	0.0548
Statistika Cramer-von Mises	0.3682	0.0679
Statistika Anderson-Darling	2.3806	0.4761

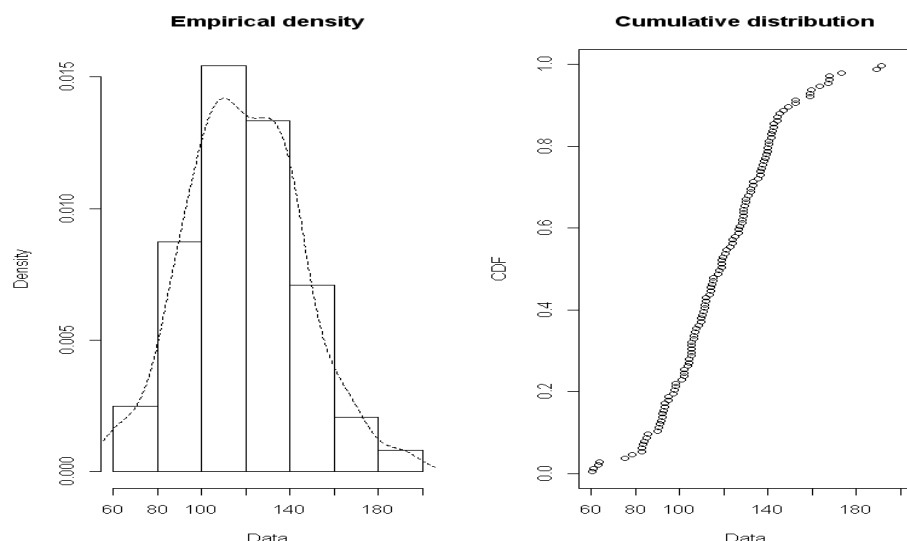
1.3.2.2 Shpërndarja e frekuencës së dëmeve

Tabela 1.4 më poshtë paraqet një përmbledhje të karakteristikave bazë të vlerave mujore të frekuencës së dëmeve për periudhën 2005 – 2014. Këto statistika konsiderohen të nevojshme si një hap paraprak për gjetjen e natyrës së shpërndarjes së të dhënave e më pas gjetjen e një funksioni shpërndarës të përshtatshëm [5] [6] [9] [11] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [22] [23] [30]

Tabelë1.4: Statistika përshkruese për frekuencën e dëmeve

n	Min	Maks	Mesatarja	Mediana	Kuartili i parë.	Kuartili i tretë	Lëmueshmëria	Kurtosis
120	61	191	119	118	102	137	0.18806	0.11003

Nga histograma e të dhënave (Figura 1.3) dallojmë një simetri të të dhënave



Figurë 1.3: Histograma e të dhënave dhe shpërndarja kumulative për frekuencën e dëmeve

Lidhur me këto të dhëna, modelet e analizuara për përshtatshmëri janë modelet e shpërndarjeve poisson e negative binomiale. Parametrat janë vlerësuar nëpërmjet metodës së momenteve (duke përdorur software R) pasi nuk mund të përdorej metoda e përgjasisë maksimale mbi këto të dhëna. Tabela 1.5 paraqet karakteristikat e shpërndarjes për secilën prej këtyre shpërndarjeve.

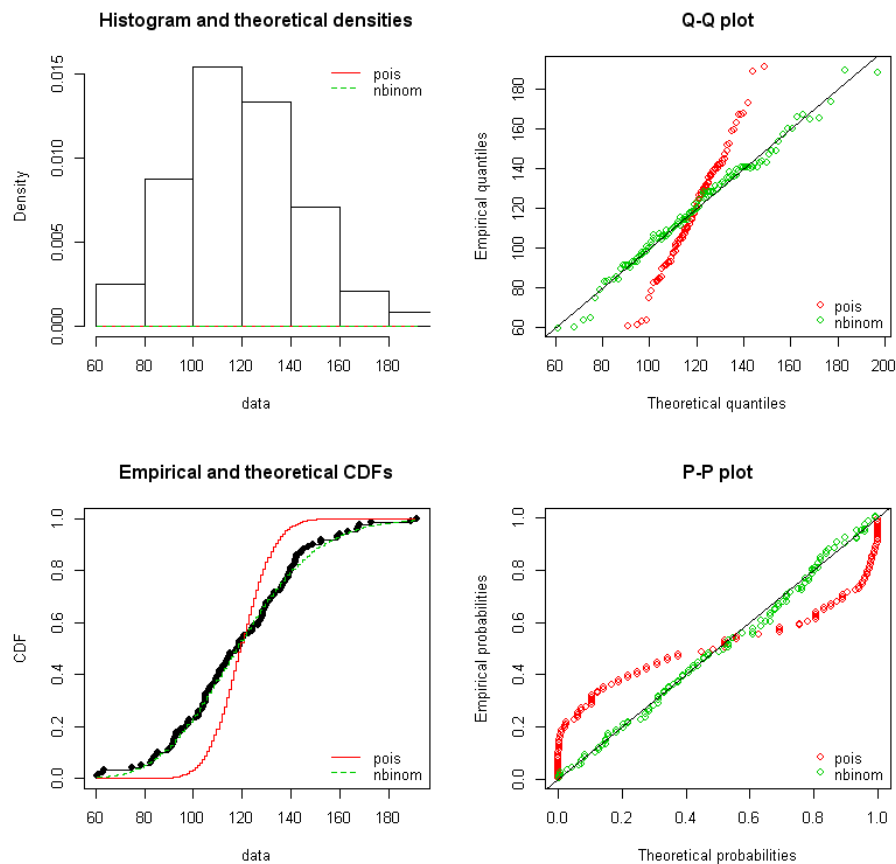
Tabelë 1.5: Përmbledhje e rezultateve të vlerësimit për frekuencën e dëmeve

Shpërndarja	λ	
Poisson	119.0526	387.47
	r	
Binomiale Negative	3.68	0.0277

Ne do kërkojmë shpërndarjen që i përshtatet më mirë të dhënave. Nga Tabela 1.5, vërejmë se shpërndarja binomiale negative ka AIC më të vogël. Ky është një tregues paraprak që tregon që ndoshta shpërndarja binomiale negative i përshtatet më mirë të dhënave tona. Gjithsesi më tej do të kryejmë edhe teste të tjera për përzgjedhjen e modelit më të mirë.

Më tej janë ndërtuar histograma me densitetet teorike si dhe funksionet e shpërndarjes p – p plot dhe q – q plot (Figura 1.4) për të parë më mirë shpërndarjen më të përshtatshme për të dhënat tona.

Siç edhe vihet re nga këta katër teste grafik, sërish shpërndarja binomiale negative është ajo që i përshtatet më mirë të dhënave tona.



Figurë 1.4: Histograma me densitetet teorike, q – q plot, shpërndarja empirike, dhe p – p plot

Më tej është kryer kontrolli i hipotezave duke përdorur statistikën Hi katror (Tabela 1.6) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.

Siç shihet nga rezultatet e këtyre statistikave (Tabela 1.6), shpërndarja më e përshtatshme ndaj të dhënave tona, duket se është shpërndarja binomiale negative duke qenë se merr vlerën më të vogël të kësaj statistike.

Tabelë 1.6: Rezultatet e statistikave për testin Hi katror

	Poisson	Negative binomiale
p – vlera	0.000	0.2482623
Statistika	4051.05	11.41609
Gradët e lirisë	10	9

Dhe duke iu kthyer sërish dy analizave të mëparshme vihet re se shpërndarja binomiale negative i përshtatet më së miri të dhënave tona, ndaj arrijmë në përfundimin që shpërndarja **binomiale negative** është modeli që i përshtatet më mirë të dhënave tona

1.3.3 Analiza e ashpërsisë së dëmeve duke analizuar dëmet individuale pasurore e trupore më vehte

Megjithëse vlerat e dëmeve pavarësisht llojit të tyre japin një panoramë të përgjithshme për sjelljen e tyre, analiza e vlerave individuale të ndar në bazë të llojit të tyre jep një pamje më të thellë për mënyrën se si janë shpërndarë ato.

Më poshtë do i analizojmë këto të dhëna si për periudhën e plotë 2005 – 2014 ashtu edhe për secilin prej viteve në veçanti

1.3.3.1 Analiza mbi të dhënat për gjithë periudhën 2005 – 2014

1.3.3.1.1 Dëmet trupore

Tabela 1.7 më poshtë paraqet një përmbledhje të karakteristikave bazë të vlerave individuale të dëmeve trupore për periudhën 2005 – 2014. Këto statistika konsiderohen të nevojshme si një hap paraprak për gjetjen e natyrës së shpërndarjes së të dhënave e më pas gjetjen e një funksioni shpërndarës të përshtatshëm [5] [6] [9] [12] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [22] [23] [31]

Tabelë 1.7: Statistika përshkruese për ashpërsinë e dëmeve trupore

Min	Maks	Mesatarja	Mediana	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
1,818	6,036,102	1,568,580	124,600	1453211	0.85	2.794

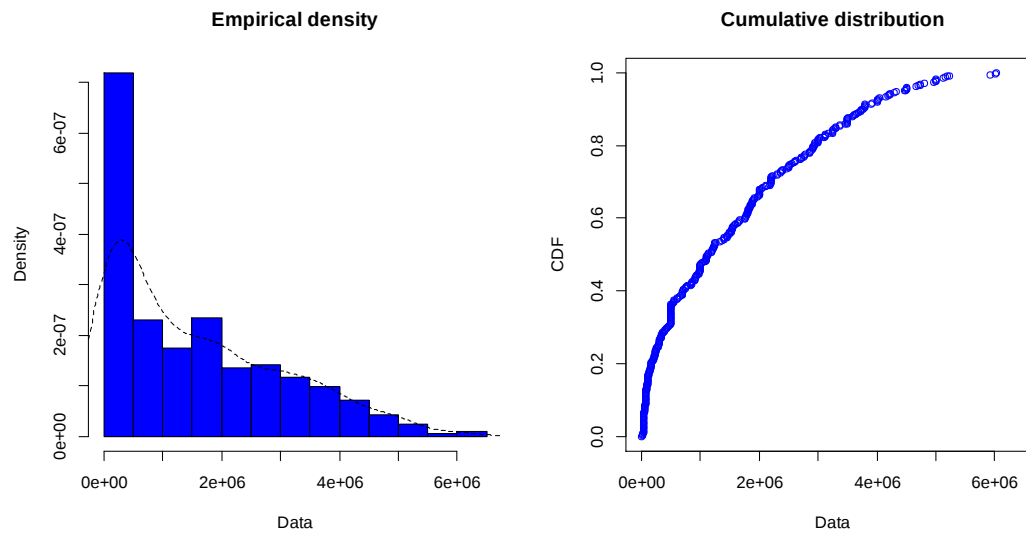
Nga histograma e të dhënave (Figura 1.5) dallojmë një anim në të djathtë të dhënave

Lidhur me këto të dhëna, modelet e analizuara për përshtatshmëri janë modelet e shpërndarjeve gamma, weibull, lognormal. Parametrat janë vlerësuar nëpërmjet metodës së përgjasisë maksimale (duke përdorur software R). Tabela 1.8 paraqet karakteristikat e shpërndarjes për shpërndarjet weibull e lognormale duke qenë se rezultatet për shpërndarjen gamma nuk rezultuan të kënaqshme.

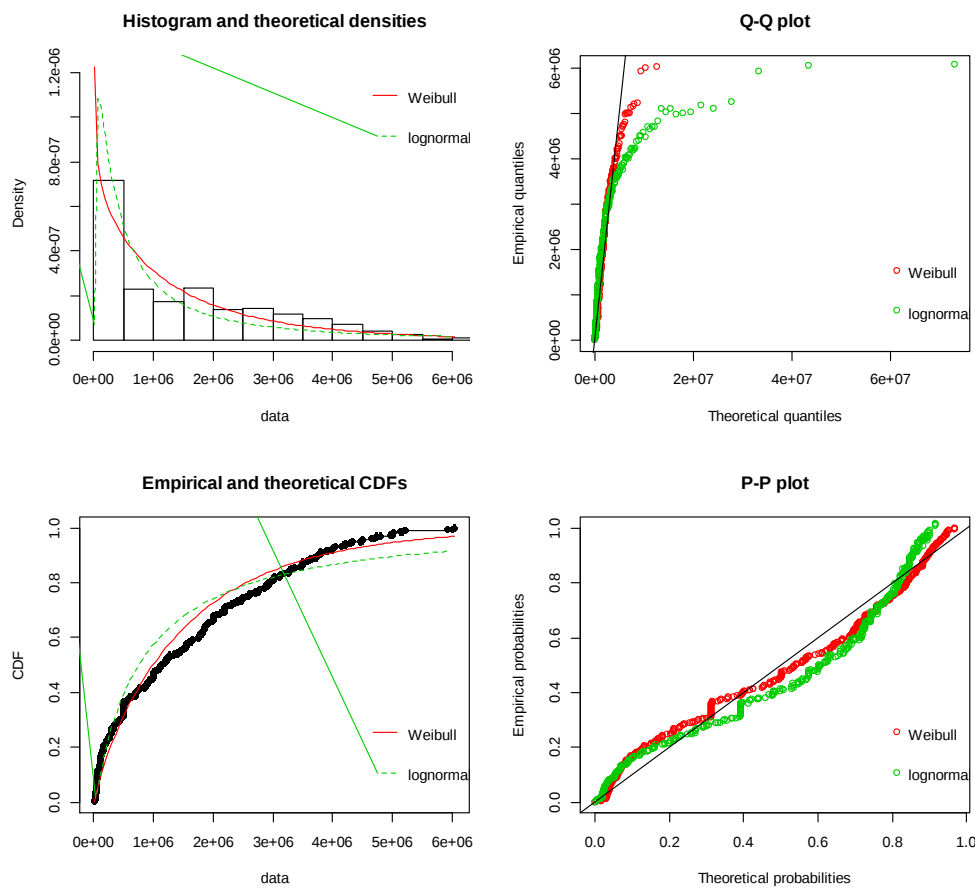
Tabelë 1.8: Përmbledhje e rezultateve të vlerësimit për dëmet individuale trupore

Shpërndarja	Forma	Shkalla	AIC	BIC	Logfquinjësia
Weibull	8.925	1.49	13,002.01	13,010.12	-6,499.005
	Meanlog	Sdlog	AIC	BIC	Logfquinjësia
Lognormal	13.529	0.052	13,088.23	13,096.34	-6,542.117

Ne do kërkojmë shpërndarjen që i përshtatet më mirë të dhënave. Nga Tabela 1.9, vërejmë se shpërndarja weibull ka AIC më të vogël. Ky është një tregues paraprak që tregon që ndoshta shpërndarja weibull i përshtatet më mirë të dhënave tona. Gjithsesi më tej do të kryejmë edhe teste të tjera për përzgjedhjen e modelit më të mirë.



Figurë 1.5: Histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave për dëmet individuale trupore



Figurë 1.6: Histograma me densitetet teorike, q – q plot, shpërndarja empirike, dhe p – p plot

Më tej janë ndërtuar histograma me densitetet teorike si dhe funksionet e shpërndarjes p – p plot dhe q – q plot (Figura 1.6) për të parë më mirë shpërndarjen më të përshtatshme për të dhënat tona.

Siç edhe vihet re nga këta katër teste grafik, sërisht shpërndarja weibull është ajo që i përshtatet më mirë të dhënave tona.

Më tej është kryer kontrolli i hipotezave duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.9) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona. Këto teste janë të mundshme vetëm për parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale.

Siç shihet nga rezultatet e këtyre statistikave (Tabela 1.9), shpërndarja më e përshtatshme ndaj të dhënave tona, duket se është shpërndarja weibull duke qenë se merr vlerën më të vogël në secilën prej këtyre statistikave.

Tabelë 1.9: Rezultatet e statistikave për disa teste

	Weibull	Lognormal
Statistika Kolmogorov-Smirnov	0.0879	0.1231
Statistika Cramer-von Mises	0.8757	2.0034
Statistika Anderson-Darling	5.9883	12.1350

Dhe duke iu kthyer sërisht dy analizave të mëparëshme vihet re se shpërndarja weibull i përshtatet më së miri të dhënave tona, ndaj arrijmë në përfundimin që shpërndarja **weibull** është modeli që i përshtatet më mirë dëmeve trupore.

1.3.3.1.2 Dëmet pasurore

Tabela 1.10 më poshtë paraqet një përmbledhje të karakteristikave bazë të vlerave individuale të të dëmeve pasurore për periudhën 2005 – 2014. Këto statistika konsiderohen të nevojshme si një hap paraprak për gjetjen e natyrës së shpërndarjes së të dhënave e më pas gjetjen e një funksioni shpërndarës të përshtatshëm [5] [6] [9] [12] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [22] [23] [31]

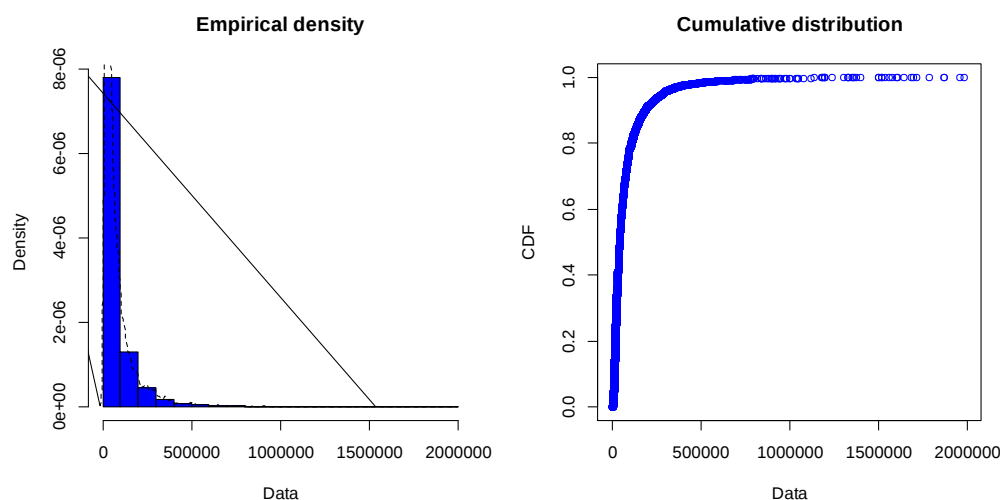
Tabelë 1.10: Statistika përshkruese për ashpërsinë e dëmeve pasurore

Min	Maks	Mesatarja	Mediana	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
2600	1,982,917	84,257.03	43,000	130,225.1	5.5	50.46

Nga histograma e të dhënave (Figura 1.7) dallojmë sërisht një anim në të djathtë të dhënave

Lidhur me këto të dhëna, modelet e analizuara për përshtatshmëri janë modelet e shpërndarjeve gamma, weibull, lognormal. Parametrat janë vlerësuar nëpërmjet metodës së përgjasisë maksimale (duke përdorur software R). Tabela 1.11 paraqet karakteristikat e shpërndarjes për

shpërndarjen weibull e lognormale duke qenë se rezultatet për shpërndarjen gamma nuk rezultuan të kënaqshme.



Figurë 1.7: Histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave për dëmet individuale pasurore

Tabelë 1.11: Përmbledhje e rezultateve të vlerësimit për dëmet individuale pasurore

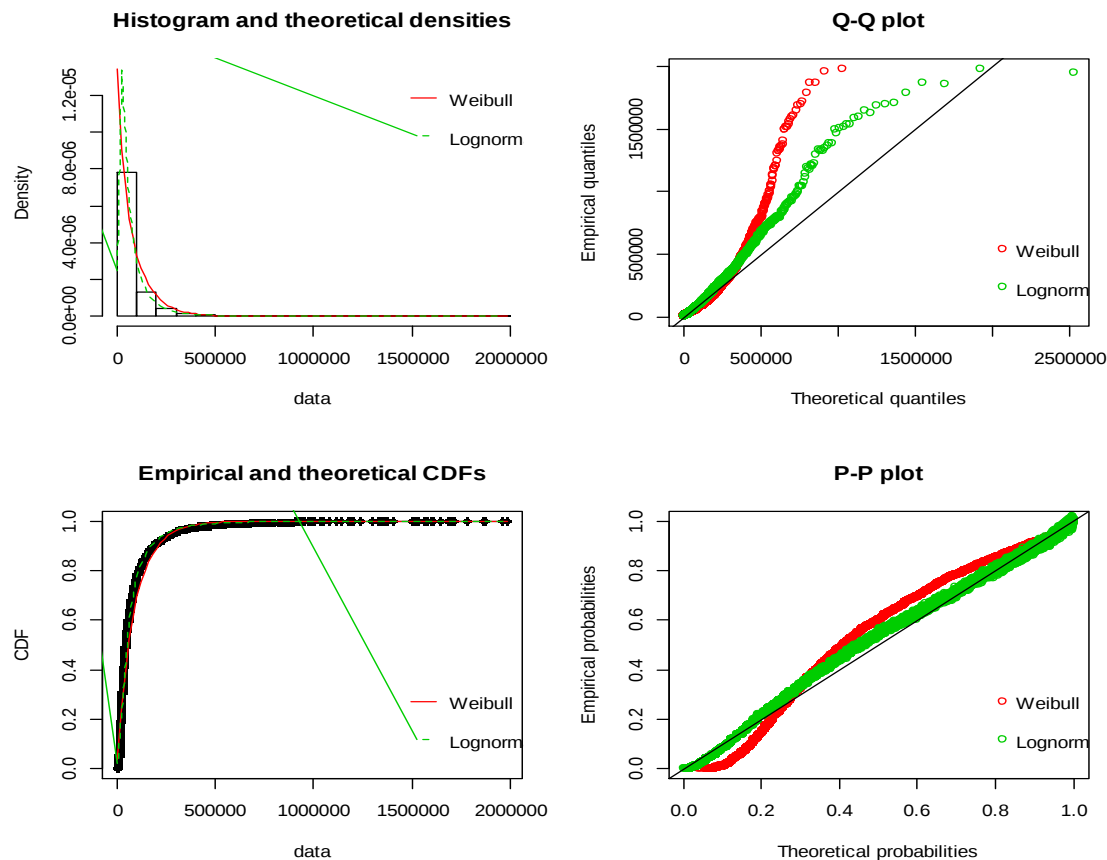
Shpërndarja	Forma	Shkalla	AIC	BIC	Logfquinjësia
Weibull	9.310	8.46	335,081.2	335,096.2	-167,538.6
	Meanlog	Sdlog	AIC	BIC	Logfquinjësia
Lognormal	10.774	1.001	331,219.8	331,234.8	-165,607.9

Ne do kërkojmë shpërndarjen që i përshtatet më mirë të dhënave. Nga Tabela 1.11, vërejmë se shpërndarja lognormale ka AIC më të vogël. Ky është një tregues paraprak që tregon që ndoshta shpërndarja lognormale i përshtatet më mirë të dhënave tona. Gjithsesi më tej do të kryejmë edhe teste të tjera për përzgjedhjen e modelit më të mirë.

Më tej janë ndërtuar histograma me densitetet teorike si dhe funksionet e shpërndarjes p – p plot dhe q – q plot (Figura 1.8) për të parë më mirë shpërndarjen më të përshtatshme për të dhënat tona.

Siç edhe vihet re nga këta katër teste grafik, sërisht shpërndarja lognormale është ajo që i përshtatet më mirë të dhënave tona.

Më tej është kryer kontrolli i hipotezave duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.12) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona. Këto teste janë të mundshme vetëm për parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale.



Figurë 1.8: Histograma me densitetet teorike, q – q plot, shpërndarja empirike, dhe p – p plot

Tabelë 1.12: Rezultatet e statistikave për disa teste

	Weibull	Lognormal
Statistika Kolmogorov-Smirnov	0.1068	0.0509
Statistika Cramer-von Mises	65.3660	8.8409
Statistika Anderson-Darling	382.7199	54.0210

Siç shihet nga rezultatet e këtyre statistikave (Tabela 1.12), shpërndarja më e përshtatshme ndaj të dhënave tona, duket se është shpërndarja lognormale duke qenë se merr vlerën më të vogël në seicilën prej këtyre statistikave.

Dhe duke iu kthyer sërish dy analizave të mëparëshme vihet re se shpërndarja lognormale i përshtatet më së miri të dhënave tona, ndaj arrijmë në përfundimin që shpërndarja **lognormale** është modeli që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore.

Pra rezulton që për dëmet individuale trupore dhe për dëmet individuale pasurore kemi modele të ndryshme probabilitare të cilat i përshtaten të dhënave.

1.3.3.2 Analiza mbi të dhënat e vlerës së dëmeve pasurore për secilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014 të ndarë më vehte

Duke qenë se numri i dëmeve pasurore gjatë periudhës 2005 – 2014 rezulton relativisht i madh (13,582 dëme), është kryer edhe analiza e tyre sipas çdo viti të kësaj periudhe [5] [6] [9] [12] [14] [15] [16] [17] [18] [19] [20] [22] [23] [31]

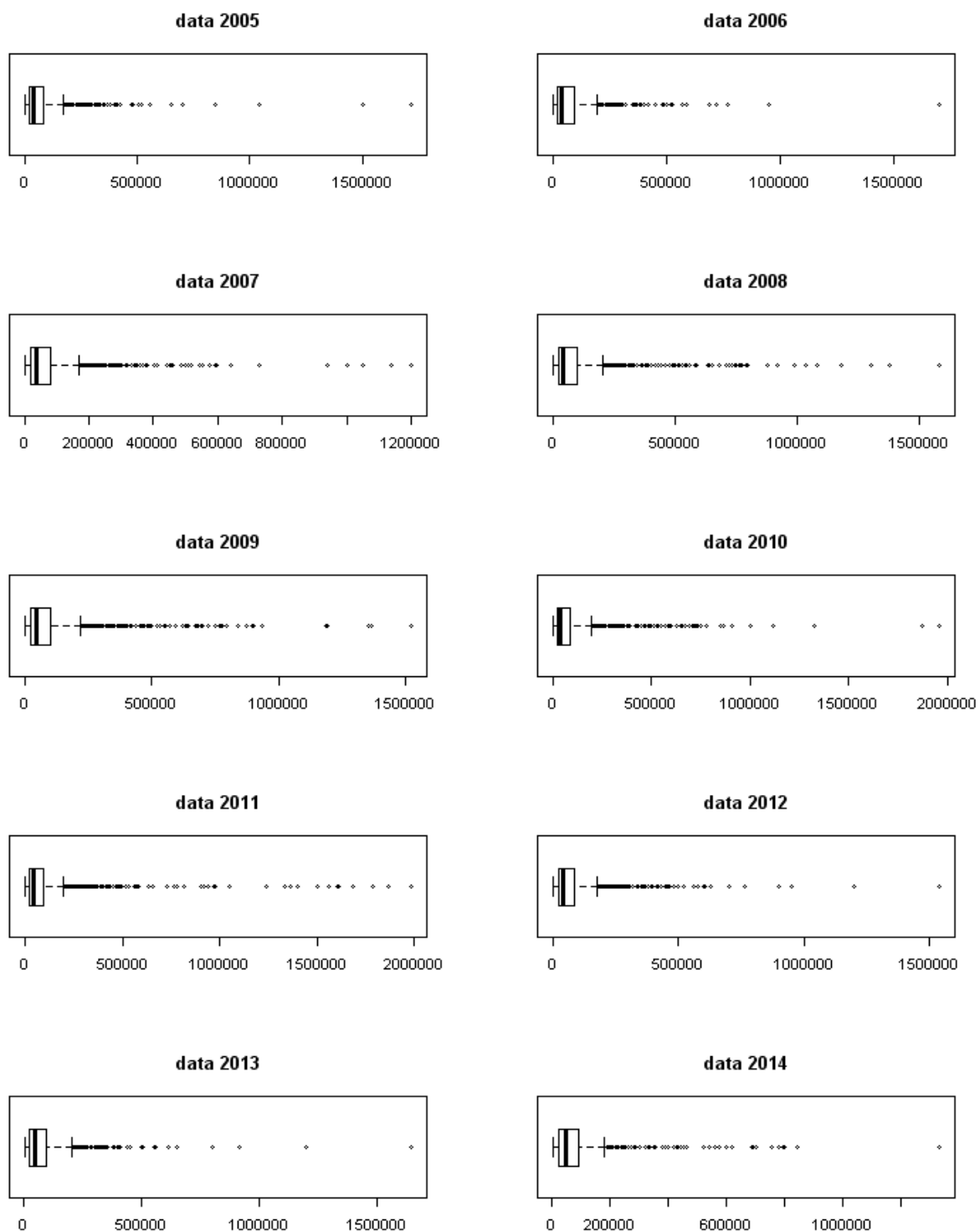
Një përmbledhje e të dhënave për dëmet pasurore për secilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014 jepet në tabelën 1.13 më poshtë

Tabelë 1.13: Të dhënat e vlerave të dëmeve pasurore në vite

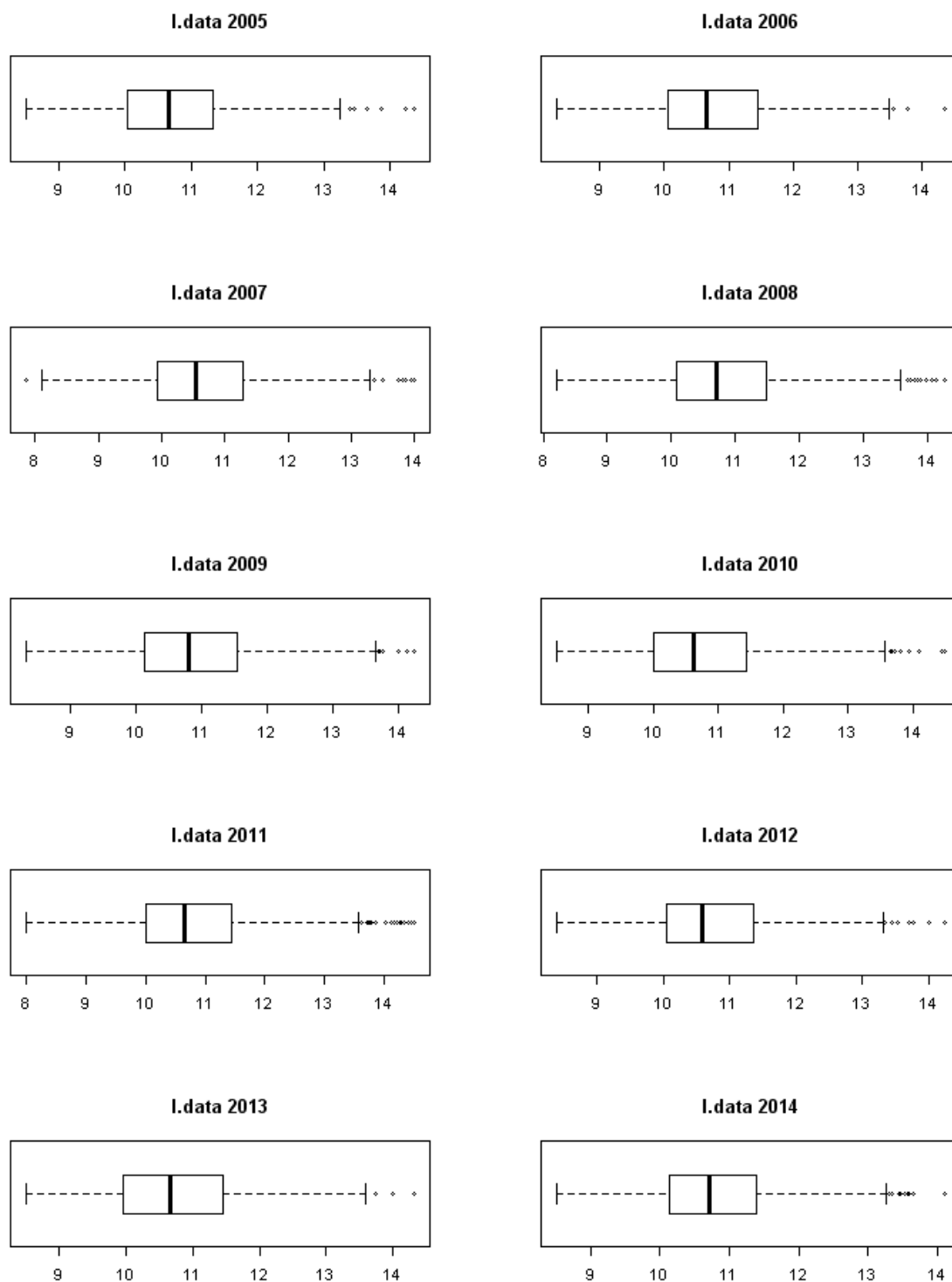
Viti	Numri i dëmeve	Amplituda	Numri i dëmeve me vlerë mbi 1 milion lekë	Numri i dëmeve me vlerë mbi 500,000 lekë
2005	1,368	5,000 – 1,716,400	3	11
2006	1,292	4,200 – 1,700,000	1	10
2007	1,322	2,600 – 1,200,000	3	17
2008	1,359	3,700 – 1,580,000	6	39
2009	1,625	4,208 – 1,520,000	6	37
2010	1,728	5,000 – 1,960,000	5	37
2011	1,444	3,000 – 1,982,917	13	35
2012	1,408	4,440 – 1,536,920	2	14
2013	1,114	5,000 – 1,643,967	2	10
2014	922	5,000 – 1,329,905	1	18

Nga Tabela 1.13 më sipër vihet re që shumë pak dëme rezultojnë më të mëdha se 500,000 lekë e shumë më pak të tilla rezultojnë më të mëdha se 1,000,000 lekë.

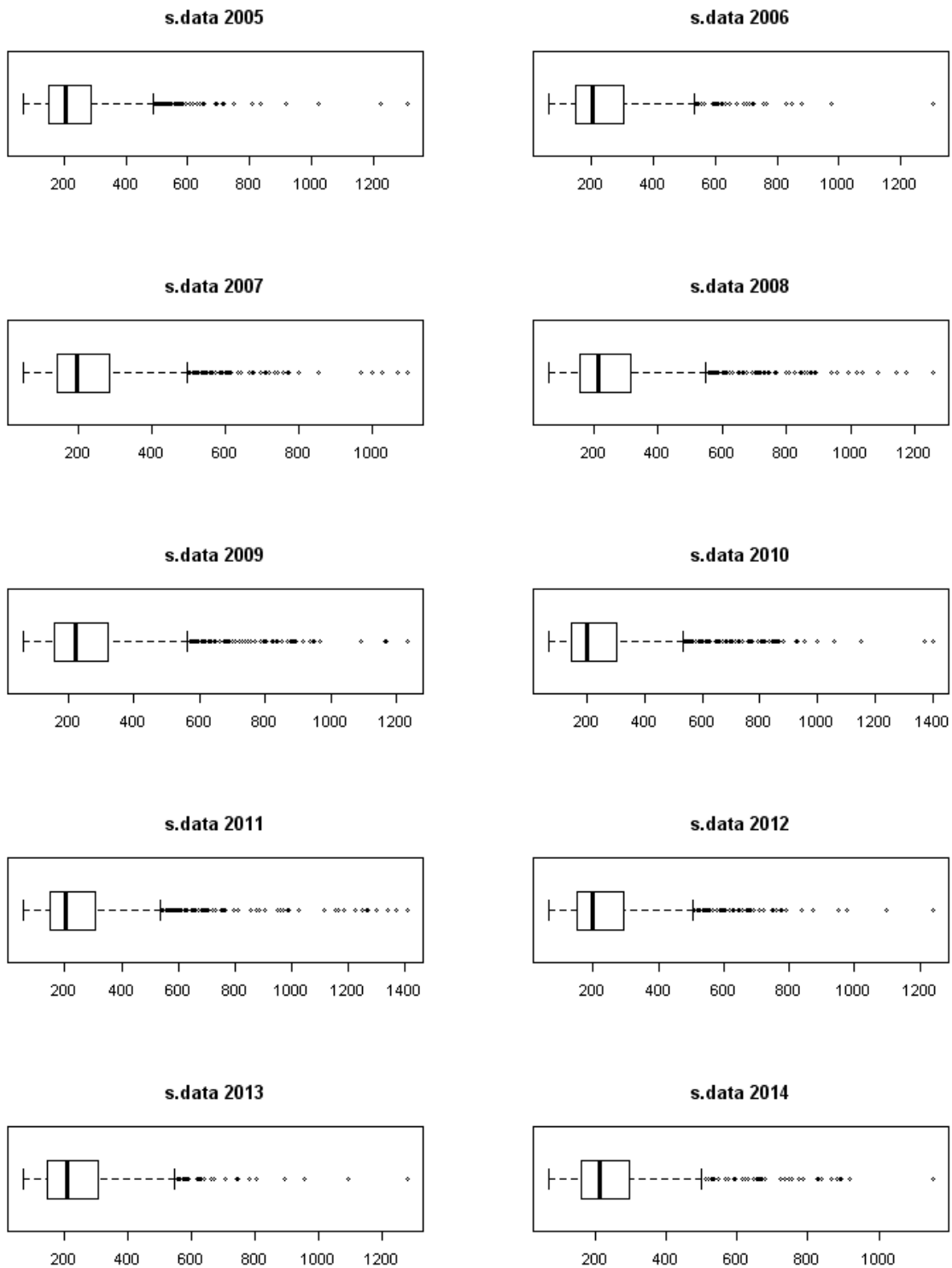
Për të marrë një pamje më të mirë të të dhënave individuale të dëmeve pasurore për secilin nga vitet e periudhës 2005 -2014, u analizuan si të dhënat origjinale ashtu si edhe të dhënat e logaritmuara e rrënjët e tyre. Siç vërehet nga Figurat 1.9., 1.10., 1.11., të dhënat e logaritmuara paraqiten më të përshtatshme për shqyrtim duke qenë se kemi shumë më pak outliers sesa në të dhënat origjinale apo rrënjët katrore të tyre. Gjithsesi përkrah të dhënave të logaritmuara do të studiohet edhe ecuria e të dhënave origjinale si edhe e të rrënjëve të tyre për secilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014.



Figurë 1.9: Vlera e dëmeve pasurore për seicilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014

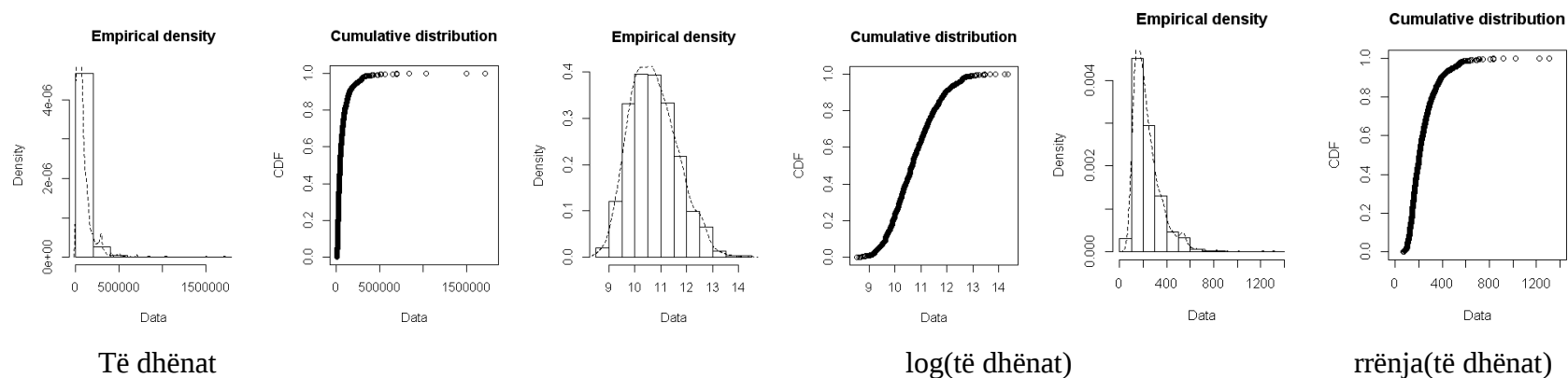


Figurë 1.10: Vlera e logaritmeve të dëmeve pasurore për seicilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014



Figurë 1.11: Vlera e rënjëve të dëmeve pasurore për seicilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014

Viti 2005



Figurë 1.12: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2005

Tabelë 1.14: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2005

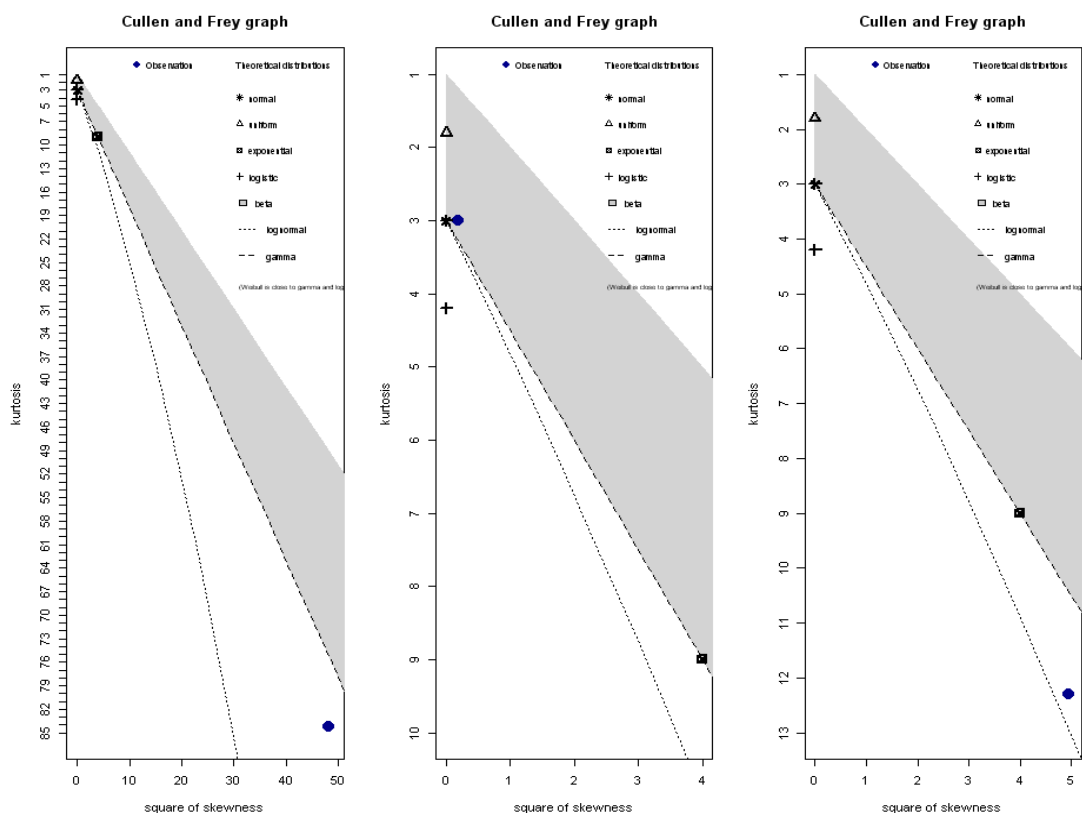
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	5,000	1,716,400	42,425	73,018	104,254.3	6.937626	84.19654
Logaritmi i të dhënave	8.517193	14.35574	10.65549	10.7281	0.9139353	0.4336247	2.99769
Rrënja katrore e të dhënave	70.71068	1,310.114	205.9733	238.6954	126.707	2.222355	12.29769

Tabelë 1.15: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2005

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	1.0166	7,756.25	-16,689.55	11.541	11.158	-1,940.23	2.010	270.63	-8,401.23
Gamma	-	-	-	140.07	13.056	-1,803.46	4.659	0.0196	-8,275.37
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.728	0.914	-16,493.53	2.369	0.084	-1,798.66	5.364	0.457	-8,207.29

Nga Figura 1.12 dhe Tabela 1.14, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara.

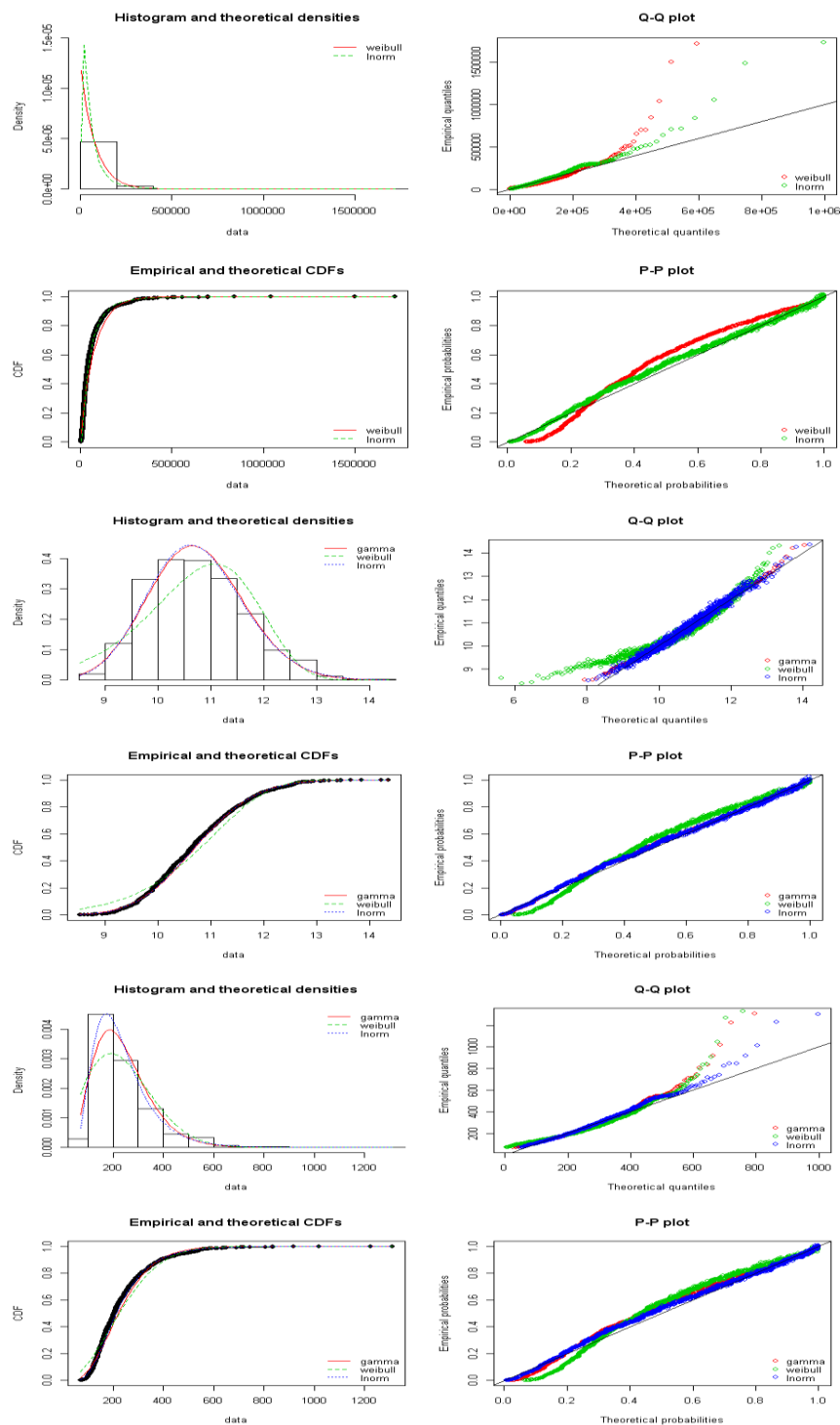
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.13, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat original nuk i afrohen ndonjerës prej shpërndarjeve.



Figurë 1.13: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2005 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.16) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



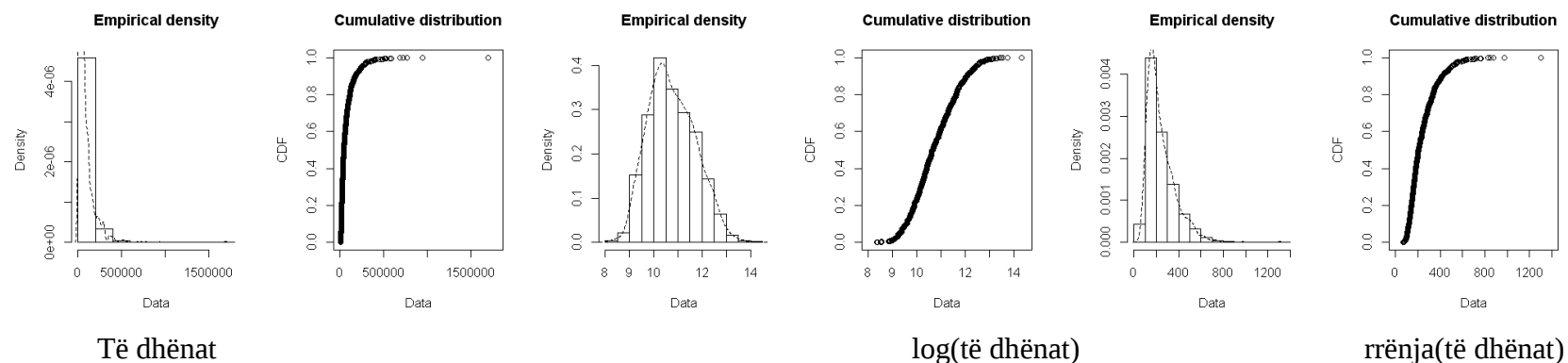
Figurë 1.14: Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2005 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave)

Tabelë 1.16: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.1054947	0.04626541
logaritmi i të dhënave	0.03949422	0.08158934	0.03583518
rrënja katrore e të dhënave	0.07478195	0.1045588	0.04626541
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		6.5099619	0.70858811
logaritmi i të dhënave	0.39837185	3.16159963	0.28720178
rrënja katrore e të dhënave	2.29497957	4.821888	0.70858811
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		37.9096143	4.47626015
logaritmi i të dhënave	2.51557059	21.56994984	1.81589118
rrënja katrore e të dhënave	13.94670117	32.0375031	4.47626015
AIC			
të dhënat		33383.11	32,991.06
logaritmi i të dhënave	3610.928	3884.457	3,601.314
rrënja katrore e të dhënave	16554.73	16806.46	16,418.58
BIC			
të dhënat		33393.55	33,001.51
logaritmi i të dhënave	3621.37	3894.9	3,611.756
rrënja katrore e të dhënave	16565.17	16816.9	16,429.02

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2005, është ai **lognormal**

Viti 2006



Figurë 1.15: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2006

Tabelë 1.17: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2006

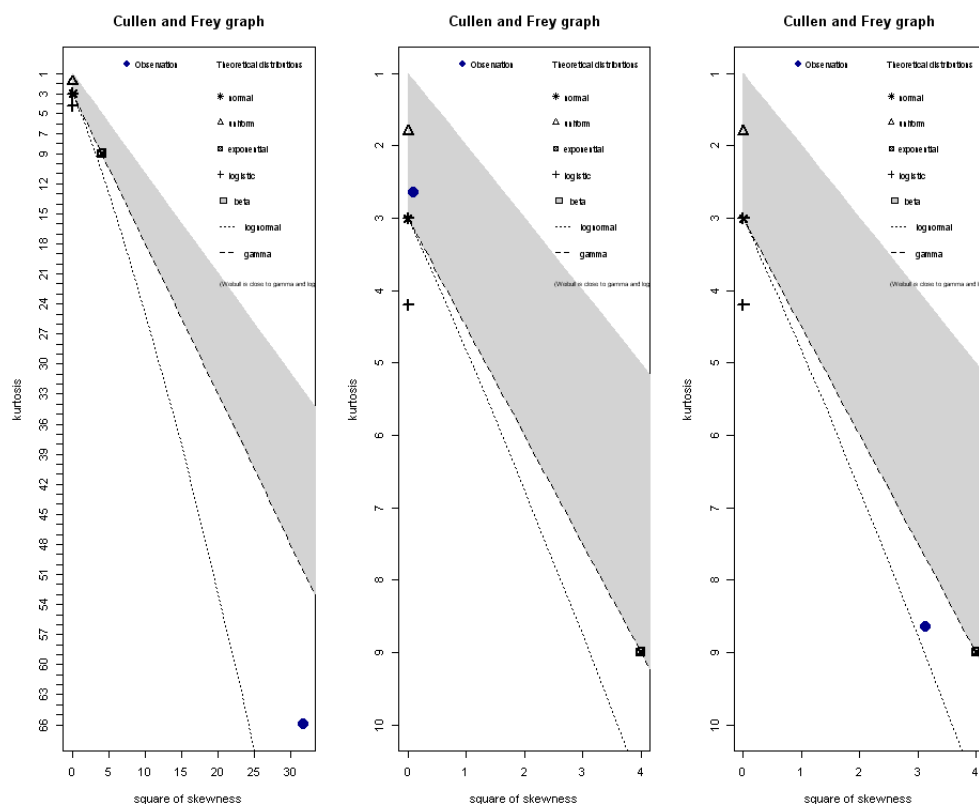
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	4,200	1,700,000	42,600	76,782.96	100,451.3	5.629955	65.96149
Logaritmi i të dhënave	8.34284	14.34614	10.65957	10.75984	0.958202	0.31263	2.643223
Rrënja katrore e të dhënave	64.80741	1,303.84	206.3954	244.545	130.3605	1.769144	8.641983

Tabelë 1.18: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2006

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	1.004	76,994.6	-15,825.35	11.447	11.207	-1,866.91	2.008	277.385	-7,978.95
Gamma	-	-	-	127.45	11.845	-1,767.85	4.345	0.018	-7,884.60
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.760	0.958	-15,679.32	2.372	0.089	-1,765.09	5.380	0.479	-7,832.92

Nga Figura 1.15 dhe Tabela 1.17, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara.

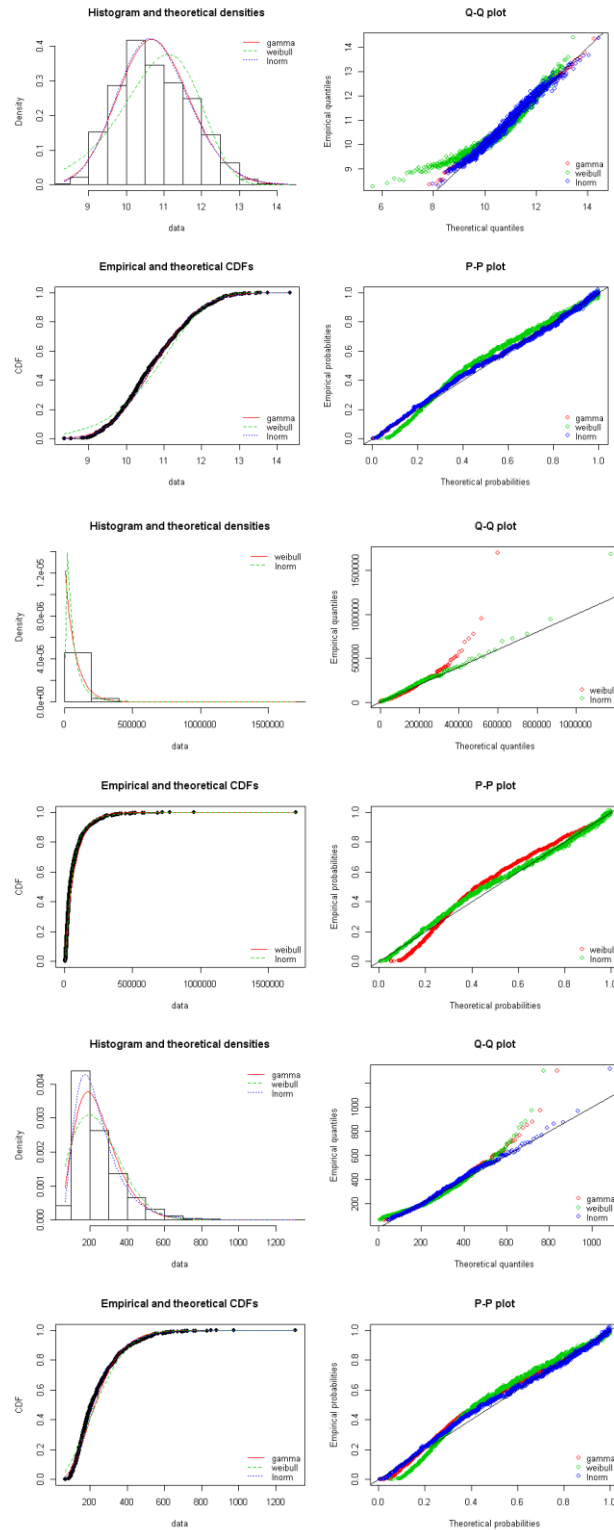
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.16, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre nuk i afrohen ndonjerës prej shpërndarjeve.



Figurë 1.16: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2006 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave)

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikatat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave.

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikatat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.19) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



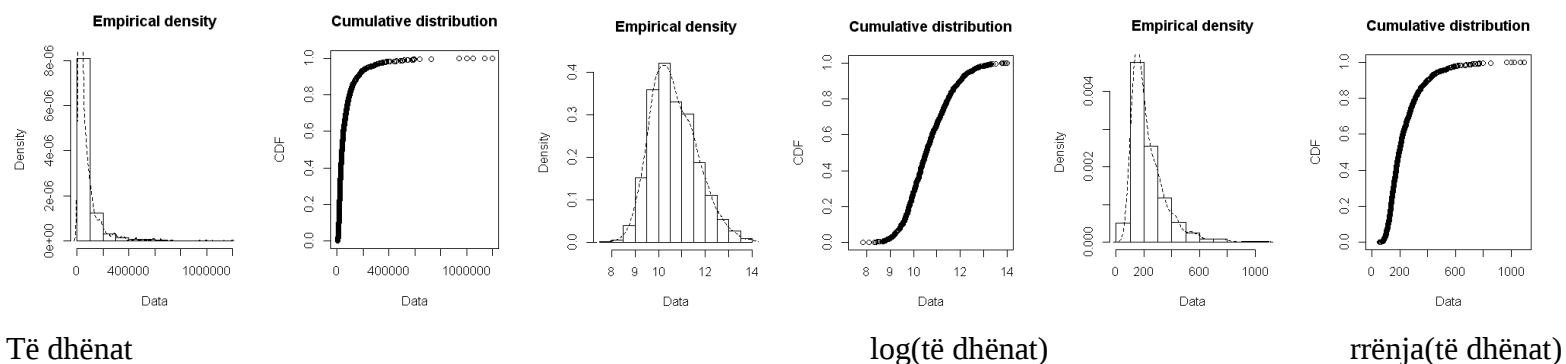
Figurë 1.17:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2006 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rënjët e të dhënave).

Tabelë 1.19: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.09164	0.05177
logaritmi i të dhënave	0.04068	0.07604	0.03495
rrënja katrore e të dhënave	0.08051	0.09169	0.05177
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		3.56346	0.71693
logaritmi i të dhënave	0.46607	2.37212	0.38015
rrënja katrore e të dhënave	1.98842	3.56297	0.71693
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		23.6603	4.22794
logaritmi i të dhënave	2.73635	15.8722	2.25305
rrënja katrore e të dhënave	11.7101	23.6644	4.22794
AIC			
të dhënat		31,654.7	31,362.6
logaritmi i të dhënave	3,539.69	3,737.82	3,534.17
rrënja katrore e të dhënave	15,773.2	15,961.9	15,669.8
BIC			
të dhënat		31,665	31,373
logaritmi i të dhënave	3,550.02	3,748.15	3,544.49
rrënja katrore e të dhënave	15,783.5	15,972.2	15,680.2

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2006, është sërisht ai **lognormal**.

Viti 2007



Figurë 1.18: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2007

Tabelë 1.20: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2007

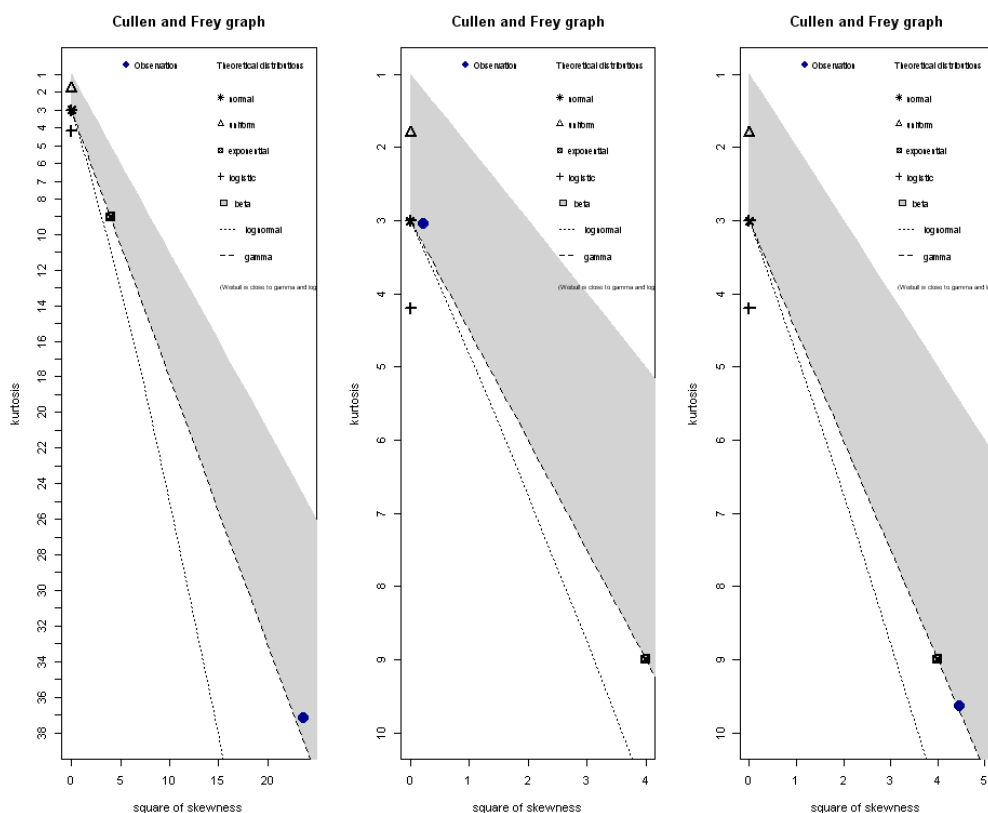
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	2,600	1,200,000	37,900	72,757.01	107,120.8	4.870138	37.162
Logaritmi i të dhënave	7.863267	13.99783	10.5427	10.65746	0.973376	0.463131	3.042139
Rrënja katrore e të dhënave	50.9902	1,095.45	194.679	234.111	134.024	2.11517	9.63893

Tabelë 1.21: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2007

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia
Weibull	9.462	7.051	-16,118.21	10.791	11.114	-1,956.78	1.892	265.475	-8,156.29
Gamma	-	-	-	122.12	11.458	-1,824.29	4.095	0.017	-8,042.30
	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia
Lognormal	10.657	0.973	-15,928.83	2.362	0.090	-1,819.11	5.329	0.487	-7,967.91

Nga Figura 1.18 dhe Tabela 1.20, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

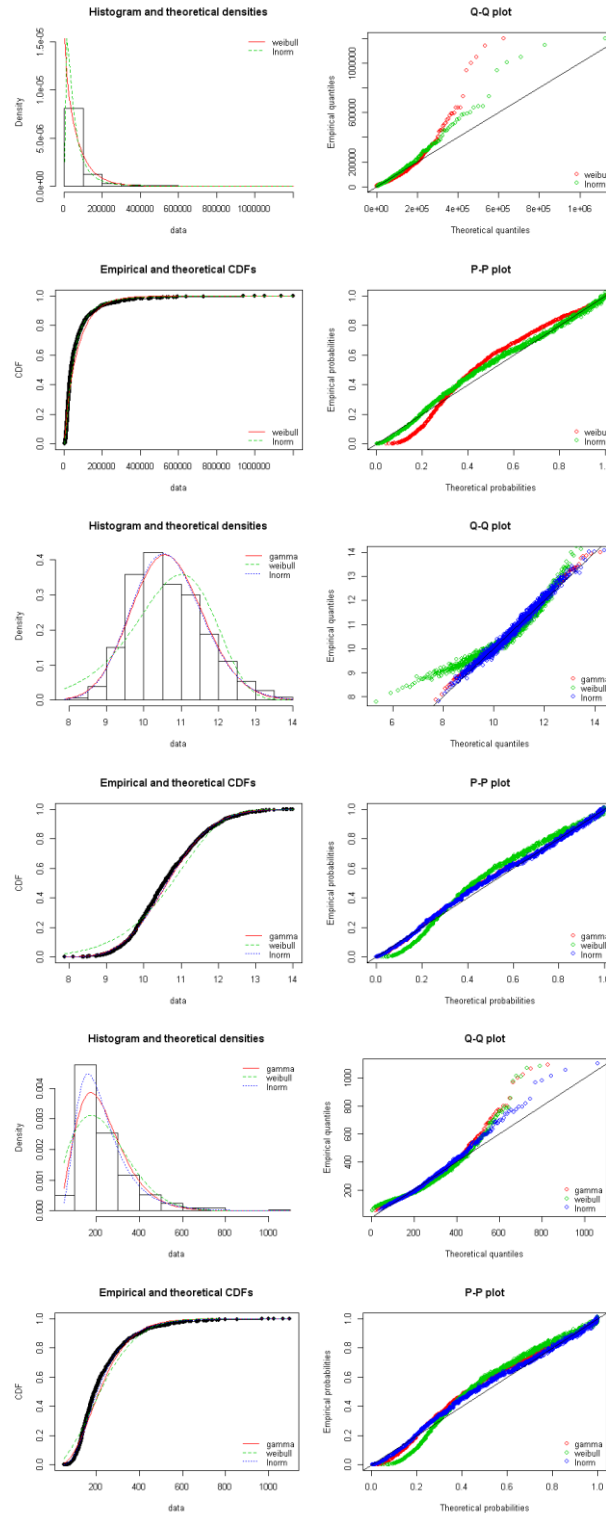
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.19, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjeve lognormale e beta.



Figurë 1.19: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2007 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.22) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



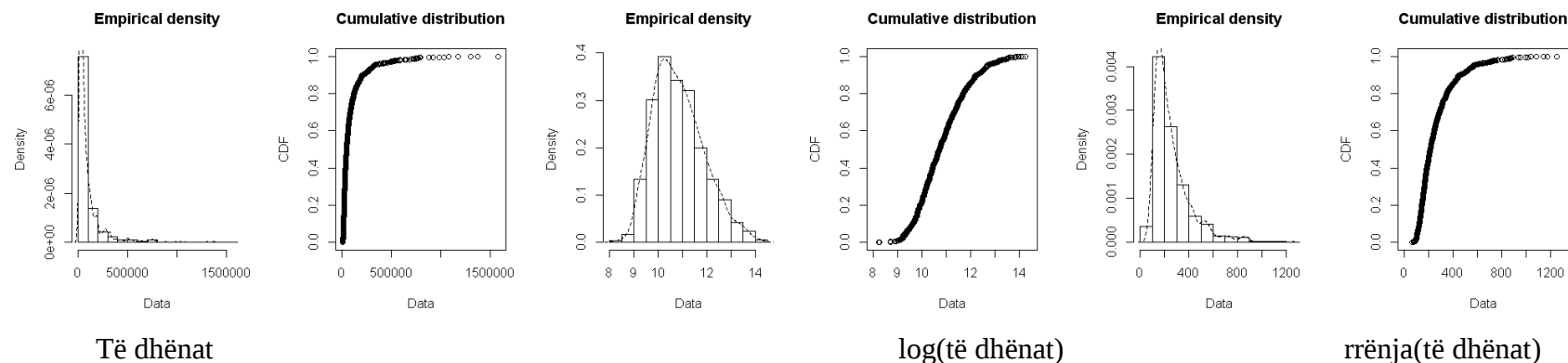
Figurë 1.20: Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2007 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave)

Tabelë 1.22: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.102755	0.05497934
logaritmi i të dhënave	0.04401734	0.08420389	0.03829889
rrënja katrore e të dhënave	0.08479017	0.1028508	0.05497934
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		5.28535	1.01315349
logaritmi i të dhënave	0.60260648	3.56004697	0.4431231
rrënja katrore e të dhënave	2.94542382	5.2770167	1.01315349
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		4.105627	5.86611718
logaritmi i të dhënave	3.38414198	23.30640528	2.44588187
rrënja katrore e të dhënave	17.18323956	34.0833026	5.86611718
AIC			
të dhënat		32,238.43	31861.66
logaritmi i të dhënave	3,652.58	3,917.565	3642.224
rrënja katrore e të dhënave	16,088.59	16,316.58	15939.81
BIC			
të dhënat		32,248.8	31,872.03
logaritmi i të dhënave	3,662.954	3,927.939	3,652.598
rrënja katrore e të dhënave	16,098.96	16,326.95	15,950.19

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2007, është sërish ai **lognormal**

Viti 2008



Figurë 1.21: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2008

Tabelë 1.23: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2008

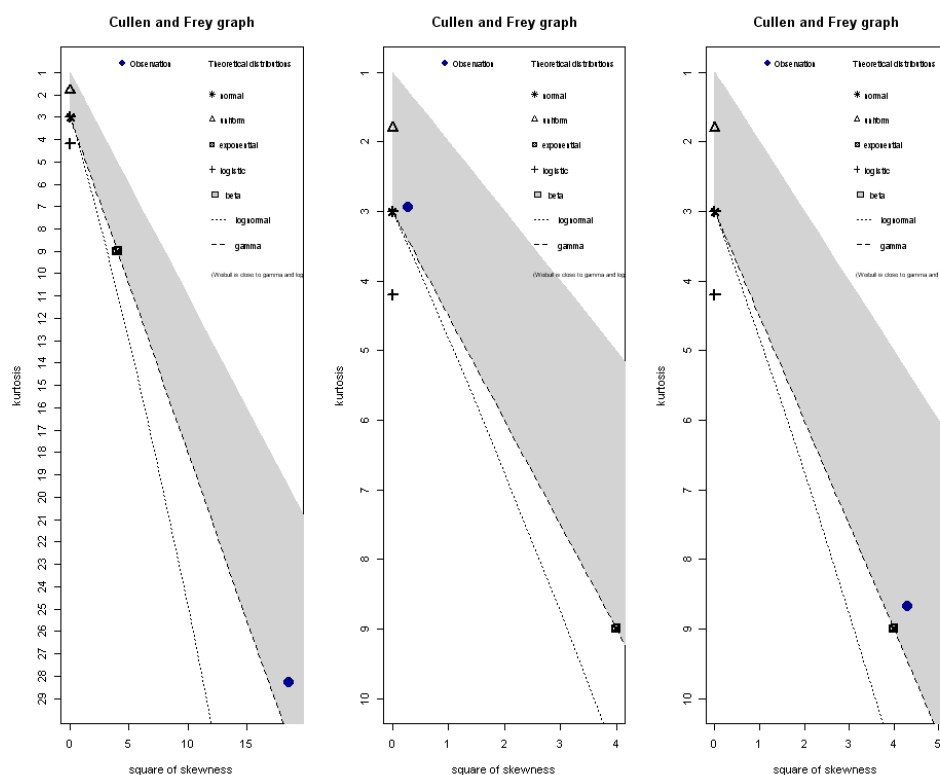
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	3,700	1,580,000	45,000	94,922.65	147,493	4.312549	28.28926
Logaritmi i të dhënave	8.216088	14.27294	10.71442	10.84543	1.036836	0.5253471	2.93411
Rrënja katrore e të dhënave	60.82763	1,256.981	212.132	262.0365	162.1075	2.076618	8.673746

Tabelë 1.24: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2008

Të dhënat			Logaritmi i të dhënave				Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia
Weibull	8.956	9.250	-16,914.06	10.306	11.331	-2,098.64	1.776	296.933	-8,601.51
Gamma				112.01	10.328	--1,957.46	3.578	0.014	-8,492.45
	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia
Lognormal	10.845	1.036	-16,715.94	2.379	2.619	-1,950.32	5.422	0.518	-8,404.48

Nga Figura 1.21 dhe Tabela 1.23, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

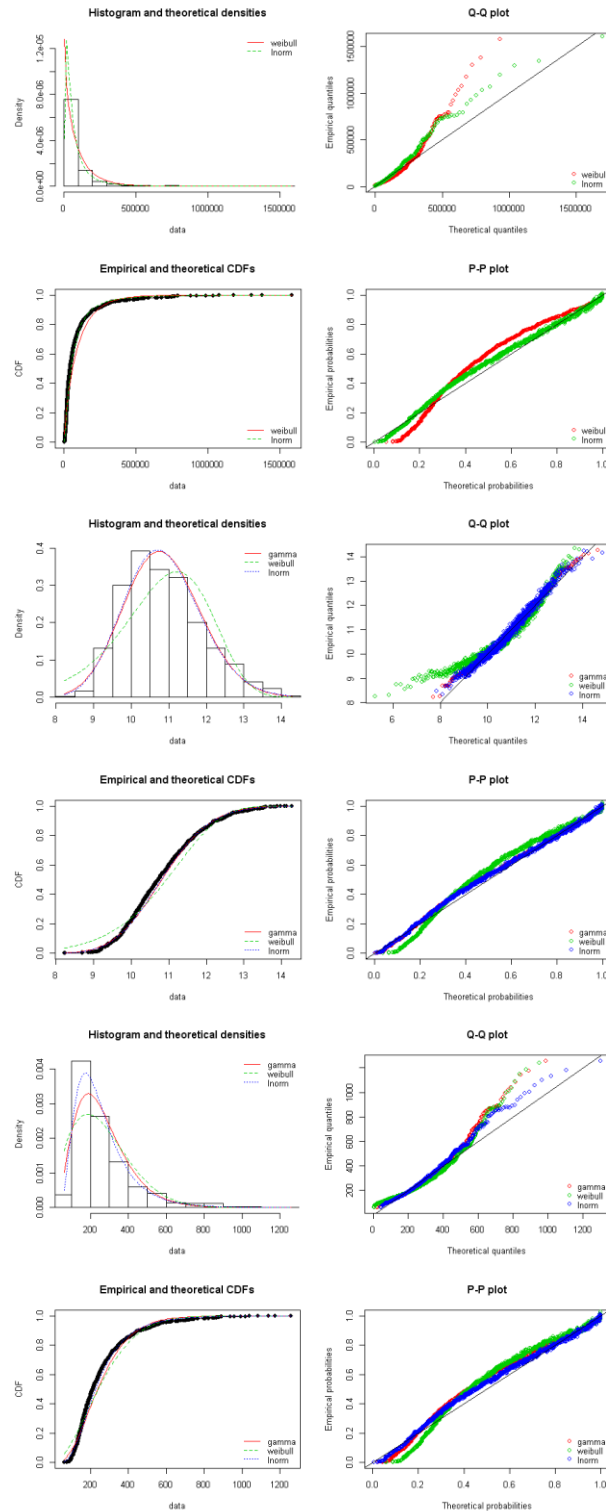
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.22, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta, lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjeve lognormale e beta.



Figurë 1.22: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2008 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.25) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona. Këto teste janë të mundshme vetëm për parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale.



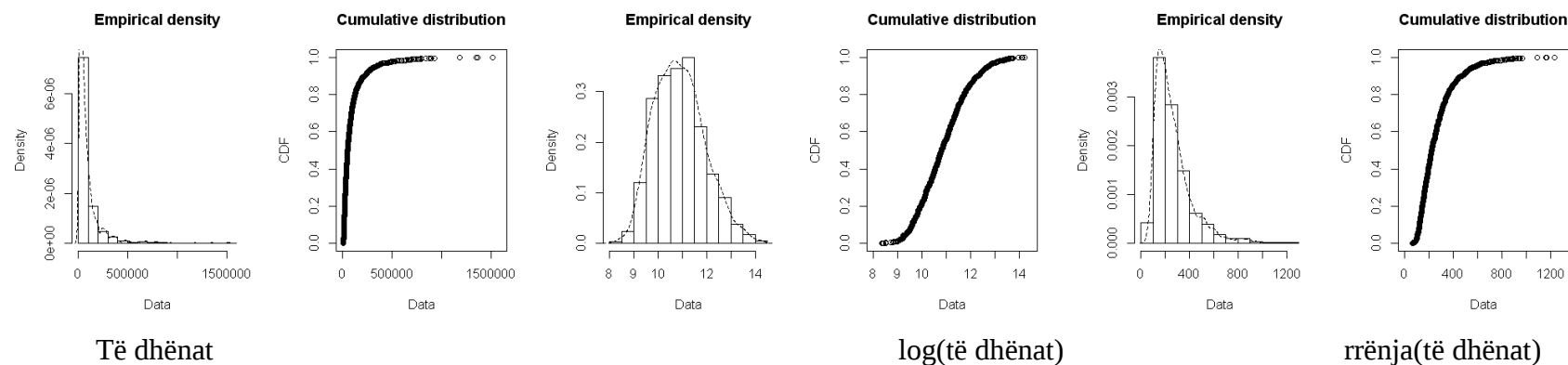
Figurë 1.23:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2008 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave).

Tabelë 1.25: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.114455	0.05714038
logaritmi i të dhënave	0.04856647	0.08920874	0.04391091
rrënja katrore e të dhënave	0.08677547	0.1128614	0.05714038
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		7.112985	1.24170203
logaritmi i të dhënave	0.76453248	3.89966208	0.5770475
rrënja katrore e të dhënave	3.57626042	5.7940001	1.24170203
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		41.885939	7.79944511
logaritmi i të dhënave	4.78504928	25.83865637	3.61054074
rrënja katrore e të dhënave	21.52424769	37.4276812	7.79944511
AIC			
të dhënat		33,832.12	33,435.88
logaritmi i të dhënave	3918.928	4,201.284	3,904.642
rrënja katrore e të dhënave	16,988.89	17,207.02	16,812.96
BIC			
të dhënat		33,842.55	33,446.31
logaritmi i të dhënave	3,929.357	4,211.713	3,915.071
rrënja katrore e të dhënave	16,999.32	17,217.45	16,823.39

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2008, është sërisht ai **lognormal**.

Viti 2009



Figurë 1.24: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2009

Tabelë 1.26: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2009

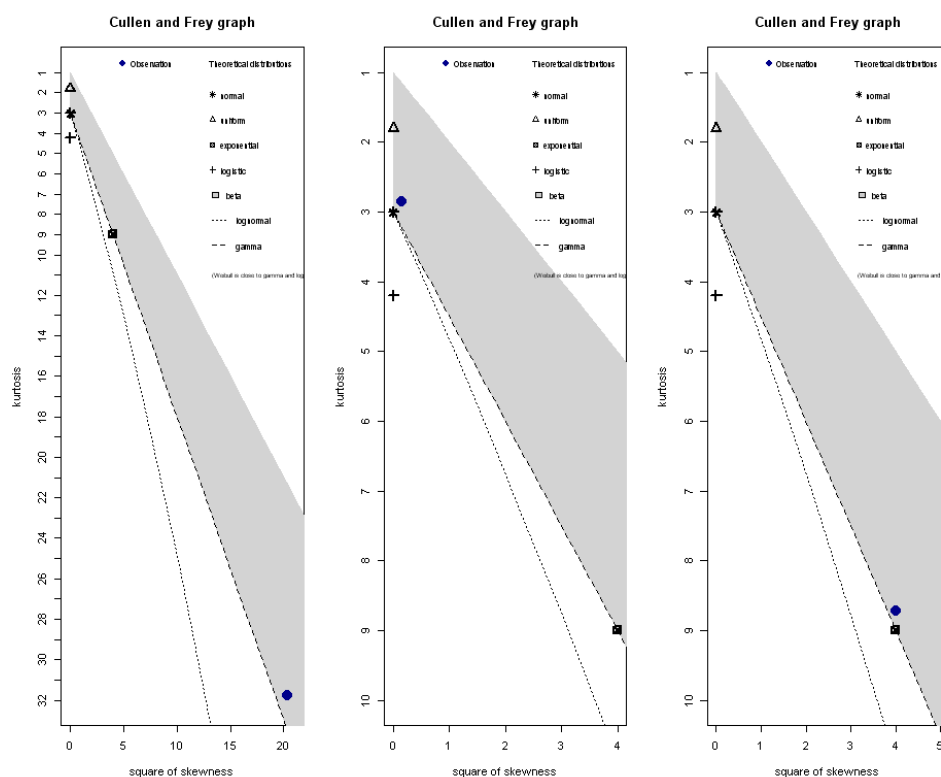
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	4,208	1,520,000	49,666.4	96,067.21	143,492	4.510931	31.75265
Logaritmi i të dhënave	8.344743	14.23422	10.81308	10.88556	1.033494	0.376074	2.845338
Rrënja katrore e të dhënave	64.8691	1,232.883	222.8596	266.1689	158.8611	2.002619	11.75212

Tabelë 1.27: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2009

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia
Weibull	9.126	9.097	-20,253.55	10.591	11.366	-2,482.33	1.825	301.671	-10,282.66
Gamma				112.48	10.333	-2,343.23	3.695	0.014	-10,161.15
	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia
Lognormal	10.886	1.033	-20,047.85	2.383	0.094	-2,388.626	5.443	0.517	-10,076.97

Nga Figura 1.24 dhe Tabela 1.26, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

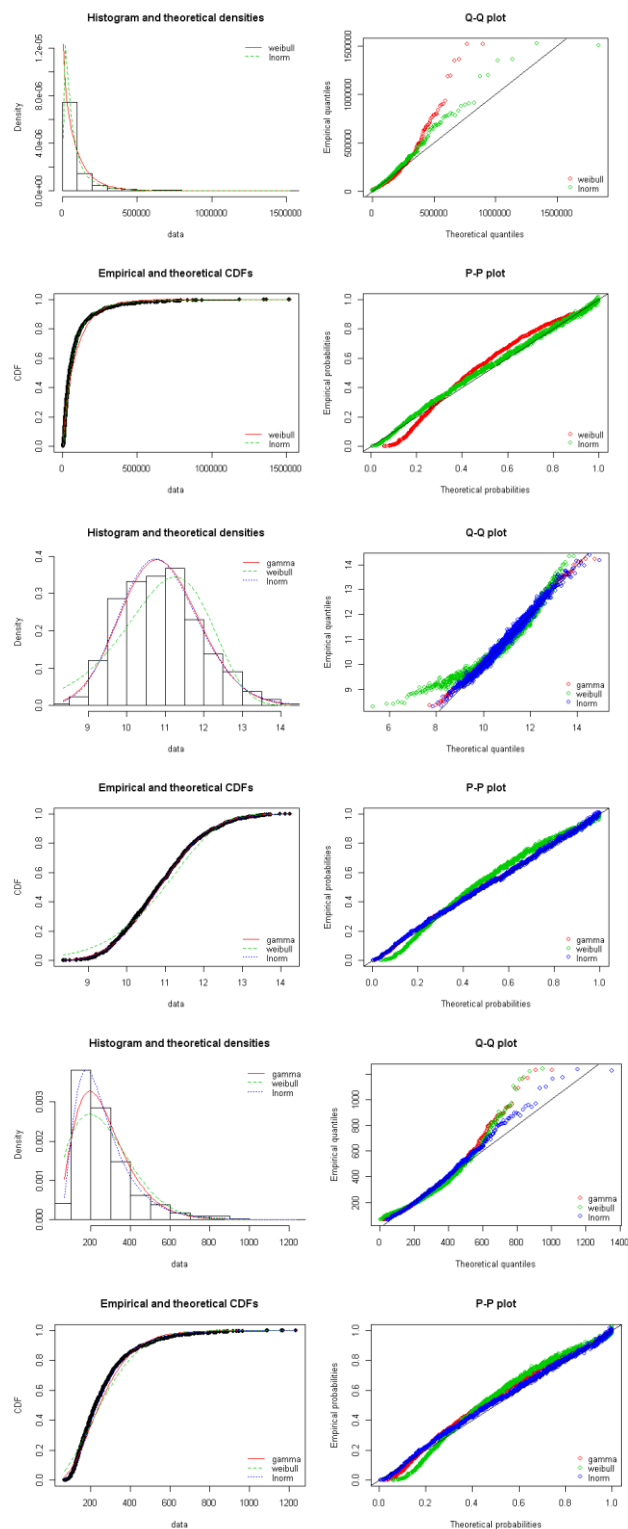
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.25, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjeve lognormale e beta.



Figurë 1.25: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2009 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikatat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikatat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.28) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona. Këto teste janë të mundshme vetëm për parametrat e vlerësuar me metodën e përgjasisë maksimale.



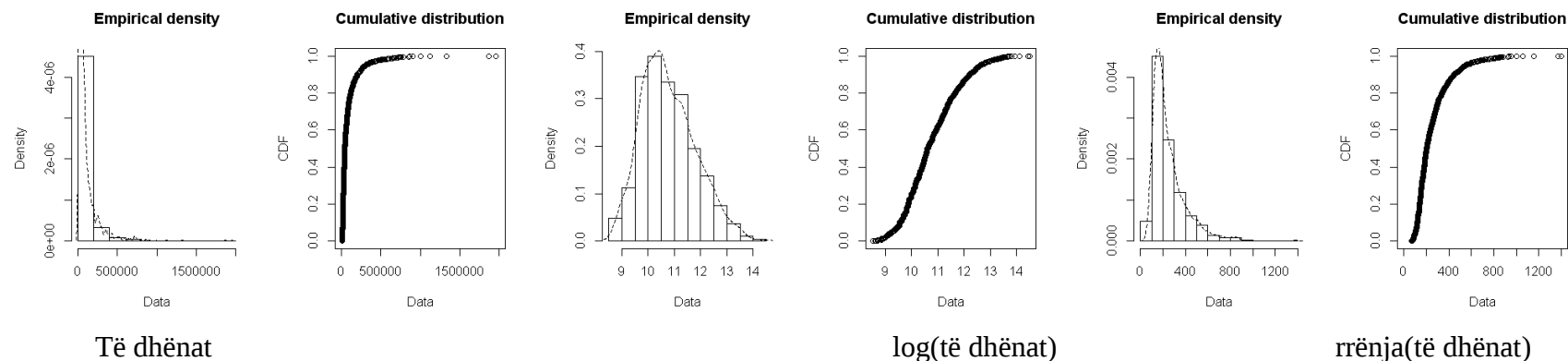
Figurë 1.26:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2009 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave).

Tabelë 1.28: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.0970104	0.03653282
logaritmi i të dhënave	0.03166006	0.07501345	0.02964369
rrënja katrore e të dhënave	0.0663697	0.09699728	0.03653282
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		4.9988857	0.57080723
logaritmi i të dhënave	0.27518918	3.05619657	0.19566273
rrënja katrore e të dhënave	2.5326604	5.00928417	0.57080723
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		34.1137383	4.12139609
logaritmi i të dhënave	2.05565475	21.70756618	1.45270304
rrënja katrore e të dhënave	16.2222626	34.15282646	4.12139609
AIC			
të dhënat		40,511.09	40,099.7
logaritmi i të dhënave	4,690.466	4,968.651	4,681.252
rrënja katrore e të dhënave	20,326.31	20,569.32	20,157.93
BIC			
të dhënat		40,521.88	40,110.48
logaritmi i të dhënave	4,701.253	4,979.438	4,692.038
rrënja katrore e të dhënave	20,337.09	20,580.11	20,168.72

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2009, është sërisht ai **lognormal**.

Viti 2010



Figurë 1.27: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2010

Tabelë 1.29: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2010

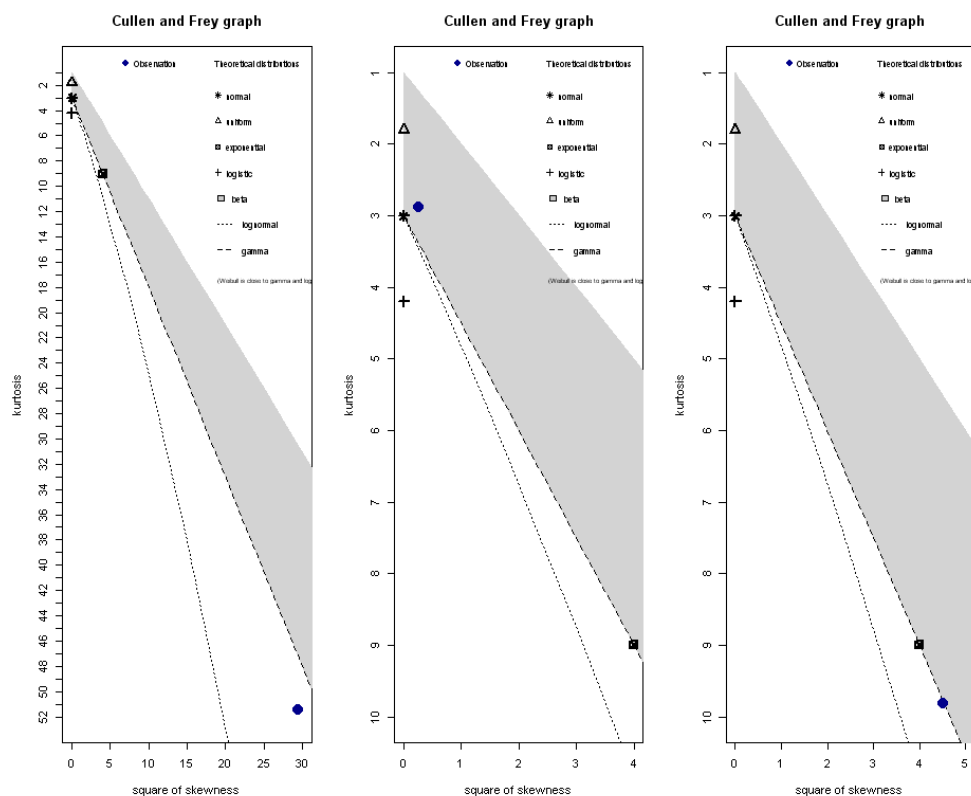
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	5,000	1,960,000	41,000	87,375.03	137,080.7	5.427861	51.4333
Logaritmi i të dhënave	8.517193	14.48846	10.62133	10.77615	1.0285	0.503795	2.887202
Rrënja katrore e të dhënave	70.71068	1,400	202.4846	252.3683	153.9447	2.125786	9.812505

Tabelë 1.30: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2010

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	0.898	81788.5	-21,366.92	10.36	11.26	-2,650.84	1.796	286.074	-10,858.56
Gamma				112.23	10.41	-2,476.21	3.659	0.014	-10,719.99
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.766	1.028	-21,121.17	2.373	0.094	-2,467.62	5.388	0.514	-10,612.82

Nga Figura 1.27 dhe Tabela 1.29, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

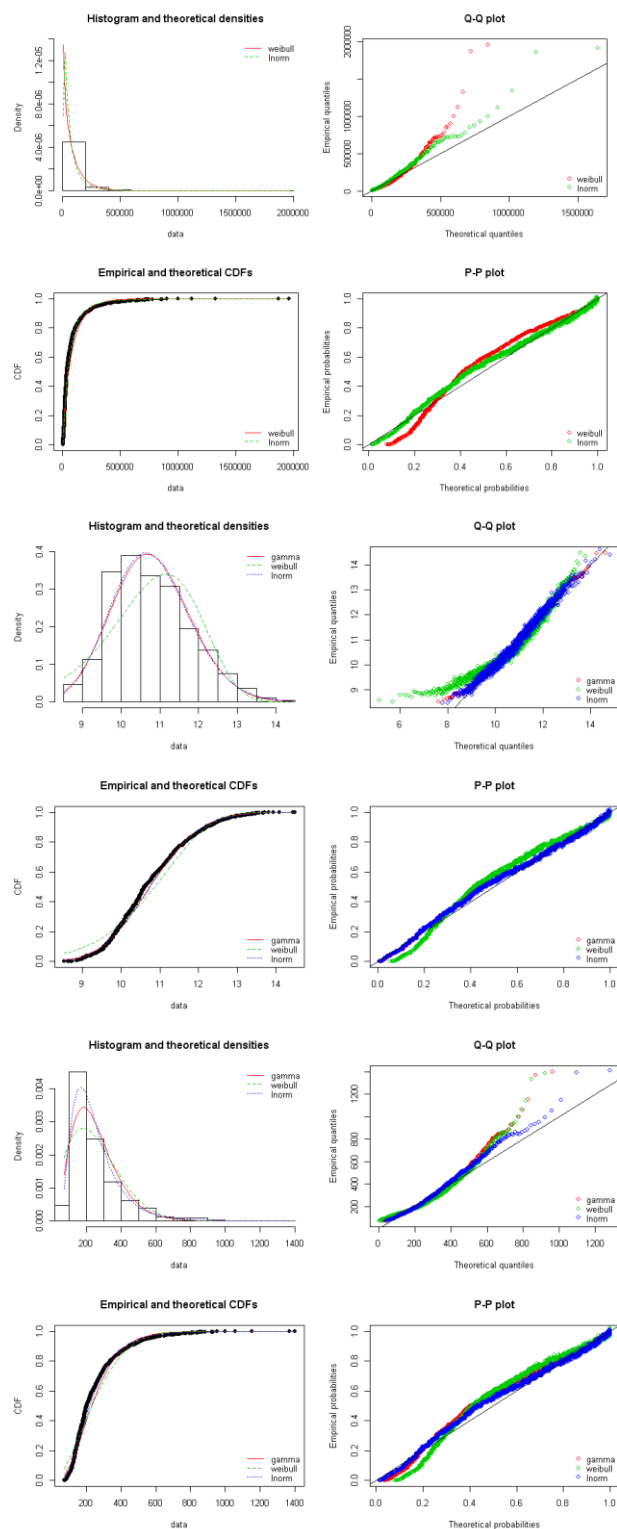
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.28, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjeve lognormale e beta



Figurë 1.28: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2010 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.31) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



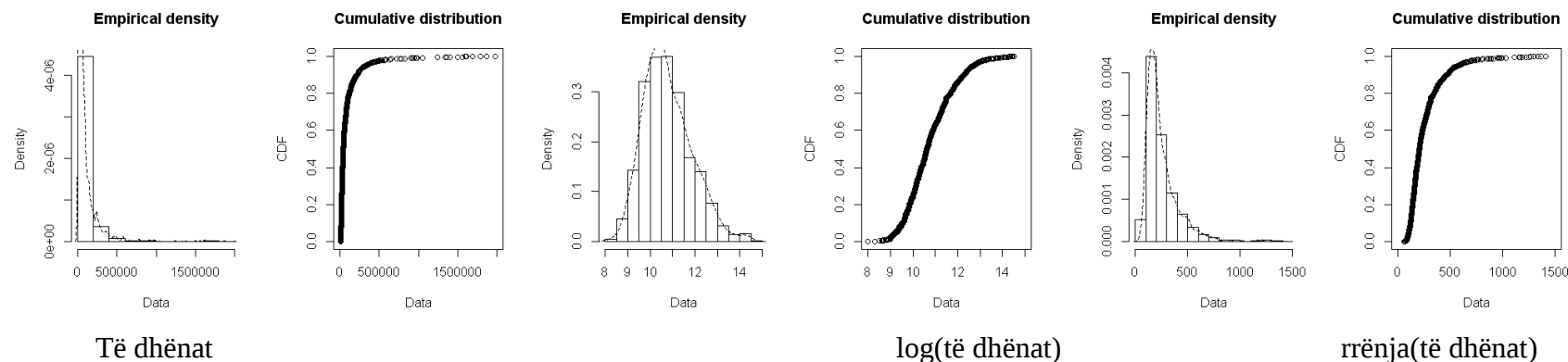
Figurë 1.29:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2010 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave)

Tabelë 1.31: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.1056863	0.06814192
logaritmi i të dhënave	0.0568086	0.08766584	0.05101833
rrënja katrore e të dhënave	0.09762852	0.1055065	0.06814192
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		7.2432853	1.68380797
logaritmi i të dhënave	1.0611246	4.94682061	0.81913805
rrënja katrore e të dhënave	4.5841931	7.2595152	1.68380797
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		46.0051902	9.90066398
logaritmi i të dhënave	6.1457668	31.83291703	4.70627587
rrënja katrore e të dhënave	26.59555555	46.0449266	9.90066398
AIC			
të dhënat		42,737.83	42,246.34
logaritmi i të dhënave	4,956.428	5,305.677	4,939.235
rrënja katrore e të dhënave	21,443.98	21,721.13	21,229.64
BIC			
të dhënat		42,748.74	42,257.25
logaritmi i të dhënave	4,967.338	5,316.586	4,950.144
rrënja katrore e të dhënave	21,454.89	21,732.04	21,240.55

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2010, është sërisht ai **lognormal**

Viti 2011



Figurë 1.30: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2011

Tabelë 1.32: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2011

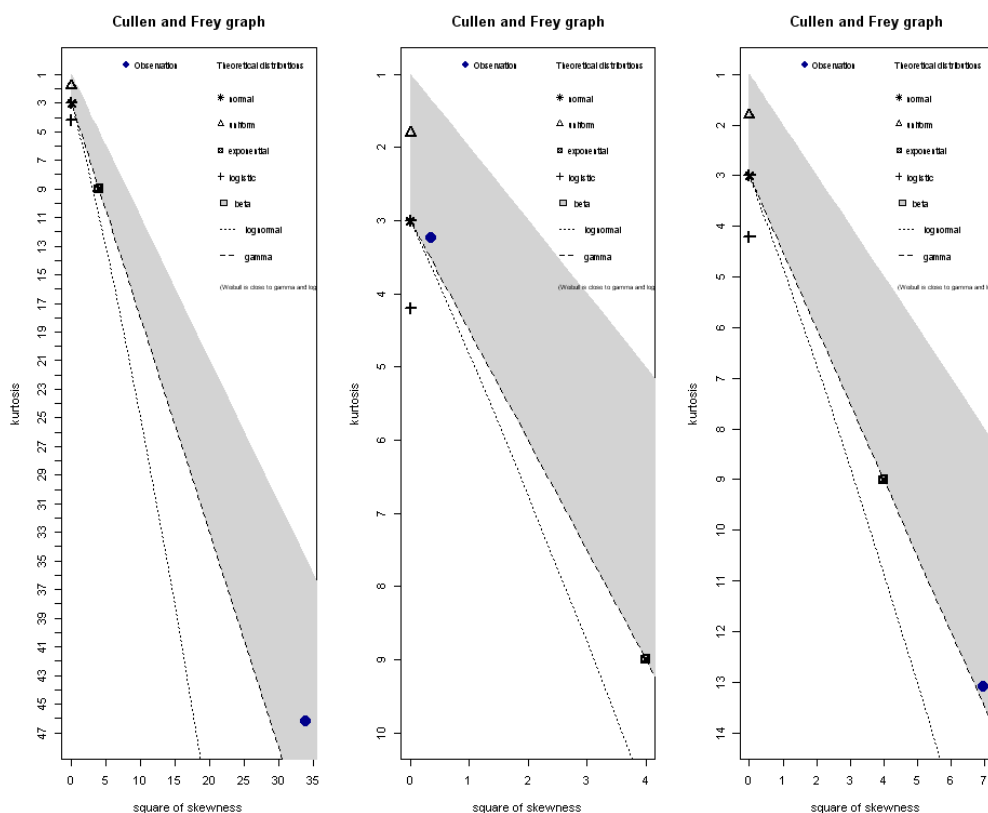
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	3,000	1,982,917	42,000	95,970.8	180,942	5.818202	46.17478
Logaritmi i të dhënave	8.006368	14.50008	10.64542	10.78003	1.071844	0.5915795	3.239977
Rrënja katrore e të dhënave	54.77226	1,408.161	204.939	256.996	173.0451	2.636337	13.09773

Tabelë 1.33: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2011

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	8.396	8.811	-17,951.54	9.737	11.281	-2290.306	1.667	290.42	-9,166.49
Gamma				103.95	9.643	-2,124.814	3.330	0.013	-9,042.36
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.78	1.071	-17,714.99	2.373	0.098	-2,116.13	5.390	0.536	-8,930.91

Nga Figura 1.30 dhe Tabela 1.32, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

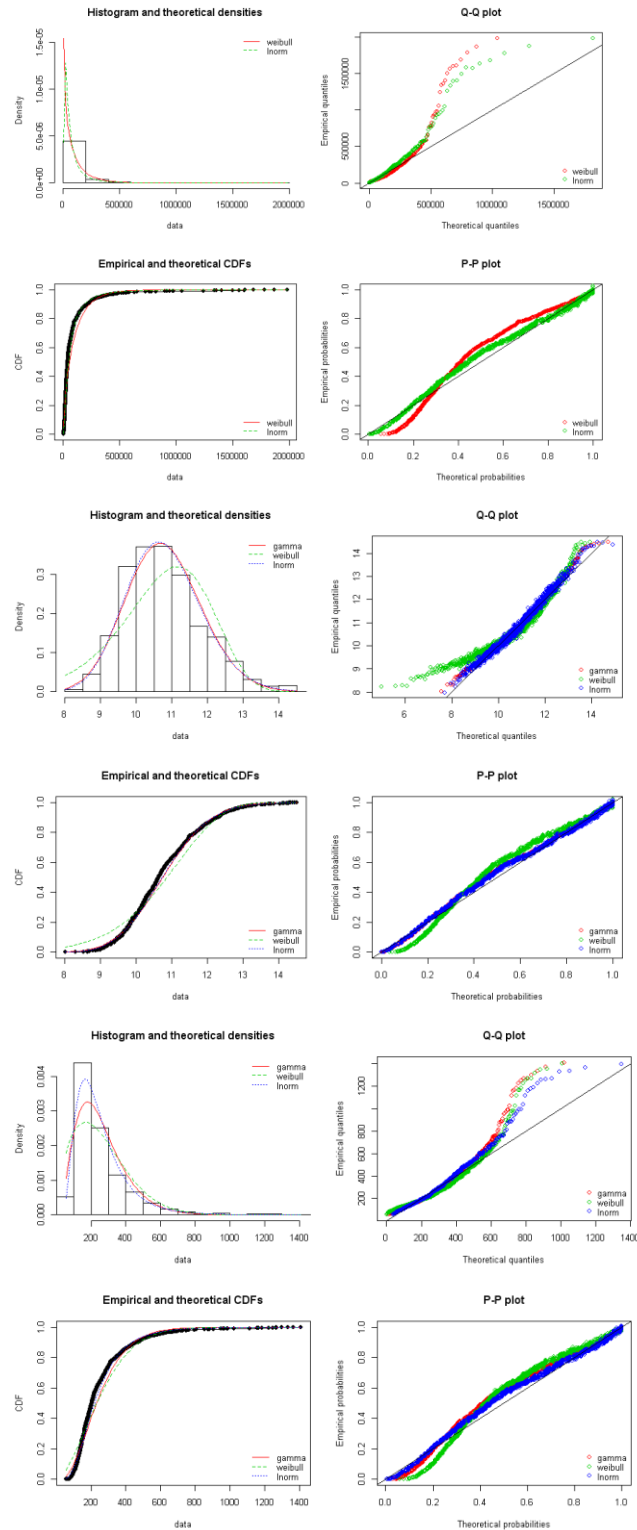
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.31, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjeve lognormale e beta



Figurë 1.31: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2011 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave)

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.34) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



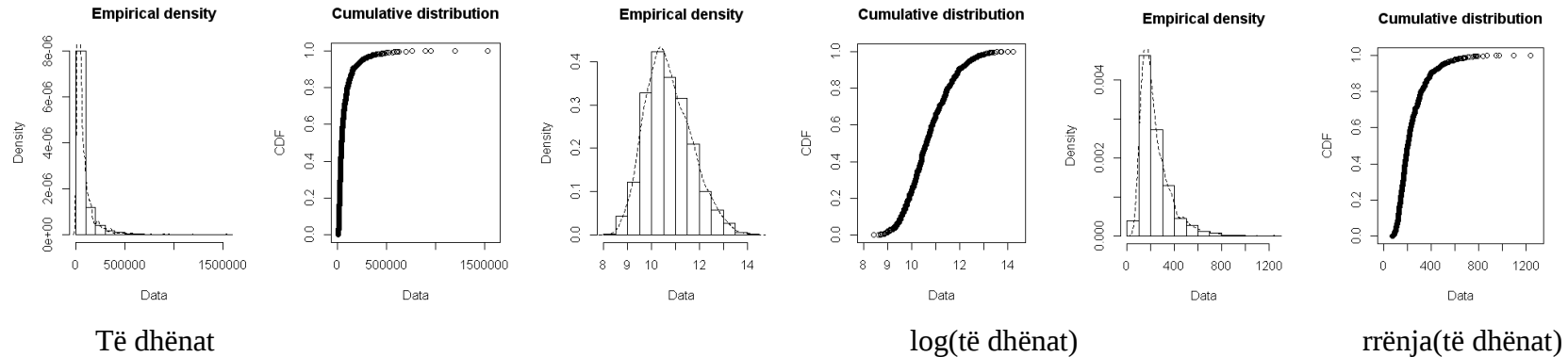
Figurë 1.32:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2011 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave).

Tabelë 1.34: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.1185775	0.06688002
logaritmi i të dhënave	0.05383658	0.09403698	0.04721194
rrënja katrore e të dhënave	0.1050775	0.1157275	0.06688002
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		8.2219302	1.52416114
logaritmi i të dhënave	0.90864018	4.7291739	0.66560874
rrënja katrore e të dhënave	4.5224813	7.1013266	1.52416114
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		48.392022	8.85674072
logaritmi i të dhënave	5.19569784	30.22650377	3.77132251
rrënja katrore e të dhënave	25.7678852	44.6305918	8.85674072
AIC			
të dhënat		35,906.84	35,433.98
logaritmi i të dhënave	4,253.628	4,584.613	4,236.261
rrënja katrore e të dhënave	18,088.73	18,336.98	17,865.81
BIC			
të dhënat		35,917.39	35,444.53
logaritmi i të dhënave	4,264.178	4,595.163	4,246.811
rrënja katrore e të dhënave	18,099.28	18,347.53	17,876.36

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2011, është sërish ai **lognormal**.

Viti 2012



Figurë 1.33: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2012

Tabelë 1.35: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2012

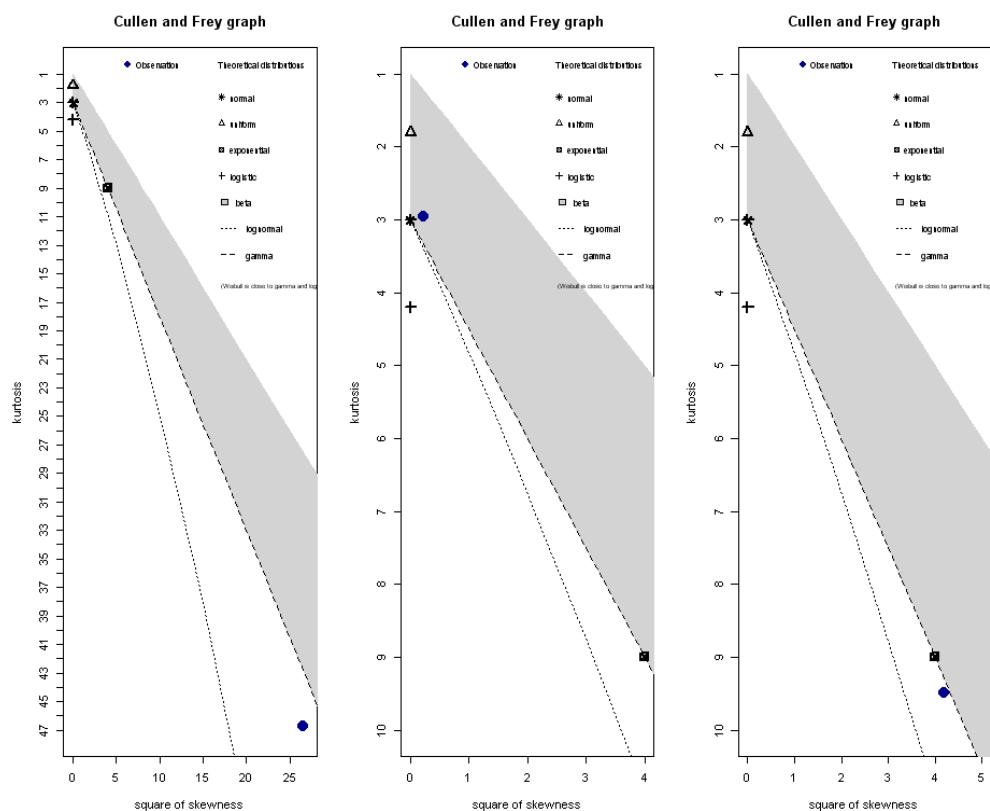
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	4,440	1536920	40,000	75,462.63	107,098.2	5.150263	46.74867
Logaritmi i të dhënave	8.39841	14.24529	10.59663	10.7187	0.9534805	0.4661356	2.952131
Rrënja katrore e të dhënave	66.63332	1,239.726	200	240.0841	133.5474	2.044631	9.483485

Tabelë 1.36: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2012

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	9.690	7.418	-17,220.3	11.088	11.167	-2,055.24	1.937	272.314	-8,698.38
Gamma				128.78	12.015	-193.86	4.269	0.018	-8,576.64
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.719	0.953	-17,022.23	2.368	0.002	-1,908.07	5.359	0.477	-8,500.31

Nga Figura 1.33 dhe Tabela 1.35, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

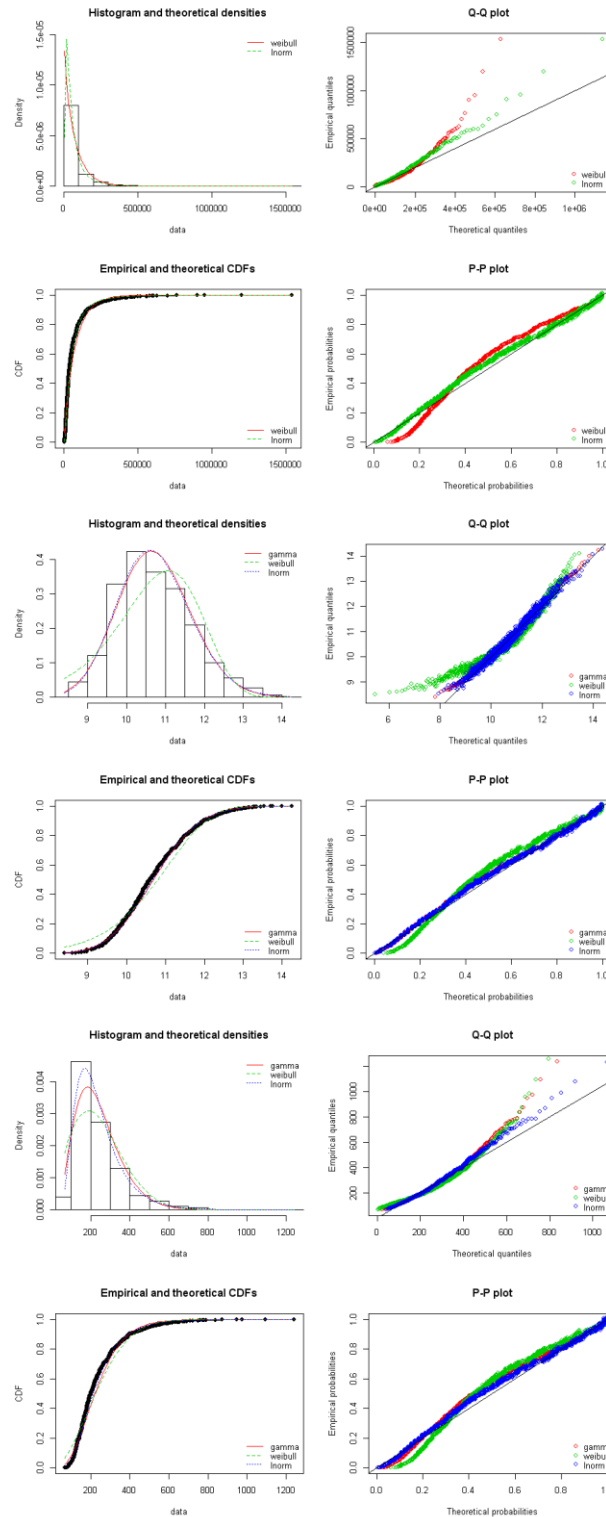
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.34, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre i afrohen shpërndarjes gamma e asaj beta



Figurë 1.34: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2012 (përkatësisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave)

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikatat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikatat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.37) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



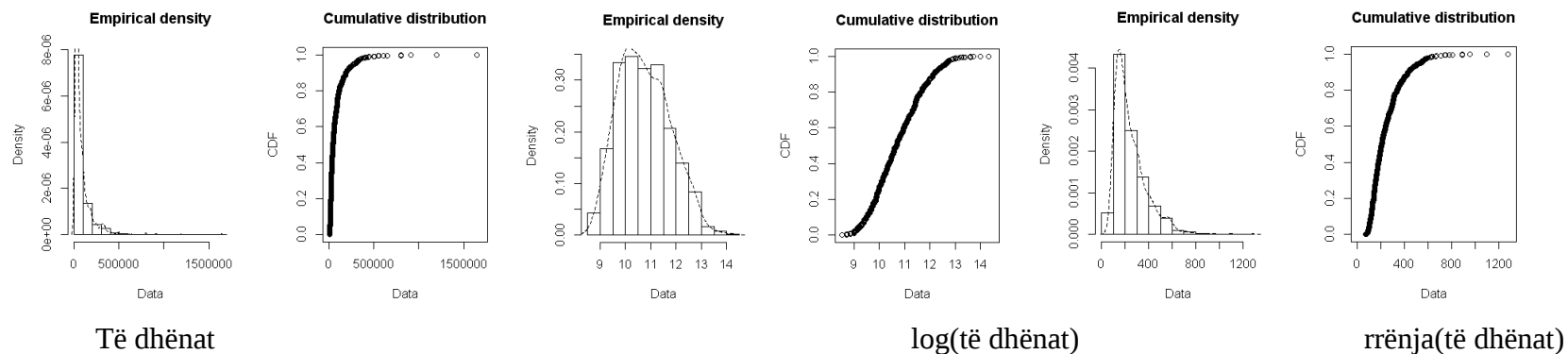
Figurë 1.35: Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2012 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave)

Tabelë 1.37: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.1050967	0.05724792
logaritmi i të dhënave	0.04675244	0.08683877	0.04127796
rrënja katrore e të dhënave	0.08417244	0.1052119	0.05724792
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		5.5245384	1.00038269
logaritmi i të dhënave	0.58311423	3.74333179	0.42291841
rrënja katrore e të dhënave	2.98828843	5.5179448	1.00038269
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		35.5217241	5.93984284
logaritmi i të dhënave	3.41237355	24.44094785	2.46350303
rrënja katrore e të dhënave	17.54275049	35.5091475	5.93984284
AIC			
të dhënat		34,444.6	34,048.45
logaritmi i të dhënave	3,831.716	4,114.482	3,820.134
rrënja katrore e të dhënave	17,157.27	17,400.77	17,004.62
BIC			
të dhënat		34,455.1	34,058.95
logaritmi i të dhënave	3,842.216	4,124.982	3,830.634
rrënja katrore e të dhënave	17,167.77	17,411.27	17,015.12

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2012, është sërisht ai **lognormal**.

Viti 2013



Figurë 1.36: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2013

Tabelë 1.38: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2013

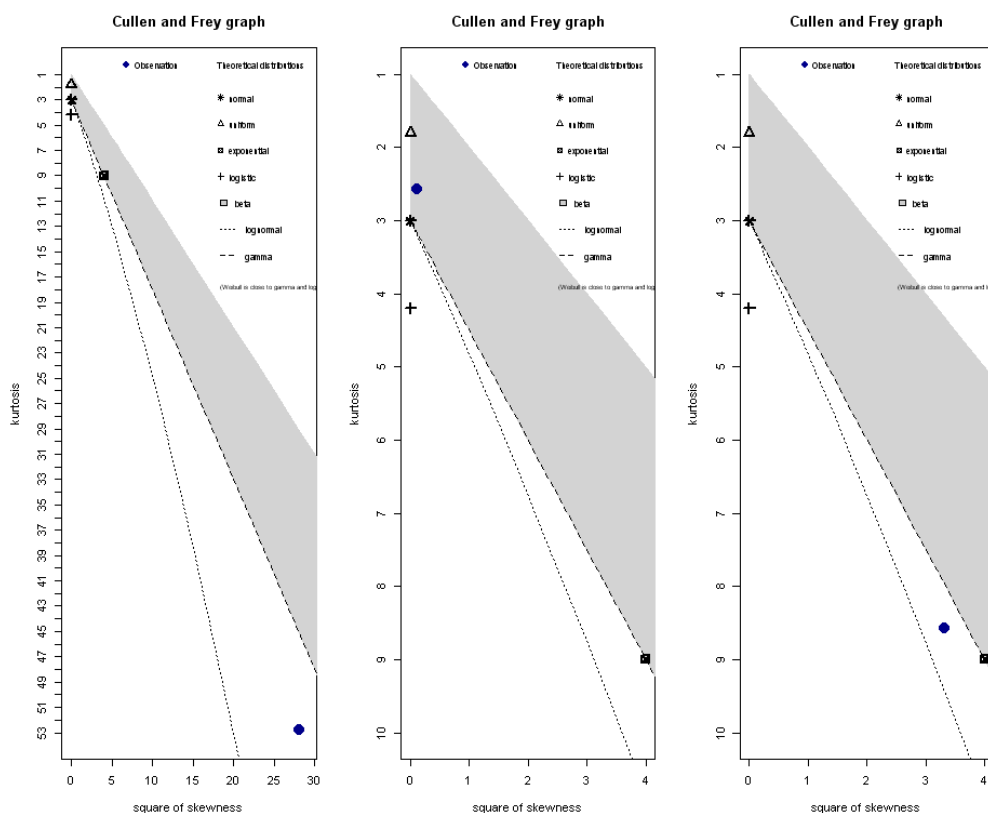
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	5,000	1,643,967	43,000	80,579.1	112,138.4	5.305532	52.79179
Logaritmi i të dhënave	8.517193	14.31262	10.66896	10.75292	1.008899	0.34089	2.576421
Rrënja katrore e të dhënave	70.71068	1282.173	207.3644	247.0327	139.8981	1.818935	8.569637

Tabelë 1.39: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2013

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia	Forma	Shkalla	Logfqinjësia
Weibull	9.624	8.251	-13,697.33	10.877	11.222	-1,666.43	1.907	280.236	-6,934.67
Gamma				115.08	10.702	-1,580.11	3.915	0.016	-6,856.85
	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfqinjësia
Lognormal	10.753	1.008	-13,568.82	2.371	0.093	-1,577.07	5.376	0.504	-6,807.28

Nga Figura 1.36 dhe Tabela 1.38, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

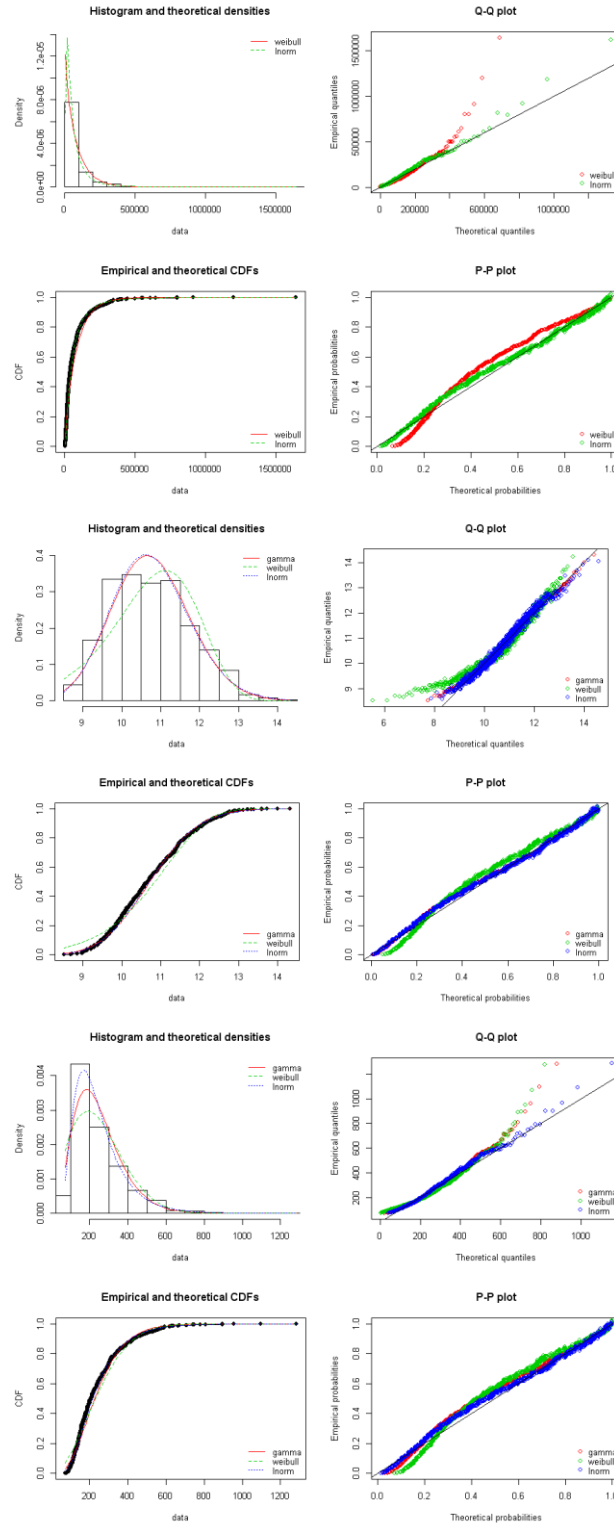
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.37, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre nuk i afrohen ndonjëres prej shpërndarjeve



Figurë 1.37: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2013 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.40) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



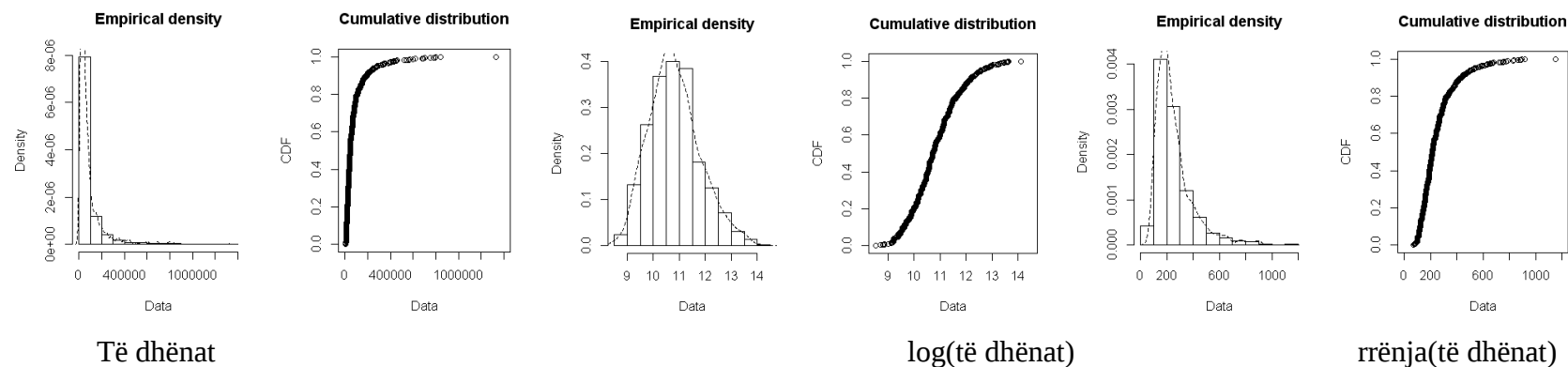
Figurë 1.38: Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2013 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave).

Tabelë 1.40: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.09942364	0.05342655
logaritmi i të dhënave	0.04828552	0.07458024	0.04549046
rrënja katrore e të dhënave	0.07728451	0.09620873	0.05342655
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		4.13951016	0.71954328
logaritmi i të dhënave	0.50718483	2.01166805	0.43772261
rrënja katrore e të dhënave	1.86022371	3.07392714	0.71954328
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		24.45154776	4.45318417
logaritmi i të dhënave	3.0998303	13.85404507	2.66657558
rrënja katrore e të dhënave	11.32633393	20.76491627	4.45318417
AIC			
të dhënat		27,398.66	27,141.65
logaritmi i të dhënave	3,164.221	3,336.853	3,158.134
rrënja katrore e të dhënave	13,717.69	13,873.34	13,618.56
BIC			
të dhënat		27,408.69	27,151.68
logaritmi i të dhënave	3,174.252	3,346.885	3,168.166
rrënja katrore e të dhënave	13,727.72	13,883.37	13,628.59

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2013, është sërish ai **lognormal**.

Viti 2014



Figurë 1.39: Densiteti empirik dhe shpërndarja kumulative e të dhënave gjatë vitit 2014

Tabelë 1.41: Statistika përshkruese për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2014

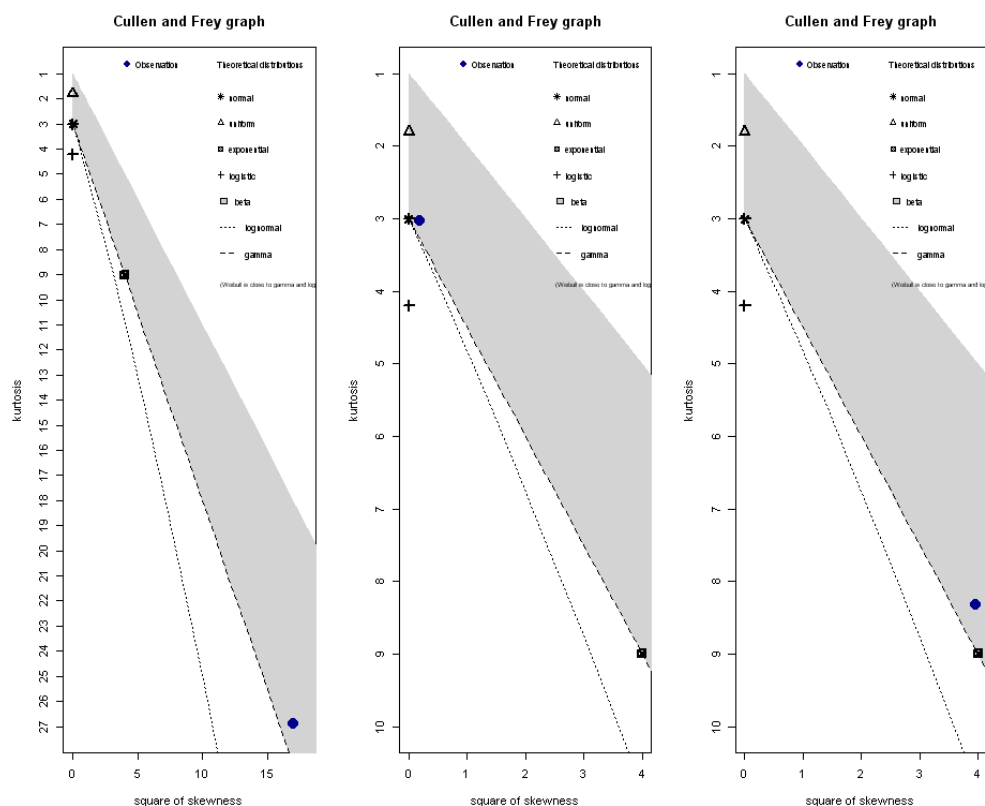
	Min	Maks	Mediana	Mesatarja	Sd	Lëmueshmëria	Kurtosis
Të dhënat	5,000	1,329,905	45,000	85,043.27	120,261.3	4.129834	26.89835
Logaritmi i të dhënave	8.51719	14.1006	10.7144	10.81926	0.972955	0.4376545	3.029552
Rrënja katrore e të dhënave	70.7107	1,153.22	212.132	253.6636	143.9462	1.988921	8.318575

Tabelë 1.42: Treguesit kryesor të modeleve probabilitare për vlerat e dëmeve pasurore gjatë vitit 2014

	Të dhënat			Logaritmi i të dhënave			Rrënja e të dhënave		
Shpërndarja	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia	Forma	Shkalla	Logfquinjësia
Weibull	9.534	8.282	-11,385.30	11.000	11.276	-1,362.40	1.906	0.044	-5,758.54
Gamma				125.82	11.629	-1,272.60	4.116	0.016	-5,680.92
	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia	Meanlog	Sdlog	Logfquinjësia
Lognormal	10.819	0.972	-11,257.84	2.377	0.089	-1,269.35	5.410	0.486	-5,631.18

Nga Figura 1.39 dhe Tabela 1.41, vërehet anim në të djathtë nëse analizojmë të dhënat origjinale apo rrënjët e tyre, ndërkohë që kemi simetri kur analizojmë të dhënat e logaritmuara

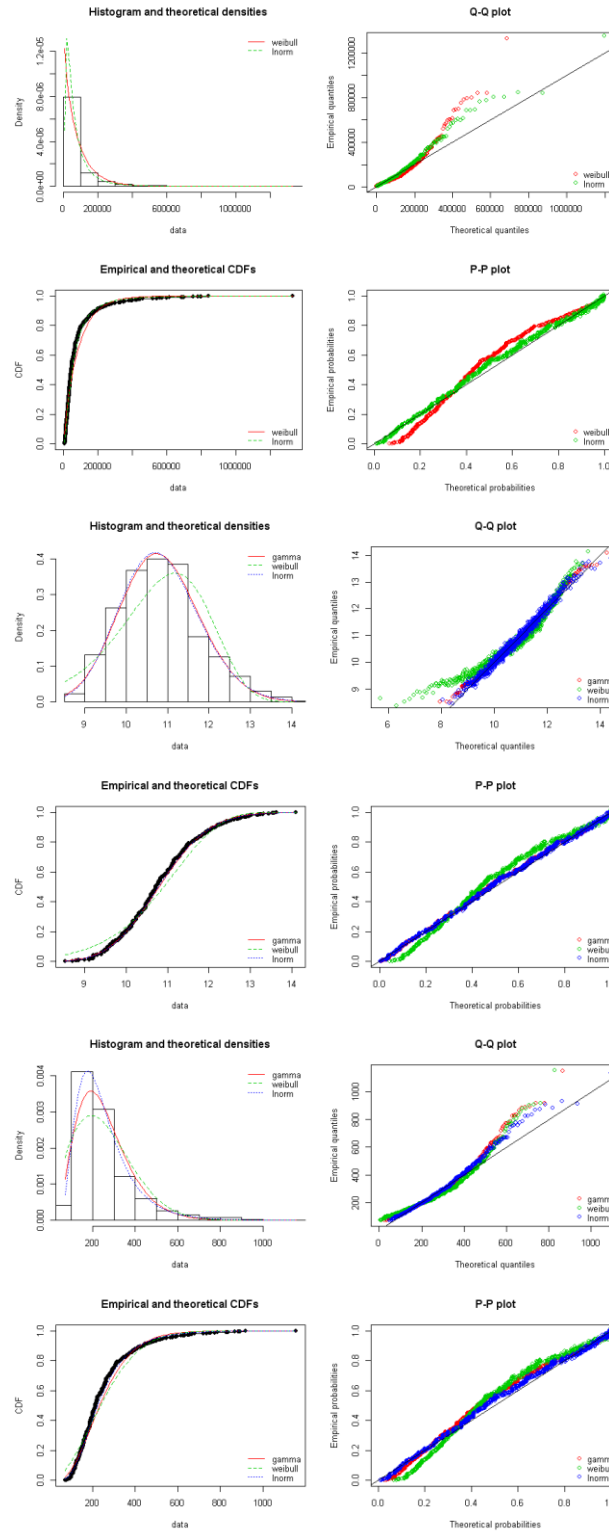
Më tej po të shohim grafikun Cullen and Frey sipas Figurës 1.40, pasi analizojmë shpërndarje të ndryshme të cilat mund t'i përshtaten të dhënave, vërejmë se logaritmet e të dhënave bien brenda shpërndarjeve beta lognormale, normale dhe gamma ndërkohë që të dhënat origjinale dhe rrënjët e tyre nuk i afrohen ndonjëres prej shpërndarjeve



Figurë 1.40: Grafi Cullen and Frey për përshtatshmërinë e pjerrësisë dhe anueshmërisë të të dhënave të dëmeve pasurore gjatë vitit 2014 (përkatesisht të dhënat origjinale, logaritmi i të dhënave, rrënja e të dhënave).

Për të analizuar më qartë se cila nga modelet probabilitare i përshtatet të dhënave tona, u krye analiza për shpërndarjet për të cilat u arrit të vlerësohen parametrat me metodën e përgjasisë maksimale. Më poshtë paraqiten histograma e densitetet teorike, $q - q$ plot, $p - p$ plot, e shpërndarja empirike teorike si edhe statistikatat për testet e ndryshme, në mënyrë për të arritur një rezultat lidhur me gjetjen e një modeli probabilitar për shpërndarjen e të dhënave

Kontrolli i hipotezave është kryer duke përdorur statistikatat Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling (Tabela 1.43) duke përdorur paketën fitdistrplus në R me supozimin e parametrave të njohura. Vlerat kritike me një nivel rëndësie $\alpha = 0.05$ janë përdorur për refuzimin ose jo shpërndarjet tona.



Figurë 1.41:Histograma e densitetet teorike, q – q plot, p – p plot, funksioni empirik e shpërndarjet teorike për të dhënat individuale të dëmeve pasurore gjatë vitit 2014 (të dhënat origjinale, logaritmet e të dhënave e rrënjët e të dhënave)

Tabelë 1.43: Vlerat e statistikave për disa teste

	Gamma	Weibull	Lognormale
Statistika Kolmogorov-Smirnov			
të dhënat		0.10559	0.05727
logaritmi i të dhënave	0.04545	0.089824	0.039427
rrënja katrore e të dhënave	0.090945	0.105411	0.05727
Statistika Cramer-von Mises			
të dhënat		3.697114	0.47246
logaritmi i të dhënave	0.231828	2.440626	0.149613
rrënja katrore e të dhënave	1.829669	3.689546	0.47246
Statistika Anderson-Darling			
të dhënat		23.61194	3.0485
logaritmi i të dhënave	1.538051	15.90899	1.022318
rrënja katrore e të dhënave	11.00059	23.59018	3.0485
AIC			
të dhënat		22,774.59	22,519.68
logaritmi i të dhënave	2,549.194	2,728.797	2,542.703
rrënja katrore e të dhënave	11,365.83	11,521.07	11,266.16
BIC			
të dhënat		22,784.25	22,529.33
logaritmi i të dhënave	2,558.847	2,738.45	2,552.356
rrënja katrore e të dhënave	11,375.48	11,530.73	11,275.81

Pra në seicilën nga analizat e kryera (testi grafik, kontrolli i hipotezave kriteret e informacionit), rezulton se modeli probabilitar që i përshtatet më mirë dëmeve pasurore gjatë vitit 2014, është sërish ai lognormal.

1.4 Përfundime

Dëmet e shoqërive të sigurimit mund të modelohen nëpërmjet shpërndarjeve diskrete apo të vazhdueshme bazuar në karakteristikat e tyre. Për gjetjen e modelit më të përshtatshëm mund të përdoren metoda grafike, kriteret e informacionit si edhe kontrole të hipotezave. Më tej rezultatet për ecurinë e dëmeve mund të përdoren si në lidhje me tarifimin e produkteve të reja ashtu edhe në rishikimin e tarifave aktuale dhe në analizën e aftësisë paguese të shoqërisë së sigurimit. Kjo lloj analize megjithëse e sugjeruar në masë në literaturën aktuariale, ende nuk përdoret nga operatorët e tregut shqiptar të sigurimit.

Sigurimi MTPL zë vendin kryesor në tregun shqiptar të sigurimeve, ndaj ecuria e këtij portofoli ndikon në mënyrë të drejtëpërdrejtë në aftësinë paguese të shoqërive të sigurimit në vecanti si edhe të vet tregut në tërësi. Për këtë arsye janë analizuar në mënyrë të detajuar dëmet e këtij portofoli.

Numri i Dëmeve (frekuenca): Për gjetjen dhe krahasimin e modeleve të përshtashme për shpërndarjen e frekuencës së dëmeve pasi u morr një përmbledhje e statistikave kryesore, u ndërtua histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave. Më pas nëpërmjet programit fitdistr në R u analizuan parametrat për dy nga shpërndarjet kryesore: shpërndarja poisson dhe shpërndarja binomiale negative, si dhe u analizua në mënyrë grafike se cila nga këto dy shpërndarje i përshtatet më mirë të dhënave të ashpërsisë së dëmeve, nëpërmjet histogramës dhe shpërndarjeve teorike, Q-Q plot, P-P plot, dhe shpërndarjes empirike. Më tej u analizuan kriteret e informacionit AIC dhe BIC si dhe u krye kontrolli i hipotezave. Duke qenë se vlerësuesi i përgjasisë maksimale nuk mund të përdorej për vlerësimin e parametrave në shpërndarjen e frekuencës së dëmeve, u përdor metoda e momenteve, metodë e cila konsiderohet si një metodë e mirë në pamundësi të përdorimit të metodës së përgjasisë maksimale. Nga secila prej analizave të kryera u arrit n konkluzionin se modeli më i përshtatshëm për shpërndarjen e frekuencës së dëmeve duket të jetë modeli **binomial negativ**, megjithëse në literaturën aktuale paraqitet modeli poisson – ian si modeli i hasur më shpesh në modelimin e numrit të dëmeve.

Vlera e dëmeve (ashpërsia): Për të marrë një analizë sa më të mirë lidhur me ashpërsinë e dëmeve janë kryer analizat si duke konsideruar vlerat e dëmeve pavarësisht llojit të tyre, ashtu edhe bazuar në faktin nëse janë dëme pasurore apo dëme shëndetësor. Për më tepërshtë analizuar ashpërsia e dëmeve pasurore në mënyrë të vecuar për secilin nga vitet e periudhës 2005 – 2014

Ashpërsia e dëmeve pavarësisht llojit të tyre: Për gjetjen dhe krahasimin e modeleve të përshtashme për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve pasi u morr një përmbledhje e statistikave kryesore, u ndërtua histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave. Më pas nëpërmjet programit fitdistr në R u analizuan parametrat për dy nga shpërndarjet kryesore: shpërndarja weibull dhe shpërndarja lognormale (u provua edhe shpërndarja gamma por u arrit në konkluzion se nuk ishte aspak e përshtatshme për ashpërsinë e dëmeve megjithëse në literaturën aktuale sugjerohet si një nga shpërndarjet më të përdorura), si dhe u analizua në mënyrë grafike se cila nga këto dy shpërndarje i përshtatet më mirë të dhënave të ashpërsisë së dëmeve, nëpërmjet histogramës dhe shpërndarjeve teorike, Q-Q plot, P-P plot, dhe shpërndarjes empirike. Më tej u analizuan kriteret e informacionit AIC dhe BIC si dhe u krye kontrolli i hipotezave. Kontrolli i hipotezave u krye duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling me një nivel rëndësie prej $\alpha = 0.05$. Nga secila prej analizave të kryera u arrit n konkluzionin se modeli më i përshtatshëm për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve duket të jetë modeli **lognormal**.

Ashpërsia e dëmeve e ndarë në dëme trupore e dëme pasurore: Duke qenë se dëmet trupore dhe pasurore kanë karakteristika të ndryshme midis tyre, megjithëse trajtimi pa i vecuar mund të japë një paraqitje të përgjithshme të situatës shpërndarëse të tyre, mund të studiohen edhe në mënyrë të vecuar duke konsideruar edhe rastin kur ky vecim është i mundshëm dhe volumi i të

dhënave e lejon këtë analizë. Për gjetjen dhe krahasimin e modeleve të përshtatshme për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve në mënyrë të vecuar për dëmet trupore e pasurore pasi u morr një përmbledhje e statistikave kryesore, u ndërtua histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave. Më pas nëpërmjet programit fitdistr në R u analizuan parametrat për dy nga shpërndarjet kryesore: shpërndarja weibull dhe shpërndarja lognormale (u provua edhe shpërndarja Gamma por u arrit në konkluzion se nuk ishte aspak e përshtatshme për ashpërsinë e dëmeve megjithëse në literaturën aktuale sugjerohet si një nga shpërndarjet më të përdorura), si dhe u analizua në mënyrë grafike se cila nga këto dy shpërndarje i përshtatet më mirë të dhënave të ashpërsisë së dëmeve pasurore dhe trupore, nëpërmjet histogramës dhe shpërndarjeve teorike, Q-Q plot, P-P plot, dhe shpërndarjes empirike. Më tej u analizuan kriteret e informacionit AIC dhe BIC si dhe u krye kontrolli i hipotezave. Kontrolli i hipotezave u krye duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling me një nivel rëndësie prej $\alpha = 0.05$. Nga secila prej analizave të kryera u arrit në konkluzionin se modeli më i përshtatshëm për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve pasurore duket të jetë modeli **lognormal** dhe për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve trupore duket të jetë modeli **weibull**. Pra sic vihet re megjithëse në pamje të parë dëmet duken të shpërndara me shpërndarje weibull nëse kryejmë ndarjen e tyre në dëme trupore e pasurore, vërejmë se shpërndahen në mënyra të ndryshme.

Ashpërsia e dëmeve pasurore për secilin prej viteve të periudhës 2005 - 2014: Duke qenë dëmet trupore megjithëse në vlerë janë shumë më të larta se dëmet pasurore, volumi i tyre është shumë më i ulët, ndaj nuk mund të kryhet një analizë vletore e tyre. Për këtë arsye janë analizuar në mënyrë vjetorë vetëm dëmet pasurore. Fillimisht janë analizuar vlerat orrigjinale krahasuar me logaritmet dhe rrënjët katrore të tyre. Nga këto të dhëna është vërejtur se vlerat e logaritmuara paraqesin shumë më pak outliers në krahasim me të dhënat orrigjinale e rrënjët katrore të tyre, megjithëse forma ruhet më mirë nëse analizojmë rrënjët katrore të të dhënave. Më tej janë kryer analiza të detajuara si për të dhënat orrigjinale ashtu edhe për logaritmet dhe rrënjët e tyre. Për gjetjen dhe krahasimin e modeleve të përshtatshme për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve pasurore, pasi u morr një përmbledhje e statistikave kryesore, u ndërtua histograma dhe shpërndarja kumulative e të dhënave. Më pas nëpërmjet programit fitdistr në R u analizuan parametrat për dy nga shpërndarjet kryesore: shpërndarja Weibull dhe shpërndarja Lognormale (u provua edhe shpërndarja Gamma por u arrit në konkluzion se nuk ishte aspak e përshtatshme për ashpërsinë e dëmeve pasurore megjithëse në literaturën aktuale sugjerohet si një nga shpërndarjet më të përdorura), si dhe u analizua në mënyrë grafike se cila nga këto dy shpërndarje i përshtatet më mirë të dhënave të ashpërsisë së dëmeve pasurore, nëpërmjet histogramës dhe shpërndarjeve teorike, Q-Q plot, P-P plot, shpërndarjes empirike si dhe grafit Cullen. Më tej u analizuan kriteret e informacionit AIC dhe BIC si dhe u krye kontrolli i hipotezave. Kontrolli i hipotezave u krye duke përdorur statistikën Kolmogorov – Smirnov, Cramer – von – Mises, e Anderson – Darling me një nivel rëndësie prej $\alpha = 0.05$. Nga secila prej analizave të kryera për secilin prej viteve të periudhës 2005 – 2014 u arrit në konkluzionin se

modeli më i përshtatshëm për shpërndarjen e ashpërsisë së dëmeve pasurore duket të jetë modeli **lognormal** duke e përforcuar edhe më shumë rezultatin e arritur nga analiza e ashpërsisë së dëmeve pa kryer ndarjen në vite të vecanta.

Kapitulli 2. KRIJIMI I NJË METODOLOGJIE PËR PËRLLOGARITJEN E REZERVAVE TEKNIKE TË DËMEVE TË SHOQËRISË SË SIGURIMIT TË JO – JETËS

Një aspekt shumë i rëndësishëm i dëmeve të një shoqërie sigurimi, është dhe mbajtja e përshtatshme e rezervave teknike të dëmeve. Kjo rezervë përfshin dëmet e ndodhura e të raportuara (RBNS) por ende të papaguara si dhe dëmet e ndodhura por ende të paraportuara (IBNR).

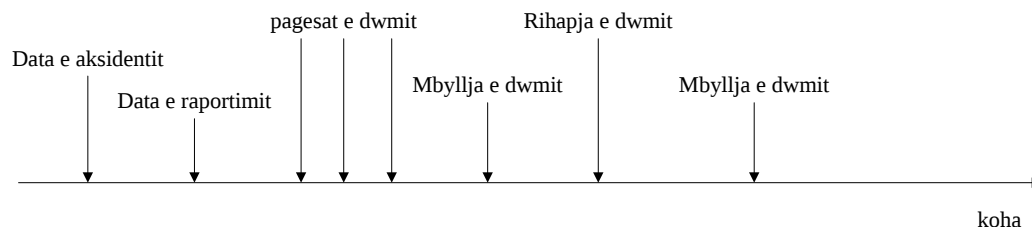
Metodat standarte për llogaritjen e kësaj lloj rezerve janë të ashtuquajturat metoda të shkallëzimit zinxhir. Ndërkohë për të marrë një vlerësim më të mirë të këtyre rezervave mund të përdoren metoda bootstrapping të cilat edhe pse nuk janë përdorur der më tani nga aktuarët në shoqëritë shqiptare të sigurimit japin një alternativë për gjykimin përfundimtar rreth nivelit të rezervave teknike të dëmeve që duhet të ketë shoqëria e sigurimit për përmbushjen e detyrimeve që lindin nga kontratat e sigurimit. [1] [2] [3] [4] [24]

Në paragrafet më poshtëdo të analizohen këto metoda si edhe do të kryhet vlerësimi për rezervën e dëmeve të sigurimit MTPL të shoqërisë siguroese të konsideruar në këtë kërkim.

2.1 Metodat e shkallëzimit zinxhir

Metoda e shkallëzimit zinxhir është ndoshta metoda më e njohur në përllogaritjen e rezervës teknike të dëmeve. Vlerësimi i rezervës së dëmeve nëpërmjet kësaj metode kryhet si më poshtë. [1] [3]

Çdo dëm ndjek një rrugëtim sipas skemës më poshtë:



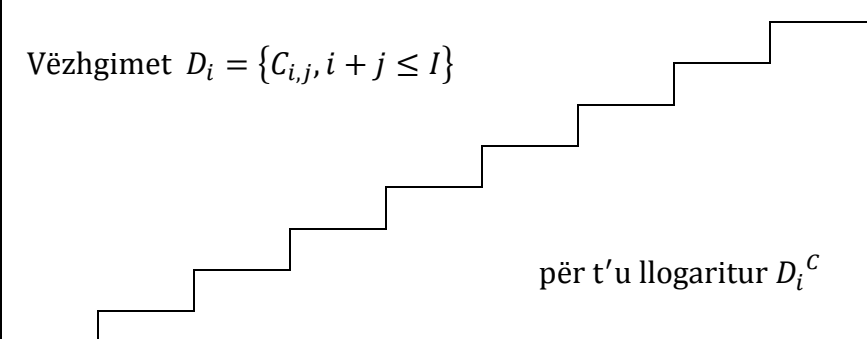
Rezerva teknike e dëmit në momentin I është një parashikim i pazhvendosur i rezervës së dëmeve në kohën I bazuar në informacionin e disponuar në kohën I . Teknika e shkallëzimit zinxhir përshkruan se si ta përditësojmë këtë parashikim në kohën $I + 1$

Shënojmë me $i = 0, 1, \dots, I$ vitet e aksidentit (vitin e ndodhjes së dëmit) dhe me $j = 0, 1, \dots, J$ vitin e zhvillimit (viti i raportimit të dëmit). i shënojmë me $X_{i,j}$ vlerat e dëmeve të ndodhura në vitin i dhe të raportuara në vitin j . Rrjedhimisht vlera e akumuluar e dëmit nga viti i aksidentit i deri në vitin e zhvillimit j të cilën e shënojmë me $C_{i,j}$ do të jetë:

$$C_{i,j} = \sum_{k=0}^j X_{i,k} \quad (2.1)$$

Dhe trekëndëshi për llogaritjen e rezervës teknike të dëmeve në vitin I do të ketë formën:

Tabelë 2.1: trekëndëshi i llogaritjes së rezervave me metodën e shkallëzimit zinxhir:

<i>viti i aksi dentit i</i>	<i>viti i zhvillimit j</i>								
	0	1	2	3	4	...	j	...	J
0	 Vëzhgimet $D_i = \{C_{i,j}, i + j \leq I\}$ për t'u llogaritur D_i^C								
1									
2									
3									
...									
...									
$I - 2$									
$I - 1$									
I									

Ku pjesa sipër zonës sëvijëzuar plotësohet me vëzhgimet $D_i = \{C_{i,j}, i + j \leq I\}$ dhe pjesa poshtë do të plotësohet me vlerat e përlllogaritura $D_i^C = \{C_{i,j}, i + j > I, i \leq I\}$

Llogaritjet me metodën e shkallëzimit zinxhir kryhen nën supozimin se

- vitet e aksidenteve i janë të pavarura midis tyre
- $\{C_{i,j}\}_{j \geq 0}$ është një zinxhir markovi e tillë që:

$$E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1}C_{i,j-1} \text{ për çdo } i, j \quad (2.2)$$

$$D[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = \sigma^2_{j-1}C_{i,j-1} \text{ për çdo } i, j \quad (2.3)$$

Dhe vlera e dëmit $C_{i,j}$ deri në zhvillimin përfundimtar të tij kur dihet D_I do të jetë:

$$E[C_{i,j}|D_I] = C_{i,I-i} \prod_{j=I-i}^{I-1} f_j \quad (2.3)$$

Vlerësuesit për $f_j, j = 0, \dots, I$ për periudhën kohore midis I dhe $I + 1$ vlerësohen:

$$\hat{f}_j^I = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} \text{ dhe } \hat{f}_j^{I+1} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j} C_{i,j}} \quad (2.4)$$

Dhe vlera e rezervës për kohët I dhe $I + 1$ do të jetë:

$$\hat{R}_i^{D_I} = \hat{C}_{i,J}^I - C_{i,I-1} = C_{i,I-1} \prod_{j=I-i}^{I-1} \hat{f}_j^I - C_{i,I-i} \quad (2.5)$$

$$\hat{R}_i^{D_{I+1}} = \hat{C}_{i,J}^{I+1} - C_{i,I-i+1} = C_{i,I-i+1} \prod_{j=I-i+1}^{I-1} \hat{f}_j^{I+1} - C_{i,I-i+1} \quad (2.6)$$

Hapi tjetër në vlerësimin e rezervës teknike të dëmeve është vlerësimi i gabimit mesatar katror nën kushtin që njohim të gjitha të dhënat e vëzhguara deri më tani, pasi duam të llogarisim gabimin e vlerësimit të llogaritjeve. Së pari vërejmë që gabimi mesatar katror e rrjedhimish dhe gabimi mesatar i R_i është i njëjtë me atë të $C_{i,I}$. Pra:

$$s.e.(R_i) = s.e.(C_{i,I}) \quad (2.7)$$

Bazuar në modelin e Mack për luahtatshmërinë e vlerësimit të rezervës do të kemi:

$$\left(s.e.(C_{i,l})\right)^2 = C_{i,l}^2 \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \frac{\alpha_k^2}{f_k^2} \left(\frac{1}{C_{i,k}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{l-k} C_{j,k}}\right) \quad (2.8)$$

ku

$$\alpha_k^2 = \frac{1}{l-k-1} \sum_{j=1}^{l-k} C_{j,k} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{j,k}} - f_k\right)^2 \quad 1 \leq k \leq l-2 \quad (2.9)$$

dhe

$$\alpha_{l-1}^2 = \min \left\{ \frac{\alpha_{l-2}^4}{\alpha_{l-3}^2}, \alpha_{l-2}^2, \alpha_{l-3}^2 \right\} \quad (2.10)$$

Dhe gabimi mesatar për rezervën totale do të jetë

$$\left(s.e.(R)\right)^2 = \sum_{i=2}^l \left\{ \left(s.e.(R_i)\right)^2 + C_{i,l} \left(\sum_{j=i+1}^l C_{j,l}\right) \sum_{k=l+1-i}^{l-1} \frac{2 \frac{\alpha_k^2}{f_k^2}}{\sum_{n=1}^{l-k} C_{n,k}} \right\} \quad (2.11)$$

Për të llogaritur intervalin e besimit po të përdorim modelin lognormal do të kemi:

$$\sigma_i^2 = \ln \left(1 + \left(s.e.(R_i)\right)^2 / R_i^2 \right) \quad (2.12)$$

2.1.1 Llogaritja e rezervës së dëmeve të sigurimit MTPL me metodën e shkallëzimit zinxhir

Trekëndëshi i vëzhgimeve kumulative $(D_i = \{C_{i,j}, i+j \leq l\})$ të protofolit MTPL gjatë periudhës 2005 – 2014 për shoqërinë mbi të cilën janë kryer analizat ka formën sipas Tabelës 2.2 më poshtë: [1] [3]

Tabelë 2.2: Trekëndëshi kumulativ i dëmeve gjatë periudhës 2005 -2014 (të dhënat në mln lekë)

viti i aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	95.84	109.73	112.36	112.36	112.36	112.36	112.77	112.77	112.77	112.77
2	96.96	113.63	121.35	121.35	121.35	121.35	121.35	124.85	124.85	
3	96.13	125.90	139.14	145.34	146.09	155.09	155.09	155.09		
4	127.93	203.54	222.84	236.46	252.34	255.18	255.18			
5	152.93	206.52	235.98	244.70	244.70	244.70				
6	156.59	253.32	280.71	284.61	284.61					
7	167.04	272.28	293.64	299.12						
8	136.41	184.38	243.16							
9	113.29	171.18								
10	107.45									

Koeficientët zhvillimit $\hat{f}_j$ do të të llogaritura sipas formulave (2.4) më sipër do jenë

Tabelë 2.3: Koeficientët e zhvillimit për periudhën 2005 – 2014

	Viti i zhvillimit <i>j</i>								
<i>j</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\hat{f}_j$	1.4351	1.1224	1.0270	1.0145	1.0135	1.0006	1.0090	1.0000	1.0000
α_j^2	4.210	1.335	0.094	0.166	0.107	0.000	0.035	0.000	0.000

Tabelë 2.4: Trekëndëshi i llogaritjes së zhvillimit të dëmeve gjatë periudhës 2005 -2014 dhe vlerësimi i rezervës totale (të dhënat në mln lekë)

Viti i aksidentit	Viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	95.84	109.73	112.36	112.36	112.36	112.36	112.77	112.77	112.77	112.77
2	96.96	113.63	121.35	121.35	121.35	121.35	121.35	124.85	124.85	124.85
3	96.13	125.90	139.14	145.34	146.09	155.09	155.09	155.09	155.09	155.09
4	127.93	203.54	222.84	236.46	252.34	255.18	255.18	257.48	257.48	257.48
5	152.93	206.52	235.98	244.70	244.70	244.70	244.85	247.05	247.05	247.05
6	156.59	253.32	280.71	284.61	284.61	288.45	288.64	291.23	291.23	291.23
7	167.04	272.28	293.64	299.12	303.47	307.56	307.76	310.53	310.53	310.53
8	136.41	184.38	243.16	249.72	253.35	256.77	256.93	259.24	259.24	259.24
9	113.29	171.18	192.14	197.32	200.19	202.89	203.02	204.84	204.84	204.84
10	107.45	154.20	173.08	177.74	180.33	182.76	182.88	184.52	184.52	184.52

Po të llogarisim gabimin për çdo vit dhe të vlerës së rezervës në tërësi me nivel besimi 80% (limiti i sipërm 90% dhe limiti i poshtëm 10% sipas modelit lognormal do të rezultojnë vlerat $t = 0.923$ e $t = -0.527$ përkatësisht të cilat japin një nivle besimi për çdo vit aksidenti në vlerën $82.12\% - 30.50\% = 51.62\%$

Tabelë 2.5: Llogaritjet për intervalin e besimit e gabimin në vlerësimin e rezervës tenike të dëmeve për protofolin MTPL

I	$C_{i,I}$	R_I	$s.e(R_I)$	$s.e(R_I)/R_I$	σ^2	Intervali i besimit	
2	124.85	-	0	0	0.000	(124.85	124.85)
3	155.09	-	0	-	0.000	(155.09	155.09)
4	257.48	2	4	1.67	1.332	(255.83	258.61)
5	247.05	2	4	1.59	1.259	(245.39	248.23)
6	291.23	7	8	1.16	0.849	(287.28	294.75)
7	310.53	11	11	1.00	0.690	(304.33	316.51)
8	259.24	16	11	0.72	0.413	(252.49	266.84)
9	204.84	34	20	0.59	0.296	(192.97	219.16)
10	184.52	77	33	0.42	0.164	(164.83	210.62)
		149	45	0.30	0.089		

2.2 Metoda bootstrap

Algoritmi bootstrap është një strukturë e e gjithëanëshme e cila mund të përdoret në kombinim me disa modele të tjera. Metoda bootstrap përdoret nën supozimin që modeli mbi të cilin aplikohet ky algoritëm, paraqet një version të përshtatur në mënyrë perfekte ndaj të dhënave, dhe ndryshimi midis mis këtij version të përshtatshëm dhe të dhënave historike, jep një tregues se sa ndryshojnë të dhënat aktuale nga struktura e modelit. Kjo arrihet nëpërmjet llogaritjes së mbetjeve nga kjo diferencë. Më tej mbetjet grumbullohen dhe simulohen duke iu bashkuar modelit të përshtatur për të gjeneruar versionin e ri të të dhënave aktuale tashmë të simuluar. Nëse ky proces simulohet 10,000 herë atëherë do kemi 10,000 vlera për dëmet e papaguara, duke formual një vlerësim empirik për shpërndarjen e dëmeve të papaguara (rezerva teknike e dëmeve) [1] [2] [3] [4] [24]

Hapat e algoritmit bootstrap jepen si më poshtë

Hapi i parë: përdoret metoda e shkallëzimit zinxhir për llogaritjen e koeficientëve f_k të cilat lidhur me dëmet që kemi marrë në shqyrtim, janë të reflektuara në Tabelën 2.2 e Tabelën 2.3 më sipër;

Hapi i dytë: ndërtohet trekëndëshi i përshtatur duke filluar nga viti i fundit i trekëndëshit dhe kryhet de-zhvillimi i tij duke përdorur koeficientët f_k e cila për dëmet e marra në shqyrtim jepet sipas Tabelës 2.6 më poshtë:

Tabelë 2.6: dezhvillimi i dëmeve të portofolit MTPL sipas hapit 2 të algoritmit bootstrap

viti aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	65.66	28.57	11.54	2.85	1.58	1.49	0.07	1.01	0.00	0.00
2	72.70	31.63	12.77	3.16	1.75	1.65	0.08	1.11	0.00	
3	90.31	39.29	15.87	3.92	2.17	2.05	0.10	1.38		
4	149.93	65.24	26.34	6.51	3.60	3.40	0.16			
5	143.86	62.59	25.28	6.25	3.46	3.26				
6	169.58	73.79	29.80	7.37	4.08					
7	180.82	78.67	31.77	7.86						
8	150.96	65.68	26.52							
9	119.28	51.90								
10	107.45									

Hapi 3: duke punuar nga format jokumulative tëseicilit prej trekëndëshave, zbriten vlerat e përshtatura nga vlerat aktuale për çdo qelizë, më tej pjesëtohen këto rezultate me rrënjën katrore të vlerës absolute të vlerës së papërshtatur. Kjo vlerë është quajtur mbetjet e pashkallëzuara të Pearson:

$$r_{UP} = \frac{c - \hat{m}}{\sqrt{|\hat{m}|}} \quad (2.13)$$

Ku me C shënojmë të dhënat jokumulative të dëmëve dhe me $\hat{m}$ vlerat e përstatura të tyre. Bazuar në formulat (2.13) mbetjet e pashkallëzuara të Pearson mbi të dhënat e dëmeve të portofolit MTPL që po shqyrtojmë do të jenë ato të Tabelës 2.7 më poshtë:

Tabelë 2.7: mbetjet e pashkallëzuara të Pearson për dëmet e portofolit MTPL

viti i aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3.72	(2.75)	(2.62)	(1.69)	(1.26)	(1.22)	1.27	(1.00)	-	-
2	2.84	(2.66)	(1.41)	(1.78)	(1.32)	(1.28)	(0.28)	2.26	-	-
3	0.61	(1.52)	(0.66)	1.15	(0.97)	4.86	(0.31)	(1.18)	-	-
4	(1.80)	1.29	(1.37)	2.78	6.47	(0.30)	(0.40)	-	-	-
5	0.76	(1.14)	0.83	0.99	(1.86)	(1.81)	-	-	-	-
6	(1.00)	2.67	(0.44)	(1.28)	(2.02)	-	-	-	-	-
7	(1.02)	3.00	(1.85)	(0.85)	-	-	-	-	-	-
8	(1.18)	(2.19)	6.26	-	-	-	-	-	-	-
9	(0.55)	0.83	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Hapi i 4: kryhet standartizimi i mbetjeve. Shumëzohet secili nga paramtrat e pashkallëzuar të Pearson me faktorët e matricës kësulë të llogaritura nëpërmjet formulës (2.14) më poshtë:

$$f_{i,j} = \frac{1}{\sqrt{1-h_{i,j}}} \quad (2.14)$$

Ku $h_{i,j}$ janë elementët e matricës $H = X(X^T W X)^{-1} X^T W$, ku X është matrica e modelit të përgjithshëm linear dhe W është matrica e ngarkesave nga modeli i përgjithshëm linear. Tabela 2.8 dhe Tabela 2.9 më poshtë japin përkatësisht faktorët e matricës kësulë dhe mbetjet e standartizuara të Pearson për të dhënat e dëmetve të portofolit MTPL

Tabelë 2.8: Faktorët e matricës kësulë

viti i aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1.149	1.214	1.196	1.089	1.158	1.128	1.152	1.181	1.332	-
2	1.169	1.237	1.220	1.113	1.190	1.167	1.205	1.268	1.550	-
3	1.169	1.237	1.220	1.111	1.188	1.164	1.201	1.259	-	-
4	1.174	1.244	1.226	1.116	1.196	1.172	1.212	-	-	-
5	1.178	1.252	1.233	1.114	1.197	1.169	-	-	-	-
6	1.191	1.274	1.253	1.121	1.212	-	-	-	-	-
7	1.230	1.340	1.310	1.141	-	-	-	-	-	-
8	1.261	1.388	1.354	-	-	-	-	-	-	-
9	1.372	1.670	-	-	-	-	-	-	-	-
10	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabelë 2.9: Mbetjet e standartizuara të Pearson

viti i aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4.28	(3.33)	(3.14)	(1.84)	(1.45)	(1.38)	1.46	(1.18)	-	-
2	3.33	(3.29)	(1.72)	(1.98)	(1.57)	(1.50)	(0.34)	2.87	-	
3	0.72	(1.88)	(0.80)	1.28	(1.15)	5.66	(0.37)	(1.48)		
4	(2.11)	1.60	(1.68)	3.11	7.74	(0.35)	(0.49)			
5	0.89	(1.42)	1.03	1.10	(2.23)	(2.11)				
6	(1.19)	3.40	(0.55)	(1.43)	(2.45)					
7	(1.26)	4.01	(2.42)	(0.96)						
8	(1.49)	(3.03)	8.49							
9	(0.75)	1.39								
10	-									

Hapi i pestë: Axhustohen mbetjet për gradët e lirisë. Çdo mbetje e standartizuar shumëzohet me gradët e lirisë:

$$dfa = \sqrt{\frac{N}{(N-p)}} \quad (2.15)$$

Ku N është numri i mbetjeve jozero dhe p është numri i parametrave (numri i kolonave në trekëndëshin e mbetjeve plus numrin e rreshtave në trekëndëshin e mbetjeve minus 1. Këto vlera do të llogariten sipas Tabelës 2.10 më poshtë:

Tabelë 2.10: Mbetjet e standartizuara të Pearson me axhustimet për gradën e lirisë

viti i aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	5.19	(4.04)	(3.81)	(2.23)	(1.77)	(1.67)	1.77	(1.44)	-	-
2	4.04	(3.99)	(2.09)	(2.40)	(1.91)	(1.82)	(0.41)	3.48	-	
3	0.87	(2.28)	(0.97)	1.55	(1.39)	6.87	(0.45)	(1.80)		
4	(2.56)	1.94	(2.04)	3.77	9.39	(0.43)	(0.59)			
5	1.08	(1.73)	1.25	1.33	(2.70)	(2.56)				
6	(1.44)	4.13	(0.67)	(1.74)	(2.97)					
7	(1.53)	4.87	(2.94)	(1.17)						
8	(1.81)	(3.68)	10.30							
9	(0.91)	1.69								
10	-									

Hapi 6: Krijojmë në nëyrë rastësore një trekëndësh të ri të dhënash me metodën bootstrap me rivendosje midis mbetjeve të Pearson të llogaritura në hapin 5. Më pas krijojmë trekëndëshin e të dhënave ku për çdo qelizë kemi:

$$C' = r_{sp}\sqrt{|\hat{m}|} + \hat{m} \quad (2.16)$$

Rrjedhimisht për dëmet MTPL do rezultojnë vlerat sipas Tabelës 2.11 dhe Tabelës 2.12 më poshtë

Tabelë 2.11: Mbetjet e zgjedhura në mënyrë rastësore

viti aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	(2.04)	(0.97)	(3.99)	(1.44)	(3.99)	(3.81)	(1.53)	(2.09)	(1.80)	(1.81)
2	(0.59)	(2.23)	-	(0.43)	1.55	(0.43)	(2.56)	(0.91)	(1.67)	
3	(0.45)	(1.77)	10.30	(3.81)	3.77	(2.94)	(2.09)	(0.59)		
4	(0.91)	(1.80)	(1.67)	4.87	(2.40)	(0.41)	(2.28)			
5	(1.17)	(0.59)	(4.04)	(0.67)	(1.82)	(1.91)				
6	(0.41)	-	1.69	10.30	1.69					
7	1.25	(2.94)	(2.09)	-						
8	(2.56)	(3.81)	(1.77)							
9	1.94	3.48								
10	1.25									

Tabelë 2.12: Trekëndëshi jokumulativ i përlllogaritur bazuar në mbetjet e rastit

viti aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	49	23	(2)	0	(3)	(3)	(0)	(1)	0	0
2	68	19	13	2	4	1	(1)	0	0	
3	86	28	57	(4)	8	(2)	(1)	1		
4	139	51	18	19	(1)	3	(1)			
5	130	58	5	5	0	(0)				
6	164	74	39	35	7					
7	198	53	20	8						
8	119	35	17							
9	140	77								
10	120									

Hapi i 7: krijohet sërish trekëndëshi kumulativ i dëmeve si dhe llogariten faktorët e zhvillimit. Dhe plotësohet trekëndëshi me pagesat e ardhshme sin ë metodën e klasike të përshkallëzimit

zinxhir. Për dëmet e portofolit MPTL në shqyrtim do të kemi vlerësimet sipas tabelave 2.13, e 2.14 e më poshtë

Tabelë 2.13: Trekëndëshi kumulativ i përlogaritur bazuar në mbetjet e rastit

viti aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	47	66	72	74	85	84	83	89	89	89
2	54	77	87	86	87	85	85	84	84	84
3	79	107	116	116	118	116	117	116	116	116
4	100	151	165	167	169	169	169	172	172	172
5	123	182	234	244	243	243	243	247	247	247
6	219	277	292	296	297	296	296	301	301	301
7	181	227	249	246	249	248	248	252	252	252
8	130	183	262	265	269	268	268	272	272	272
9	113	155	180	182	185	184	184	187	187	187
10	119	161	188	190	193	192	192	195	195	195

Tabelë 2.14: Faktorët e zhvillimit

	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_j	1.361	1.163	1.012	1.015	0.995	1.000	1.016	1.000	1.000	1.000

Tabelë 2.15: Pagesat jokumulative të dëmeve MTPL

viti aksidentit	viti i zhvillimit									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	47	18	7	2	10	(1)	(1)	6	-	-
2	54	23	10	(1)	1	(2)	0	(1)	-	-
3	79	28	9	0	2	(1)	0	(1)	-	-
4	100	51	13	2	2	0	1	3	-	-
5	123	59	51	10	(1)	0	0	4	-	-
6	219	58	15	4	1	(1)	0	5	-	-
7	181	46	22	(3)	4	(1)	0	4	-	-
8	130	52	80	3	4	(1)	0	4	-	-
9	113	42	25	2	3	(1)	0	3	-	-
10	119	43	26	2	3	(1)	0	3	-	-

Hapi 8: Futet procesi i variancës. Llogarisim pagesat jokumulative për të ardhmen nga trekëndëshi kumulativ (për të dhënat e dëmeve MTPL në shqyrtim rezultatet jepen sipas tabelës 2.15). Më tej zëvendësojmë çdonjërin prej pagesave jokumulative të së ardhmes me një vlerë të përzgjedhur në mënyrë të rastit nga shpërndarja gamma me pritje matematike vlerën jokumulative të pagesës dh dispersion pritjen matematike shumëzuar me parametrin e shkallëzimit, si dhe llogaritet totali i pagesave për të ardhmen. (rezultatet sipas Tabelës 2.16 më poshtë)

Tabelë 2.16: Pagesat jokumulative të dëmeve MTPL të ardhshme te gjeneruara në mënyrë rastësore

viti i aksidentit	viti i zhvillimit										Shuma
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	189.71
1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
3	-	-	-	-	-	-	-	-	0	-	-
4	-	-	-	-	-	-	-	(1.38)	0	0	(1.38)
5	-	-	-	-	-	-	0.00	(0.00)	0	0	(0.00)
6	-	-	-	-	-	7.08	0.01	(0.00)	0	0	7.10
7	-	-	-	-	0.00	0.24	0.33	(8.50)	0	0	(7.93)
8	-	-	-	32.86	0.00	0.27	0.00	(15.82)	0	0	17.31
9	-	-	17.28	0.72	0.00	36.38	0.23	(0.00)	0	0	54.61
10	-	84.78	18.54	4.53	0.00	12.14	0.02	(0.00)	0	0	120.00

Hapi 9: Ripërsërisim hapat 1 – 8 numrin e specifikuar të herëve (rezultatet jepen sipas tabelës 2.17) më poshtë

2.3 Përfundime

Sic edhe shihet nga rezultatet, megjithëse metodat standarte të përrlogaritjes së rezervës teknike të dëmeve japin një vlerësim të përgjithshëm të rezervave teknike të dëmeve, me përfshirjen e elementëve statistikore dhe të bootstrap, marrim një vlerësim më korrekt të këtyre rezervave. Ndaj përdorimi i këtyre metoave megjithëse nuk perdoren aktualisht nga aktuarët në shoqëritë e sigurimit, sugjerohen për tu përdorur në mënyrë përfundim sa më të qartë të situatës së pëgjegjësi të shoqërisë së sigurimit

Tabelë 2.17: Përmbledhje e rezultateve për vlerësimin e rezervës teknike të dëmeve MTPL

Viti i aksidentit	Totali i raportuar	Pritja matematike për IBNR	Gabimi standard	koeficient i Variacion	Minimu m	Makimu m	Percentil i 50%	Percentil i 75%	Percentil i 95.0%	Percentil i 99.0%
1	112.77	-	-		-	-	-	-	-	-
2	124.85	-	-		-	-	-	-	-	-
3	155.09	-	-		-	-	-	-	-	-
4	255.18	2.34	7.06	301.8%	(16)	36	0	2	15	26
5	244.70	2.18	6.94	318.5%	(25)	35	0	3	16	24
6	284.61	5.60	9.87	176.2%	(20)	58	3	9	22	35
7	299.12	10.66	12.25	114.9%	(34)	48	7	19	31	44
8	243.16	13.41	16.10	120.0%	(35)	74	9	18	41	74
9	171.18	38.95	23.76	61.0%	0	119	35	49	85	103
10	107.45	71.31	32.98	46.3%	21	187	65	95	129	150
Totali	1,998.11	151.87	68.72	45.2%	34	384	142	187	288	328
Normal Dist.		151.87	68.72	45.2%			152	198	265	312
logNormal Dist.		153.16	77.19	50.4%			137	189	299	414
Gamma Dist.		151.87	68.72	45.2%			142	191	280	355
TVaR							205	247	325	384
Normal TVaR							207	239	294	335
logNormal TVaR							209	258	371	492
Gamma TVaR							205	246	326	398
logNormal: Mu =		4.92	Sigma=	0.48		Gamma:	Alpha=	4.88	Beta=	31.09

Kapitulli 3. SIGURIMI I JETËS

3.1 Sigurimi i Jetës - ç'është?

Sigurimet janë mjet thelbësor i administrimit të rrezikut. Në aspektin ekonomik sigurimet mund të përkufizohen si funksion financiar me anë të të cilit çdo i siguruar kontribon në një fond prej nga u kryhen pagesa në rast të ndodhjes së një ngjarjeje specifike.

Në aspektin ligjor, sigurimi i jetës është një marrëveshje (policë ose kontratë sigurimi) me anë të së cilës njera palë (policëmbajtësi) i paguan një shumë në të holla (primin) palës tjetër (shoqërisë së sigurimit ose siguruesit) në këmbim të së cilit shoqëria e sigurimit bie dakord të paguajë një shumë të caktuar ose të kryejë një shërbim specifik nëse gjatë periudhës së sigurimit ndodh ngjarja e specifikuar në kontratë. Personi, jeta ose shëndeti i të cilit është objekt i policës së sigurimit, është i siguruari. Në shumicën e rasteve, i siguruari është edhe policëmbajtës, i cili është personi që mund të ushtrojë të gjithë të drejtat që jep polica e sigurimit dhe me të cilin hyn në marrëveshje siguruesi. Përfituesi është personi fizik ose juridik që ka të drejtën të marrë përfitimin e pagueshëm në rast dëmshpërblimi.

3.1.1 Fusha e mbulimit

Përgjithësisht, sigurimi i jetës trajton llojet e rrezikut dhe llojet përkatëse të sigurimeve si më poshtë:

- Rrezikun i vdekshmërisë (Mortality): mundësia që humbja e jetës të një personi të sjellë pasoja financiare negative për të tjerë, që trajtohet nga sigurimi i jetës me afat (term life);
- Rrezikun i Jetëgjatësisë (Longevity): mundësia që një person të jetojë përtej periudhës kohore për të cilën ka burime financiare jetese, që trajtohet nga sigurimet e jetës me kursim (endowment) dhe anuitetet (annuity).

Në disa vende pjesë e sigurimeve të jetës është edhe sigurimi i shëndetit, por legjislacioni shqiptar (në përputhje me atë të EU) parashikon që teknikisht sigurimi i shëndetit është pjesë e sigurimeve të jo – jetës (ndonëse një shoqëri sigurimi mund të trajtojë sigurime shëndetësore si rrezik aksesor).[7] [8]

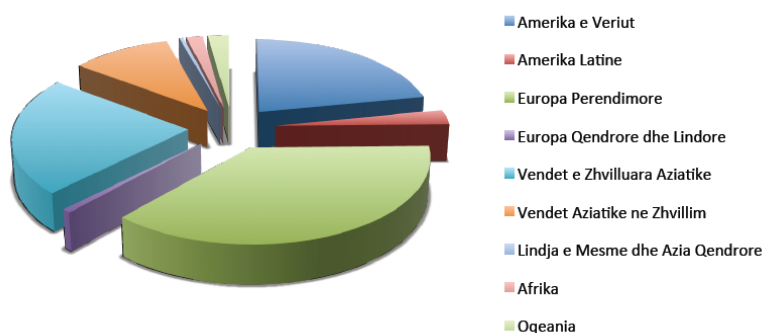
3.1.2 Rëndësia e sigurimit të Jetës

Sigurimi i Jetës është i një rëndësie të veçantë në botë. Me zhvillimin ekonomik të një vendi rritet edhe roli i sigurimit të jetës si mjet sigurie ekonomike. [7] [8] [32]

Treguesi kryesor i tregut të sigurimit të jetës është 'primi i shkruar'. Në vitin 2014 vëllimi botëror i primeve të shkruara në sigurimin e jetës ishte rreth USD 2.7 trilionë (56% e primeve totale, përfshirë sigurimet e jo-jetës), me rritje 4.3% krahasuar me vitin 2013. [32]

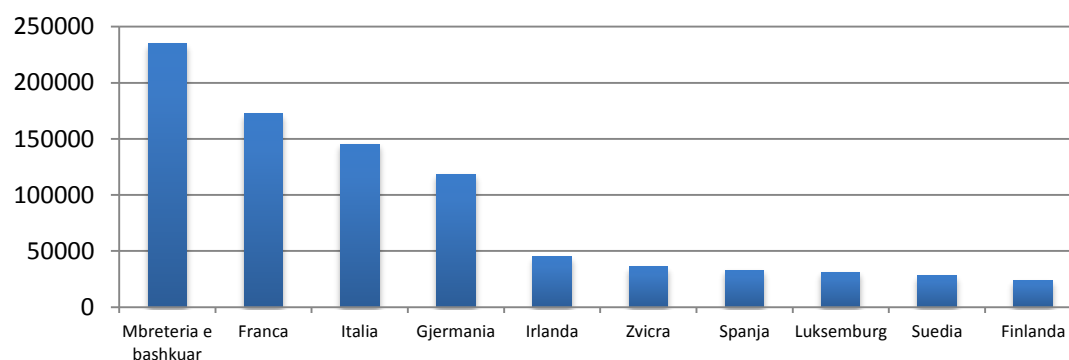
Shpërndarja gjeografike e primeve të jetës në vitin 2014 jepet sipas grafikut të Figurës 3.1 më poshtë:

Shpërndarja Gjeografike



Figurë 3.1: Grafiku i shpërndarjes gjeografike e primeve të jetës gjatë vitit 2014

Grafiku i Figurës 3.2 më poshtë pasqyron vëllimin e primeve të jetës për 10 vendet me tregjet më të mëdha të sigurimit dhe EU:

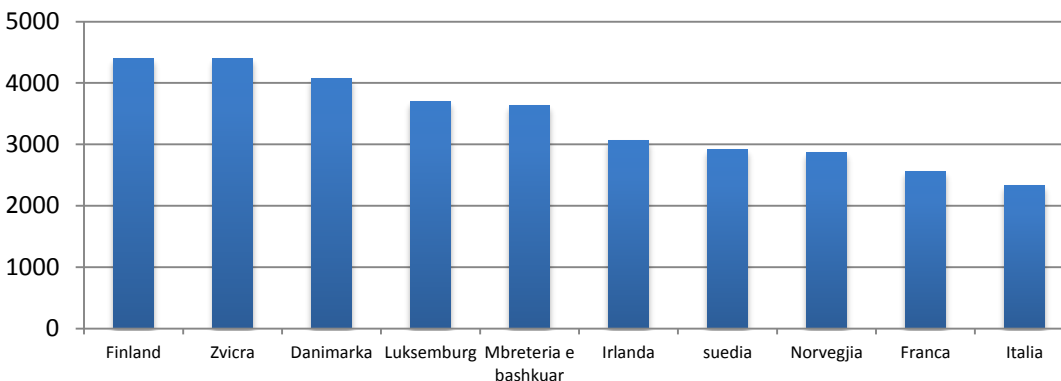


Figurë 3.2: Vëllimi i primeve të jetës për 10 vendet me tregjet më të mëdha të sigurimit dhe EU

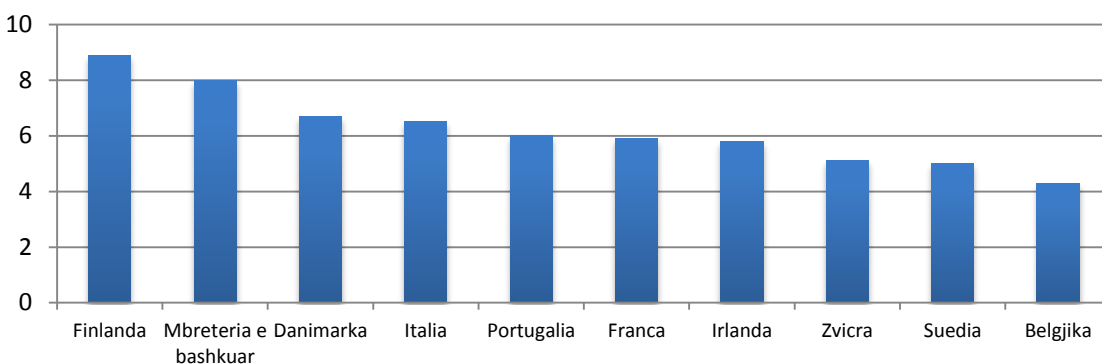
Treguesit e zhvillimit të tregut përfshijnë:

- densitetin: primi vjetor mesatar për frymë
- penetrimin: raporti i primeve ndaj prodhimit të përgjithshëm bruto

Në Figurat 3.3 e 3.4. më poshtë jepen të ilustruar me grafikë këta tregues për vende e rajone të ndryshme:



Figurë 3.2: Primet e jetës për frymë në disa vende



Figurë 3.3: Primet e jetës si përqindje e PBB

3.1.3 Roli i sigurimeve të jetës në zhvillimin ekonomik

Shërbimet financiare janë thelbësore për zhvillimin ekonomik. Si institucione financiare, shoqëritë e sigurimit kryejnë funksione dhe japin përfitime të ngjashme me ato të institucioneve të tjera financiare, si bankat. [7] [8]

Sigurimet shihen si një mekanizëm për shpërndarjen/diversifikimin e rrezikut, sipas të cilit të paktët që pësojnë humbje dëmshpërblehen nga fondet që siguresit mbledhin nga të siguruarit e shumtë.

Por jo vetëm kaq, sigurimet japin edhe kontribute themelore në zhvillimin ekonomik duke:

- promovuar stabilitetin financiar: të gjitha llojet e sigurimeve ndihmojnë stabilizimin e gjendjes financiare të individëve, familjeve dhe organizatave. Stabiliteti që mundësojnë sigurimet inkurajon individët dhe bizneset të investojnë dhe krijojnë pasuri;
- zëvendësuar dhe plotësuar skemat shtetërore të sigurisë: kjo lehtëson barrën e skemave shtetërore të sigurimeve shoqërore e shëndetësore. Sipas studimeve rezulton se rritja e sektorit të sigurimit të jetës shoqërohet me uljen e nivelit të shpenzimeve shtetërore për skemat e sigurimeve shoqërore e shëndetësore;

- nxitur dhe motivuar kursimet: siguruesit e jetës rrisin efektshmërinë e sistemit financiar duke zvogëluar kostot e transaksioneve ndërmjet kursimeve dhe huamarrjeve, duke krijuar likuiditet dhe duke mundësuar investime në shkallë të gjerë;
- mundësuar shpërndarje më të efektshme të kapitalit: përmes mbledhjes dhe analizës së informacioneve vendosin se cilat biznese të sigurojnë (duke ndihmuar investitorët në vendimet se cilat janë bizneset më të përshtatshme për të investuar).

3.2 Pamje e përgjithshme e sigurimit të Jetës

Sigurimi i jetës jep mjetet e nevojshme për të përballuar pasojat financiare të humbjes së jetës. Humbja e jetës së një personi, përveç pasojave të rënda emocionale, mund të sjellë edhe pasoja po aq të rënda financiare për familjen. Në rast se mirëqenia ekonomike e familjes varet nga të ardhurat e një personi, atëherë humbja e jetës së këtij personi do të ishte financiarisht fatale për familjen. [7] [8]

Bizneset po ashtu mund të kenë pasoja të rënda financiare në rast të humbjes së jetës së punonjësve kryesorë.

Për përballimin e pasojave financiare të humbjes së jetës mund të ndihmojnë burimet e vetë familjes/biznesit. Në rast se këto janë të pamjaftueshme, atëherë duhet të konsiderohen burime të tjera, si: të ardhura nga njerëz të afërm, kursime/investime, skema shtetërore si sigurimet shoqërore, ose sigurime jete.

Ndër to, mjeti ndoshta më i përhapur për përballimin e pasojave financiare të humbjes së parakohshme të jetës është blerja e sigurimit individual të jetës. Sigurimi i jetës për një shumë përfitimi të barabartë me shumën që duhet për plotësimin e të ardhurave financiare është masa më e përshtatshme që mund të merret në këtë rast. Ngjarja që sjell si pasojë nevojën, jep edhe zgjidhjen.

Nëse kryhet për një shumë të mjaftueshme, në terma thjesht ekonomike sigurimi i jetës zëvendëson të ardhurat e ardhshme të të ndjerit, duke mbrojtur kështu familjen ose biznesin nga vuajtja e pasojave financiare të shkaktuara nga humbja e jetës së personit.

Në vijim të avantazheve shoqërore të përmendura më sipër (Roli i sigurimeve të jetës në zhvillimin ekonomik), sigurimi i jetës ofron përfitime të tjera krahasuar me instrumenta të tjerë financiarë:

- së pari, siç përmendet në paragrafin më sipër, ngjarja që sjell si pasojë nevojën gjithashtu jep edhe zgjidhjen, duke e bërë sigurimin e jetës mjetin më të përshtatshëm në përballimin e pasojave financiare të humbjes së jetës;
- së dyti, sigurimi i jetës në disa aspekte ka trajtim preferencial tatimor. Në Shqipëri, edhe pse jo në formën e tyre të plotë, avantazhet fiskale janë: përjashtimi i primeve të sigurimit të jetës nga taksa për sigurimet, përjashtimi i primit të sigurimit për kursim nga fee-ja e autoritetit mbikqyrës, shtyrja në kohë e pagesës së tatimit mbi të ardhurat për sigurimet e jetës me kursim, përjashtimi nga tatimi për dëmshpërblimet. Në vende të tjera avantazhet janë edhe më të theksuara dhe tregu i sigurimeve në Shqipëri bën përpjekje të vazhdueshme për të mundësuar trajtime preferenciale për klientët e sigurimeve të jetës;

- së treti, policat e sigurimit të jetës në përgjithësi kanë fleksibilitet që lejojnë krijimin e fondeve lehtësisht likuide në afate të shkurtëra, por që ndërkohë kanë përfitimet e investimeve afatgjata.

3.3 Llojet e policave të sigurimit të Jetës

Sigurimi i jetës kryhet në bazë individuale ose grupi, përkatësisht ndarja kryesore e policave të sigurimeve të jetës është në polica individuale dhe polica në grup. [7] [8]

Karakteristika e veprimtarisë së sigurimit të Jetës është se bazohet në jetën e personit, pra pagesa e përfitimit varet nga fakti nëse i siguruari është gjallë ose jo. Për këtë, përgatiten tabela vdekshmërie që tregojnë probabilitetet në bazë vjetore të humbjes së jetës sipas moshës dhe gjinisë (faktorë të tjerë shtesë mund të jenë konsumi i duhanit, etj. por për këtë nevojiten të dhëna të plotë e të sakta që jo gjithmone janë të disponueshme). Tabelat e mortalitetit janë të domosdoshme për përcaktimin e primeve të sigurimit. Në aspektin teknik, policat e sigurimit të jetës grupohen në 'sigurime të jetës me afat' dhe 'sigurime kursimi'.

Policat e sigurimit të jetës me afat paguajnë si përfitim një shumë të paracaktuar në rast se i siguruari humbet jetën gjatë periudhës së sigurimit.

Policat e jetës me kursim janë polica që kryejnë pagesa periodike të principalit dhe interesit për një periudhë fikse ose përgjatë jetës së të siguarit.

3.3.1 Policat e Sigurimit të Jetës me Afat

Struktura e policave të jetës me afat është më e thjeshtë në krahasim me policat e tjera të jetës. Këto polica paguajnë një përfitim në të holla në rast të humbjes së jetës së të siguarit, që quhet 'shuma e sigurimit'.

I siguruari është individ i humbja e jetës së të cilit është ngjarja në bazë të së cilës kryhet pagesa e shumës së sigurimit.

Zakonisht i siguruari është edhe personi që bën kërkesën për sigurim dhe policëmbajtësi, por për disa lloje sigurimesh (psh sigurimi i jetës për hua), policëmbajtësi dhe përfituesi është institucioni financiar që ka interes të sigurueshëm për jetën e të siguarit (për shkak të huasë së dhënë të siguarit).

Polica e sigurimit të jetës me afat përfundon në rast se i siguruari jeton përtej afatit të policës, pra pas këtij afati nuk ka më vlerë.

Përfitimi (shuma e sigurimit) mund të jetë e njëjtë për të gjithë periudhën e policës, ose e zvogëlueshme (psh në rastin e sigurimit të jetës për hua ku shuma e sigurimit është e njëjtë me principalin e pashlyer të huasë bankare që zvogëlohet në kohë me pagesat e kësteve të kredisë).

Primet e sigurimit përcaktohen vjetore në bazë të tabelës së mortalitetit dhe rriten me kalimin e moshës (por mund të përcaktohen edhe prime të njëjta vjetore).

Policat janë zakonisht të rinovueshme deri në një moshë maksimale sigurimi (65 ose 75 vjeç).

3.3.2 Policat me Kursim

Përgjithësisht, policat e jetës me kursim mund të jenë me elementë të garantuar (psh normë interesi e garantuar për investimin e kursimeve), ose me elementë jo të garantuar.

Për qëllime marketing-u policat e jetës me kursim kanë emërtime të shumëllojshme. Gjithsesi, ky grup policash mund të kategorizohet në: Polica Sigurimi Jete Universale, Polica Sigurimi Jete të Plotë, dhe Sigurim Endowment.

– *Polica Sigurimi Jete Universale*

Këto polica karakterizohen nga prime fleksible dhe përfitime të ndryshueshme, vlera dhe periudha e të cilave varet nga primet e paguara.

Në këto polica është policëmbajtësi, jo siguruesi, ai që përcakton masën e primeve që paguhen.

– *Polica Sigurimi Jete të Plotë*

Në këto polica zakonisht primi i pagueshëm dhe shuma e sigurimit (përfitimi) janë të fiksuara dhe të pandryshueshme. Shuma e sigurimit paguhet me humbjen e jetës së të siguruarit në çdo kohë, pra polica qëndron në fuqi gjatë gjithë jetëgjatësisë së të siguruarit.

Si një formë e ndryshueshme e policave të mësipërme, ekziston edhe *Sigurimi i Jetës i lidhur me Fonde Investimesh*. Shuma e sigurimit në këtë rast përcaktohet në përputhje me rezultatet e arritura nga fondet në të cilat janë investuar primet e paguara dhe policëmbajtësi merr përsipër 100% të rrezikut të investimit.

– *Polica Sigurimi Endowment*

Kjo policë paguan një shumë të paracaktuar nëse i siguruari humbet jetën brenda një afati të caktuar ose të njëjtën shumë nëse i siguruari jeton përtej këtij afati. Zakonisht afati i policës është mosha 65 vjeç.

Teknikisht, polica thjesht endowment (pure endowment) paguan vetëm në rast se i siguruari jeton përtej afati të policës, por në përgjithësi kombinohet me 'sigurim jete me afat' që të paguajë shumën e sigurimit edhe në rast të humbjes së jetës para përfundimit të afatit të policës (legjislacionet nuk lejojnë shitjen e policave thjesht endowment).

Për qëllimet e këtij studimi, këtu polica Endowment paraqitet shkurtimisht, ndërkohë që një përshkrim më i plotë jepet në paragrafin 3.5 më poshtë.

3.4 Kushtet për kryerjen e sigurimeve / karakteristikat e nevojshme për rrezikun e sigurueshëm

Në veprimtarinë e tyre siguruesit marrin përsipër rreziqe që u transferohen prej të siguruarve të tyre. Megjithatë, që një rrezik të jetë 'i sigurueshëm' duhet të plotësojë disa kërkesa bazë: [7] [8]

- numër i madh njësisish ekspozimi të pavaruara dhe homogjene,

- humbjet të jenë aksidentale,
- të dhëna të sakta për shumat e pagueshe, dhe
- primet të jenë ekonomikisht të arsyeshme / mjaftueshme.

3.4.1 Numër i madh njësisish të pavarura dhe homogjene

Në teorinë dhe praktikën e sigurimeve një njësi (ekspozimi) është një person, vend ose send e ekspozuar ndaj mundësisë së humbjes/dëmtimit. Në sigurimet e jetës, njësia i referohet një jete të siguruar. Njësi me ekspozim të ngjashëm grupohen për të formuar një 'bashkësi sigurimi' (ose 'klasë rrezikun').

Idealisht, çdo bashkësi sigurimi duhet të përbëhet nga njësi që janë të pavarura dhe homogjene.

3.4.1.1 Njësi të Pavarura

Dy ndryshore të rastit (psh njësi ekspozimi) janë të *pavarura* nëse marrëdhënia ndërmjet tyre është e tillë që ndodhja e një ngjarjeje që prek njerën një prej tyre nuk ka efekt në ndryshoren tjetër. Psh, dy individë që jetojnë në qytete të ndryshme zakonisht konsiderohen të pavarur nga njeri tjetri. Ngjarje ose veprimtari që prekin njerin prej tyre në përgjithësi nuk pritet të kenë efekt ndaj tjetrit.

Megjithatë, nëse dy individët ndodhen në të njëjtin avion, një aksident i mundshëm i avionit do t'i prekte të dy. Për këtë ekspozim ata janë të varur.

Përgjithësisht, siguruesit mundet të diversifikojnë rrezikun e marrë përsipër duke formuar bashkësi njësisish ekspozimi që janë statistikisht të pavarura nga njera tjetra, duke ulur kështu rrezikun mesatar për njësi ekspozimi në bashkësi.

3.4.1.2 Njësi Homogjene

Ndryshoret e rastit konsiderohen të jenë të shpërndara në mënyrë identike, ose homogjene, nëse funksionet e tyre të shpërndarjes marrin të njëjtat vlera për çdo ngjarje të mundshme, gjë që i bën të njëjta pritjen matematike dhe dispersionin e tyre.

Ky kusht është i rëndësishëm sepse u lejon siguruesve të llogarisin të njëjtin prim për secilin të siguruar të pavarur dhe të shpërndarë në mënyrë identike.

Në realitet, janë pak njësitë/ekspozimet që janë vërtetë homogjene, kështu që siguruesit i grupojnë njësitë e ngjashme në një klasë dhe llogarisin prime për bashkësitë. Shoqëritë e sigurimit të jetës kanë mundësi të plotësojnë këtë kusht duke krijuar bashkësi të siguruarish që janë afërsisht të së njëjtës moshë, gjini dhe gjendje shëndetësore.

3.4.1.3 Numër i Madh Njësish

Shoqërive të sigurimit u nevojiten njësi në një numër të mjaftueshëm për të pasur mundësi të parashikojnë rezultatin e veprimtarisë siguruese. Kjo mundësi parashikimi mbështetet në ligjin e numrave të mëdhenj, i cili përcakton se, me rritjen e numrit të njësive ose provave: (1) ulët ndryshimi ndërmjet rezultatit aktual dhe atij të mundshëm, dhe (2) çdo njësi shtesë ul ndryshimin

në rezultat. Kështu, me shtimin e njësive në një bashkësi të siguruarish të pavarur dhe të shpërndarë në mënyrë identike, humbja mesatare afrohet më shumë me vlerën e pritshme të humbjes. Kjo është arsyeja bazë që bashkësitë siguruese mund të shpërndajnë dhe zvogëlojnë rrezikun, ndërsa vetë individët jo.

Kjo mund të vërehet në një shembull të thjeshtë. Supozojmë që një shoqëri sigurimesh siguron jetët e një numri të caktuar personash gjatë një viti dhe probabiliteti që çdonjeri prej tyre të humbë jetën brenda vitit është 2.0%. Pra, numri i pritshëm i humbjeve është 2% e numrit të përgjithshëm të jetëve të siguruara. Numri faktik i humbjeve mund të jetë më i lartë ose më i ulët se numri i pritshëm. Sipas ligjit të numrave të mëdhenj, nëse numri i të siguruarve është i mjaftueshëm, humbjet faktike duhet të tregojnë vetëm një devijim relativisht të vogël nga numri i pritshëm. Duke përdorur teorinë e probabilitetit, mund të llogariten probabilitetet e devijimeve tëndryshme nga numri i pritshëm, në varësi të numrit të të siguruarve.

Kur numri i jetëve të siguruara është 1,000, 5,000, 25,000 dhe 50,000, probabiliteti që humbjet faktike të jenë brenda 5% të humbjeve të pritshme është vetëm 18.2% nëse sigurohen 1,000 jetë, ndërsa rritet në 39.0% nëse sigurohen 5,000 jetë, 74.2% nëse sigurohen 25,000 jetë dhe 89.0% nëse sigurohen 50,000 jetë. Për 1,000,000 jetë të siguruara ky probabilitet është më i madh se 99.99%.

Pra, ligji i numrave të mëdhenj u lejon siguresve të formojnë bashkësi njësishe/të siguruarish të pavarur dhe të shpërndarë në mënyrë identike, që ul kontributin mesatar për risk në bashkësi.

Krijimi i këtyre bashkësive ka edhe një efekt tjetër që u jep bashkësive avantazh në administrimin e ekspozimeve. Ky efekt, i njohur si *bashkimi i mjeteve*, konsiston në faktin që sa më i madh të jetë numri i njësive për të cilat llogaritet prim në një bashkësi sigurimi, aq më e madhe është mundësia që të ardhurat e siguresit nga primet dhe investimet të jenë të mjaftueshme për të paguar të gjitha kërkesat për dëmshpërblim gjatë periudhës së sigurimit, në kushte të tjera të pandryshueshme.

Për të treguar këtë efekt, marrim në konsideratë shembullin e mëposhtëm. Supozojmë se një sigures ka krijuar një bashkësi sigurimi me të siguruar të pavarur dhe të shpërndarë në mënyrë identike me një probabilitet humbjeje 20%, kështu probabiliteti për të mos pasur humbje është 80%. Nëse ndodh një humbje, siguresi paguan 500,000 lekë. Pra, vlera e pritshme e humbjes (dhe primi aktuarial) është 100,000 lekë ($0.2 \cdot 500,000$). Gjithashtu, duke supozuar se siguresi ka nivel shpenzimesh administrative 40%, primi bruto është 140,000 lekë..

*Humbja e aftësisë paguese ndodh kur totali i humbjeve të siguruara tejkalon totalin e primeve të paguara në bashkësi. Pra krijohet probabiliteti i **humbjes së aftësisë paguese** të bashkësisë së sigurimit si funksion i numrit të njësive në bashkësi.*

*Kur bashkësia ka vetëm një njësi, probabiliteti i **humbjes së aftësisë paguese** është i barabartë me 20%, që është ekzaktesisht probabiliteti që i siguruari të pësojë humbje. Arsyeja e këtij rezultati është se bashkësia përmban vetëm 140,000 lekë, dhe, nëse i siguruari pëson humbje atëherë humbja do të jetë 500,000 lekë, që e falimenton bashkësinë. Kur bashkësisë i shtohet një njësi e dytë (që tregohet si '2' në vijën vertikale në të majtë), mjetet në dispozicion të bashkësisë rriten në 280,000 lekë, por probabiliteti i **humbjes së aftësisë paguese** në fakt rritet. Sigurisht, bashkësia nuk mund të paguajë një humbje të plotë deri sa mjetet në dispozicion të jenë mbi 500,000 lekë, gjë që ndodh vetëm pasi bashkësisë i shtohet njësi e katërt dhe mund të shihet në grafik nga ndryshimi i menjëhershëm ndërmjet '3' dhe '4'. Kjo tendencë vazhdon derisa efekti*

pozitiv i shtesës së mjeteve në bashkësi balancon efektin negativ të shtesës së njësisë në bashkësi. Probabiliteti i humbjes së aftësisë paguese i afrohet gjithnjë e më shumë zeros me rritjen e numrit të njësisë në bashkësi.

3.4.2 Humbje aksidentale

Humbjet/dëmet ekonomike shkaktohen nga ngjarje që mund të jenë të parashikueshme ose jo. Në fushën e sigurimeve, njësitë duhet të jenë subjekt i ngjarjeve aksidentale ose të paqëllimshme. Kjo për tre arsye. Së pari, nëse i siguruari ka kontroll mbi mundshmërinë e ndodhjes së një ngjarjeje ose shkallën e pasojave të saj, atëherë mund të lindin probleme rreziku moral. Së dyti, në pikëpamjen shoqërore, do të ishte e gabuar të lejoheshin policëmbajtësit të përfitonin dëmshpërblim për humbje/dëme që ata vetë i shkaktojnë me qëllim. Së treti, humbje/dëme që nuk janë aksidentale dhe ndodhin natyrshëm me kalimin e kohës si psh amortizimi i makineri pajisjeve, konsiderohen jo të sigurueshme pasi janë ngjarje që dihet se do të ndodhin. Gjithsesi, planifikimi i fondeve për këtë qëllim është shpenzim më i ulët se primi i sigurimit (i cili do të përfshinte edhe kostot e siguruesit).

Trupi i njeriut, si edhe organizmat e tjerë, ka një jetë të dobishme të kufizuar. Në terminologjinë e teorisë së *dobishmërisë* trupi ndjek parimin e *dështimit* që është kombinim i një shpërndarjeje që pasqyron rritje eksponenciale të normave të *dështimit* dhe një shpërndarjeje *dështim jo moshor* kryesisht të pavarur nga moshë.

Humbja e jetës është e sigurt që do të ndodhë, megjithatë sigurimi jep mbrojtje ndaj pasojave negative të saj. Kjo sepse humbja e jetës ka si karakter të parashikueshëm, ashtu edhe të paparashikueshëm. Dihet që në fund njeriu humb jetën, eventualisht. Por nuk dihet se kur. Sigurimi kryhet për aspektin e 'nuk dihet se kur'. Megjithatë, elementë të sigurimit të jetës japin mbrojtje edhe për aspektin e 'eventualitetit'. Kombinimi i sigurimit të jetës me kursim dhe jetës me afat mund të japin mbrojtje financiare për rrezikun e paparashikueshëm të humbjes së parakohshme të jetës si edhe eventualitetit të humbjes së jetës në periudhë më të zgjatur.

3.4.3 Të dhëna të sakta për shumën e pagueshme

Llogaritja e saktë aktuariale e primit mund të kryhet vetëm nëse humbjet/dëmet përcaktohen saktësisht. Për çdo kërkesë për dëmshpërblim duhet që të dhënat e detajuara të humbjes/dëmit si koha, vendi dhe shumën, të mund të përcaktohen dhe verifikohen saktësisht.

Në këtë aspekt, sigurimi i jetës është relativisht më i thjeshtë krahasuar me sigurimet e jo-jetës sepse ngjarjet në sigurimin e jetës janë më të pakta në numër për të siguruar dhe lehtësisht më të verifikueshme se psh në sigurimet motorrike ose sigurimet e shëndetit.

3.4.4 Prime ekonomike të pranueshme

Karakteristika e fundit e rrezikut të sigurueshëm është që primi të jetë ekonomikisht i mjaftueshëm / arsyeshëm. Nga njera anë, primi i rrezikut, shumën që i siguruari duhet të paguajë për t'u siguruar, nuk duhet të jetë shumë i lartë. Nga ana tjetër, aksionerët e shoqërisë së sigurimit

kërkojnë që tarifa e primit të sigurimit të jetë në një nivel të pranueshëm në mënyrë që të përmbajë një të ardhur nga investimi që është konkurruese me investime të tjera.

Më në detaje kjo pasqyrohet në vijim.

3.4.4.1 Objektivat në llogaritjen e primit

Të gjithë siguruesit përpiqen të llogarisin prime që janë (1) të mjaftueshme, (2) të krahasueshme, dhe (3) ekonomikisht të pranueshme.

3.4.4.1.1 Mjaftueshmëria

Primet e shoqërisë së sigurimit duhet të jenë të mjaftueshme për të financuar pagesën e përfitimeve të premtuara në kontratat e sigurimit. Niveli i pamjaftueshëm i primeve mund të çojë në probleme financiare dhe paaftësi paguese.

Mjaftueshmëria e primeve do të thotë që, për një portofol të caktuar policash sigurimi, totali i primeve të arkëtuara dhe të arkëtueshme në vijim, plus të ardhurat nga investimi, duhet të jenë të mjaftueshme për të financuar pagesat e përfitimeve aktuale dhe të ardhshme dhe shpenzimet, taksat e fitimet përkatëse.

Siguruesi nuk mund të dijë saktësisht nivelin e mjaftueshmërisë së primeve deri sa të ketë përfunduar edhe polica e fundit e portofolit. Rëndësia e llogaritjes dhe zbatimit të primeve të mjaftueshme është edhe më e dukshme nëse kihet parasysh se sidomos në sigurimet e jetës policat e sigurimit janë afatgjata dhe shtrihen përgjatë shumë viteve.

3.4.4.1.2 Të krahasueshme

Në këtë aspekt, me krahasueshmëri kuptohet që primi i llogaritur të jetë i krahasueshëm me nivelin e humbjes/dëmit dhe shpenzimeve të tjera që i siguruari paraqet për bashkësinë.

Megjithëse është e pamundur që kjo të përcaktohet ekzaktësisht, ky është një parim që kërkohet të zbatohet nga siguruesit.

3.4.4.1.3 Ekonomikisht të pranueshme

Siguruesit duhet të llogarisin e zbatojnë prime që konsiderohen ekonomikisht të pranueshme nga tregu, nëse duan që policat të jenë të shitshme. Ky kriter do të thotë, ndër të tjera, se primet nuk duhet të jenë të larta krahasuar me përfitimet që ofrojnë.

3.4.4.2 Elementët e primit

Llogaritja e primit të sigurimit të jetës përfshin shumë faktorë, por 4 prej tyre janë kryesorë:

- shpenzimet e vdekshmërisë,
- të ardhura nga interesi,

- shpenzime për administrimin e taksat, fitimi, dhe
- vijueshmëri.

Këto elementë të llogaritjes së primit influencojnë jo njëtrajtësisht lloje të ndryshme policash.

Psh elementi i të ardhurave nga interesi në investime është më pak i rëndësishëm për policat e jetës me afat, ndërkohë që elementi i mortalitetit është më i rëndësishmi në to.

Në të kundërt, elementi i të ardhurave nga interesi është më i rëndësishmi në policat e jetës me kursim (endowment), dhe elementi i mortalitetit më pak i rëndësishëm.

Çdo element i llogaritjes së primit bazohet në përvojën / të dhënat faktike, zakonisht të vetë siguruesit (nëse baza e të dhënave është e mjaftueshme), por edhe të tregut, burimeve zyrtare statistikore ose risiguruesve.

3.4.4.2.1 Shpenzimet e vdekshmërisë

Është e qartë se përse vdekshmëria është element i llogaritjes së primit. Në bazë të të dhënave të tabelës së vdekshmërisë aktuarët vlerësojnë përvit mundshmërinë e pagesës së përfitimeve për humbje jete dhe në veçanti pjesën e çdo police në shpenzimet për humbje/dëme përmes shpenzimeve të mortalitetit.

Shpenzimet e vdekshmërisë, edhe pse nuk jepen veças në primin e policës, llogariten për çdo individ të siguruar më vehte në bazë të treguesve të moshës dhe gjinisë, dhe mund të korrigjohen me tregues shtesë si konsumi i duhanit, gjendja shëndetësore, etj.

Si një rast interesant i influencës së politikës në shkencë, mund të përmendim që së fundmi, me vendim të Parlamentit Europian, siguruesve të jetës në këto vende u ndalohej të zbatojnë koeficientë të ndryshëm vdekshmërie për meshkujt dhe femrat, duke argumentuar se kjo përbën diskriminim shoqëror. Ndërkohë që në bazë të të dhënave statistikore del e qartë se koeficientët e vdekshmërisë ndërmjet gjinive ndryshojnë konsiderueshëm.

Është me interes të përmendet se në fakt nga ky parashikim ligjor preket negativisht gjinia femërore, pasi individet femra do të paguajnë prim sigurimi të njëjtë me meshkujt, edhe pse statistikisht koeficientët e mortalitetit të gjinisë femërore janë më të ulët.

3.4.4.2.2 Të ardhurat nga interesi

E ardhura nga interesi që i kalohet policës së jetës me kursim është element tjetër i llogaritjes së primit të policës. Kostoja e produkteve të sigurimit mund të varet shumë nga të ardhurat nga investimet. Siguruesit që arrijnë norma të larta interesi nga investimet mund të llogarisin prime më të favorshme se siguruesit e tjerë. Siguruesit të cilët nuk arrijnë të investojnë me norma interesi të mjaftueshme e kanë të vështirë të përballojnë konkurrencën në treg.

3.4.4.2.3 Shpenzimet e policës

Shoqëritë e sigurimit kryejnë shpenzime administrative, marketing-u, marrje në sigurim, trajtim dëmsh, etj., për zhvillimin e veprimtarisë së tyre. Po ashtu, siguruesit paguajnë taksa e detyrime

të ngjashme që llogariten si përqindje ndaj primeve të shkruara (psh, aktualisht në Shqipëri primet e jo-jetës taten me 3.0% taksë sigurimi, ndërkohë që primet e jo-jetës dhe të jetës paguajnë edhe 1.5% detyrim për autoritetin mbikqyrës).

Përveç këtyre, siguresit duhet të akumulojnë rezerva matematike për ngjarje të paparashikuara si edhe të realizojnë fitim për aksionerët e shoqërisë.

Këto detyrime financiare u shpërndahen në mënyrë të përshtatshme policave përkatëse të sigurimit.

3.4.4.2.4 Vijueshmëri

Vijueshmëria është përqindja e policave të sigurimit të jetës që nuk ndërpriten para përfundimit të afatit të tyre (për shkak të anulimit ose heqjes dorë nga polica nga i siguruari).

Anulim në këtë rast konsiderohet ndërprerja e policës së sigurimit për shkak të mospagesës së primit të sigurimit që kërkohet për ta mbajtur policën në fuqi.

Heqje dorë nga polica konsiderohet ndërprerja e policës me kërkesë të të siguarit në këmbim të pagesës së vlerës përkatëse që polica ka në momentin e ndërprerjes.

Vijueshmëria është masa në të cilën siguresi mban në fuqi biznesin. Përgjithësisht, sa më e lartë të jetë vijueshmëria, aq më e madhe është shuma në dispozicion të siguresit për t'u shpërndarë si përfitime të siguruarve dhe fitime aksionerëve. Pra, aq më e suksesshme është veprimtaria e siguresit.

Vijueshmëria nuk është element i policës siç janë shpenzimet e mortalitetit, të ardhurat nga interesi dhe shpenzimet administrative, por është e rëndësishme pasi mjetet financiare që siguresi akumulon nga një portofol policash sigurimi nuk janë saktësisht të barabarta me përgjegjësitë që rrjedhin nga këto polica. Kur mjetet e akumuluar nga një portofol policash sigurimi u shpërndahen përpjestimisht këtyre policave, përftohet pjesa e çdo police në mjete. Pjesa në mjete është një segmentim konceptual i llogarisë së përgjithshme të investimeve të akumuluar për llogari të një portofoli policash, kjo nuk prek polica të veçanta ose detyrimet e siguresit.

Nëse një policë sigurimi jete ndërpritet dhe pjesa e saj në mjete është më e vogël se shuma e pagueshme të siguarit, atëherë ndërprerja e kësaj police përbën një kosto shtesë për siguresin duke zvogëluar direkt rezervat e siguresit. Në të kundërtën, nëse pjesa në mjete është më e lartë se shuma e pagueshme për ndërprerjen, atëherë rezultati i ndërprerjes është pozitiv për siguresin.

Psh, supozojmë se para një viti është lëshuar një portofol policash të njëjta, me prim vjetor 1,000 lekë për policë. Më tej, supozojmë se siguresi ka pasur shpenzime 1,200 lekë për secilën prej policave për rezervën e mortalitetit, shpenzimet administrative e shitjes, etj. (shpenzimet e vitit të parë të policës janë përgjithësisht të larta, ndërkohë që ulen në vitet e tjera).

Kështu, siguresi ka të ardhura 1,000 lekë për policë dhe shpenzime 1,200 lekë (pa marrë parasysh të ardhurat nga interesi) për policë, që rezulton në 200 lekë humbje për policë në llogarinë e siguresit për vitin e parë. Pra, e thënë ndryshe, pjesa në asete e çdo police për vitin e parë është -200 lekë.

Supozojmë se disa prej të siguruarve hoqën dorë nga polica në fund të vitit të parë dhe secilit iu pagua 300 lekë si shumë e pagueshme për ndërprerjen. Kjo shumë 300 lekë paguhet nga mjetet financiare të sigurveit. Pra, secila policë e ndërprerë i ka kushtuar sigurveit 500 lekë (200 + 300), ose më saktësisht i ka kushtuar të siguruarve që nuk i ndërprejnë policat e tyre (ose që kanë vijueshmëri). Sa më i madh të jetë numri i policave të ndërprera të këtij portofoli, aq më e madhe bëhet kostoja që përballojnë të siguruarit që mbeten, pasi pjesa në mjete zvogëlohet me 500 lekë.

Ky është një shembull mjaft i përafërt me realitetin. Është krejt e zakonshme që pjesa në mjete në vitin e parë të policave të jetë me e vogël se shumta e pagueshme për ndërprerjen në fund të vitit të parë, dhe në përgjithësi e njëjta gjë vazhdon për vitet e para të policës (3 - 5 vjet zakonisht). Megjithatë, në vitet e mëvonshme pjesa në mjete tejkalon shumën e pagueshme për ndërprerje dhe diferenca pozitive është përfitim për të siguruarit ekzistues dhe sigurvein.

3.5 Sigurimi i Jetës me Kursim (Endowment)

Endowment është lloji kryesor i jetës me kursim në rajonin tonë.

Kjo për arsyen se, ndërsa nga polica e jetës me afat që paguan vetëm në rast të humbjes së jetës përfitojnë persona të tjerë (jo i siguruari), polica endowment jo vetëm përmban mbrojtje financiare për pasardhësit në rast të humbjes së jetës së të siguruarit gjatë periudhës, por paguan edhe në rastin që i siguruari jeton përtej afati të policës.

Sigurimi Endowment mund të shihet në dy aspekte: (1) koncepti matematik, dhe (2) koncepti ekonomik.

3.5.1 Koncepti Matematik

Në sigurimin endowment sigurvei bën dy premtime të cilat janë reciprocikisht përjashtuese: (1) të paguajë shumën e sigurimit nëse i siguruari humb jetën brenda periudhës së policës, ose (2) të paguajë shumën e sigurimit nëse i siguruari jeton përtej afatit të periudhës së policës.

Premtimi i parë është i njëjtë me atë të një police sigurimi jete me afat me të njëjtën shumë sigurimi dhe të njëjtën periudhë.

Vlerësimi i premtimit të dytë kërkon paraprakisht përshkrimin e konceptit të 'endowment të thjeshtë'. Endowment i thjeshtë premtion të paguajë shumën e sigurimit vetëm në rast se i siguruari jeton në fund të periudhës së dhënë, pa kryer pagesë në rast se ka humbur jetën më parë.

Sigurimi endowment i thjeshtë zakonisht nuk shitet më vehte dhe madje në shumë vende është e ndaluar të shitet si i tillë për shkaqe sociale, duke qenë se nuk paguan asnjë përfitim në rast të humbjes së jetës së të siguruarit para përfundimit të periudhës së policës dhe në këtë rast do të ishin të pavlera të gjitha primet e paguara.

Kështu, në mënyrë që të paguhet përfitim për humbje jete para përfundimit të periudhës së policës, sigurimit endowment i thjeshtë i shtohet sigurimi i jetës me afat për të njëjtën periudhë.

Llogaritja e primit të policës bazohet në këtë koncept të thjeshtë: kostoja e sigurimit të jetës me afat për një periudhë n i shtohet koston e endowment të thjeshtë për të njëjtën periudhë.

$$\text{Sigurimi Endowment} = \text{Sigurimi i Jetës me Afat} + \text{Endowment i Thjeshtë}$$

3.5.2 Koncepti Ekonomik

Koncepti ekonomik e sheh sigurimin endowment si të përbërë nga dy pjesë: sigurimi jete me afat me shumë sigurimi në zbritje dhe sigurim me kursim me shumë sigurimi në rritje.

Pjesa e kursimit i paguhet policëmbajtësit me përfundimin e policës (përmes heqjes dorë nga polica ose përfundimit të afati të policës). Ky aspekt i rritjes së pjesës së kursimit plotësohet me jetën me afat me shumë në zbritje, e cila, duke iu shtuar kursimit të akumuluar është e barabartë me shumën e sigurimit.

3.6 Llogaritjet aktuariale të primeve e të rezervave matematike

3.6.1 E ardhmja për një person të moshës x

Supozojmë se kemi një person me moshë x në momentin zero të kohës nën studim. Vijueshmërinë e të jetuarit të tij në të ardhmen e shënojmë me T ose në mënyrë më eksplicite me $T(x)$. Rrjedhimisht $x + T$ do jetë moshë e vdekjes së këtij personi.[8]

Vijueshmëria e jetës në të ardhmen e një personi është një ndryshore rasti e lidhur me një funksion probabilitar:

$$G(t) = P(T \leq t), \quad t \geq 0 \quad (3.1)$$

Funksioni $G(t)$ do japë probabilitetin që personi do të vdesë brenda t viteve.

Funksioni që një person i moshës $x = 0$ do t'i mbijetojë moshës t quhet funksion i mbijetesës dhe jepet me formulën:

$$s(t) = 1 - G(t) \quad (3.2)$$

3.6.2 Funksionet bazë për llogaritjet aktuariale të sigurimit të jetës

Shënojmë me ${}_tq_x$ probabilitetin që një person i moshës x do të vdesë brenda t viteve. Rrjedhimisht nga formula (3.1) më sipër do të kemi [8]:

$${}_tq_x = G(t) \quad (3.3)$$

Shënojmë me ${}_tp_x$ probabilitetin që një person i moshës x do t'i mbijetojë periudhës prej t viteve. Rrjedhimisht do të kemi:

$${}_tp_x = 1 - {}_tq_x = 1 - G(t) \quad (3.4)$$

Shënojmë me ${}_s|{}_tq_x$ probabilitetin që një person i moshës x do t'i mbijetojë periudhës prej t viteve dhe do të vdesë brenda s viteve pasuese. Rrjedhimisht do të kemi:

$${}_s|{}_tq_x = P(s \leq T \leq s + t) = G(s + t) - G(s) = {}_{t+s}q_x - {}_sq_x \quad (3.5)$$

Pritja matematike e vijueshmërisë në të ardhmen e një personi të moshës x $E(T)$ jepet me formulën:

$$e_x = E(T) = \int_0^{+\infty} t g dt = \int_0^{+\infty} [1 - G(t)] dt = \int_0^{+\infty} {}_t p_x dt \quad (3.6)$$

Forca e vdekshmërisë e një personi të moshës x në moshën $x + s$ shënohet me μ_{x+s} dhe përcaktohet nga barazimi:

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1 - G(t)] = -\frac{d}{dt} \ln[{}_t p_x] \quad (3.7)$$

Bazuar në sa më sipër mund të shkruajmë që

$${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+t} dt} \quad (3.8)$$

3.6.3 Tabela e vdekshmërisë

Supozojmë se duam të shfaqim efektet e funksionit të mbijetesës $s(x)$ në një grup prej n personash. [8] Numri i personave λ_1 të cilët i mbijetojnë moshës 1 vjeç, do të jetë një ndryshore rasti me pritje matematike $E(\lambda_1) = ns(1) = l_1$

Numri λ_2 i personave që i mbijetojnë moshës 2 vjeç do të jetë: $E(\lambda_2) = ns(2) = l_2$

E më tej numri λ_k i personave që i mbijetojnë moshës k vjeç do të jetë:

$$E(\lambda_k) = ns(k) = l_k \quad (3.9)$$

Shënojmë med_x numrin e personave që vdesin midis moshës x dhe $x + 1$:

$$d_x = l_x - l_{x+1} \quad (3.10)$$

Tabela e ndërtuar mbi të dhënat e një grupi prej n personash me rezultatet l_x e d_x sipas formulave (3.9) e (3.10) më sipër do të uhet tabelëvdekshmërie.

Tabelat e vdekshmërisë për një prej produkteve siguruese të shoqërisë së sigurimit të jetës në shqyrtim jepën sipas Tabelës 3.1 më poshtë

Bazuar në sa mësipër, probabiliteti që një i lindur në moshën 0 t'i mbijetojë moshës x , p_x dhe të vdesë pa arritur moshën x q_x të jenë përkatësisht:

$$\begin{aligned} p_x &= \frac{l_{x+1}}{l_x} \\ q_x &= 1 - p_x = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Më tej do të kishim:

$$\begin{aligned} {}_k p_x &= \frac{l_{x+k}}{l_x} \\ {}_k q_x &= 1 - {}_k p_x = \frac{1}{l_x} \sum_{y=x}^{x+k} d_y \end{aligned} \quad (3.12)$$

$${}_s | {}_t q_x = \frac{l_{x+s} - l_{x+s+t}}{l_x} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} d_x &= l_x q_x \\ l_{x+1} &= l_x - d_x \end{aligned} \quad (3.14)$$

Tabelë 3.1: Tabela e vdekshmërisë e shoqërisë së sigurimit të jetës nën shqyrtim

Mosha	Gjinia <i>M</i>		Gjinia <i>F</i>		Mosha	Gjinia <i>M</i>		Gjinia <i>F</i>	
<i>x</i>	<i>l_x</i>	<i>d_x</i>	<i>l_x</i>	<i>d_x</i>	<i>x</i>	<i>l_x</i>	<i>d_x</i>	<i>l_x</i>	<i>d_x</i>
0	10,000	195	10,000	151	51	9,132	42	9,498	24
1	9,805	13	9,849	12	52	9,090	46	9,474	24
2	9,792	10	9,836	9	53	9,044	51	9,450	24
3	9,782	8	9,827	7	54	8,993	56	9,427	24
4	9,773	7	9,820	5	55	8,937	62	9,403	22
5	9,766	5	9,815	3	56	8,875	68	9,380	25
6	9,762	4	9,812	3	57	8,807	75	9,355	29
7	9,757	4	9,809	3	58	8,731	83	9,326	33
8	9,753	4	9,806	2	59	8,648	91	9,294	37
9	9,750	4	9,804	2	60	8,557	100	9,257	42
10	9,746	3	9,802	1	61	8,457	110	9,215	48
11	9,743	3	9,800	1	62	8,348	120	9,167	54
12	9,740	4	9,799	2	63	8,227	132	9,114	61
13	9,737	4	9,797	2	64	8,096	144	9,053	69
14	9,733	6	9,795	2	65	7,952	157	8,984	78
15	9,727	5	9,793	2	66	7,796	155	8,906	88
16	9,722	7	9,790	3	67	7,641	166	8,818	99
17	9,715	8	9,788	3	68	7,475	189	8,719	112
18	9,707	9	9,785	3	69	7,286	210	8,607	125
19	9,698	10	9,781	4	70	7,076	229	8,482	141
20	9,688	12	9,778	5	71	6,847	246	8,341	157
21	9,677	12	9,773	5	72	6,601	260	8,184	176
22	9,665	12	9,768	4	73	6,341	268	8,008	195
23	9,653	12	9,764	4	74	6,073	275	7,813	217
24	9,641	12	9,759	4	75	5,798	279	7,596	232
25	9,630	13	9,755	4	76	5,519	282	7,364	242
26	9,617	13	9,750	5	77	5,238	282	7,122	251
27	9,603	13	9,746	5	78	4,955	290	6,871	267
28	9,590	15	9,741	6	79	4,665	295	6,604	281
29	9,575	16	9,735	7	80	4,370	298	6,322	295
30	9,559	14	9,728	6	81	4,072	300	6,028	308
31	9,545	15	9,722	6	82	3,772	300	5,720	320
32	9,531	15	9,716	6	83	3,472	298	5,400	331
33	9,516	16	9,710	6	84	3,174	294	5,069	340
34	9,500	16	9,704	7	85	2,880	288	4,730	347
35	9,483	16	9,697	7	86	2,591	280	4,383	352
36	9,467	16	9,690	7	87	2,311	270	4,031	354
37	9,451	16	9,683	7	88	2,042	257	3,676	354
38	9,435	16	9,676	8	89	1,785	243	3,323	350
39	9,419	17	9,668	8	90	1,542	226	2,973	343
40	9,402	16	9,660	9	91	1,316	208	2,630	332
41	9,386	17	9,651	10	92	1,107	189	2,298	318
42	9,369	18	9,641	11	93	918	169	1,980	300
43	9,351	19	9,630	12	94	748	149	1,680	278
44	9,331	22	9,617	14	95	599	129	1,402	254
45	9,310	23	9,603	16	96	470	109	1,148	228
46	9,287	25	9,587	16	97	361	91	920	200
47	9,262	28	9,571	16	98	270	74	720	192
48	9,234	31	9,555	16	99	196	86	528	229
49	9,203	34	9,539	16	100	110	110	299	299
50	9,169	38	9,523	24	101	-	-	-	-

3.6.4 Rasti i përfshirjes së dy jetëve

Supozojmë se kemi dy persona në mosha përkatësisht x dhe y , me probabilitet që do mbijetojnë periudhës mbi k vjet përkatësisht ${}_kp_x$, ${}_kp_y$. Shënojmë me ${}_kp_{xy}$ probabilitetin që të dy këta persona do i mbijetojnë periudhës prej k vite dhe me ${}_kq_{\overline{xy}}$ probabilitetin që asnjëri prej tyre nuk do i bijetojë periudhës prej k vitesh. Nëse vijueshmëria e jetës së këtyre personave është e pavarur, atëherë do të kishim[8]:

$${}_kp_{xy} = {}_kp_x {}_kp_y \quad (3.15)$$

$${}_kq_{\overline{xy}} = {}_kq_x {}_kq_y \quad (3.16)$$

Në mënyrë të ngjashme do kishim probabilitetin që te paktën njëri nga të sigurvearit vdes brënda periudhës prej k vite ${}_kq_{xy}$ do të ishte:

$${}_kq_{xy} = 1 - {}_kp_{xy} = {}_kq_x + {}_kq_y - {}_kq_x {}_kq_y \quad (3.17)$$

Dhe probabiliteti që të paktën njëri nga të sigurvearit i mbijeton periudhës prej k vite ${}_kp_{\overline{xy}}$ do të ishte:

$${}_kp_{\overline{xy}} = 1 - {}_kq_{\overline{xy}} = {}_kp_x + {}_kp_y - {}_kp_x {}_kp_y \quad (3.18)$$

3.6.5 Koncepti i Interesit

Në sigurimet e jetës pagesa e primeve (të njëjta ose të ndryshueshme) kryhet paraprakisht, gjë që çon në akumulimin e fondeve të konsiderueshme që janë në dispozicion të sigurvearit për shumë vite para se të përdoren për pagesa përfitimesh. Këto fonde investohen për të përfutur të ardhura që i lejojnë sigurvearit të llogarisë dhe zbatojë prime më të ulëta. Të ardhurat nga interesat e investimeve luajnë rol thelbësor në llogaritjet aktuariale dhe veprimtarinë e shoqërive të sigurimit të jetës[7] [8].

Interesi është çmimi që paguhet për përdorimin e parasë. Investimi fillestar, i njohur si principal (ose kapitali), akumulohet në fund të periudhës së dhënë në vlerën e akumuluar. Interesi i fituar për këtë periudhë të dhënë është diferenca e thjeshtë ndërmjet vlerës së akumuluar dhe principalit.

Shkurtime të termave janë

- i = norma e interesit, zakonisht e shprehur si norma për një vit (vjetore),
- I = shuma e interesit,
- S = shuma e akumuluar,
- A = principal ose vlera e tashme, dhe
- n = numri i periudhave, zakonisht shprehur në vite

Interesi i kredituar ose i paguar ndaj principalit fillestar quhet interes i thjeshtë. Në shumë raste, si në llogaritjen e primeve të sigurimit të jetës, të ardhurat nga interesi i bashkohen gjithashtu principalit fillestar për të gjeneruar interes. Interesi i pashpërndarë që përdoret për të gjeneruar të ardhura shtesë quhet interes i përbërë.

3.6.6 Primet e rezervat matematike

3.6.6.1 Endowment i thjeshtë

Supozojmë se një person i moshës x do përfitojë një shumë S nëse i mbijeton moshës $x + n$ pas n viteve. Atëhere vlera aktuale e pritshme e këtij përfitimi do të jetë: [7] [8]

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = S v^n {}_n p_x = S \frac{v^{x+n} l_{x+n}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+k}}{D_x} \quad (3.15)$$

Ku $v^x l_x$ e shënojmë me D_x dhe $v = \frac{1}{i+1}$ është vlera e skontuar për normën e përfitueshme të interesit i , i cili njihet me emrin interes teknik

Nëse shënojmë me $P_{x:\overline{n}|}^1$ primin e pagueshëm pa përfshirë të tjera shpenzime (primi neto) që duhet të paguajë ky person për përfitimin e vlerës S , atëhere do të kishim:

$$P_{x:\overline{n}|}^1 = \begin{cases} SA_{x:\overline{n}|}^1 & \text{primi paguhet në mënyrë të menjëhershme në fillim} \\ S \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} & \text{primi paguhet në mënyrë vjetore gjatë m viteve} \end{cases} \quad (3.17)$$

ku:

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k {}_k p_x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D_{x+k}}{D_x} = \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{n-1} D_{x+k} = \frac{1}{D_x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} D_{x+k} \right) = \frac{1}{D_x} (N_x - N_{x+n}) \quad (3.18)$$

Janë pagesat vjetore të një njësie gjatë periudhës prej n vitesh të personit në moshën x , dhe $\sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$ e shënojmë me N_x

Ndërkohë primi bruto $GP_{x:\overline{n}|}^1$ ku janë përfshirë edhe shpenzime të tjera siç janë shpenzimet administrative, komisionet e shpenzime të tjera të marrjes në sigurim, do të jetë

$$GP_{x:\overline{n}|}^1 = \begin{cases} SA_{x:\overline{n}|}^1 + e_1 A + e_2 B \ddot{a}_{x:\overline{n}|} & \text{primi paguhet në mënyrë të menjëhershme në fillim} \\ S \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + e_1 A \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + e_2 B \ddot{a}_{x:\overline{n}|} & \text{primi paguhet në mënyrë vjetore} \end{cases} \quad (3.18)$$

Ku e_1, e_2 janë përkatësisht shpenzimet e marrjes në sigurim dhe shpenzimet administrative dhe A, B , mund të jenë primi bruto, shuma e sigurimit apo edhe vlera 1 në varësi të aplikimit të këtyre ngarkesave (si përqindje e primit, si përqindje e shumës siguruese apo vlera fikse përkatësisht).

Nëse duam të llogarisim rezervën matematike bruto apo neto që duhet të ketë shoqëria e sigurimit pas një periudhe të caktuar t , atëhere do të kemi:

$$\begin{aligned} {}_{Net}V_{x:\overline{n}|}^1 &= \begin{cases} SA_{x+t:\overline{n-t}|}^1 - P_{net} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ SA_{x+t:\overline{n-t}|}^1 & t = m, \dots, n \end{cases} \\ {}_{Gross}V_{x:\overline{n}|}^1 &= \begin{cases} SA_{x+t:\overline{n-t}|}^1 - P_{Gross} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + e_1 A \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + e_2 B \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ SA_{x+t:\overline{n-t}|}^1 + e_2 B \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = m, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.6.6.2 Term

Supozojmë se një person i moshës x do përfitojë një shumë S nëse vdes pa arritur moshën $x + n$ në vitin e vdekjes. Atëhere vlera vlera aktuale e prithsme e këtij përfitimi do të jetë.[7] [8:]

$$A^1_{x:\overline{n}|} = S \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} {}_t|q_x = \frac{1}{l_x v^x} S \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+x+1} d_{x+k} = \frac{1}{D_x} S \left(\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+x+1} d_{x+k} - \sum_{k=n}^{\infty} v^{k+x+1} d_{x+k} \right) = S \frac{(M_x - M_{x+n})}{D_x} \quad (3.21)$$

Ku $\sum_{k=0}^{\infty} v^{k+x+1} d_{x+k}$ e shënojmë me M_x

Nëse shënojmë me $P^1_{x:\overline{n}|}$ primin e pagueshëm pa përfshirë të tjera shpenzime (primi neto) që duhet të paguajë ky person për përfitimin e vlerës S , atëhere do të kishim

$$P^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} SA^1_{x:\overline{n}|} & \text{primi paguhet në mënyrë të menjëhershme në fillim} \\ S \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} & \text{primi paguhet në mënyrë vjetore gjatë m viteve} \end{cases} \quad (3.22)$$

Ndërkohë primi bruto $GP^1_{x:\overline{n}|}$ ku janë përfshirë edhe shpenzime të tjera siç janë shpenzimet administrative, komisionet e shpenzime të tjera të marrjes në sigurim, do të jetë

$$GP^1_{x:\overline{n}|} = \begin{cases} SA^1_{x:\overline{n}|} + e_1 A + e_2 B \ddot{a}_{x:\overline{n}|} & \text{primi paguhet në mënyrë të menjëhershme në fillim} \\ S \frac{A^1_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} + e_1 A \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + e_2 B \ddot{a}_{x:\overline{n}|} & \text{primi paguhet në mënyrë vjetore} \end{cases} \quad (3.23)$$

Ku e_1, e_2 janë përkatësisht shpenzimet e marrjes në sigurim dhe shpenzimet administrative dhe A, B , mund të jenë primi bruto, shumta e sigurimit apo edhe vlera 1 në varësi të aplikimit të këtyre ngarkesave (si përqindje e primit, si përqindje e shumës siguruese apo vlera fikse përkatësisht).

Nëse duam të llogarisim rezervën matematike bruto apo neto që duhet të ketë shoqëria e sigurimit pas një periudhe të caktuar t , atëhere do të kemi:

$$\begin{aligned} {}_{Net}V^1_{x:\overline{n}|} &= \begin{cases} SA^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{net} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ SA^1_{x+t:\overline{n-t}|} & t = m, \dots, n \end{cases} \\ {}_{Gross}V^1_{x:\overline{n}|} &= \begin{cases} SA^1_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{Gross} \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + e_1 A \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} + e_2 B \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ SA^1_{x+t:\overline{n-t}|} + e_2 B \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = m, \dots, n \end{cases} \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.6.6.3 Endowment i zakonshëm

Supozojmë se një person i moshës x do përfitojë një shumë S në fund të vitit e vdekjes nëse vdes pa arritur moshën $x + n$, ose në pas n viteve nëse arrin t'i mbijetojë moshës $x + n$. Atëhere vlera vlera aktuale e prithsme e këtij përfitimi do të jetë.[7] [8]:

$$A_{x:\overline{n}|} = S(A_{x:\overline{n}|}^1 + A^1_{x:\overline{n}|}) = S \frac{(M_x - M_{x+n} + M_{x+n})}{D_x} \quad (3.25)$$

Nëse shënojmë me $P_{x:\overline{n}|}$ primin e pagueshëm pa përfshirë të tjera shpenzime (primi neto) që duhet të paguajë ky person për përfitimin e vlerës S , atëhere do të kishim:

$$P_{x:\overline{n}|} = P_{x:\overline{n}|}^1 + P^1_{x:\overline{n}|} = \quad (3.26)$$

Ndërkohë primi bruto $GP_{x:\overline{n}}$ ku janë përfshirë edhe shpenzime të tjera siç janë shpenzimet administrative, komisionet e shpenzime të tjera të marrjes në sigurim, do të jetë:

$$GP_{x:\overline{n}} = GP_{x:\overline{n}}^1 + GP_{x:\overline{n}}^1 = \quad (3.27)$$

Nëse duam të llogarisim rezervën matematike bruto apo neto që duhet të ketë shoqëria e sigurimit pas një periudhe të caktuar t , atëherë do të kemi:

$$\begin{aligned} {}^{\text{Net}}_tV_{x:\overline{n}} &= {}^{\text{Net}}_tV_{x:\overline{n}}^1 + {}^{\text{Net}}_tV_{x:\overline{n}}^1 \\ {}^{\text{Gross}}_tV_x &= {}^{\text{Gross}}_tV_{x:\overline{n}}^1 + {}^{\text{Gross}}_tV_{x:\overline{n}}^1 \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.7 Testi i përfitueshmërisë për kontratën e sigurimit endowment

Llogaritjet e primit në sigurimin e jetës kanë të bëjnë me përfitueshmërinë. Kështu, është shumë e rëndësishme të kryhet testi i përfitueshmërisë për të përcaktuar nëse struktura e propozuar e primit ka gjasa të rezultojë në një normë fitimi të pranueshme [7] [8].

Ka raste në të cilat këto teste rezultojnë në norma fitimi që nuk janë në përputhje me objektivat e shoqërisë.

Po ashtu, edhe nëse rezultatet paraprake duken të pranueshme sipas kriterit të 'skenarit më të mundshëm' (vlerësimi më i mirë nga ana e aktuarit për rezultatet që priten nga investimet, mortaliteti, shpenzimet dhe vijueshmëria), dihet se është thuajse e pamundur që ky skenar të ndodhë. Është e pamundur të vlerësohet e ardhmja.

Sipas parimeve të administrimit të rrezikut dhe administrimit financiar kontributi i pjesshëm i rezultateve të portofoleve individuale është i rëndësishëm për treguesin e fitimit të portofolit agregat të produkteve të siguresit pasi të jetë marrë në konsideratë korelacioni ndërmjet linjave të produkteve/biznesit.

Para se të kryhen llogaritjet agregate të rezultateve, vlerësohet rezultati i produkteve individuale pa marrë në konsideratë faktorët e portofolit. Pra, kryhet vlerësim i veçantë në nivel produkti / linje biznesi.

Testi i përfitueshmërisë përfshin në mënyrë të pashmangshme analizën e ndjeshmërive (sensitiviteteve), që teston produktin sipas disa skenarëve të ndryshëm që mund të ndodhin duke bërë ndryshime të vogla të vazhdueshme në supozimet bazë të llogaritjes së primit.

Siguresit përdorin teknika të ndryshme modelimi për testimin e strukturës së primeve bruto.

Më poshtë po japim pikat kyçe në krijimin e një modeli për testin e përfitueshmërisë

3.7.1 Metodologjia

Metodologjitë e përdorura në testin e përfitueshmërisë i referohen parimeve të përgjithshme të llogaritjeve mbi vlerën e vetë të shoqërisë. Në veçanti, vlerat e matjeve të testit të përfitueshmërisë zgjerohen me produktet e reja duke kryer vlerësimet në përputhje me kushtet e tregut.

Testi i përfitueshmërisë konsiston në ndërtimin e dy blloqeve: Vlerësimi dhe Analiza e rrjedhjes së parasë

3.7.1.1 Vlerësimi

Blloku i vlerësimit mundëson matricën kyçe për testin e përfitueshmërisë. Llogaritjet përfshijnë vlerësimin e biznesit të ri duke përfshirë:

- vlerën e biznesit të ri, vlerën e aktualizuar të biznesit të ri dhe marzhin e biznesit të ri
- ndjeshmëritë kyçe

Përafrimi i vlerësimit varet nga lloji i produktit.

Projektimi si dhe vlera e skontuar kryhen sipas një skenari të caktuar (norma interesi të lira nga rreziku).

3.7.1.1.1 Përafrimi marginal

Përafrimi marginal aplikohet në kontratat me fitim siç është rasti i sigurimit endowment. Vlera e biznesit të ri përllogaritet duke përdorur procese të rastit jepet si:

vlera e portofolit duke përfshirë produktet e reja – vlerën e portofolit pa përfshirë produktet e reja – peshën e biznesit të ri të lidhur me produktet e reja.

3.7.1.1.2 Përafrimi i veçuar (deterministik)

Përafrimi deterministik i veçuar aplikohet për produkte biometrike si edhe produkte pa garanci financiare të mbuluara siç janë kontratat Unit linked Index linked Sigurimi i jetës me afat, paaftësia, apo edhe kursime të tjera me garanci të jashtme:

Vlera e biznesit të ri llogaritet si vlera e aktualizuar e rrjedhës neto të parave të produktit të ri të skontuar me skenarin ekuivalent aktual të sigurtë. Rrjedha neto e parasë llogaritet pas kostos së kapitalit minimal të kërkuar, duke përfshirë kosto të rreziqebe të pabalancueshme dhe kostot përkatëse të kapitalit.

Njësitë e biznesit duke përdorur modele të vlerësimit të vlerës së aktualizuar të fitimeve të të ardhmes plus vlerën neto të aktualizuar të aktiveve EV (të njohur në literaturën aktuariale si Embedded Value), përdor skenarin e sigurt ekuivalent nga llogaritja e fundit e EV. Nëse supozimet ekonomike ndryshojnë në mënyrë shumë domethënëse, një skenar i ri i sigurt ekuivalentduhet përllogaritur.

Përafrimi deterministik i veçuar mund të konsiderohet për produkte me pjesëmarrje në fitim në dy situata: në një periudhë tranzitive, ku një njësi biznesi nuk disponon model o të rastie kur përdorimi i përafrimit marginal nuk arrihen rezultate të kënaqshme siç është rasti i volumit të vogël të produktit të ri.

3.7.1.1.3 Përafrimi i veçuar (rastësor)

Për produkte të tjera me garanci financiare mund të përdoren Përafrime të veçuara të rastit.

3.7.1.2 Analiza e rrjedhës së parase

Blloku i rrjedhës së parase mundëson matrica të tjera ndihmëse për procesin e pranimi të një produkti të përlogaritur në sipozime realiste:

- Projektimi i llogarisë fitim – humbje
- Projektimi i nivelit të kërkuar të marzhit të aftësisë paguese
- Vlera e aktualizuar neto dhe norma e brëndëshme e kthimit të investimeve

Analiza e rrjedhës së parave mund të përdoret për të identifikuar ndjeshmëritë kyçe të portofolit të cilat janë vlerësuar në vijim me metoda të përdorura në bllokun e vlerësimit.

Projektimi kryhet bazuar në supozime realiste (skenari aktual i vlerësimit më të mirë). Skenari i vlerësimit më të mirë del si rezultat i përdorimit të skenarit ekuivalent aktual të sigurt dhe marzhet e aplikueshme të rrezikut për aktivet e rrezikshme. Skontimi bazohet në normat e skontuara të riskut.

Shoqëritë e sigurimit duhet të përdorin norma të interesit të lira nga rreziku duke përdorur skenare të sigurta aktuale, bazuar në rezervat teknike të portofolit dhe humbjet e përealizuara në rastet ku janë të aplikueshme. Primi i pritshëm i rrezikut për aktivet më rrezikshme të lartë nxiren nga grumbullimi strategjik i aktiveve dhe nga primi i pritshëm i rrezikut për çdo kategori aktive.

Identifikimi i ndjeshmërive kyçe të portofolit për produktet e reja bazohet sipas llogaritjeve të një police të vetme me supozimet në varësi të

- Moshës në fillim
- Gjinia
- Periudha e sigurimit
- Shuma e sigurimit
- Sistemi i pjesëmarrjes në fitim (rasti i produkteve tradicional)
- Struktura e ndarjes së primit në fonde të ndryshme (në rastin e policave unit linked)
- Komisionet
- Çështje të tjera të produktit

3.7.2 Supozimet për vlerësimin më të mirë

Supozimet e përdorura në testin e përfitueshmërisë janë në përputhje me supozimet aktuale më të mira të përdorura në llogaritjen e EV (përveç shpenzimeve të marrjes në sigurim). Këto supozime mund të axhustohen në mënyrë që të reflektojnë zhvillimet më të fundit të tregut kur është e mundur, në veçanti në fushën e supozimeve ekonomike.

3.7.2.1 Shpenzimet fillestare

Shpenzimet fillestare të ndryshme nga komisionet mund të ndahen në pjesën fikse e në pjesën e ndryshueshme të saj. Zakonisht, pjesa fikse lidhet me biznesin në fuqi, ndërkohë që pjesa e ndryshueshme lidhet me biznesin e ri. (sipas metodologjisë së EV)

Nga eksperiencia e fundme, pjesa e ndryshueshme mund ta ulë përfitueshmërinë në mënyrë të ndjeshme – duke ditur që procesi për shpenzimet fillestare mund të anashkalohet nga shoqëria e sigurimit. Për të shmangur këtë, këto shpenzime fillestare të ndryshueshme nuk do merren në konsideratë.

Si tregues për impaktin e përdorimit të shpenzimeve fillestare të ndryshueshme për produktet e reja, duhet kryer skenari bazë i bllokut të vlerësimit bazuar në ndryshoret e shpenzimeve fillestare si në llogaritjen e EV.

3.7.3 Supozimet për portofolin e produktit të ri

Shoqëritë e sigurimit duhet të përshkruajnë metodat nëpërmjet të cilave dalin supozimet rreth volumit dhe strukturës së portofolit të policave të shitura gjatë periudhës së projektimit. Në vijim të këtyre supozimeve, shoqëria e sigurimit do kërkojë një balancë midis pritshmërisë së shitjeve prospektive dhe eksperiencës me produkte të ngjashme. Në veçanti qëndrojnë parimet e mëposhtëme në xjerrejn e këtyre supozimeve:

- Volumi i biznesit të ri i projektuar në testin e përfitueshmërisë është në përputhje me të dhënat e departamentit të shitjeve.
- Nëse ka produkte të ngjashme të shitura në të shkuarën, devijimet nga eksperiencia e volumit të shitjeve duhen arsyetuar nëpërmjet referimit në ndryshime të caktuara në produkt apo kushte të tregut, së bashku me qartësimin e impaktit të këtyre ndryshimeve në tregtueshmërinë e produktit të ri.

3.7.4 Rezultatet kyçe

Gjatë testimit të përfitueshmërisë, shoqëritë sigurorese duhet të llogarisin dy bashkësi masash kyçe të efektshmërisë të cilat testohen ndaj kërkesave minimale të procesit të pranimit të një produkti:

- Skenari bazë
- Skenari stress test

Skenari bazë del si rezultat i supozimeve të vlerësimit më të mirë aktual dhe supozimeve në lidhje me volumin e pritshëm dhe strukturën e biznesit të ri në të ardhmen. Skenari Stress test jepet në kombinim me skenarin ekuivalent të sigurtë.

Masat kyçe të efektshmërisë përlllogariten me supozimin që periudha e shitjes për biznesin e ri të jetë të paktën 12 muaj.

3.7.5 Ndjeshmëritë

Gjatë testimit të përfitueshmërisë, shoqëritë sigurorese llogarisn masa kyçe të efektshmërisë të dala si rezultat i analizave të ndjeshmërisë.

Shoqëritë e sigurimit duhet të identifikojnë dhe testojnë ndjeshmëritë të cilat janë jetike për vlerësimin e përfitueshmërisë apo rrezikshmërisë së produkteve të reja. Në identifikimin e këtyre ndjeshmërive, shoqëritë e sigurimit duhet të konsiderojnë kriteret e mëposhtëme

Testimi i policave të veçanta zbulon varësi materiale midis përfitueshmërisë dhe disa supozimeve të cilat nuk janë përfshirë në këto ndjeshmëri; për shembull ndjeshmëria e luhatshërisë appo parametrave të modelit të sjelljes sëpolicëmbajtësit.

Disa supozime janë subjekt i një niveli të jashtëzakonshëm të pasigurisë; përshembull supozime të bazuara në anlaizat e pikave të referimit në vend të analizës mbi eksperiencën.

Natyra e produktit implikon vëmendje speciale në disa fusha supozimesh të cilat janë të mbuluar jo mjaftueshmërisht nga ndjeshmëritë; për shembull ndjeshmëria në ndryshimin e pamjes së kurbës së interesit, apo ndjeshmëria nga rreziku i kreditit për produktet me interes të garantuar, apo ndjeshmëria mbi ndryshimet në strukturën moshore.

Interes i veçantë i duhet treguar përbërjes së portofolit; për shembull ndryshimi midis policëmbajtësve femër apo mashkull.

Për produktet unit- dhe index-linked ndjeshmëria në lidhje me kthimet e komisionet është e detyrueshme

3.7.6 Masat kyçe

Masat kyçe të mëposhtëme janë shumë të rëndësishme në testin e përfitueshmërisë:

- **Vlera e biznesit të ri (VBR):** VBR mat vlerën ekonomike (pas zbritjes së kostove të kapitalit) të policave të shitura në një periudhë kohe specifike
- **Vlera prezente e e primeve të biznesit të ri (VPPBR):** VPPBR mat volumin e biznesit të ri të shitura në një periudhë kohe specifike. Përdoren normat e interesit të lira nga rreziku të dala nga skenari ekuivalent i sigurtë për skontimin.
- **Marzhi i biznesit të ri (MBR):** MBR mat përfitueshmërinë e produktit të ri. Ai është rporti midis VBR dhe VPPBR.
- **Rentabiliteti (R):** R është pika në kohë ku vlera e akumuluar e rrjedhjes së parasë bëhet pozitive.
- **Vlera e aktualizuar neto (VAN):** VAN mat vlerën ekonomike (pas zbritjes së kostove të kapitalit) të policave të shitura në një periudhë kohe specifike duke përdorur një metodë tradicionale të vlerësimit bazuar në vlerën e skontuar të rrezikut. Ajo është vlera e aktualizuar e të gjitha rrjedhjeve të parasë që dalin nga biznesi i ri. Norma e skontuar e përdorur për vlerësimin e VAN është norma e skotuar e implikuar e rrezikut.
- **Norma e implikuar e skontimit (NIS):** NIS është norma e skontuar me të cilën vlera e aktualizuar e rrjedhës neto të parasë barazon vlerën e biznesit të ri duke përdorur metodën e përafrimit të vlerësimit të përshtatshmërisë me tregun.
- **Norma e brëndshme e kthimit (NBK):** NBK është një normë skontimi për të cilën vlera e aktualizuar e rrjedhës neto të parasë, e përlllogaritur sipas një skenari të vlerësimit më të mirë, është e barabartë me zero.

- **Kapitali i përkuar për aftësinë paguese (KAP):** KAP mat kapitalin e rrezikut sipas Solvency II që del si rezultat i biznesit të ri të shkruar në një periudhë kohe të dhënë. Me qëllim testin e përfitueshmërisë KAP llogaritet duke përdorur një përafrim të thjeshtëzuar
- **Oblektivat e përfitueshmërisë dhe limitimet e rrezikut:** për produktet e reja duhen konsideruar dy limitimet e mëposhtëme

MBR në skenarin bazë duhet të jetë minimalisht 2.00%

MBR në skenarin stress test duhet të jetë pozitive

3.8 Ndërtimi i një kontrate sigurimi endowment për shoqëritë shqiptare të sigurimit të jetës

Qëllimi aktuarial për këtë kontratë sigurimi është kryerja e përlllogaritjeve teknike për primin e rezervat matematike sipas kushtëzimeve të saj nga një shoqëri sigurimi jete e marrë në shqyrtim, e më pas kryerja e analizave të testit të përfitueshmërisë [7] [8] [28] [29.]

3.8.1 Llogaritjet për primet e rezervat për kontratën endowment të shoqërisë së sigurimit të jetës

Kushtëzimet e kontratës së sigurimit endowment të shoqërisë së sigurimit të jetës të marrë në shqyrtim janë:

Përshkrimi i mbulimit: kjo kontratë sigurimi mbulon jetën e një personi ose të dy personave, që në vijim do përmenden si një person. Kjo kontratë sigurimi garanton pagesën e nje shume sigurimi në fund të vitit të vdekjes nëse personi vdes brenda periudhës së sigurimit ose në fund të periudhës së sigurimit nëse personi i mbijeton kësaj periudhe.

Kohëzgjatja e mbulimit me sigurim: Kohëzgjatja n e mbulimit me sigurim ndahet në dy pjesë kryesore: pjesa e periudhës së pagesës së primeve m dhe pjesa ku primet kanë pushuar (mbaruar) së paguari $m - n$. Primi do të paguhet që nga fillimi i periudhës së sigurimit deri pas m vitesh. Që nga momenti m deri në fund të periudhës së sigurimit n pra $n - m$ vite nuk do ketë pagesa të primit. Në rast të vdekjes së policëmbajtësit, para përfundimit të periudhës me sigurim n , përfitimi do të paguhet në fund të vitit të vdekjes. pas përfundimit të periudhës me sigurim përfituesi i kontratës siguruese mund të zgjedhë midis marrjes së përfitimit të plotë të sigurimit në mënyrë të menjëherëshme ose përfitimin e asja vlere nëpërmjet disa kësteve. Megjithatë trajtimi i fazës pas fitimit të të drejtës sëpërfitimit nuk analizohet në këtë punim

Kontrata e sigurimit përfundon me pagesën përfundimtare të përfitimit.

Pagesa e primeve:primi paguhet nga policëmbajtësi. Të gjitha shumat përfshirë primin e pagueshëm dhe përfitimin e paguar do të mbahen më monedhën Euro.

Përfitimi: në rast të vdekjes sëpolicëmbajtësit gjatë periudhës së pagesës së primeve ose gjatë periudhës kur ka përfunduar periudha e e pagesës së primeve, përfituesi merr vlerën e plotë të

përfitimit. Nëse i siguruari arrin moshën e fitimit të së drejtës për përfitim, shuma e sigurimit paguhet ose si shumë e plotë ose më këste për

Parime të llogaritjes: Duke konsideruar nivelin e ulët të kthimit të investimeve të shoqërive të sigurimit niveli i interesit teknik në këtë produkt sigurimi është marrë paraprakisht në masën

$$i = 1.6 \%$$

Tabela e vdekshmërisë është Tabela e vdekshmërisë së shoqërisë së sigurimit të jetës sipas Tabelës 3.1 më sipër, probabilitetet e vdekjes brenda një viti të një personi të moshës xq_x , llogariten sipas formulave (3.3), (3.16), (3.17) më sipër në varësi të faktit nëse është një apo dy persona dhe nëse sigurohet ngjara e mbijetesës së të dyve apo deri në vdekjen e të dyve. Këto koeficientë mund të shtohen më koeficientë të ekstravdekshmërisë të cilat vendosen nga një pyetësor i ndërtuar nga marrësit në sigurim si dhe nga analizat mjekësore të të siguarit.

Limitime

Mosha minimale e të siguarit në fillim të periudhës siguruese (vite)	18
Mosha maksimale e të siguarit në fillim të periudhës siguruese (vite)	55
Mosha maksimale e të siguarit në fund të periudhës siguruese (vite)	65
Periudha minimale e sigurimit (vite)	10
Periudha maksimale e sigurimit (vite)	30
Shuma maksimale e sigurimit (euro)	100,000

Primi neto: Primi neto konsiston në dy pjesë, pjesa e kursimit dhe pjesa e vdekjes.

Primi neto për pjesën e vdekjes llogaritet .

$$P_{\text{net}}^D = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

ku:

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = \sum_{i=1}^{n-1} v^{1+i} {}_i|q_x, \quad \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{j=1}^{m-1} v^j {}_j|p_x$$

Primi neto për pjesën e kursimit llogaritet:

$$P_{\text{net}}^S = \frac{A_{x:\overline{n}|}^1}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

ku

$$A_{x:\overline{n}|}^1 = v^n {}_n|p_x, \quad \ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \sum_{j=1}^{m-1} v^j {}_j|p_x$$

Primi neto total është shuma e primeve neto për secilën nga pjesët:

$$P_{\text{net}} = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}} = P_{\text{net}}^D + P_{\text{net}}^S$$

ku

$$A_{x:\overline{n}|} = A_{x:\overline{n}|}^1 + A_{x:\overline{n}|}^1$$

Shpenzimet: shpenzimet vjetore të kërkuara janë $\beta = 8\%$ të primit bruto. Këto shpenzime përfshijnë 4.0% shpenzime administrative, 1.5% shpenzime për Autoritetin Mbikëqyrjes Financiare, dhe 2.5% fitimi i shoqërisë siguruese të jetës. Në rast se $m < n$, shpenzimet do të llogariten:

$$\beta' = \beta \frac{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

Shpenzimet e marrjes në sigurim të cilat do të përfshijnë vetëm komisione janë $\alpha = 6.5\%$ e shumës së primeve të ndara në katër vitet e para të kontratës:

Viti	Komisioni
1	3.3%
2	1.6%
3	1.0%
4	0.6%
5 e më vonë	0%

Atëhere do të kishim

$$\alpha = \frac{\sum_{k=0}^3 \alpha_k v^{k-t} {}_k p_x}{\ddot{a}_{x:\overline{m}|}}$$

kua α_i është komisioni në vitin i

Primi bruto: Primi vjetor bruto P_{gross} llogaritet duke i shtuar primit neto shpenzimet α , dhe β . Rrjedhimisht primi bruto është i barabartë me:

$$P_{\text{gross}} = \frac{P_{\text{net}}}{1 - \alpha - \beta}$$

Rezervat aktuariale: Rezerva matematike e primit neto jepet me formulën

$${}_{\text{Net}}V_x = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{\text{net}} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} & t = m, \dots, n \end{cases}$$

Ndërkohë rezerva matematike mbi primit bruto llogaritet:

$${}_{\text{Gross}}V_x = \begin{cases} A_{x+t:\overline{n-t}|} - P_{\text{Gross}} \ddot{a}_{x+t:\overline{m-t}|} + \sum_{k=t}^3 \alpha_k v^{k-t} {}_k p_{x+t} + \beta' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = 1, \dots, m-1 \\ A_{x+t:\overline{n-t}|} + \beta' \ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|} & t = m, \dots, n \end{cases}$$

Shpenzimet shtesë për mënyrën e pagesës: Nëse pagesa nuk kryhet në mënyrë vjetore, atëherë shtohen shpenzime shtesë mbi primin bruto të sigurimit. Nëse interesi teknik është 1.6% dhe shpenzimet administrative janë 6% të primit bruto, atëherë shpenzimet ekstra mbi primit në varësi të kesteve të pagesës janë:

Periudha e pagesës	Shpenzimet shtesë mbi primin
mujore	1.5%
tremujore	1.1%
gjashtëmujore	0.8%
vjetore	0.0%

Anullimet dhe përfitimi në rast anulimi: nëse policëmbajtësi vendos të anulojë kontratën e sigurimit para përfundimit të saj. Në këtë rast policëmbajtësit i kthehet vlera e rezervave matematike të primit bruto të një viti para anulimit të kontratës duke aplikuar edhe një penalitet g (primi i kthyesëm si më poshtë).

Viti i anulimit	penaliteti(g)
1	100%
2	100%
3	30%
4	20%
5	15%
6	10%
7 e më tej	5%
nëse janë paguar të gjitha primet	5%

Pjesëmarrja në fitim: Në fund të çdo viti financiar, nëse shoqëria e sigurimit të jetës realizon kthim të investimeve të rezervave matematike më të larta se interesi teknik i garantuar në policën siguroese atëherë ajo shpërndan 85% të diferencës së interesit të fituar me interesin e garantuar me policëmbajtësin. Kjo shumë K_t investohet në mënyrë të përvitshme për llogari të policëmbajtësit dhe i shtohet totalit të përfitimit nga polica e sigurimit. Në rast anulimi të kontratës së sigurimit policëmbajtësi e humbet të drejtën e përfitimit të kësaj vlere. E drejta për përfitimin e pjesëmarrjes në fitim lind pas vitit të tretë të sigurimit. Rrjedhimish vlerësimi aktuarial për këtë vlerë do të jetë:

$$K_t = 85\% * {}^{\text{Gross}}_{t-1}V_x * (j - i) \quad t \geq 3$$

Ku jështë interesi i fituar nga investimi i rezervave matematike gjatë vitit

Tabela 3.2 më poshtë jep rezultatet për një të siguar të gjinisë mashkull 35 vjeç me një prim sigurimi vjetor 1,000 euro për një periudhë sigurimi prej 25 vjetësh

Tabelë 3.2: Rezultatet e llogaritjes

Tarifa		llogaritjet	
Gjinia	M	Tabela e vdekshmërisë	Sigal Life
Moshë	25	përqindja	100%
Periudha e sigurimit	20	Interesi teknik	1.60%
Periudha e pagesës së primeve	20	Shpenzime të marrjes në sigurimi viti i parë	66.00%
Primi vjetor	1,000	Shpenzime të marrjes në sigurimi viti i dytë	32.00%
Shuma e siguruar në maturim	19,663	Shpenzime të marrjes në sigurimi viti i tretë	20.00%
shuma e siguruar për vdekjen	19,663	Shpenzime të marrjes në sigurimi viti i katërt	12.00%
koeficienti i pjesëmarrjes në fitim		shpenzime administrative	8.00%
		Extra vdekshmëria	0.0%
Penalitete për mënyrën e pagesës		penalitete për anulimet	
1	0.0%	Viti 1	100%
2	1.8%	Viti 2	100%
4	2.5%	Viti 3	30%
12	3.4%	Viti 4	30%
		Viti 5	30%
		Viti 6	30%
		Viti 7 +	30%
		gjatë periudhës n-m	30%
përfitimi në rast vdekjeje			Primi
viti	përfitimi në rast anulimi	përfitimi në fund në rast mos pagimi primi	
0	19,662.88		a _{x:n}
1	19,662.88	278.93	a _{x:m}
2	19,662.88	954.51	A _{x:n}
3	19,662.88	1,080.46	Primi neto
4	19,662.88	1,883.63	shpenzimet e marrjes në sigurim
5	19,662.88	2,805.08	shpenzimet administrative
6	19,662.88	3,838.90	kostot fikse
7	19,662.88	4,984.17	primi bruto
8	19,662.88	5,931.37	
9	19,662.88	6,894.70	
10	19,662.88	7,874.41	
11	19,662.88	8,871.81	
12	19,662.88	9,886.71	
13	19,662.88	10,919.76	
14	19,662.88	11,970.86	
15	19,662.88	13,040.34	
16	19,662.88	14,129.00	
17	19,662.88	15,236.85	
18	19,662.88	16,364.18	
19	19,662.88	17,511.56	
20	19,662.88	19,662.88	

3.8.2 Testi i përfitueshmërisë për produktin endowment të shoqërisë së sigurimit të jetës

Qëllimi i këtij projekti është të paraqesë një model rrjedhje të parasë dhe (në fazën e parë) të përdorë model rrjedhje të parasë standarde për të kontrolluar përfitueshmërinë e produkteve të sigurimit të jetës.

Supozimet për normën e interesit të lirë nga rreziku: Bazuar në eksperiencën e zhvillimit të kthimit të investimeve në monedhën Euro, duhen kryer supozimet për normën reale të lirë nga rreziku (forward rates)

Supozimet për shpenzimet faktike: Megjithëse shpenzimet e kontratës janë konsideruar në masën 8%, shpenzimet faktike për efekt të testit të përfitueshmërisë janë marrë në masën 6%.

Supozimet për anulimet: Bazuar në eksperiencën e deritanishme të portofolit endowment niveli i anulimeve në vite jepet:

Viti 1	2.00%
Viti 2	16.00%
Viti 3	10.00%
Viti 4	5.00%
Viti 5	3.00%
Viti 6+	2.00%

Niveli i vdekshmërisë: niveli i vdekshmërisë është konsideruar në masën 90% të vdekshmërisë së përdorur në llogaritjen e primeve e të rezervave.

Volumi i biznesit: volumi i biznesit gjatë vitit të parë të sigurimit bazuar në eksperiencën e deritanishme të sigurimit endowment, si edhe faktit që uljen e interesit të garantuar në policën e sigurimit, është konsideruar në masën 80 kontrata

Llogaritja e primeve dhe rezervave: Primet neto dhe bruto si dhe rezervat matematike të primit neto dhe bruto për secilën nga të dhënat llogariten sipash përshkrimeve të paragrafit 3.8.1

Llogaritjet për rrjedhën e parasë të të dhënave: rrjedha e parasë përtë dhënat llogaritet duke përdorur supozimet e mësipërme

Hyrjet janë:

- të ardhurat nga primet
- të ardhurat nga investimi

Daljet janë:

- komisionet (fillestar, rinovimit),
- pagesa për përfitime (heqje dorë nga polica, humbje e jetës, maturimi, anuitete),
- shpenzime (fillestare, rinovimi, shpenzime trajtimi kërkesash për dëmshpërblim, shpenzime për raste heqje dorë nga polica, shpenzime maturimi),
- ndryshimi në rezervë (rritja e rezervës ka shenjë pozitive; ulja e rezervës ka shenjë negative kështu që konsiderohet hyrje),
- ndryshimi në shpenzimet e marrjes në sigurim të shtyra në kohë.

Për llogaritjen e rrjedhës së parasë janë të nevojshëm këta elementë

- të dhëna të policës
- numri i policave
- zbritje
- normat ekonomike vjetore
- primi
- komisioni
- rezerva
- e ardhura nga investimi
- pjesëmarrja në fitim
- shpenzime të marrjes në sigurim të shtyra në kohë
- përfitime

Gjithashtu, këtu përllogariten edhe Kapitali për Aftësinë Pagueuese dhe Marzhi i Biznesit të Ri.

Rrjedha e parasë duhet të konsiderojë edhe elementët e Solvency II të cilësuar me sipërRrezikun i marrjes në sigurim të jetës përllogaritet në përputhje me kërkesat e Solvency II, nënmodulet e tjera (psh rrezikun i tregut) përafrohen bazuar në faktorë e llogaritjeve të përgjithshme.

Bazuar në këto supozime rezultojnë që vlera e MBR të jetë 3.7% për skenarin bazë dhe 2.1% për skenarin stress test.

Pra ky produkt rezultojnë me përfitueshmëri për t'u hedhur në treg.

3.9 Përfundime

Bazuar në limitimet në kontratat e sigurimit Endowment pasi u kryen analiza e produktit dhe testi i përfitueshmërisë bazuar në standartet ndërkombëtare dhe literaturën Aktuariale, u arrit në konkluzionin që norma e interesit teknik të apikueshëm mbi këtë produkt nuk mund të jetë më i lartë se **1.6%**

BIBLIOGRAFIA

- [1.] The leveled chain ladder model for stochastic loss reserving Glen Meyers
- [2.] Stochastic modeling theory and reality from an actuarial perspective International Actuarial Association
- [3.] Measuring the variability of chain ladder reserve estimates Thomas Mack
- [4.] Claim reserving with R: Chainladder – 0.2.0 Package Vignete Alessandro Carrato, Markus Gesmann, Dan Murphy, Mario Wurthrich and Wayne Zhang (04/03/2015)
- [5.] Nonlife actuarial models theory, methods and evaluation Yiu-Kuen Tse
- [6.] Loss models from data to decision fourth edition Stuart A. Klugman, Harry H. Panjer, Gordon E. Willmot
- [7.] Life Insurance fourteenth edition Kenneth Black, Jr., Harold D. Skiper, Kenneth Black III
- [8.] Life insurance mathematics third edition Hans U. Gerber
- [9.] M. H DeGroot, M. J. Schervish, (2002), Probability and Statistics, 3rd edition
- [10.] R.V. Hogg, A.T. Craig (1995), Introduction to Mathematical Statistics, 5th edition,
- [11.] N. L. Johnson, S. Kotz, (1969), Distributions in Statistics: Discrete Distributions
- [12.] N. L. Johnson, S. Kotz, (1970) Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-I.
- [13.] S. Ross, (2006), A First Course in Probability, 7th edition,
- [14.] Roger J. Gray, Susan M. Pitts “Risk modeling in general insurance: From Principles to Practice
- [15.] D’arcy, Stephen P. (1989) “On becoming an actuary of the third kind” Proceedings of the casualty Actuarial Society
- [16.] Commeau, N., Parent, E., Delignette-Muller, M.-L., and Cornu, M. (2012). Fitting a lognormal distribution to enumeration and absence/presence data. International Journal of Food Microbiology.
- [17.] D’Agostino, R. and Stephens, M. (1986). Goodness-of-Fit Techniques. Dekker, 1st edition.
- [18.] Delignette-Muller, M., Pouillot, R., Denis, J., and Dutang, C. (2014). fitdistrplus: Help to Fit of a Parametric Distribution to Non-Censored or Censored Data. R package version 1.0-2.
- [19.] Kohl, M. and Ruckdeschel, P. (2010). R Package distrMod: S4 Classes and Methods for Probability Models. Journal of Statistical Software.
- [20.] Mal_a, I. (2013). The use of _nite mixtures of lognormal and gamma distributions. Research Journal of Economics, Business and ICT.
- [21.] Autoriteti i mbikëqyrjes Financiare, Raportet Vjetore e Legjislacioni www.amf.gov.al
- [22.] **Zacaj O.**, Dharmo E., (2011): Modele dëmesh: Metoda statistikore në modelimin e dëmeve që lindin nga kontratat e sigurimit, Konferenca Kombëtare Universiteti Politeknik i Tiranës, 28 Tetor 2011 (Prezantim oral ISBN: 978-9928-124-28-9 fq 30)
- [23.] **Zacaj O.**, Dharmo E., (2012): Statistical methods in modelling losses deriving from insurance contracts, Application to Albanian motor insurance data, Information Systems and Technology Innovation: their application in Economy Conference (ISTI 2012) , Tirana, June 8-9 , 2012 (Poster, Proceedings ISBN: 978-9995-6377-8-1, fq.60) http://www.conference.ijisint.org/Conference_Agenda_ISTI2012.pdf
- [24.] Haxhi K. **Zacaj O.**, (2012): Aplikime të modeleve të rrezikut në rezervën e dëmeve [Application of risk models in claims reserving], Takimii VII vjetor Shkencor Nderkombetar,

- IASH 2012 Shkup, 29-31 Gusht 2012 (Poster ISBN: 978-608-65463-0-4, fq 441) http://iash-takimet.org/tv2012/programi/programi_natyra.pdf
- [25.] **Zacaj O.**, Haxhi K. (2012): Shkallët Bonus-Malus: Një diskutim lidhur me trajtimet alternative për tarifat e segmentuara [Bonus-Malus Scales: A Discussion on Alternative Approaches in Segmented Tariffs] Takimii VII vjetor Shkencor Ndërkombëtar, IASH 2012 Shkup, 29-31 Gusht 2012 (Poster ISBN: 978-608-65463-0-4, fq 398) http://iash-takimet.org/tv2012/programi/programi_natyra.pdf
- [26.] Haxhi K. **Zacaj O.**, (2012): The dependence described by Copulas in the reinsurance treaties, "1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA 2012, Prishtinë, Kosovo, September 3-7, 2012 (Poster, fq.345) <http://2012.iecmsa.org/dosyalar/abstractbook2012.pdf>
- [27.] **Zacaj O.**, Haxhi K., (2012): Applications to Markov Chains: Introducing a Bonus – Malus model for the MTPL Portfolio in Albania, "1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA 2012, Prishtinë, Kosovo, September 3-7, 2012 (Poster, fq.358) <http://2012.iecmsa.org/dosyalar/abstractbook2012.pdf>
- [28.] **Zacaj O.**, Dhamo E., (2013): Endowment Assurance – Principles, and Technical Assumptions and Notes from an actuary point of view, 1-st International Eastern Balkan Conference of Mathematical Sciences (IËBCMS), 30 Maj-1 Qershor 2013, Elbasan (Oral presentation, Proceedings ISBN: 978-9928-115-27-0, fq....)
- [29.] **Zacaj O.**, Dhamo E., (2013), : Endowment Assurance – Principles, and Technical Notes and Assumptions, International Journal of Science, Innovation and New Technology, (IJSINT), July 2013, Vo.1-No 7/ 2013, ISSN: 2225-0751 (online ISSN 2225-0751) <http://www.ijshint.org/documents/IJSINT-no.-7-2013.pdf>
- [30.] **Zacaj O.**, Dhamo E., (2015): Trial Modelling For MTPL Claims In Albania, Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 6, June - 2015 (ISSN: 3159-0040, fq 1479) <http://www.jmest.org/ep-content/uploads/JMESTN42350826.pdf>
- [31.] **Zacaj O.**, Dhamo E., Shehu Sh. (2015): Modeling Individual Claims for Motor Third Party Liability of Insurance Companies in Albania International Journal of Innovation in Science and Mathematics Volume 3, Issue 3, May 2015 (ISSN (Online): 2347–9051, fq174), http://ijism.org/administrator/components/com_jresearch/files/publications/IJISM_410_Final.pdf
- [32.] Swiss Re Sigma, World Insurance 2014: Back to Life