

REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK – TIRANË
FAKULTETI INXHINIERISË MATEMATIKE & INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

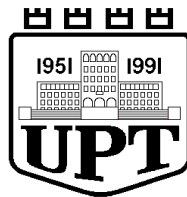
PROGRAMI I STUDIMIT: Statistikë dhe Kërkime Operacionale

TEZË DOKTORATURE

**METODA PËR VLERËSIMIN E REZERVAVE TEKNIKE
TË DËMEVE NË SIGURIMIN E DETYRUESHËM**

Doktoranti:
Kleida HAXHI

Udhëheqësi:
Prof. Dr. Shpëtim SHEHU



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK – TIRANË
FAKULTETI INXHINIERISË MATEMATIKE & INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

i

Paraqitur nga

M.Sc. Kleida Haxhi

Për marrjen e gradës

Doktor

Specialiteti: Statistikë dhe Kërkime Operacionale

Tema: Metoda për vlerësimin e rezervave teknike të dëmeve në
sigurimin e detyrueshëm

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Shpëtim Shehu

Mbrohet më datë ____/____/2015 para jurisë:

1. Prof.Asoc. Dr. Luela PRIFTI Kryetar, Oponent
2. Prof. Dr. Shpëtim LEKA Anëtar,
3. Prof.Dr. Viktor KABILI Anëtar, Oponent, i jashtëm
4. Prof. Dr. Fatmir HOXHA Anëtar, i jashtëm
5. Prof. Dr. Thoma MITRE Anëtar, i jashtëm

PËRMBAJTJA

	FALENDERIME	iii
	HYRJE	iv
Kapitulli 1	DISA ASPEKTE TË MENAXHIMIT TË RISKUT NË KOMPANITË E SIGURIMIT TË JO-JETËS	7
1.1	Primet e sigurimit	7
1.2	Rezervat teknike të primeve	7
1.3	Risigurimet	9
1.4	Dëmet dhe rezervat teknike të dëmeve	10
1.4.1	Raportimi i dëmit	10
1.4.2	Kohëzgjatja e një dëmi	11
1.4.3	Të dhënat e përdorura nga aktuari	12
1.4.4	Dëmet e mëdha	12
1.4.5	Risigurimi	13
1.4.6	Kostot e trajtimit të dëmeve	13
1.4.7	Ekspozimi i të dhënave	13
1.4.8	Raportimi dhe njohja e të dhënave	14
1.4.9	Verifikimi i të dhënave	14
1.4.10	Të dhënat kryesore	15
1.4.11	Avantazhet e të dhënave të vitit kalendarik	16
1.4.12	Llojet e rezervave teknike	16
Kapitulli 2	FORMULIMI I MODELIT BAZË TË SHPËRNDARJES SË DËMEVE	17
2.1	Metodat e shkallëzimit zinxhir	17
2.2	Modelet më të përdorura	18
2.2.1	Modeli i mbi shpërndarë i Poisson-it	18
2.2.2	Modeli Binomial Negativ	19
2.2.3	Përafrimi i shpërndarjes normale me modelin binomial negativ	20
2.2.4	Modeli i Mack	21
2.2.5	Modeli log-Normal	21
2.2.6	Modeli Gama	22
2.2.7	Modele të tjera	22
2.3	Modele të tjera parametrike	22
2.3.1	Modeli i Wright	22
2.3.2	Modelet Bayesiane	24
2.3.3	Metoda Bayesiane bazuar në numrin e dëmeve dhe koston mesatare për dëm	25

Kapitulli 3	METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR MACK DHE	28
	VARIABILITETI I SAJ	
3.1	Analiza fillestare e metodës së shkallëzimit zinxhir	28
3.2	Analiza e faktorëve të zhvillimit	30
3.3	Matja e variabilitetit të dëmeve të fundit	32
3.4	Kontrolli i supozimeve bazuar në të dhënat e dëmeve	35
Kapitulli 4	METODA E RAPORTIT PROGRESIV	56
4.1	Formulimi i modelit	56
4.2	Vlerësimet e parametrave të modelit	57
4.3	Analiza e variabilitetit	57
4.3.1	Gabimi standard i raportit progresiv të dëmeve	57
4.3.2	Gabimi standard për një vit aksidenti	58
4.3.3	Gabimi standard total	58
4.3.4	Aplikim (Haxhi, K., Xhaja, B. 2015)	59
Kapitulli 5	METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR MUNICH	62
5.1	Supozime mbi modelin (Quarg, G.; Mack, T. 2008)	63
5.1.1	PE - supozimi për pritjen matematike	63
5.1.2	PV – supozimi për dispersionin	63
5.1.3	PU – supozimi i pavarësisë	64
5.1.4	IE - supozimi për pritjen matematike	64
5.1.5	IV – supozimi për dispersionin	64
5.1.6	IU – supozimi i pavarësisë	64
5.2	Shkallëzimi zinxhir Munich	65
5.2.1	Supozimet mbi modelin (Quarg, G.; Mack, T. 2008)	65
5.3	Zbatim praktik (Haxhi, K., Baholli, B. 2015)	68
5.3.1	Parametrat e shkallëzimit zinxhir standard	68
5.3.2	Parametrat e shkallëzimit zinxhir Munich	69
Kapitulli 6	METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR TË DYFISHTË	80
6.1	Shkallëzimi zinxhir i dyfishtë	80
6.2	Vlerësimet për RBNS dhe IBNR	83
6.3	Modeli parametrik – Bootstrap (England, P. and Verrall, R. 1999)	89
6.4	Procedura Bootstrap për shkallëzimin zinxhir të dyfishtë (Haxhi, K., Baholli, B. 2015)	91
6.4.1	Procesi i dispersionit – gabimi stokastik	91
6.4.2	Procesi i dispersionit dhe gabimet e vlerësimit të parametrave	91
	Referencat	
	Anekset	
	Bibliografia	

FALENDERIME

Dëshiroj të falenderoj udhëheqësin tim, Prof. Dr. Shpëtim Shehu për mbështetjen e tij të vazhdueshme, këshillat dhe nxitjen për të kërkuar gjithmonë më të mirën në ndërtimin e këtij punimi. Falenderoj Bledar Bahollin dhe Brikena Xhajën për ndihmën e çmuar. Gjithashtu një falenderim shkon dhe për gjithë kolegët e mi të cilët më kanë ndihmuar me vërejtjet dhe këshillat e tyre.

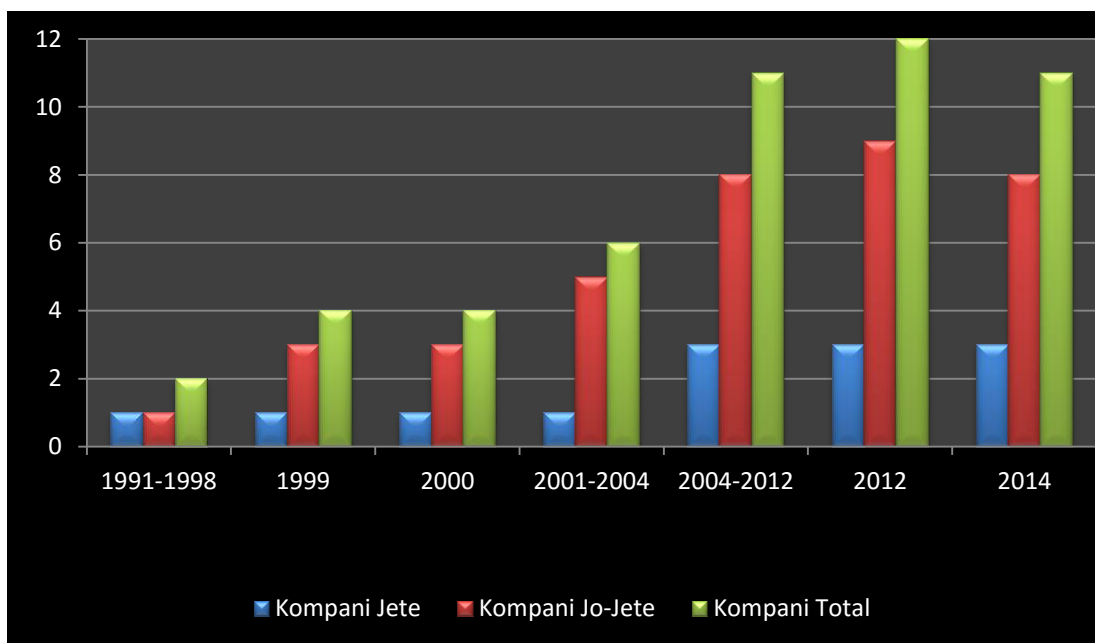
Falenderoj aktuaren e shoqërisë së sigurimit Albsig dhe njëkohësisht kolegen tonë Etleva Dulja për mundësimin e të dhënave të sigurimit motorik të detyrueshëm.

H Y R J E

Aktiviteti i sigurimit të jo jetës është aktiviteti kryesor në fushën e sigurimeve në Shqipëri. Sot në Shqipëri operojnë 8 kompani sigurimi të jo jetës. Klasat e sigurimit të jo jetës janë:

- Sigurimi i aksidenteve përfshin plagosjet industriale dhe sëmundjet profesionale.
- Sigurimi i sëmundjeve mbulon të ardhura fikse financiare nga paaftësia shëndetësore si dhe rimbursimin e shpenzimeve të trajtimit spitalor
- Sigurimi i mjeteve tokësore (të ndryshme nga ato që lëvizin mbi shina) mbulon dëmtimet ose humbjet nga mjetet tokësore motorike dhe mjete tokësore jo motorike
- Sigurimi i mjeteve lëvizëse mbi shina mbulon dëmtimet ose humbjet nga mjetet lëvizëse mbi shina.
- Sigurimi i avionëve mbulon dëmtimet ose humbjet e pësuar nga mjetet ajrore.
- Sigurimi i anijeve mbulon dëmtimet ose humbjet e pësuar nga anijet lumore dhe të kanaleve; anijet e liqeneve; anijet detare.
- Sigurimi i mallrave në transport (përfshirë mallra, bagazhe dhe të gjitha llojet e tjera të sendeve) mbulon të gjitha dëmtimet ose humbjet e mallrave gjatë transportit ose bagazhet, pavarësisht nga mënyra e transportit.
- Sigurimi nga zjarri dhe forcat e natyrës mbulon dëmtimin ose humbjen e sendeve të ndryshme nga ato të përfshira në pikat 3-7 të shkaktuara nga: zjarret, shpërthimet, stuhitë, forcat e natyrës, energjia nukleare, shkarja e tokës.
- Sigurimi i dëmtimeve të tjera të pasurisë mbulon të gjitha dëmtimet ose humbjet në pasuri (të ndryshme nga ato që përfshihen në pikat 3-7) kur dëmi është shkaktuar nga breshëri ose nga ngrica dhe çdo ngjarje e tillë, si vjedhja, të ndryshme nga ato të pikës 8.
- Sigurimi i përgjegjësive civile nga përdorimi i automjeteve mbulon të gjitha përgjegjësitë që lindin nga përdorimi i automjeteve mbi tokë (përfshirë përgjegjësitë e transportuesit).
- Sigurimi i përgjegjësive civile nga përdorimi i avionëve mbulon të gjitha përgjegjësitë që lindin nga përdorimi i avionëve (përfshirë përgjegjësitë e transportuesit).
- Sigurimi i përgjegjësive civile për anijet (detare, të liqeneve dhe të lumenjve, si dhe ato të kanaleve) mbulon të gjitha përgjegjësitë që lindin nga përdorimi i anijeve ose barkave, që lundrojnë në dete, liqene, lumenj dhe kanale lundrimi (përfshirë përgjegjësitë e transportuesit).
- Sigurimi i përgjegjësive civile të përgjithshme mbulon të gjitha përgjegjësitë, përveç atyre të përmendura në pikat 10-12.
- Sigurimi i kreditit mbulon rrezikun e mos pagesës për shkak të paaftësisë paguese, kreditë e eksportit, kreditë e shlyera me këste, kreditë hipotekore, kreditë bujqësore.

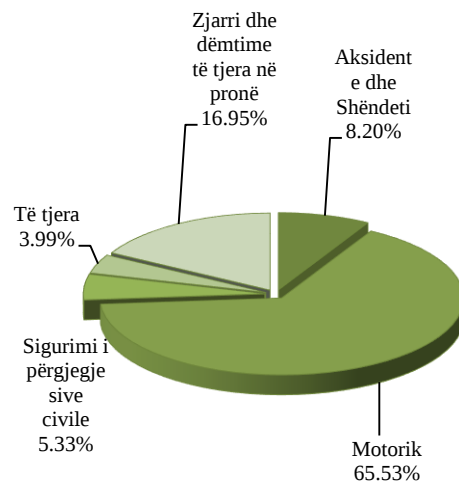
- Sigurimi i garancive mbulon garancitë e drejtpërdrejta dhe ato të tërthorta
- Sigurimi i humbjeve të ndryshme financiare mbulon humbjet financiare të shkaktuara si pasojë e: rrezikut në punësim, pamjaftueshmërisë së të ardhurave, motit të keq, humbjes së të ardhurave, shpenzimeve të përgjithshme të paparashikuara, shpenzimeve tregtare të paparashikuara, humbjes së vlerës në treg, humbjes nga qiratë ose të ardhurat, humbjes nga tregtimi, humbjeve të tjera financiare.
- Sigurimi i mbrojtjes ligjore mbulon shpenzimet për shërbimet ligjore dhe ato gjyqësore.
- Sigurimi i asistencës ndihmon personat që kanë vështirësi gjatë udhëtimeve ose në çaste të tjera të largësisë nga shtëpia ose vendbanimi i përhershëm.



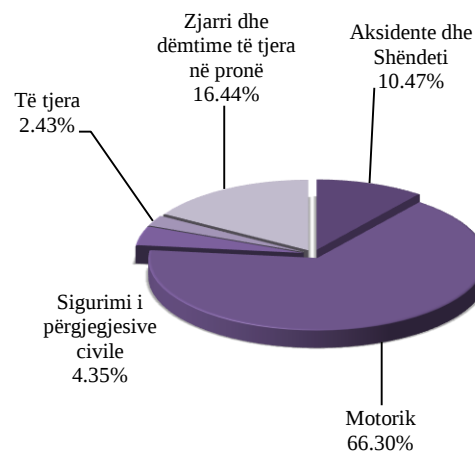
Grafik 1: Numri i kompanive të sigurimit që operojnë në Shqipëri

Sigurimi kryesor në Shqipëri, që përbën rreth 65-70% të sigurimeve totale të jo jetës është klasa 10 ose sigurimi i përgjegjësiwe civile nga përdorimi i automjeteve që mbulon të gjitha përgjegjësitë që lindin nga përdorimi i automjeteve.

Grafik 2: Ndarja e primeve të shkruara sipas produkteve për vitin 2014



Grafik 3: Ndarja e primeve të shkruara sipas produkteve për gjashtëmuajorin e parë të vitit 2015



Në këtë punim trajtohen disa metoda të vlerësimit të rezervave teknike të dëmeve që rrjedhin nga ky sigurim. Të dhënat janë marrë nga dy kompani sigurimi të jo jetës dhe konsistojnë në databazën 5-10 vjeçare të dëmeve të këtyre kompanive.

Kapitulli 1. DISA ASPEKTE TË MENAXHIMIT TË RISKUT NË KOMPANITË E SIGURIMIT TË JO-JETËS

Menaxhimi i riskut është tërësia e rregullave dhe metodave të ndryshme që përdoren nga kompania e sigurimit për identifikimin, vlerësimin, monitorimin dhe menaxhimin e rreziqeve të mundshme, me qëllim shmangien e humbjeve financiare. Llojet e risqeve në një kompani sigurimi janë të shumëllojshme, si:

- Risku i marrjes në sigurim
- Risku i kreditit
- Risku i risigurimeve
- Risku operacional
- Risku i rezervimit
- Risku i likuiditeteve
- Risku i këmbimit
- Risku i investimeve

Disa nga çështjet kryesore që lidhen me menaxhimin e riskut janë përgjegjësi e drejtpërdrejtë e aktuarit:

1.1 Primet e sigurimit

Primi i sigurimit të jo jetës përbëhet nga:

- Primi i rrezikut
- Pjesa e llogaritur për mbulimin e shpenzimeve të marrjes në sigurim dhe shpenzimeve administrative
- Pjesa e llogaritur për fitimin e kompanisë

Primi i rrezikut është pjesa e primit e llogaritur për pagimin e dëmeve dhe llogaritet duke u bazuar në historikun e dëmeve të kompanisë

1.2 Rezervat teknike të primeve

Provizioni teknik i primit të pafituar UPR përfaqëson ato pjesë të primit të paguara kompanisë së sigurimit të pa aplikuar ende për mbulimin e policës. Prandaj, vlera përkatëse do të aplikohet për mbulimin e policës në periudhat e mëvonshme.

Rezerva teknike e primit të pafituar duhet përcaktuar në veçanti për çdo policë në fuqi. Kjo interpretohet si pjesë e primit të shkruar që i përshtatet periudhave të tjera financiare, proporcional me të gjithë periudhën për të cilën primi është shkruar. Nëse është e paarsyeshme të supozohet se rreziku i sigurimit nuk është shpërndarë në mënyrë uniforme, vlera e UPR duhet të jetë proporcionale me rrezikun që i përshtatet periudhave në të ardhmen më tepër sesa shtrirja e kësaj periudhe. Nga ana tjetër, nëse supozimi për shpërndarjen uniforme të rrezikut është i justifikueshëm, provigjoni teknik i primit të pafituar duhet të përlogaritet për çdo policë në fuqi sipas formulës së mëposhtme:

$$UPP_i = P_i * \frac{(\text{ditë të mbetura nga dita e fundit të muajit të policës})}{(\text{ditë gjithsej të policës})}$$

Nëse, në bazë të të dhënave empirike, supozimi i shpërndarjes uniforme nuk është i justifikuar, llogaritja e UPR bëhet disi më e komplikuar. Formula e përgjithshme e përdorur për të përfutur rezervën teknike për primin e pafituar mund të shprehet si më poshtë:

$$UPR = P * f(n, m)$$

ku:

UPR – provigjoni teknik i primit të pafituar

P – primi i shkruar

$f(n, m)$ – shpërndarja kumulative e humbjeve në periudhën e mbulimit të policës

n – periudha totale e mbulimit të policës

m – periudha e mbulimit të policës nga dita e llogaritjes së policës deri në ditën e përfundimit së policës.

Në rastin e një shpërndarjeje uniforme të numrit të kontratave gjatë vitit, f mund të shkruhet si:

$$f(n, m) = \frac{m}{n}$$

Në rastin e akumulimit të rrezikut në periudhën e shkurtër përpara skadimit të policës f mund të përfaqësohet me:

$$f(n, m) = 1$$

Në rastet e tjera $f(n,m)$ duhet të llogaritet në mënyrë empirike duke përdorur vlerat historike të dëmeve të ndodhura apo të paguara (është më mirë të përdoren dëmet e ndodhura, por nëse të dhënat në dispozicion të kompanisë janë të papamjaftueshme për vlerësimin e tyre atëherë duhen përdorur dëmet e paguara). Kjo mund të arrihet duke përdorur çdo metodë standarte të shpërndarjes – probabilitetit maksimal, hi katror apo çdo metodë tjetër statistikore. Është e mundur gjithashtu që thjesht të llogaritet probabiliteti mesatar i një dëmi që ndodh në çdo periudhë, p.sh. muaji apo tremujori, kushtëzuar nga një dëm që ndodh gjatë vitit, duke përdorur të dhëna historike.

1.3 Risigurimet

Mbulimi maksimal i kompanisë së sigurimit për çdo rrezik të siguruar nuk mund të tejkalojë 10 për qind të vlerës së kapitalit. Kompania e sigurimit nuk mund të sigurojë përgjegjësi, të cilat tejkalojnë mbulimin maksimal të saj. Ajo është e detyruar të risigurojë në një kompani risigurimi pjesën e rreziqeve të siguruara që tejkalojnë mbulimin maksimal.

Disa nga llojet kontratave të risigurimeve janë:

- ✓ Jo Proporcionale
 - Tejkalim i humbjes (Excess of Loss XOL)
 - Ndalimi i humbjes (Stop Loss)
- ✓ Proporcionale
 - Ndarja në pjesë (Quota Share)
 - Tepricë (Surplus)

Risigurimi i portofoleve me rreziqe të varuara dhe ndarja e rrezikut midis ceduesit dhe risiguruesit shprehet në termat e pritjes matematike dhe dispersionit të totalit të dëmeve të mbajtura nga kompania dhe atyre të ceduara në risigurim. Varësia midis ndryshoreve të rastit shpeshherë mund të përshkruhet nga Copulat (Nelsen, R.B., 1999). Analiza bëhet në mënyrë që të përcaktohen kombinimet optimale të marrëveshjeve të ndryshme të risigurimit, duke u bazuar në kriterin pritje matematike-dispersion.

Për portfolet e sigurimit motorik ndaj palëve të treta marrëveshjet më të përdorura janë Quota Share për grupin e proporcionaleve dhe tejkalimi i humbjes ose Excess of Loss (XOL) për jo proporcionale. Ndërsa primi i cedimit për marrëveshjet proporcionale vendoset në bazë të përqindjes së përcaktuar në kontratë, për XOL ka metodologji të ndryshme për të përcaktuar çmimin e risigurimit me rreziqe të ndryshme sipas parimeve të axhustimit të primeve (Haxhi, K., Xhaja, B., 2013). Kompanitë e sigurimit normalisht vlerësojnë marrëveshjet e risigurimit bazuar

në hipoteza realiste. Kur vlera totale e dëmeve gjeneron shpërndarje diskrete, ka rezultuar se transformimet PH (Proportional Hazards) gjithmonë japin një vlerë më të vogël të primit fillestar të rrezikut (Haxhi, K., Zaçaj, O., 2012)

$$f(x) = x^{\frac{1}{\rho}}$$

ndërkohë që primi më i lartë jepet nga transformimet me fuqi të dyfishtë.

$$f(x) = 1 - (1 - x)^{\delta}$$

1.4 Dëmet dhe rezervat teknike të dëmeve

Gjendja financiare e një kompanie sigurimi nuk mund të përcaktohet saktësisht pa vlerësimin e rezervave teknike. Rezervat teknike të dëmeve përbëjnë përgjegjësitë e siguresit për dëmet e papaguara një një periudhë të caktuar kohore. Si specialistët e dëmeve, si aktuarët kanë përgjegjësi që lidhen me parashikimet e dëmeve të papaguara të kompanisë. Elementët që përbëjnë dëmin e papaguar janë:

- Dëmet pezull (RBNS)
- Rezervat për pagesat e ardhshme të dëmeve të njohura
- Vlerësimet për dëmet e rihapura
- Rezerva për dëmet e ndodhura, por të paraportuara IBNR, si dhe rezerva për dëmet “transit” (të ndodhura dhe të raportuara, por të parregjistruara)

Specialistët e dëmeve janë përgjegjës për përllogaritjen e vlerave të dëmeve pezull, për dëmet e raportuara, këto përllogaritje janë “dëmet e papaguara” dhe “dëmet e vlerësuara”. Ndërkohë që vlerësuesit e dëmeve përllogarisin dëmet pezull, aktuari është përgjegjës për llogaritjen e komponentëve të tjerë të totalit të dëmeve të papaguara.

1.4.1 Raportimi i dëmit

Procesi i trajtimit të një dëmi nis kur i siguruari raporton te siguresi një ngjarje apo dëm. Raportimi bëhet sipas mënyrave të përcaktuara në kontratën e sigurimit. Më pas vlerësuesi i dëmeve përcakton nëse ky dëm i raportuar është i mbuluar apo jo sipas kushteve të kontratës. Hapet dosja e cila përmban të dhënat e nevojshme mbi dëmin dhe llogaritet vlera e dëmit pezull. Disa nga këto të dhëna që janë të rëndësishme dhe për aktuarin janë:

- Data e fillimi dhe e mbarimit të policës
- Data e ngjarjes
- Kushtet dhe përjashtimet e kontratës
- Vlera e dëmit
- Limitet e policës
- Pjesa e zbritshme
- Risigurimi

Vlera e dëmit llogaritet në momentin e hapjes së procedurave, por kjo vlerë mund të ndryshojë në varësi të rivlerësimit apo të informacioneve shtesë. Pjesa që i takon risiguruesit në rastin kur dëmi tejkalon mbajtjen e kompanisë përcaktohet bazuar në marrëveshjen e risigurimit. Kur risigurimi është proporcional (Quota Share) pjesa e siguruesit është në proporcion me përqindjen e vendosur nga marrëveshja, ndërsa në rastin kur kemi marrëveshje risigurimi jo proporcionale tejkalim të humbjes (XOL) pjesa e siguruesit është totali i vlerës së dëmit minus pjesën që i takon risiguruesit.

1.4.2 Kohëzgjatja e një dëmi

Një dëm mund të ketë një kohëzgjatje deri në disa vite. Kemi shembullin e një police sigurimi një vjeçare të lëshuar në 1 dhjetor 2013 deri në 30 nëntor 2014. Supozojmë që dëmi ndodh në 15 nëntor 2014 dhe siguruesi nuk merr njoftim deri në datë 20 shkurt 2015, më shumë se dy muaj pas përfundimit të vlefshmërisë së policës. Duke nisur nga data 20 shkurt 2015, data e raportimit të dëmit, vlerësuesi (specialist i dëmeve) të kompanisë do të kryejë një sërë procedurash që përfshijnë:

- Vlerësimin fillestar të dëmit
- Njoftimin e risiguruesit nëse dëmi e kalon mbajtjen e siguruesit
- Pagesë e pjesshme e palës së dëmtuar
- Ndryshimet në vlerën fillestare
- Pagesën e dëmit (përfundimtare)
- Mbylljen e procedurës
- Rihapjen e dëmit dhe përcaktimin e vlerës së re
- Pagesën e pjesshme për mbrojtjen në çështjet gjyqësore
- Pagesa finale e dëmit
- Pagesa finale për mbrojtjen në çështjet gjyqësore
- Mbyllja e dëmit

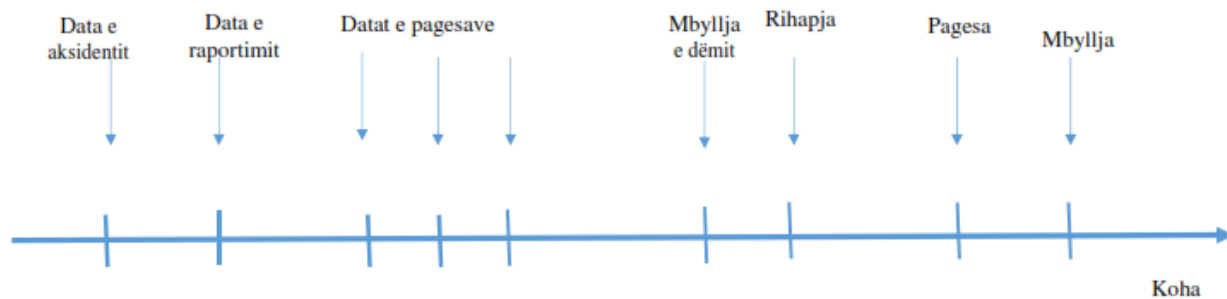


Tabela 1: Kohëzgjatja e dëmit

1.4.3 Të dhënat e përdorura nga aktuari

Dëmet dhe numri i tyre - Aktuarët përdorin disa lloje të dhënash për përcaktimin dhe vlerësimin e dëmeve të papaguara të kompanisë, në varësi të metodës së përdorur, si p.sh.

- Dëmet e paguara progresive
- Dëmet e paguara akumulative
- Pagesat për dëmet e rihapura
- Dëmet pezull
- Dëmet e raportuara
- Dëmet e raportuara progresive
- Numri i dëmeve të raportuara
- Numri i dëmeve të paguara
- Numri i dëmeve të hapura
- Numri i dëmeve të rihapur

Tek vlerat e dëmeve duhet të përfshihen dhe shpenzimet e lidhura me trajtimin e dëmeve. Gjithashtu dëmet të ndryshme mund të kenë monedha të ndryshme, sipas policës së sigurimit. Aktuari duhet të llogaritë rezervat e dëmeve sipas monedhave të ndryshme të përdorura.

1.4.4 Dëmet e mëdha

Dëmet e mëdha influencojnë teknikat e ndryshme të vlerësimit të rezervave. Një pjesë e dëmeve të mëdha janë dëme që tejkalojnë mbajtjen e kompanisë dhe pjesërisht paguhen nga risiguruesi. Në përgjithësi vlerat e dëmeve të mëdha konsiderohen outliers dhe përjashtohen nga projeksionet fillestare. Këto dëme merren në konsideratë dhe shtohen në fund të analizës në mënyrë që të merret një vlerësim i plotë dhe sa më i saktë. Përcaktimi i kriterit të masës për dëmet e mëdha nuk është një shkencë e saktë. Ky përcaktim varion sipas linjave të biznesit, nga rajoni, madje edhe nga analizat e dëmeve të papaguara në vite. Në përcaktimin e kufirit të dëmeve të mëdha merren në konsideratë të dhënat e mëposhtme:

- Masa e dëmit në raport me limitet e policës së sigurimit
- Numrin e dëmeve mbi kufirin e caktuar për çdo vit
- Masa e dëmit në raport me limitet e risigurimit
- Besueshmëria e të dhënave të brendshme të kompanisë në lidhje me dëmet e mëdha, si dhe vlefshmëria e të dhënave të jashtme

Një prej pikave të nisjes për përcaktimin e dëmeve të mëdha është informacioni që merret nga departamenti i dëmeve të kompanisë. Ky departament duhet të përpilojë raporte që gjurmojnë eksperiencat e dëmeve që kalojnë një kufi të caktuar. Megjithatë përkufizimi i një dëmi të madh mund të ndryshojë nga këndvështrimi i aktuarit dhe i atij të departamentit të dëmeve.

1.4.5 Risigurimi

Gjatë analizës së dëmeve të ceduara apo neto të papaguara, duhet të merret parasysh programi i risigurimeve dhe efekti i tij mbi dëmet. Programet në fuqi dhe të mëparshme të risigurimit dhe mbajtjet e kompanisë ndikojnë direkt vlerësimin e dëmeve të papaguara, prandaj duhen analizuar si dëmet bruto, ashtu dhe dëmet neto nga risigurimet. Në disa vlerësime analiza kryhet veçmas, pra analizohen veç dëmet bruto dhe veç dëmet e ceduara në risigurim. Vlera e dëmit neto përcaktohet si diferencë ndërmjet dëmeve bruto të dhe dëmeve të ceduara në risigurim. Mund të analizohen veç dëmet bruto dhe veç dëmet neto. Vlera e dëmit të ceduar në risigurim përcaktohet si diferencë ndërmjet dëmeve bruto të dhe dëmeve neto. Për linjat e biznesit që nuk kanë cedime në risigurim nuk ka ndryshim midis dëmeve bruto dhe neto, prandaj dhe analizat e veçanta në këtë rast nuk janë të nevojshme.

1.4.6 Kostot e trajtimit të dëmeve

Ka tre mënyra të alokimit të kostove të trajtimit të dëmeve.

- Të përfshira në vlerën e dëmeve
- Të papërfshira në vlerën e dëmeve
- Të përfshirë me bazë pro rata

Alokimi i kostove të trajtimit të dëmeve ndikon në ndjeshëm në metodologjinë e vlerësimit të rezervave të dëmeve pezull.

1.4.7 Ekspozimi i të dhënave

Disa teknika që përdoren për llogaritjen e rezervave të dëmeve pezull kërkojnë një masë të ekspozimit të dëmit. Lloji më i zakonshëm i ekspozimit që përdoret në teknikat e vlerësimit është primi i fituar. Lloje të tjera të ekspozimit që përdoren mund të jenë: primi i shkruar, numri i

policave në forcë, limitet e policave sipas rajoneve, numri i automjeteve të siguruar (për sigurimin motorik), si dhe pagat e punonjësve.

Në shumë raste për aktuarin është e nevojshme të axhustojë primet historike në nivelet aktuale të primeve. Ekzistojnë dy mënyra të përdorura nga aktuarët për këtë nivelim të primeve. Mënyra e parë kërkon riklasifikimin e ekspozimeve historike në nivelet aktuale, kërkon ushtrim kompiuterik intensive dhe nuk është e vlefshme për të gjitha situatat. Një mënyrë e dytë është përdorimi i përmbledhjes së ndryshimeve në nivel mbi priudhën e eksperiencës së dëmeve dhe axhustimi i primeve për ndryshimet e niveleve historike. Ka shumë raste kur aktuari nuk është në gjendje të mbledhë informacione të besueshme në lidhje me ndryshimet e niveleve dhe duhet të përdorë të dhënat e primit të paaxhustuar. Si rezultat aktuarët përdorin baza ekspozimi të vrojtuar, të cilat besojnë se janë të lidhura ngushte me riskun dhe për pasojë me dëmet.

1.4.8 Raportimi dhe njohja e të dhënave

Për aktuarin është shumë e rëndësishme të ketë informacion të plotë mbi të dhënat e gjeneruara nga sistemi i informacionit. Departamente të ndryshme mund të përdorin të njëjtin term që nënkupton dëme të ndryshme. Termi “dëme të papaguara” ka kuptime të ndryshme për departamente të ndryshëm. Për financën dëm i papaguar (ose rezervë) i referohet llogaritjes së rezervës së dëmeve, duke përfshirë dëmet pezull dhe IBNR. Për departamentin e dëmeve, raportimet ku tregohen dëmet e papaguara ose rezervat, i referohen vetëm rasteve pezull. Gjithashtu aktuari duhet të dijë nëse në vlerën e dëmeve janë përfshirë dhe shpenzimet e trajtimit të dëmeve.

Numri i dëmeve është një informacion i rëndësishëm që përdoret në disa metoda të llogaritjes së rezervave teknike. Numërimi i dëmeve mund të jetë i nevojshëm në përfundimin e procesit të vlerësimit kur aktuari vlerëson dhe seleksionon një vlerë përfundimtare të rezervës. Në këtë kuadër për një aksident automobilistik duhet qartësuar nëse do të konsiderohen pagesa për mbulime shumëfishe (mbulime trupore, fizike, psikologjike, morale), pra dëm i shumëfishtë ose dëm i vetëm.

Një problem tjetër është dhe rihapja e dëmeve. Çështja shtrohet nëse praktikë e rihapur do të trajtohet si dëm i ri apo jo. Dëmet e rihapura mund të jenë të rëndësishme për disa linja biznesi, si kompensimi dhe përfitimi nga aksidentet. Është thelbësore që për përlllogaritjet e sakta të rezervave të dëmeve të identifikohen qartë të dhënat specifike që ekzistojnë dhe të verifikohen.

1.4.9 Verifikimi i të dhënave

Një analizë e bazuar në informacione të pasakta dhe jo të plota mund të prodhojë rezultate të gabuara. Standartet aktuariale përcaktojnë procedura të përshtatshme për të verifikuar që

informacioni i përdorur është i besueshëm dhe i mjaftueshëm për qëllimin e kërkuar. Rishikimi dhe verifikimi i të dhënave kërkon komponentët e mëposhtëm:

- Përputhshmëria me të dhënat e departamentit të financës dhe të departamentit të dëmeve
- Përputhshmëria me të dhënat e mëparshme
- Arsyeshmëria e të dhënave
- Përkufizimi i të dhënave - terma të njëjtë mund të kenë kuptime të ndryshme. Aktuari duhet të dijë se cilat janë vlerat e paracaktuara për çështje të caktuara. Nëse vlera e paracaktuar përdoret në mungesë të informacionit të saktë, atëherë elementi i të dhënave mund të mos jetë i besueshëm për qëllimet e analizës.

Ndërkohë që verifikimi i të dhënave është thelbësor për çdo analizë aktuariale, pjesë e procesit duhet të jetë dhe dokumentimi i saktë i procesit të verifikimit.

1.4.10 Të dhënat kryesore

Të dhënat të rëndësishme për llogaritjen e rezervave janë edhe:

- Të dhënat efektive të policës
- Data e aksidentit
- Data e raportimit
- Data e kontabilizimit
- Data e vlerësimit

Datat efektive të policës janë datat e fillimit dhe të përfundimit të vlefshmërisë së policës së sigurimit. Data e aksidentit është data kur ka ndodhur ngjarja e sigurimit ose dëmi. Data e raportimit është data që dëmi i është raportuar sigurvearit dhe regjistruar në sistemin e dëmeve. Disa sisteme mund ta ndajnë këtë informacion në dy data: atë të raportimit dhe të regjistrimit. Madje mund të ketë dhe një datë të tretë: data e njoftimit. Data e njoftimit zakonisht përkufizohet si data në të cilën sigurveari vihet në dijeni të ndodhjes së aksidentit dhe që mund të rezultojë në një dëm të mundshëm. Por data e njoftimit nuk është një e dhënë që përdoret gjerësisht nga aktuari.

Data e kontabilizimit është data që përcakton regjistrimin në financë në grupin e dëmeve të produktit që i takon. Data e vlerësimit është data në të cilën vlera e dëmit përfshihet në bazën e të dhënave që përdoret për vlerësimin e rezervave, pavarësisht se kur aktuari e kryen këtë vlerësim. Kjo datë mund të jetë më parë, mund të koinçidojë ose më pas datës së kontabilizimit. Aktuarët zakonisht i bëjnë vlerësimet në fund të tremujoreve, të gjashtëmujorit dhe vitit.

1.4.11 Avantazhet e të dhënave të vitit kalendarik

Një nga avantazhet kryesore të të dhënave të vitit kalendarik është se nuk ka zhvillime të mëtejshme. Vlera mbetet fikse dhe nuk ndryshon me kalimin e kohës siç ndodh me dëmet dhe ekspozimet progressive të bazuara në vitin e aksidentit, vitin e lidhjes së policës së sigurimit apo në vitin e raportimit. Një tjetër avantazh i të dhënave të vitit kalendarik është se ato janë të gatshme, për faktin se raportimi financiar kryhet në bazë të vitit kalendarik dhe janë lehtësisht të aksesueshme për aktuarët.

1.4.12 Llojet e rezervave teknike

Kompania e sigurimit krijon dhe mban gjatë aktivitetit të saj rezerva teknike për të mbuluar përgjegjësitë e nënshkruara dhe humbjet që rrjedhin nga policat e sigurimit. Rezervat teknike llogariten bruto në përputhje me legjislacionin në fuqi. Kompania e jo jetës krijon rezerva teknike për primet dhe për dëmet, si dhe rezerva teknike të tjera.

- *Rezervat teknike për primet përbëhen nga:*
 - Rezervë për primin e pafitur UPR
 - Rezervë për rrezikun e paskaduar URR
- *Rezervat teknike për dëmet përbëhen nga:*
 - Rezervë për dëmet pezull RBNS
 - Rezervë për dëmet e ndodhura, po të paraportuara IBNR
 - Rezerva të tjera

Rezervat teknike llogariten nga aktuari i kompanisë dhe raportohen në autoritetin përkatës të mbikëqyrjes të firmosura nga ai. Llogaritja e këtyre rezervave është përgjegjësi direkte e aktuarit.

Kapitulli 2. FORMULIMI I MODELIT BAZË TË SHPËRNDARJES SË DËMEVE

2.1 Metodat e shkallëzimit zinxhir

Metoda e shkallëzimit zinxhir është një nga metodat më të njohura dhe më të përdorura në vlerësimin e rezervave të dëmeve ka si bazë një algoritëm deterministik, po në vite janë kryer zhvillime stokastike.

Në bazën e këtyre metodave të vlerësimit të rezervave të dëmeve janë trekëndëshat e zhvillimit. Forma e paraqitjes dhe ndërtimi i tyre është i thjeshtë dhe bazohet në databazën e dëmeve. Përdorimi i trekëndëshave shmang përdorimin e informacioneve të tjera.

$$\{C_{ij}: i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, n-i+1\}$$

Indeksi i shënojmë që i referohet rreshtave shënohen vitet e ndodhjes së dëmit apo të pagesës dhe me j shënojmë që i referohet kolonave shënohen vitet e zhvillimit ose vonesat.

Shënojmë D_{ij} dëmet e akumuluar

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^j C_{ik}$$

Faktorët e zhvillimit të teknikës së shkallëzimit zinxhir i shënojmë

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}}$$

Faktorët e zhvillimit aplikohen tek dëmet e fundit të akumuluar të çdo rreshti $D_{i,n-i+1}$ dhe japin parashikimin për vlerat e ardhshme të dëmeve të akumuluar

$$\hat{D}_{i,n-i+2} = D_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+2}$$

$$\hat{D}_{i,k} = \hat{D}_{i,k-1} \hat{f}_k, \quad k=n-i+3, n-i+4, \dots, n$$

Teknika e shkallëzimit zinxhir në thjeshtësinë e saj përcakton parashikime për dëmet e fundit, që mund të interpretohet si vonesa më e fundit e vëzhguar dhe nuk përfshin faktorët e mëtejshëm “tail”.

Nga pikëpamja statistikore pas vlerësimit pikësor, hapi tjetër është përcaktimi i masës së variabilitetit ose gabimi i vlerësimit, që përcaktohet nga devijimi standard i shpërndarjes së rezultatit të rezervave të mundshme.

Viti i aksidentit	Vitet e zhvillimit j										
i	0	1	2	3	4		j				n-i+1
0											
1											
2											
⋮											
⋮											
i											
⋮											
⋮											
n-2											
n-1											
n											

Tabela 2.1: Trekëndëshi i zhvillimit dhe parashikimi i dëmeve

Hapi i parë në përcaktimin e gabimit të parashikimit a është formulimi i modelit bazë duke bërë supozimet mbi të dhënat. Në qoftë se do të ndërtojmë një model të ngjashëm me shkallëzimin zinxhir, është e natyrshme që vlerat e parashikimeve të jenë të njëjtat me ato të shkallëzimit zinxhir. Për këtë ka dy mënyra: të specifikohet shpërndarja e të dhënave ose të specifikohen dy momentet e para.

2.2 Modelet më të përdorura

2.2.1 Modeli i mbi shpërndarë i Poisson-it

Shpërndarja e Poisson-it mbi shpërndarë ndryshon nga shpërndarja e Poisson-it pasi dispersioni nuk është i barabartë me pritjen matematike, por është në proporcion me të. Në rezervën e

dëmeve model i Poisson-it i mbi shpërndarë bazohet në supozimin se dëmet C_{ij} janë ndryshore rasti të pavarura me pritje matematike dhe dispersion (Wüthrich, M.V., Merz, M. 2008)

$$E[C_{ij}] = m_{ij} = x_i y_j \text{ dhe } D[C_{ij}] = \phi x_i y_j$$

ku

$$\sum_{k=1}^n y_k = 1$$

x_i është dëmi i fundit i pritur (i fundit do të thotë deri në vitin e fundit të vëzhguar tek trekëndëshi), y_j është pjesa e dëmit të fundit që shfaqet në çdo vit zhvillimi. Mbi shpërndarja futet nëpërmjet parametrin ϕ , i cili është i panjohur dhe vlerësohet nga të dhënat. Duke lejuar mbi shpërndarjen nuk cënohet vlerësimi i parametrave, por mund të ndikojë në rritjen e devijimit standard të tyre. Duke qënë se y_j shfaqet tek dispersioni, imponon automatikisht faktin që është pozitiv dhe si rrjedhim dëmet progresivë në kolonën j duhet të jenë gjithashtu pozitive. Kjo përbën kufizim të modelit. Dëmet progresive lejohen me kushtin që shuma e kolonës të mos jetë negative.

Pritja matematike ka një strukturë multiplikative, është prodhim i efektit të rreshtave dhe të kolonave. Duke qënë se rreshtat dhe kolonat përfaqësojnë interpretime specifike (janë përkatësisht dëmet e pritura në çdo vit origjine dhe pjesa e dëmeve të fundit që shfaqet në çdo vit zhvillimi) është e nevojshme që shpeshherë të mbahet modeli në këtë formë. Për lehtësi vlerësimi shpesh është më mirë të riparametrizohet modeli, në këtë mënyrë pritja matematike ka formë lineare. Në terminologjinë e modeleve të përgjithshme lineare, përdoret funksioni log link

$$\log(m_{ij}) = c + \alpha_i + \beta_j$$

Kjo strukturë parashikimi paraqet disavantazhe. Si model i përgjithshëm linear është i lehtë të vlerësohet, në disa raste vlerat e parametrave mund të jenë të vështirë për t'u interpretuar. Megjithëse ky model bazohet në shpërndarjen e Poisson-it, kjo nuk do të thotë që është i përshtatshëm vetëm për të dhëna me vlera pozitive. Ky kufizim mund të kapërcehet duke përdorur një përjasje të “pothuaj-përgjasisë”, që mund të aplikohet tek të dhënat me vlera jo të plota, pozitive dhe negative. Me pothuaj - përgjasinë, përgjasia është e njëjtë si përgjasia e Poisson-it deri në një konstante proporcionale. Pra supozimi kryesor në këtë model është që dispersioni është propocional me pritjen matematike dhe të dhënat nuk janë të kufizuara në vlera të plota pozitive.

2.2.2 Modeli Binomial Negativ

Një model që është shumë i lidhur me modelin e Poisson-it të mbi shpërndarë është modeli binomial negativ. Është më intuitive për shkallëzimin zinxhir, pasi parametrat duken “të ngjashëm” me faktorët e zhvillimit të shkallëzimit zinxhir. Modeli binomial negativ mund të shprehet si një model për secilin nga dëmet progresivë ose akumulativë; C_{ij} ka shpërndarje binomial negative të mbi shpërndarë me pritje matematike dhe dispersion përkatësisht

$$(\lambda_j - 1)D_{i,j-1} \text{ dhe } \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$$

ku λ_j është e ngjashme me faktorët e zhvillimit të shkallëzimit zinxhir. Tek dispersioni ka një parameter të panjohur ϕ , duke e bërë shpërndarjen Poisson të mbi shpërndarë. Duke ditur që $D_{ij}=D_{i,j-1} + C_{ij}$ dhe $D_{i,j-1}$ supozohet e njohur. Që këtë mund të shkruajmë këtë model në lidhje me dëmet e akumuluar, D_{ij} ka shpërndarje binomial negative të mbi shpërndarë me pritje matematike dhe dispersion përkatësisht

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ dhe } \phi\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$$

Modeli binomial negativ është derivur nga modeli Poisson, shpërndarja e parashikimeve në thelb është e njëjta dhe jep vlera të njëjta (Verrall, R., Nielsen J.P. and Jessen A.2010).

2.2.3 Përafrimi i shpërndarjes normale me modelin binomial negativ

Në formulën e mësipërme, në qoftë se $\lambda_j < 1$, dispersion rezulton negative. $\lambda_j < 1$ do të thotë që shumica e dëmeve progresive në kolonën j është negative. Për këtë arsye, është i nevojshëm përdorimi i një shpërndarjeje që nuk kufizohet vetëm në zonën reale positive dhe më e përshtatshme është Normalja. Si hap i parë zëvendësohet shpërndarja binomiale negative me shpërndarjen normale, ku pritja matematike është e pandryshuar, por dispersioni ndryshohet për të sistemuar rastin kur $\lambda_j < 1$. Për të ruajtur sa më shumë të jetë e mundur $\lambda_j(\lambda_j - 1)D_{i,j-1}$ duhet të supozojmë që dispersioni të jetë në proporcion me $D_{i,j-1}$, me një konstante proporcionaliteti që varet nga j . Duke përdorur një përafrim normaleje për shpërndarjen e dëmeve progresivë, C_{ij} ka shpërndarje përafërsisht normale me pritje matematike dhe dispersion përkatësisht

$$D_{i,j-1}(\lambda_j - 1) \text{ dhe } \phi D_{i,j-1}$$

ose D_{ij} ka afërsisht shpërndarje normale me pritje matematike dhe dispersion përkatësisht

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ dhe } \phi D_{i,j-1}$$

në rastin kur $D_{i,j-1}$ është i njohur dhe një qasje rekursive për të vlerësuar dispersionin në rastin kur dëmet e akumuluar janë të parashikuara.

Këto modele kanë parametra të panjohur tek dispersioni, të cilët mund të vlerësohen duke përdorur procedurë iterative të vlerësimit e quajtur “modelim i përbashkët”, për faktin që përfshin parametra për pritjen matematike dhe dispersionin dhe ndryshon nga praktikat e zakonshme që modelojnë vetëm pritjen matematike (Verrall, R., Nielsen J.P. and Jessen A.2010)

Të dy modelet, binomial negative dhe përafrimi i normales janë modele rekursive. Kjo do të thotë që përgjasia shkruhet sipas një rregulli të caktuar.

2.2.4 Modeli i Mack

Një nga modelet stokastike më të hershme që jep vlerësime të shkallëzimit zinxhir është ai i Mack (Mack, T.,1993), i cili bën supozime të kufizuara mbi shpërndarjen e të dhënave, duke specifikuar vetëm dy momentet e para. Sipas Mack pritja matematike dhe dispersioni D_{ij} janë përkatësisht:

$$\lambda_j D_{i,j-1} \text{ and } \sigma_j^2 D_{i,j-1}$$

Modeli i Mack prodhon vlerësime të parametrave λ_j e σ_j^2 dhe duke bërë supozime të mëtejshme, siguron formula për gabimin e parashikimit të pagesave të ardhshme dhe për vlerësimin e rezervave të dëmeve.

Një nga avantazhet e modelit të Mack është fakti që shpërndarja e të dhënave nuk është e përcaktuar. Por ky fakt e kufizon analizën në dy momentet e para dhe janë të nevojshme supozime të tjera për të bërë një analizë të plotë të rezervave të dëmeve. Krahësimi i pritjes matematike dhe dispersionit të D_{ij} në modelin e Mack me pritjen matematike dhe dispersionin D_{ij} të normales së përafëruar tregon ngjashmërinë mes tyre, parametri i panjohur ϕ_j i normales zëvendësohet nga σ_j^2 të Mack.

2.2.5 Modeli log-Normal

Punime të hershme në modelimet stokastike për teknikat e shkallëzimit zinxhir janë fokusuar në logaritmin e shumës së dëmeve progresivë $Y_{ij} = \log(C_{ij})$ dhe klasën e modeleve log-Normale $Y_{ij} = m_{ij} + \varepsilon_{ij}$, ku ε_{ij} janë gabimet e rastit të pavarura,

$$\varepsilon_{ij} \sim \text{IN}(0, \sigma^2) \text{ ose } Y_{ij} \sim \text{IN}(m_{ij}, \sigma^2)$$

Përdorimi i transformimeve logaritmike imponon një kufizim të kësaj klase modelesh, vlera e dëmeve progressive duhet të jetë pozitive. Y_{ij} supozohet të shpërbëhet në një komponent deterministik me pritje matematike $m_{ij}=n_{ij}$ dhe me komponentë të gabimit të rastit të shpërndarë Normalisht përreth pritjes matematike 0. Duke përdorur strukturën e shkallëzimit zinxhir kemi:

$$\eta_{ij} = c + \alpha_i + \beta_j$$

Përdorimi i këtij modeli çon në vlera të parashikimeve të afërta me ato të shkallëzimit zinxhir të thjeshtë, por nuk është gjithmonë e garantuar dhe shpesh mund të ketë diferenca të ndjeshme. Shpërndarja log-Normale ka avantazhin që mund të implementohet lehtësisht. Gjithashtu teknika të tjera statistikore mund të përdoren për të përfshirë modele të tjera. Meqë Y_{ij} ka shpërndarje Normale është e mundur për shembull të aplikohet filtri Kalman. Filtri Kalman (Wüthrich, M.V., Merz, M., 2013) lejon një mënyrë për të zbutur parametrat e rreshtave, në vend të trajtimit të rreshtave më vete.

2.2.6 Modeli Gama

Nëse do të supozohet shpërndarja Gama për vlerën e dëmeve, mund të përshtatet i njëjti model nëse përdoret modeli i përgjithshëm linear, por duke zëvendësuar $D[C_{ij}] = \phi m_{ij}$ me $D[C_{ij}] = \phi m_{ij}^2$. Me paketat statistikore standarte mund të sigurohet vlerësimi i përgjasisë maksimale. Dhe në këtë rast vlerat e parashikuara janë të afërta me ato të shkallëzimit zinxhir të thjeshtë.

2.2.7 Modele të tjera

Në përgjithësi mund të konsiderohen modele ku dispersioni është në proporcion me fuqinë e k-të të pritjes matematike dhe përcakton vlera të ndryshme për k. Zgjedhja e vlerës së k duhet të bëhet a priori, p.sh. k=0 përcakton shpërndarje Normale, k=1 Poisson dhe k=2 Gama.

2.3 Modele të tjera parametrike

2.3.1 Modeli i Wright

Në modelin e Wright komponentët sistematikë dhe të rastit bazohen në modelin teorik të rrezikut të gjenerimit të dëmeve. Ai i konsideron pagesat progresive të dëmeve si shumë të N_{ij} dëmeve me vlerë X_{ij} . Numri i dëmeve N_{ij} supozohet ndryshore rasti e Poisson me pritje matematike

$$E(N_{ij}) = e_i a_j k_i j^{A_i} \exp(-b_i j)$$

ku k, A, b janë konstante për t'u vlerësuar: e është masa e ekspozimit, ndërsa a është term axhustimi i njohur i nevojshëm. Dispersioni duke qënë shpërndarje Poisson është

$$D(N_{ij}) = E(N_{ij})$$

Vlerat e dëmeve kanë shpërndarje Gama me pritje matematike

$$E(X_{ij}) = \exp(\delta t) k j^\lambda$$

dhe dispersion

$$D(X_{ij}) = \vartheta [E(X_{ij})]^2$$

k dhe λ janë konstante të panjohura. Termi opcional $\exp(\delta t)$ është përfshirë për inflacionin e mundshëm, $t=i+j$ janë vitet kalendarike, δ është intensiteti i inflacionit të dëmeve, konstante.

Duke kombinuar modelet për frekuencën dhe ashpërsinë e dëmeve dhe duke përdorur rezultatet standard për modelin e rrezikut kemi

$$E(C_{ij}) = m_{ij} = e_i a_j k_i j^{A_i} \exp(-b, j) \exp(\delta t) k j^\lambda$$

dhe

$$D(X_{ij}) = (1 + \vartheta) k j^\lambda \exp(\delta t) E(C_{ij})$$

Me disa rregullime të përshtatshme, kjo paraqet një model të përgjithshëm linear. Formulimi i modelit të përgjithshëm linear nuk është i lehtë, por me një derivim të thjeshtë mund të shkruhet

$$E(C_{ij}) = \exp(u_{ij} + c + \alpha_i + \beta_i \log(j) + \gamma_i j + \delta t)$$

dhe

$$D(C_{ij}) = \phi_{ij} E(C_{ij}) = \phi_{ij} m_{ij}$$

Ky është një model i përgjithshëm linear në të cilin C_{ij} modelohet me një funksion lidhës logaritmik dhe dispersion është në proporcion me pritjen matematike. Parametrat ϕ_{ij} janë të panjohur dhe duhen vlerësuar nga modeli nëpërmjet procesit të “modelimit të përbashkët”. Mund të shkruajmë

$$\log(E[C_{ij}]) = \eta_{ij}$$

ku

$$\eta_{ij} = u_{ij} + c + \alpha_i + \beta_i \log(j) + \gamma_i j + \delta t$$

Termat u_{ij} janë të njohur dhe përfaqësojnë axhustime teknike dhe bëjnë kompensimin në momentin kur përshtatim modelin gjatë përdorimit të paketave statistikore.

Modeli i Wright është me interes, pasi përdoret i njëjti modelim, si në vlerësimin e rezervave, ashtu edhe në llogaritjen e primeve të sigurimit. Dëmet modelohen si ndryshore rasti Poisson dhe ashpërsia e dëmeve si ndryshore rasti Gama.

Modelet stokastike për vlerësimin e rezervave teknike të dëmeve, që bëjnë pjesë në klasën e modeleve lineare të përgjithshme dhe të modeleve të pothuajse përgjasisë mund të përdoren për të vlerësuar këto rreziqe dhe në veçanti për të reduktuar rrezikun e modelit.

Krahasimi i modeleve kryhet nëpërmjet log-përgjasisë për modelet me shpërndarje eksponenciale dhe nëpërmjet modeleve të pothuaj – përgjasisë në rastet semi-parametrike në të cilat janë të specifikuara vetëm momentet e para dhe të dyta të ndryshoreve të varura.

Modelet lineare të përgjithshme dhe modelet pothuaj - përgjasisë përbëjnë një klasë fleksibël të modeleve stokastike dhe janë të vlefshme në analizën e pagesave të ardhshme.

2.3.2 Modelet Bayesiane

Duke kaluar në kuadrin Bayesian do të thotë që specifikojmë modelet me pritje matematike të njëjtë për çdo qelizë të faktorëve të zhvillimit që kanë të njëjtin vit zhvillimi (Scolnik D.P.M., 2004). Supozohet që faktorët e zhvillimit kanë shpërndarje normale

$$f_{ij} \sim N(\theta_j, \frac{1}{\tau_{i,j}})$$

ku parametri τ_{ij} mund të ndërtohet në disa mënyra, bazuar te primet e shkruara apo tek numri i dëmeve me vit zhvillimi të njëjtë. Supozohet gjithashtu që parametrat bazë θ_j kanë shpërndarje normale

$$\theta_j \sim N\left(\mu_\theta, \frac{1}{\tau_\theta}\right) \quad j = 1, \dots, n - 1$$

Parametrave μ_θ , τ_θ dhe τ duhet t'u përcaktohet nga një shpërndarje paraprake në mënyrë që të kompletet modelin i plotë probabilistik.

$$\tau \sim \Gamma(a, b)$$

$$\mu_\theta \sim N(c, d)$$

$$\tau_\theta \sim \Gamma(e, f)$$

Parametrat a,b,c,d,e,f vlerësohen sipas linjave të biznesit bazuar në experiencën ndër vite. Analiza Bayesiane e këtij modeli jep shpërndarjen e mëpasshme për gjithë parametrat e panjohur të modelit.

2.3.3 Metoda Bayesiane bazuar në numrin e dëmeve dhe koston mesatare për dëm

Projeksioni i kostove mesatare mund të kombinohet me projeksionin e numrit të dëmeve dhe jep vlrësimin e dëmeve të fundit. Kjo metodë bazohet në përcaktimin e tre ndryshoreve, të cilat janë vendimtare në vlerësimin e pagesave të ardhshme (Haxhi, K., Xhaja, B., 2013)

- Vlera e dëmit mesatar
- Raporti i dëmeve të paguara
- Shpejtësia e dëmeve të paguara

Vlera e dëmit mesatar $AC_{i,j}$ ka shpërndarje normale, parametric θ_j^{AC} paraqet pritjen matematike të kostove mesatare të dëmeve të vitit të zhvillimit j

$$AC_{i,j} \sim N(\theta_j^{AC}, \omega^{AC})$$

Gjithashtu kemi

$$\theta_j^{AC} \sim N(\mu_{\theta_j^{AC}}, \tau_{\theta_j^{AC}})$$

ku pritja matematike $\mu_{\theta_j^{AC}}, \mu_{\theta_j^{AC}}$ dhe dispersioni $\tau_{\theta_j^{AC}}$ janë konstante për vitin e zhvillimit j .

Këto formula paraqesin modelin Bayesian të Fisher – Lange dhe $\mu_{\theta_j^{AC}}, \tau_{\theta_j^{AC}}, \omega^{AC}$ janë hiperparametrat e modeli të nxjerra nga shpërndarjet e mëparshme

$$\omega^{AC} \sim \Gamma(b, c)$$

$$\omega_{\theta_j^{AC}} \sim N(a_j, a)$$

$$\mu_{\theta_j^{AC}} \sim \Gamma(d, e)$$

Raporti i pagesave R përfaqëson proporcionin e dëmeve të raportuara në një vit i që janë rezervuar në vitin e zhvillimit j dhe që mund të paguhet në vitet e ardhshme

$$Raporti_{i,j} = \frac{\sum_{k=j+1}^{n-i+1} NP_{i,k} + NR_{i,n-i+1}}{NR_{i,j}} \quad i + j \leq n$$

Kjo ndryshore duhet të marrë parasysh vlerat e dëmeve të rihapura dhe të mbyllura pa pagesë. Supozojme që R ka shpërndarje normale.

$$Raport_{i,j} \sim N(\theta_j^{Rap}, \omega^{Rap})$$

me pritje matematike θ_j^{Rap} që varet nga viti i zhvillimit i dhe ka shpërndarje normale

$$\theta_{i,j}^{Rap} \sim N(\mu_{\theta_j^{Rap}}, \tau_{\theta^{Rap}})$$

Hiperparametrat janë ω^{Rap} , $\mu_{\theta_j^{Rap}}$, $\tau_{\theta^{Rap}}$ janë nxjerrë nga shpërndarjet e mëposhtme:

$$\omega^{Rate} \sim \Gamma(f, g)$$

$$\mu_{\theta_j^{Rate}} \sim N(h, l)$$

$$\tau_{\theta^{Rate}} \sim \Gamma(m, u)$$

Shpejtësia e pagesave v_{ij} paraqet pjesën e dëmeve të ndodhura gjatë vitit i , por të paguara gjatë vitit të zhvillimit j .

$$v_{i,j} = \frac{NP_{i,j}}{\sum_{k=2}^{n-i+1} NP_{i,k} + NR_{i,n-i+1}} \quad i = 1, \dots, n; j = 2, \dots, n - i + 1$$

Supozohet që shpejtësia e pagesave $v_{i,j}$ ka shpërndarje normale

$$v_{i,j} \sim N(\theta_j^v, \omega^v)$$

me pritje matematike

$$\theta_j^v \sim N(\mu_{\theta_j^v}, \tau_{\theta^v})$$

Shpërndarjet për hiperparametrat ω^v , $\mu_{\theta_j^v}$ dhe τ_{θ^v} janë si më poshtë:

$$\omega^v \sim \Gamma(o, p)$$

$$\omega_{\theta_j^v} \sim N(\beta_j, q)$$

$$\mu_{\theta^v} \sim \Gamma(r, s)$$

Ndryshoret $Raport_{i,j}$ dhe $v_{i,j}$ përdoren për vlerësimet rekursive të numrit të pagesave të ardhshme dhe për rezervën e dëmeve

$$NP_{i,j} = NR_{i,j-1} * Rate_{i,j} * \frac{v_{i,j}}{\sum_{k=j}^n v_{i,k}}$$

$$NR_{i,j} = NR_{i,j-1} * Rate_{i,j-1} * NP_{i,j} \quad i + j > n + 1$$

Pagesat e ardhshme $X_{i,j}$ sigurohen duke shumëzuar numrin e dëmeve të paguara në të ardhmen dhe kostot mesatare relative duke marrë parasysh dhe inflacionin ir që për lehtësi merret constant

$$X_{ij} = NP_{i,j} \cdot AC_{ij} \cdot (1 + ir)^{i+j-n-1} \quad i + j > n + 1$$

Vlerat e parametrave $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m, n, o, p, q, r, s, u, \alpha_j, \beta_j$ përcaktohen nga linjat e biznesit bazuar në historikun e tyre, mund të jenë informacione mbi kostot, politikat e pagesave ose politika të tjera të kompanisë (Haxhi, K., Xhaja, B., 2013).

Implementimi i modeleve bayesiane bëhet nëpërmjet kampionimit të Gibbs, teknikë për analizën zinxhirëve të Markovit Monte Carlo, MCMC. Metodot bayesiane të vlerësimit të rezervave teknike të dëmeve janë metoda të ndryshme nga ato të vlerësimeve të zakonshme. Qëllimi i këtyre metodave është testimi i modeleve me grupe të ndryshme të dhënash dhe mundësia e shtrirjes së analizave për kompaninë në tërësi.

Kapitulli 3. METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR MACK DHE VARIABILITETI I SAJ

Metoda e shkallëzimit zinxhir CL është një nga metodat më të përdorura për vlerësimin e rezervave të dëmeve pezull. Arsyeja kryesore është thjeshtësia e saj dhe fakti që nuk ka një shpërndarje të përcaktuar. Kjo nuk do të thotë që në bazë të kësaj metode nuk ka supozime statistikore. Algoritmi i shkallëzimit zinxhir ka shume implikime të cilat lejojnë njehsimin e variabilitetit të vlerësimit të rezervave dhe na ndihmojnë në ndërtimin e intervalit të besimit për vlerën e dëmeve të fundit të vlerësuara dhe për vlerësimin e rezervave.

3.1 Analiza fillestare e metodës së shkallëzimit zinxhir

Me C_{ik} shënojmë totalin e dëmeve të akumuluarra të vitit të aksidentit i , $1 \leq i \leq n$, të paguar ose pezull deri në vitin e zhvillimit k , $1 \leq k \leq n$. Vlerat e C_{ik} për $i + k \leq n + 1$ janë të njohura nga trekëndëshi i dëmeve dhe duam të vlerësojmë vlerën e C_{ik} për $i + k > n + 1$, në veçanti shumën e dëmeve të fundit C_{in} për çdo vit zhvillimi $i=2, \dots, n$ (Mack, T., 1993). Pra

$$R_i = C_{in} - C_{i,n+1-i}$$

është rezerva e dëmeve pezull në vitin e aksidentit i , ndërkohë që $C_{i,n+1-i}$ është vlera e dëmeve pezull ose të paguara deri në momentin e shqyrtimit.

Metoda e shkallëzimi zinxhir vlerëson masën e dëmeve të fundit C_{in} nëpërmjet

$$C_{in} = C_{i,n+1-i} \cdot f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{n-1} \quad 2 \leq i \leq n \quad (1)$$

ku

$$f_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k}} \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (2)$$

quhen faktorë zhvillimi (age-to-age factors).

Kjo mënyrë projektimi e vlerës së njohur të dëmeve $C_{i,n+1-i}$ për vlerën finale të dëmeve C_{in} përdor për gjithë vitet e aksidenteve $i \geq n + 1 - k$ të njëjtin faktor f_k për shumëzimin e vlerës së dëmeve nga viti i zhvillimit k në vitin e zhvillimit $k+1$, megjithëse faktorët individualë të zhvillimit të vërtetuar $C_{i,k+1}/C_{ik}$ të viteve të aksidentit $i \leq n - k$ janë zakonisht të ndryshëm nga tjetri dhe nga f_k . Në fund të vitit të zhvillimit k duhet të konsiderojmë $C_{i,k+1}$ dhe C_{in} si

ndryshore rasti duke pasur parasysh që $C_{i1}, \dots, C_{ik}$ janë të njohura dhe si pasojë nuk janë ndryshore rasti, por skalarë.

Çdo C_{ik} mund të jetë ndryshore rasti ose skalar, në varësi të vitit të zhvillimit në fund të të cilit mund të jetë, por pavarësisht nëse C_{ik} i takon pjesës së njohur $i + k \leq n + 1$ të trekëndëshit ose jo. Kur përcaktojmë pritjet matematike ose dispersionet duhet gjithashtu të përcaktojmë vitin e zhvillimit në fund të të cilit bëhet vlerësimi.

Lidhur me shumëzimin nga C_{ik} në $C_{i,k+1}$ mund ta formulojmë në terma stokastikë: Metoda e shkallëzimit zinxhir supozon ekzistencën e faktorëve të vitit të zhvillimit të pavarur $f_1, \dots, f_{n-1}$ të tillë që, dhënë zhvillimi $C_{i1}, \dots, C_{ik}$, realizimi i $C_{i,k+1}$ është “afër” $C_{ik}f_k$, ky i fundit është vlera e pritjes matematike të $C_{i,k+1}$, domethënë

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik}f_k \quad 1 \leq i \leq n; 1 \leq k \leq n-1 \quad (3)$$

Kjo formulë është pritje matematike me kusht. Ky ekuacion përbën një supozim i cili imponohet në mënyrë implicite nga metoda e shkallëzimit zinxhir. Bazohet në dy aspekte të ekuacionit bazë të shkallëzimit zinxhir (1): Aspekti i parë është fakti që (1) përdor të njëjtin faktor zhvillimi f_k për vite të ndryshme aksidenti $i = n + 1 - k, \dots, n$. Si pasojë ekuacionet (3) gjithashtu marrin si të mirëqenë parametrat f_k të cilët janë të njëjtë për gjithë vitet e aksidentit. Aspekti i dytë është fakti që (1) përdor vetëm vlerën e vrojtuar më të fundit $C_{i,n+1-i}$ si bazë për projektimin e vlerave finale duke mos marrë parasysh nga njëra anë të gjitha shumatat $C_{i1}, \dots, C_{i,n-1}$ të vrojtuar më parë dhe nga ana tjetër faktin që $C_{i,n+1-i}$ mund të devijojë thelbësisht nga pritja e saj matematike. Është gjithashtu i mundur projeksioni nga fundi i shumave $C_{i1}, \dots, C_{i,n-1}$ i viteve të zhvillimit të mëparshëm me ndihmën e faktorëve të zhvillimit $f_1, \dots, f_{n-1}$, si dhe kombinimi i gjithë këtyre shumave të projektuara me $C_{i,n+1-i} \cdot f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{n-1}$ në një vlerësues të përbashkët për C_{in} . Për më tepër, është gjithashtu i mundur përdorimi i vlerave $C_{j,n+1-i}$ i viteve të mëparshëm të aksidentit $j < i$ si vlerësime shtesë për $E(C_{i,n+1-i})$ duke i përkthyer ato në vite aksidenti i me ndihmën e një shkalle vëllimi për çdo vit aksidenti. Në rastin kur përdoret $C_{i,n+1-i}$ si bazë e vetme për projeksionin final, këto mundësi injorohen të gjitha nga metoda e shkallëzimit zinxhir. Kjo do të thotë që metoda e shkallëzimit zinxhir duhet patjetër të përdorë një supozim, i cili konstaton që informacioni që përmbajnë $C_{i,n+1-i}$ nuk mund të shtohet duke përdorur $C_{i1}, \dots, C_{i,n-i}$ ose $C_{1,n+1-i}, \dots, C_{i-1,n+1-i}$. Kjo reflektohet tek ekuacionet (3).

Formulën (3) mund ta shkruajmë në formën

$$E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = f_k$$

sepse C_{ik} është skalar në rastin kur njohim $C_{i1}, \dots, C_{ik}$. Kjo formë e formulës (3) tregon që vlera e pritjes matematike faktorëve të zhvillimit individualë $C_{i,k+1}/C_{ik}$ është e barabartë me f_k

pavarësisht faktorit të mëparshëm të zhvillimit $C_{ik}/C_{i,k-1}$. Pra faktorët e zhvillimit të njëpasnjëshëm $C_{ik}/C_{i,k-1}$ dhe $C_{i,k+1}/C_{ik}$ janë të pakorreluar. Kjo do të thotë që pas një vlere të madhe të $C_{ik}/C_{i,k-1}$ madhësia e pritshme e faktorit të ardhshëm të zhvillimit $C_{i,k+1}/C_{ik}$ është e njëjtë si edhe për vlera mjaft të vogla të $C_{ik}/C_{i,k-1}$. Për këtë arsye nuk duhet ta aplikojmë metodën e shkallëzimit zinxhir për një klasë biznesi ku vlerat e vrojtuar kanë rritje mjaft të vogël të $C_{i,k+1}/C_{ik}$ nëse $C_{ik}/C_{i,k-1}$ është më i madh se në shumicën e viteve të tjera të aksidentit dhe anasjelltas.

3.2 Analiza e faktorëve të zhvillimit

Për shkak të rastësisë së gjithë realizimeve të C_{ik} nuk mund të nxjerrim vlerat e sakta e faktorëve të rritjes $f_1, \dots, f_{n-1}$ nga të dhënat. Ata mund të vlerësohen sipas formulës (2) së metodës së shkallëzimit zinxhir. Një nga vetitë e vlerësimit është të jetë i pazhvendosur, domethënë pritja matematike duhet të jetë e barabartë me vlerën e saktë $E(f_k) = f_k$ (në rastin kur trekëndëshi i dëmeve nuk është ende i njohur). Në këtë rast duhet shtuar dhe supozimi shtesë (Mack, T., 1993),

ndryshoret $\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}$ dhe $\{C_{j1}, \dots, C_{jn}\}$ të viteve të ndryshme të aksidenteve $i \neq j$ janë të pavaruara (4)

Formulat (1) dhe (2) nuk e marrin parasysh varësinë apo jo të viteve të aksidenteve, kështu që mund të konkludojmë që pavarësia e viteve të aksidenteve është gjithashtu një supozim implicit për metodën e shkallëzimit zinxhir. Këtë supozim e marrim për bazë për të gjitha llogaritjet e metodës.

Gjithashtu mund të themi se jo për çdo trekëndësh mund të përmbushet ky kusht, për faktin se efekte të ndryshme në vitet kalendarike si p.sh. ndryshimi në kostot e trajtimit të dëmeve, ndryshime të mëdha në inflacion, etj., mund të ndikojnë vitet e aksidenteve dhe në të njëjtën mënyrë mund të shtrembërojnë pavarësinë.

Një formulë e ngjashme me (2) na tregon që f_k është mesatare e ponderuar e faktorëve individual të vrojtuar $C_{j,k+1}/C_{jk}$, $1 \leq j \leq n - k$ ku peshat janë proporcionale me C_{jk} .

$$f_k = \frac{\sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k+1}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}} = \sum_{j=1}^{n-k} \frac{C_{jk}}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}} \cdot \frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}}$$

Ashtu si f_k çdo faktor zhvillimi individual $C_{j,k+1}/C_{jk}$, $1 \leq j \leq n - k$, është një vlerësim i pazhvendosur i f_k sepse

$$E(C_{j,k+1}/C_{jk}) = E(E(C_{j,k+1}/C_{jk} | C_{j1}, \dots, C_{jk}))$$

$$\begin{aligned}
&= E(E(C_{j,k+1}|C_{j1}, \dots, C_{jk})/C_{jk}) \\
&= E(C_{jk}f_k/C_{jk}) \\
&= E(f_k) \\
&= \tilde{f}_k
\end{aligned}$$

Metoda e shkallëzimit zinxhir përdor $\tilde{f}_k$ si vlerësim të f_k në vend të mesatares së thjeshtë

$$\frac{1}{n-k} \sum_{j=1}^{n-k} C_{j,k+1}/C_{jk}$$

të faktorëve të zhvillimit të vrojtuar që gjithashtu mund të jetë një vlerësim i pazhvendosur si në rastin e mesatares së ponderuar të faktorëve të zhvillimit të vrojtuar

$$g_k = \sum_{j=1}^{n-k} w_{jk} C_{j,k+1}/C_{jk}$$

ku

$$\sum_{j=1}^{n-k} w_{jk} = 1$$

Nëse $C_{j1}, \dots, C_{jk}$ janë të njohur, w_{jk} mund të jetë skalar.

Duke iu referuar teorisë së vlerësimit pikësor, ndër vlerësimet e pazhvendosura më i miri është ai që ka dispersionin më të vogël. Ajo që mund të bëjmë te formula e mësipërme është zgjedhja e peshave w_{jk} në mënyrë që dispersion i g_k të jetë minimal. w_{jk} është anasjelltas proporcional me $D(C_{j,k+1}/C_{jk}|C_{j1}, \dots, C_{jk})$.

Fakti që vlerësimi i shkallëzimit zinxhir $\tilde{f}_k$ përdor pesha të cilat janë proporcionale me C_{jk} nënkupton që C_{jk} supozohet të jetë anasjelltas proporcional me $D(C_{j,k+1}/C_{jk}|C_{j1}, \dots, C_{jk})$ ose

$$D(C_{j,k+1}/C_{jk}|C_{j1}, \dots, C_{jk}) = \alpha_k^2/C_{jk}$$

me një konstante proporcionaliteti α_k^2 që mund të varet nga k , por jo nga j dhe që nuk mund të jetë negative. Meqë C_{jk} është skalar dhe meqë $D(X/c) = D(X)/c^2$ për çdo konstante c , mund ta shkruajmë kushtin e proporcionalitetit si më poshtë

$$D(C_{j,k+1}|C_{j1}, \dots, C_{jk}) = C_{jk}\alpha_k^2 \quad 1 \leq j \leq n, \quad 1 \leq k \leq n-1 \quad (5)$$

me konstante α_k^2 , $1 \leq k \leq n - 1$.

Kushtet (3), (4) dhe (5) janë kushtet bazë të metodës së shkallëzimit zinxhir dhe nëpërmjet tyre matim shpërhapje e pasigurisë të C_{in} me $\tilde{C}_{in}$.

3.3 Matja e variabilitetit të dëmeve të fundit

Qëllimi i metodës së shkallëzimit zinxhir dhe e çdo metode rezervash është vlerësimi shumë final të dëmeve C_{in} për vitet e aksidentit $i=2, \dots, n$. Metoda e shkallëzimit zinxhir e bën këtë nëpërmjet formulës (1)

$$C_{in} = C_{i,n+1-i} \cdot f_{n+1-i} \cdot \dots \cdot f_{n-1}$$

Kjo formulë jep vetëm një vlerësim pikësor për C_{in} , që mund të jetë dhe i gabuar, domethënë që probabiliteti që C_{in} të jetë e barabartë me $\tilde{C}_{in}$ është shumë i vogël (Mack, T.,1997). Ky probabilitet është pothuajse zero nëse C_{in} konsiderohet një ndryshore rasti e vazhduar. Prandaj duhet të dimë nëse vlerësimi $\tilde{C}_{in}$ është të paktën mesatarisht i barabartë me mesataren e C_{in} dhe sa i madh është ky gabim. Fillimisht për të qenë të saktë duhet të kemi pritjet matematike të barabarta $E(\tilde{C}_{in}) = E(C_{in})$, për $2 \leq i \leq n$.

Gjithashtu duhet të njohim largësinë mesatare ndërmjet parashikimit $\tilde{C}_{in}$ dhe realizimit të ardhshëm C_{in} . Madhësia e matjes së kësaj largësie është distanca e Euklidit, “funksioni kuadratik i humbjes”. Ajo që na duhet është madhësia e gabimit mesatar kuadratik (MSE)

$$mse(C_{in}) = E((C_{in} - \tilde{C}_{in})^2 | \mathcal{D})$$

ku $\mathcal{D} = \{C_{ik} | i + k \leq n + 1\}$ janë të dhënat e vrojtura deri në atë moment. Duhet të llogaritim gabimin kuadratik mesatar me kushtin që njohim të gjitha të dhënat e vrojtura në momentin e shqyrtuar, sepse duhet të njihet gabimi i ardhshëm për shkak të rastësisë. Nëse do të llogaritim gabimin pa kusht $E(C_{in} - \tilde{C}_{in})^2$, i cili për shkak të rregullit përsëritës për pritjet matematike është i barabartë me vlerën e mesatares $E((C_{in} - \tilde{C}_{in})^2 | \mathcal{D})$ të MSE me kusht mbi të gjitha të bashkësinë e të dhënave $\mathcal{D}$, edhe nëse përfshijmë të gjitha devijimet nga të dhënat e vrojtura deri tani, por nuk ka kuptim nëse duam të ndërtojmë një interval besimi për C_{in} bazuar në të dhënat e trekëndëshit të zhvillimit $\mathcal{D}$.

Bazuar në rregullin e përgjithshëm $E(X - c)^2 = D(X) + (E(X) - c)^2$ për çdo konstante c kemi

$$mse(C_{in}) = D(C_{in} | \mathcal{D}) + (E(C_{in} | \mathcal{D}) - C_{in})^2$$

sepse C_{in} është konstante nën kushtin që të gjitha të dhënat $\mathcal{D}$ janë të njohura. Ky ekuacion tregon që MSE është shuma e gabimeve të të ardhshme të rastit $D(C_{in} | \mathcal{D})$ dhe të gabimit të

vlerësimi i cili matet nga shmangia kuadratike e vlerësimit $\tilde{C}_{in}$ nga objektivi $E(C_{in}|\mathcal{D})$. Nga ana tjetër MSE nuk merr parasysh ndryshimet e ardhshme të modelit bazë, domethëne devijimet e ardhshme nga supozimet (3), (4) dhe (5). MSE (C_{in}) varet nga parametrat e panjohur të modelit f_k dhe α_k^2 . Mund të zhvillojmë një vlerësim për MSE (C_{in}) i cili mund të llogaritet nga të dhënat e njohura $\mathcal{D}$. Rrënja katrore e një vlerësimi të tillë zakonisht quhet “gabimi standard” sepse është një vlerësim i shmangies kuadratike të C_{in} në rastet kur kemi për të vlerësuar edhe vlerën mesatare. Gabimi standard $s.e.(C_{in})$ i C_{in} është në të njëjtën kohë gabimi standard i $s.e.(R_i)$ i vlerësimit të rezervës

$$\tilde{R}_i = \tilde{C}_{in} - C_{i,n+1-i}$$

i rezervës së dëmeve pezull

$$R_i = C_{in} - C_{i,n+1-i}$$

sepse

$$mse(R_i) = E\left((\tilde{R}_i - R_i)^2 | \mathcal{D}\right) = E((\tilde{C}_{in} - C_{in})^2 | \mathcal{D}) = mse(C_{in})$$

dhe sepse barazimi i gabimeve mesatare kuadratike sjell barazimin e gabimeve standard, domethene

$$s.e.(\tilde{R}_i) = s.e.(\tilde{C}_{in})$$

Formulat për gabimin standard $s.e.(\tilde{C}_{in})$ të $\tilde{C}_{in}$ janë:

$$(s.e.(\tilde{C}_{in}))^2 = \tilde{C}_{in}^2 \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{\tilde{\alpha}_k^2}{\tilde{f}_k^2} \left(\frac{1}{\tilde{C}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-k} C_{jk}} \right) \quad (7)$$

ku

$$\tilde{\alpha}_k^2 = \frac{1}{n-k-1} \sum_{j=1}^{n-k} C_{jk} \left(\frac{C_{j,k+1}}{C_{jk}} - \tilde{f}_k \right)^2 \quad 1 \leq k \leq n-2 \quad (8)$$

është një vlerësim i pazhvendosur i α_k^2 .

Shumat që merren në qoftë së trekëndëshi i zhvillimit është kompletuar hap pas hapi sipas metodës së shkallëzimit zinxhir janë:

$$\tilde{C}_{ik} = C_{i,n+1-i} \cdot \tilde{f}_{n+1-i} \cdot \dots \cdot \tilde{f}_{k-1}, \quad k > n + 1 - i$$

Tek formula (7) për lehtësi vendosim që

$$\tilde{C}_{i,n+1-i} = C_{i,n+1-i}$$

Për të vlerësuar α_{n-1} nuk mund të përdorim formulën (8), pasi kjo formulë nuk mund të prodhojë vlerësimë për dy parametrat $\tilde{f}_{n-1}$ dhe α_{n-1} me një vrojtim të vetëm $C_{1,n}/C_{1,n-1}$ ndërmjet viteve $n-1$ dhe n . Mund ta supozojmë $\alpha_{n-1} = 0$, në qoftë se $\tilde{f}_{n-1} = 1$ dhe në qoftë se besohet që zhvillimi i dëmeve mbaron pas $n-1$ vjetësh. Në të kundërt duhet të ekstrapolojmë serinë zbritëse $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_{n-3}, \alpha_{n-2}$ nëpërmjet një elementi shtesë, p.sh. nëpërmjet mesatareve të regresit loglinear ose duke kërkuar që

$$\alpha_{n-3}/\alpha_{n-2} = \alpha_{n-2}/\alpha_{n-1}$$

mban për aq kohë sa $\alpha_{n-3} > \alpha_{n-2}$ dhe që çon në formulën

$$\alpha_{n-1}^2 = \min(\alpha_{n-2}^4/\alpha_{n-3}^2, \min(\alpha_{n-3}^2, \alpha_{n-2}^2)) \quad (9)$$

Qëllimi është të ndërtohet një interval besimi për ndryshoret C_{in} dhe R_i . Bazuar në ekuacionin

$$C_{in} = C_{i,n+1-i} + R_i$$

shuma e dëmeve të fundit C_{in} ka një pjesë të njohur $C_{i,n+1-i}$ dhe një të panjohur R_i , që do të thotë se shpërndarja e C_{in} është e përcaktuar nga shpërndarja e R_i . Pra duhet të ndërtohet një interval besimi vetëm për R_i dhe më pas të zhvendoset në një interval besimi për C_{in} . Për këtë duhet të njihet shpërndarja e R_i . Numri i dëmeve pezull është shumë i madh, për këtë arsye sipas teoremës qendrore limite shpërndarjen do e konsiderojmë Normale me pritje matematike të barabartë me vlerësimin pikësor $\tilde{R}_i$ dhe devijim standard s.e. ($\tilde{R}_i$). Intervali i besimit me koeficient sigurie 95% është

$$(\tilde{R}_i - 2 \cdot s.e.(\tilde{R}_i); \tilde{R}_i + 2 \cdot s.e.(\tilde{R}_i))$$

Shpërndarja simetrike normale në fakt mund të mos jetë përafrim i mirë i shpërndarjes së R_i në qoftë se kjo e fundit është e zhvendosur, sidomos në rastin kur s.e. $\tilde{R}_i$ është më e madhe se 50% e $\tilde{R}_i$. Në këtë rast kufiri i poshtëm i intervalit do të ishte negative dhe kjo nuk do të kishte kuptim, pasi nuk mund të kemi rezervë me vlerë negative.

Në këto raste rekomandohet të përdoret shpërndarja lognormale me parametra μ_i dhe σ_i^2 , (Mack, T.,1997) të tillë që pritja matematike dhe dispersioni i të dyja shpërndarjeve të jenë të barabarta

$$\tilde{R}_i = \exp(\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2})$$

$$(s.e.(\tilde{R}_i))^2 = \exp(2\mu_i + \sigma_i^2)(\exp(\sigma_i^2) - 1)$$

Prej këtej kemi

$$\mu_i = \ln(\tilde{R}_i) - \sigma_i^2/2$$

$$\sigma_i^2 = \ln\left(1 + (s.e.(\tilde{R}_i))^2 / \tilde{R}_i^2\right)$$

Ajo që na intereson është përcaktimi i intervaleve të besimit për rezervën R në total

$$R = R_2 + R_3 + \dots \dots R_n$$

Për të vlerësuar dispersionin e R nuk mund të mbledhim direkt katrorët e gabimeve individuale standard $(s.e.(\tilde{R}_i))^2$, për faktin se vlerësimet e R_i , $\tilde{R}_i$ nuk janë të pavaruara, por të korreluara pozitivisht pasi influencohen nga të njëjtët faktorë zhvillimi $\tilde{f}_k$.

Për të vlerësuar gabimin standard të rezervës në total

$$\tilde{R} = \tilde{R}_2 + \tilde{R}_3 + \dots \dots \tilde{R}_n$$

përdoret formula 10:

$$(s.e.(\tilde{R}))^2 = \sum_{i=2}^n \left\{ (s.e.(\tilde{R}_i))^2 + \tilde{C}_{in} \left(\sum_{j=i+1}^n \tilde{C}_{jn} \right) \sum_{k=n+1-i}^{n-1} \frac{2\tilde{\alpha}_k^2 / \tilde{f}_k^2}{\sum_{m=1}^{n-k} C_{mk}} \right\}$$

3.4 Kontrolli i supozimeve bazuar në të dhënat e dëmeve

Tre ekuacionet e mëposhtme janë supozimet bazë të metodës së shkallëzimit zinxhir:

- $E(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik}) = C_{ik} f_k$
- ndryshoret $\{C_{i1}, \dots, C_{in}\}$ dhe $\{C_{j1}, \dots, C_{jn}\}$ të viteve të ndryshme të aksidenteve i $\neq$ j janë të pavaruara
- $D(C_{j,k+1} | C_{j1}, \dots, C_{jk}) = C_{jk} \alpha_k^2$

Jo gjithmonë këto supozime verifikohen. Vlerat e C_{in} konsiderohen si të dhëna dhe jo ndryshore rasti. Kushti i parë mund të interpretohet si një model regresi linear të tipit

$$Y_i = c + x_i b + \varepsilon_i \quad 1 \leq i \leq n$$

ku c e b janë koeficientët e regresit dhe ε_i gabimet, $E(\varepsilon_i) = 0$, pra $E(Y_i) = c + x_i b$. Në rastin tonë kemi $c = 0$; $b = f_k$ dhe kemi vërtetimet e ndryshores se pavarur $Y_i = C_{i,k+1}$ në pikat $x_i = C_{ik}$ për $i=1, \dots, n-k$. Si rrjedhim mund të vlerësojmë koeficientin e regresit $b = f_k$ me metodën e katrorëve më të vegjël

$$\sum_{i=1}^{n-k} (C_{i,n+1} - C_{ik} f_k)^2 = \text{minimum}$$

Zgjidhja që minimizon parametrin f_k është

$$f_{k0} = \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}^2 \quad (11)$$

Ky vlerësim nuk është i njëjti me vlerësimin e shkallëzimit zinxhir si në formulën (2). Por duke shfrytëzuar indeksin 0 të kësaj formulë mund ta shkruajmë f_{k0} si më poshtë

$$f_{k0} = \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C_{ik}^2}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}^2} \cdot \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}}$$

dhe duket që f_{k0} është C_{ik}^2 mesatarja e ponderuar e faktorëve të zhvillimit $C_{i,k+1}/C_{ik}$, ndërsa vlerësimi i $\tilde{f}_k$ është C_{ik} mesatare e ponderuar. Këto pesha siç u tha më lart janë anasjelltas proporcionale me dispersionin $D(C_{i,k+1}/C_{ik} | C_{i1}, \dots, C_{ik})$. Vlerësimi f_{k0} si rrjedhim është proporcional me $1/C_{ik}^2$ ose në mënyrë ekuivalente $D(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik})$ proporcional me 1, që do të thotë se $D(C_{i,k+1} | C_{i1}, \dots, C_{ik})$ është i njëjtë për të gjitha vërtetimet $i=1, \dots, n-k$, gjë që nuk është në përputhje me supozimin (5) të shkallëzimit zinxhir.

Nga metoda e katrorëve më të vegjël kemi $D(Y_i) = D(\varepsilon_i) = \sigma^2$ për të gjitha i -të. Në qoftë se kjo nuk rezulton, domethënë nëse $D(Y_i) = D(\varepsilon_i)$ varen nga i , duhet përdorur një qasje të ponderuar për katrorët më të vegjël që konsiston në minimizimin e katrorëve të ponderuar

$$\sum_{i=1}^n W_i (Y_i - c - x_i b)^2$$

ku peshat W_i janë anasjelltas proporcionale me $D(Y_i)$.

Në mënyrë që të jetë në përputhje me supozimin (5) e dispersionit të shkallëzimit zinxhir, për regresin duhen përdorur peshat W_i që janë proporcionale me $1/C_{ik}$ më saktë me $1/(C_{ik}\alpha_k^2)$ por α_k^2 mund të shkrihet me konstanten e proporcionalitetit sepse k është fikse. Atëherë minimizojmë

$$\sum_{i=1}^{n-k} (C_{i,k+1} - C_{ik}f_k)^2 / C_{ik}$$

Në lidhje me f_k në fakt jep formulën e zakonshme të faktorëve të zhvillimit $\tilde{f}_k$ të shkallëzimit zinxhir

$$f_{k1} = \sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1} / \sum_{i=1}^{n-k} C_{ik}$$

Mund të përdoren pesha të tjera $1/C_{ik}^2$ sepse shuma e ponderuar e katrorëve bëhet

$$\sum_{i=1}^{n-k} (C_{i,k+1} - C_{ik}f_k)^2 / C_{ik}^2 = \sum_{i=1}^{n-k} \left(\frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} - f_k \right)^2$$

dhe pas procedurës së minimizimit kemi

$$f_{k2} = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n-k} \frac{C_{i,k+1}}{C_{ik}} \quad (12)$$

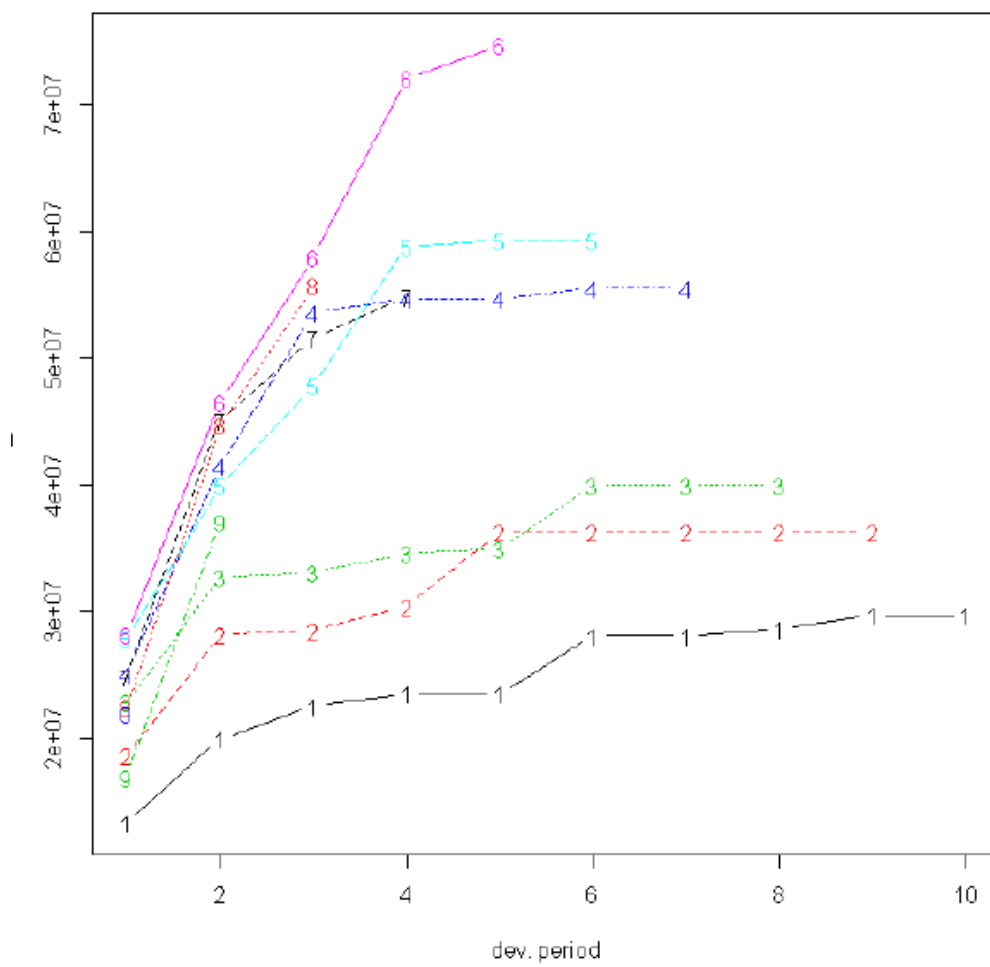
që është mesatarja e zakonshme jo e ponderuar e faktorëve të zhvillimit. Kushti i dispersionit për peshat e përdorura është $D(C_{i,k+1}|C_{i1}, \dots, C_{ik})$ proporcional me C_{ik}^2 ose në mënyrë ekuivalente $D(C_{i,k+1}/C_{ik}|C_{i1}, \dots, C_{ik})$ proporcional me 1.

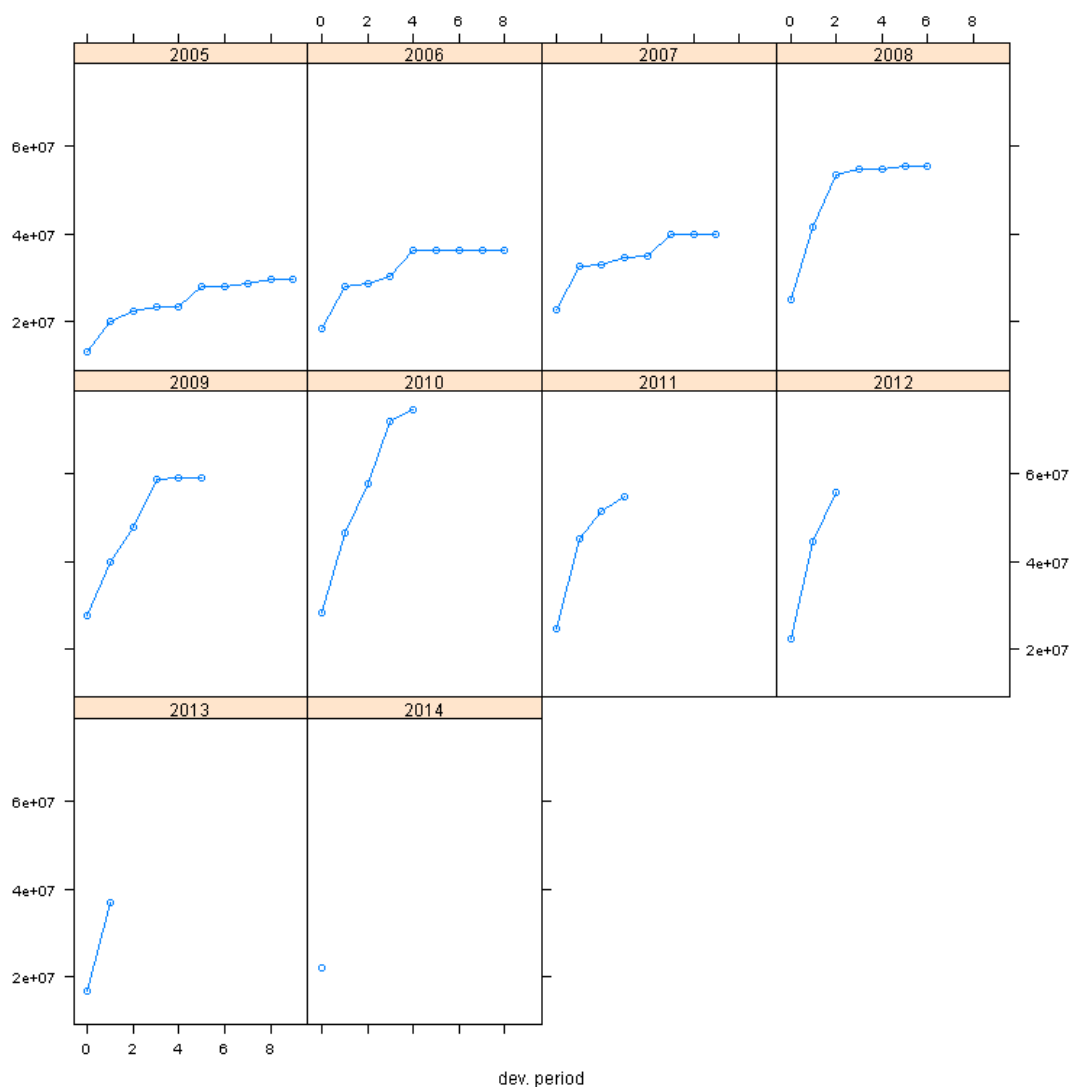
Përfitimi i transformimit të faktorëve të zhvillimit në kuadrin e regresionit është fakti që në instrumentat e analizës së regresit të zakonshëm bëjnë të mundur kontrollin e kushteve bazë, sidomos kushteve të linearitetit dhe dispersionit.

Trekëndëshi i akumuluar i pagesave i përdorur

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	13,247,635	19,871,794	22,514,448	23,425,701	23,425,701	28,034,921	28,034,921	28,534,921	29,627,617	29,627,617
2006	18,545,283	28,096,622	28,505,022	30,384,866	36,210,297	36,210,297	36,210,297	36,210,297	36,210,297	
2007	22,805,548	32,677,287	33,056,967	34,544,398	34,901,048	39,901,048	39,901,048	39,901,048		
2008	25,061,272	41,450,112	53,532,128	54,632,128	54,632,128	55,482,000	55,482,000			
2009	27,800,292	39,885,124	47,736,642	58,826,959	59,226,959	59,226,959				
2010	28,171,203	46,485,088	57,877,529	72,033,666	74,682,850					
2011	24,747,420	45,051,323	51,535,064	54,831,028						
2012	22,311,896	44,679,545	55,642,105							
2013	16,811,300	36,981,386								
2014	21,903,227									

Grafik 3.1: Paraqitja e trekëndëshit





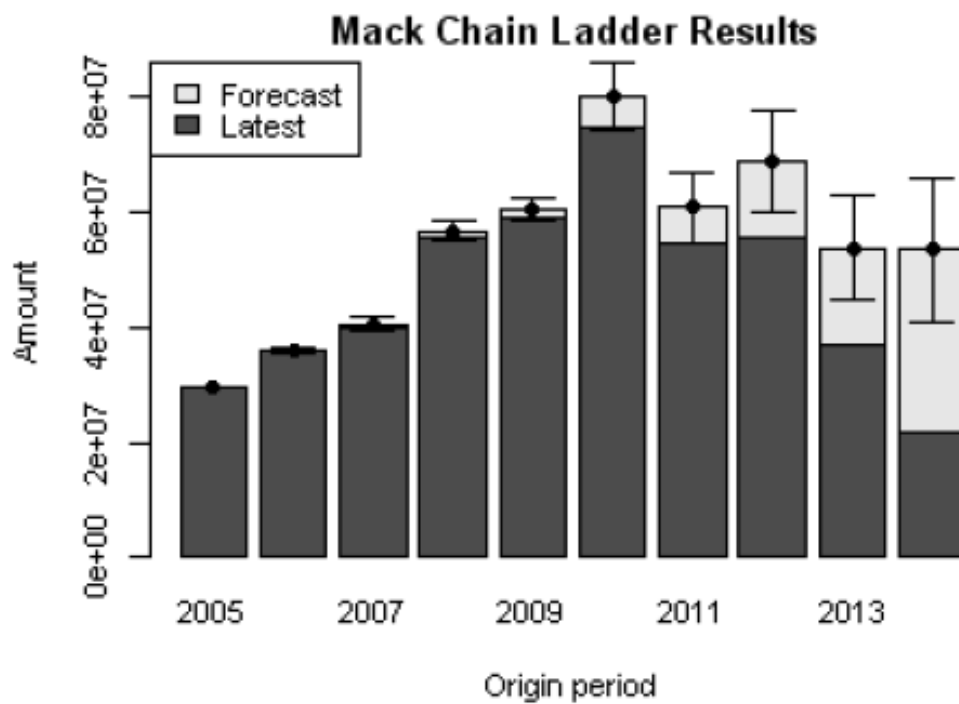
Rezultatet e metodës së shkallëzimit zinxhir sipas Mack me trekëndëshin e dëmeve të paguara

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2005	29627617	1.0000000	29627617	0.0	0.0	NaN
2006	36210297	1.0000000	36210297	0.0	512051.8	Inf
2007	39901048	0.9834032	40574452	673404.4	1349989.8	2.0047237
2008	55482000	0.9787045	56689223	1207223.1	1803501.7	1.4939257
2009	59226959	0.9787045	60515668	1288709.1	1893607.5	1.4693832
2010	74682850	0.9319322	80137639	5454789.2	5911825.8	1.0837863
2011	54831028	0.9015417	60819179	5988150.5	6189597.7	1.0336410
2012	55642105	0.8084991	68821483	13179378.2	8935788.2	0.6780129
2013	36981386	0.6880479	53748274	16766888.1	9170527.7	0.5469427
2014	21903227	0.4095338	53483324	31580096.6	12519664.0	0.3964416

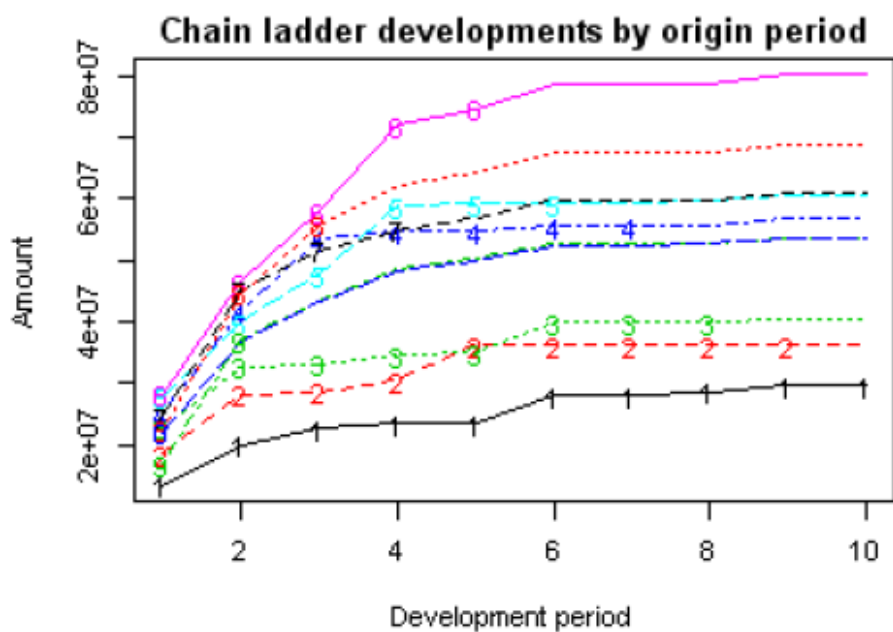
Totalli

	Totals
Latest:	4.644885e+08
Dev:	8.591661e-01
Ultimate:	5.406272e+08
IBNR:	7.613864e+07
Mack S.E.:	2.557553e+07
CV(IBNR):	3.359074e-01

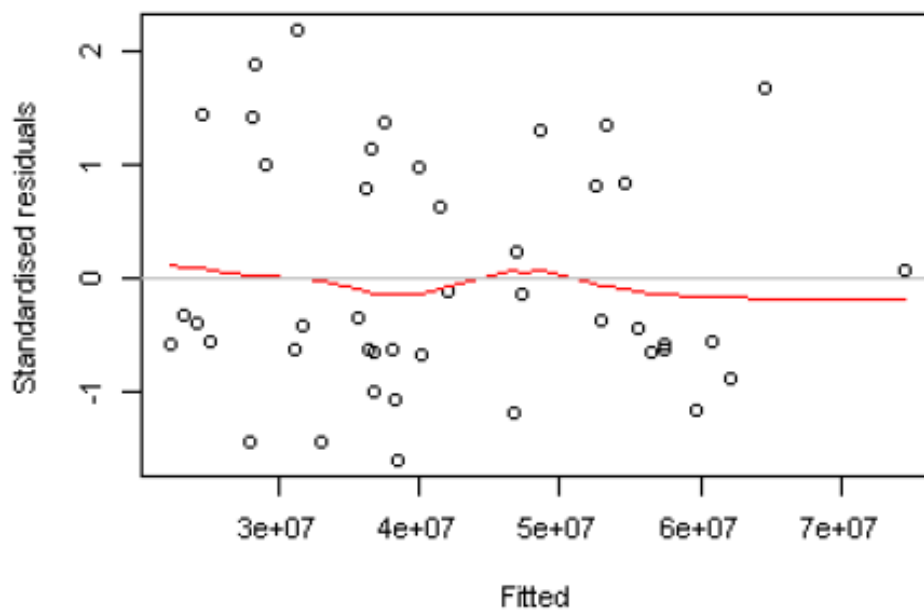
Grafik 3.2: Paraqitja grafike e rezultateve të metodës



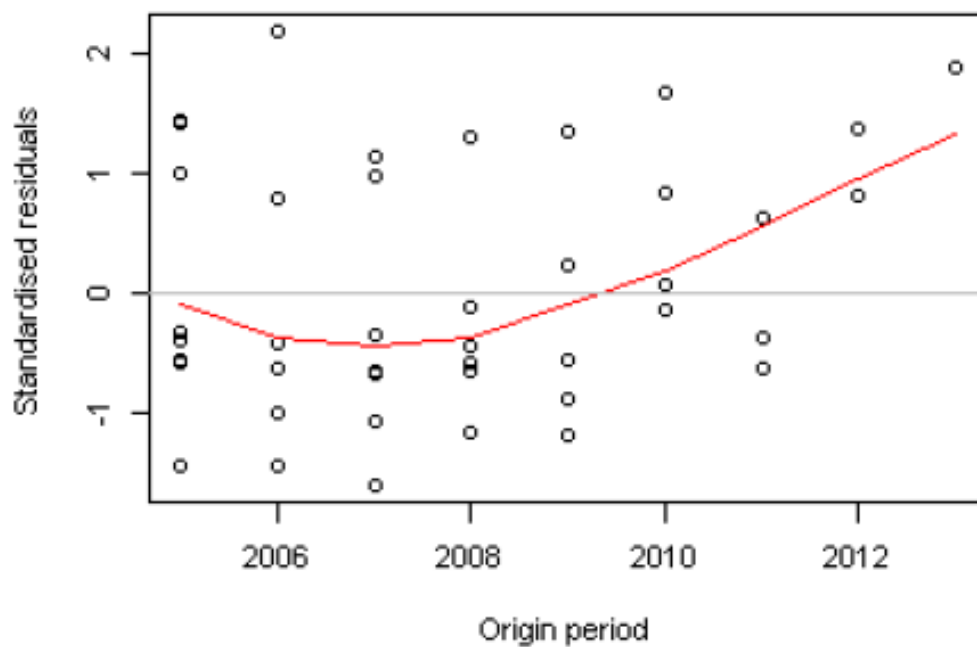
Grafik 3.3: Paraqitja sipas viteve të zhvillimit



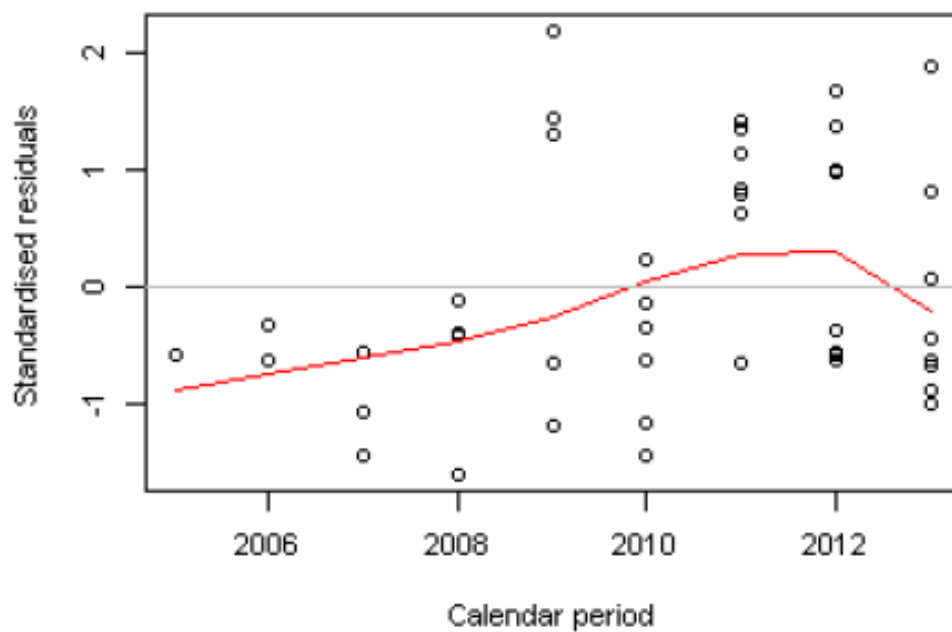
Grafik 3.4: Mbetjet e standartizuara



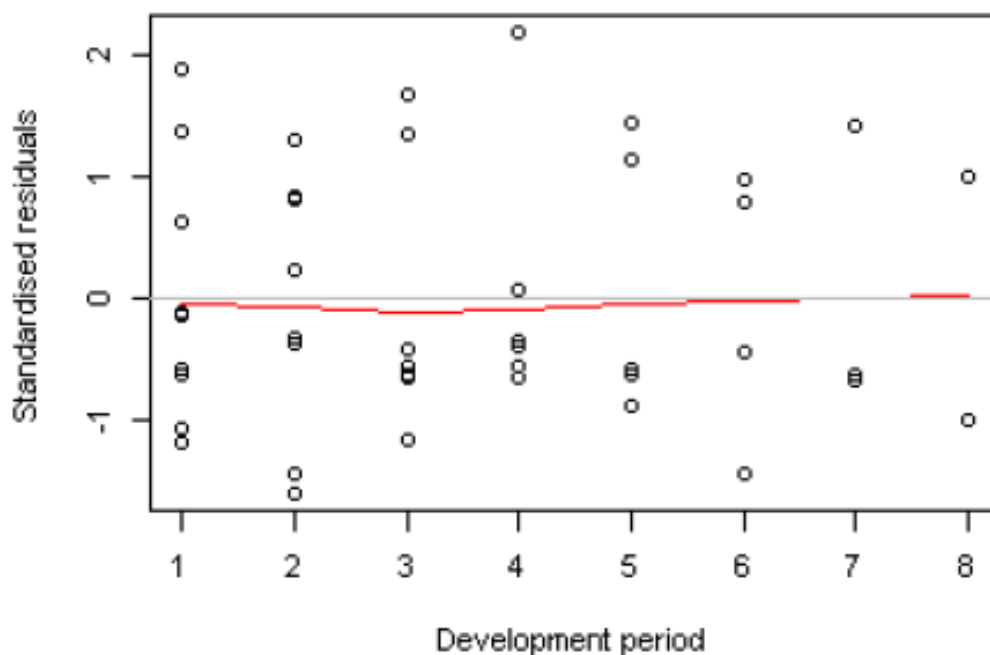
Grafik 3.5: Mbetjet e standartizuara – vitet e origjinës



Grafik 3.6: Mbetjet e standartizuara – sipas viteve kalendarike

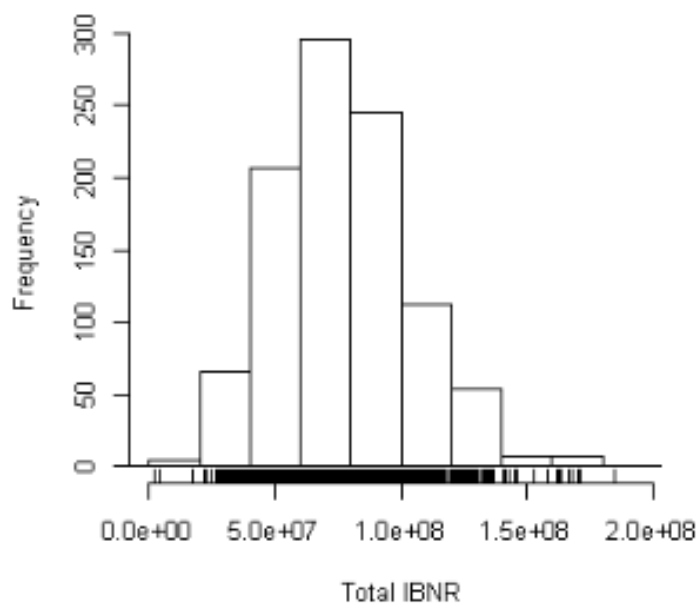


Grafik 3.7: Mbetjet e standartizuara – sipas viteve të zhvillimit

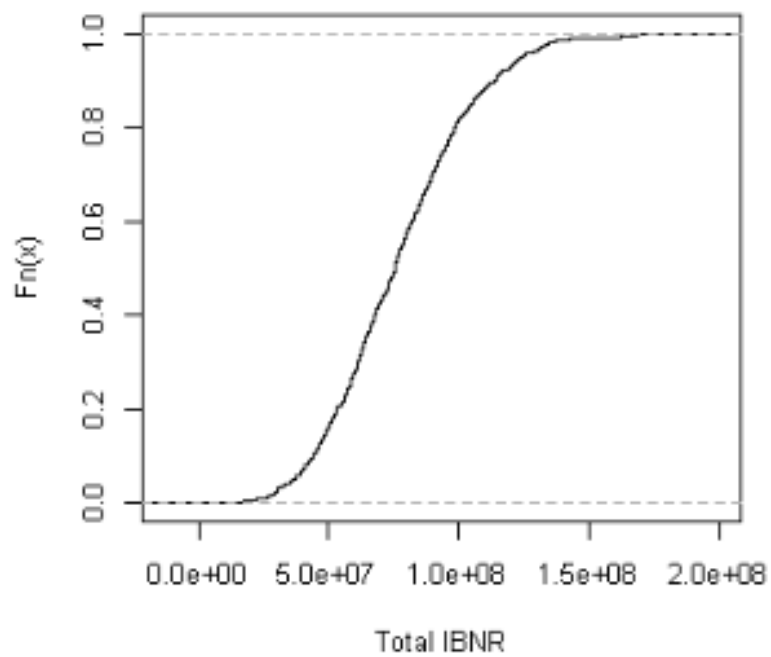


Bootstrap mbi trekëndëshin e pagesave për vlerësimin e rezervës IBNR (England, P. and Verrall, R. 1999)

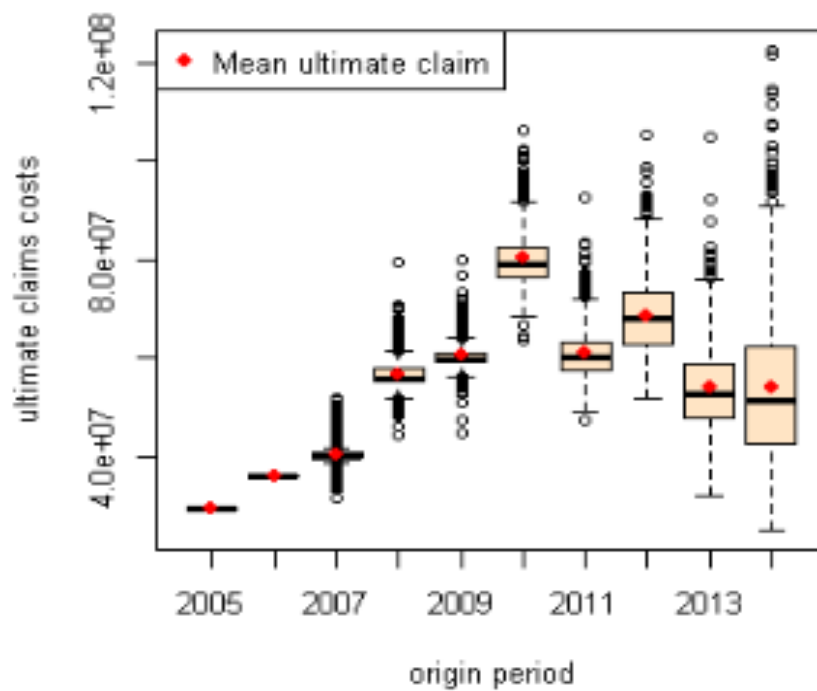
Bootstrap mbi trekëndëshin e pagesave



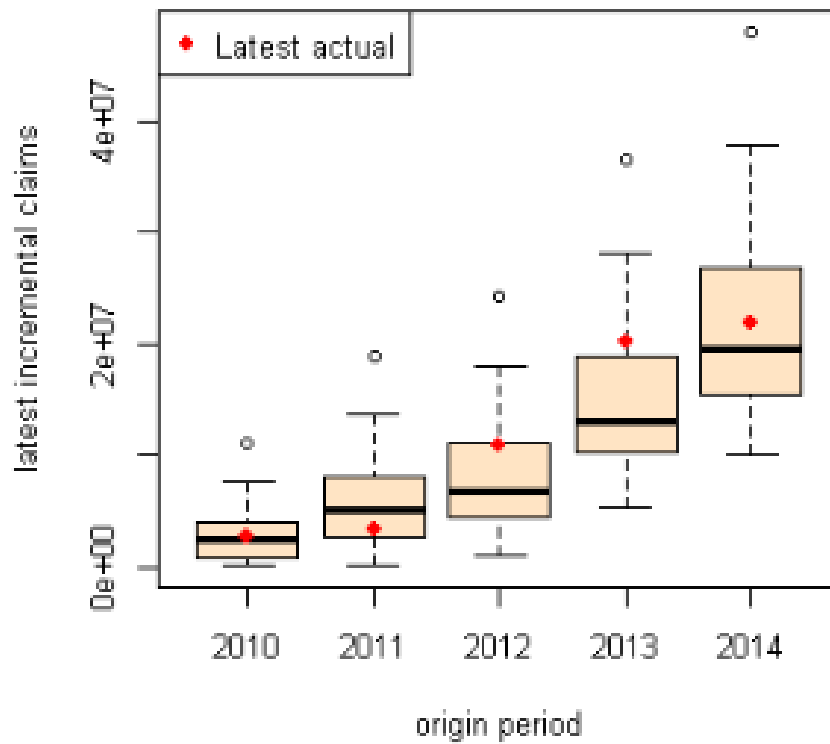
Grafik 3.8: Histograma e IBNR



Grafik 3.9: Funkzioni i shpërndarjes së rezervës IBNR



Grafik 3.10: Simulimi i kostove të dëmeve të fundit



Grafik 3.11: Dëmet aktuale progressive krahasuar me vlerat e simuluar

Përmbledhje

\$ByOrigin								
	Latest	Mean	Ultimate	Mean IBNR	SD IBNR	IBNR 75%	IBNR 95%	
2005	29627617		29627617	0.0	0	0.0	0	
2006	36210297		36210297	0.0	0	0.0	0	
2007	39901048		40572554	671505.5	1882569	782914.9	4357769	
2008	55482000		56819281	1337280.7	2807677	2380355.2	7037353	
2009	59226959		60518968	1292008.8	2882795	2013625.6	7075696	
2010	74682850		80261712	5578862.2	5428937	7998229.1	16285123	
2011	54831028		60905487	6074458.7	5031874	8471454.1	15323494	
2012	55642105		68674644	13032539.0	7531905	17507585.8	26632189	
2013	36981386		53975017	16993631.0	8835815	22064922.1	32443805	
2014	21903227		53875697	31972470.1	15431005	40375816.7	61052844	

\$Totals		Totals
Latest:		464488517
Mean Ultimate:		541441273
Mean IBNR:		76952756
SD IBNR:		27143258
Total IBNR 75%:		94328659
Total IBNR 95%:		123871292

Llogaritjet bazuar mbi trekëndëshin e dëmeve të ndodhur

Trekëndëshi i akumuluar i dëmeve të ndodhur

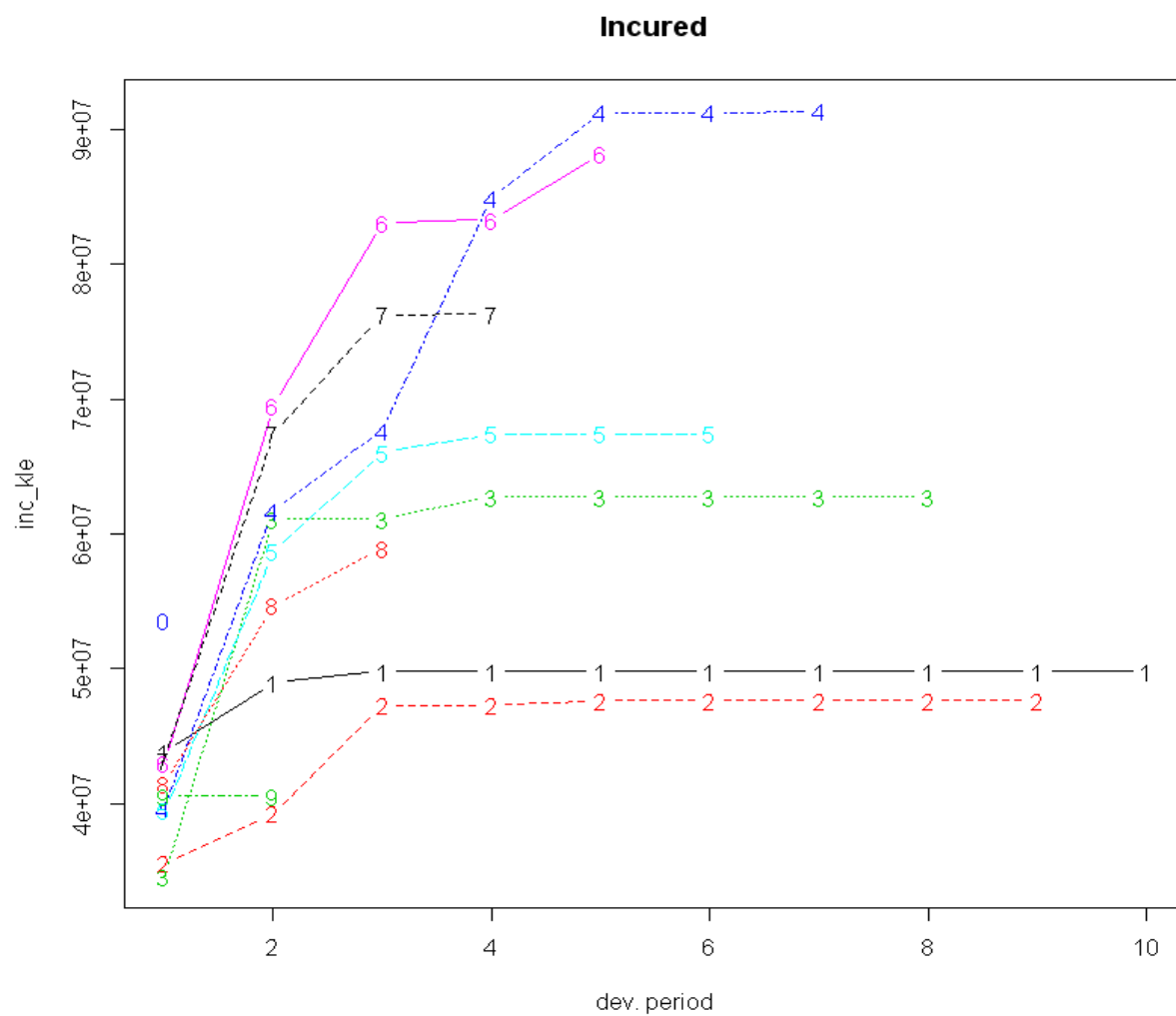
i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	43,855,985	48,981,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761
2006	35,549,677	39,261,019	47,261,019	47,261,019	47,638,070	47,638,070	47,638,070	47,638,070	47,638,070	
2007	34,563,960	61,123,045	61,123,045	62,748,791	62,748,791	62,748,791	62,748,791	62,748,791	62,748,791	
2008	39,563,188	61,731,322	67,677,605	84,949,636	91,255,164	91,255,164	91,421,764			
2009	39,467,409	58,680,818	66,055,173	67,412,109	67,412,109	67,412,109				
2010	43,035,761	69,523,122	83,069,602	83,319,602	88,216,570					
2011	43,195,291	67,457,014	76,275,810	76,325,810						
2012	41,495,136	54,703,915	58,893,154							
2013	40,571,725	40,571,725								
2014	53,596,544									

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
2005	49781761	1.0000000	49781761	0.000000e+00	0.000000e+00	NaN
2006	47638070	1.0000000	47638070	0.000000e+00	9.340832e-11	Inf
2007	62748791	1.0000000	62748791	-1.490116e-08	1.013155e-08	-0.6799166
2008	91421764	1.0000000	91421764	0.000000e+00	1.354976e-08	Inf
2009	67412109	0.9993378	67456778	4.466903e+04	7.430543e+04	1.6634663
2010	88216570	0.9993378	88275025	5.845461e+04	8.773093e+04	1.5008384
2011	76325810	0.9709093	78612705	2.286895e+06	2.768033e+06	1.2103888
2012	58893154	0.9286100	63420760	4.527606e+06	6.906635e+06	1.5254495
2013	40571725	0.8400059	48299331	7.727606e+06	7.128902e+06	0.9225241
2014	53596544	0.6045263	88658753	3.506221e+07	1.858361e+07	0.5300183

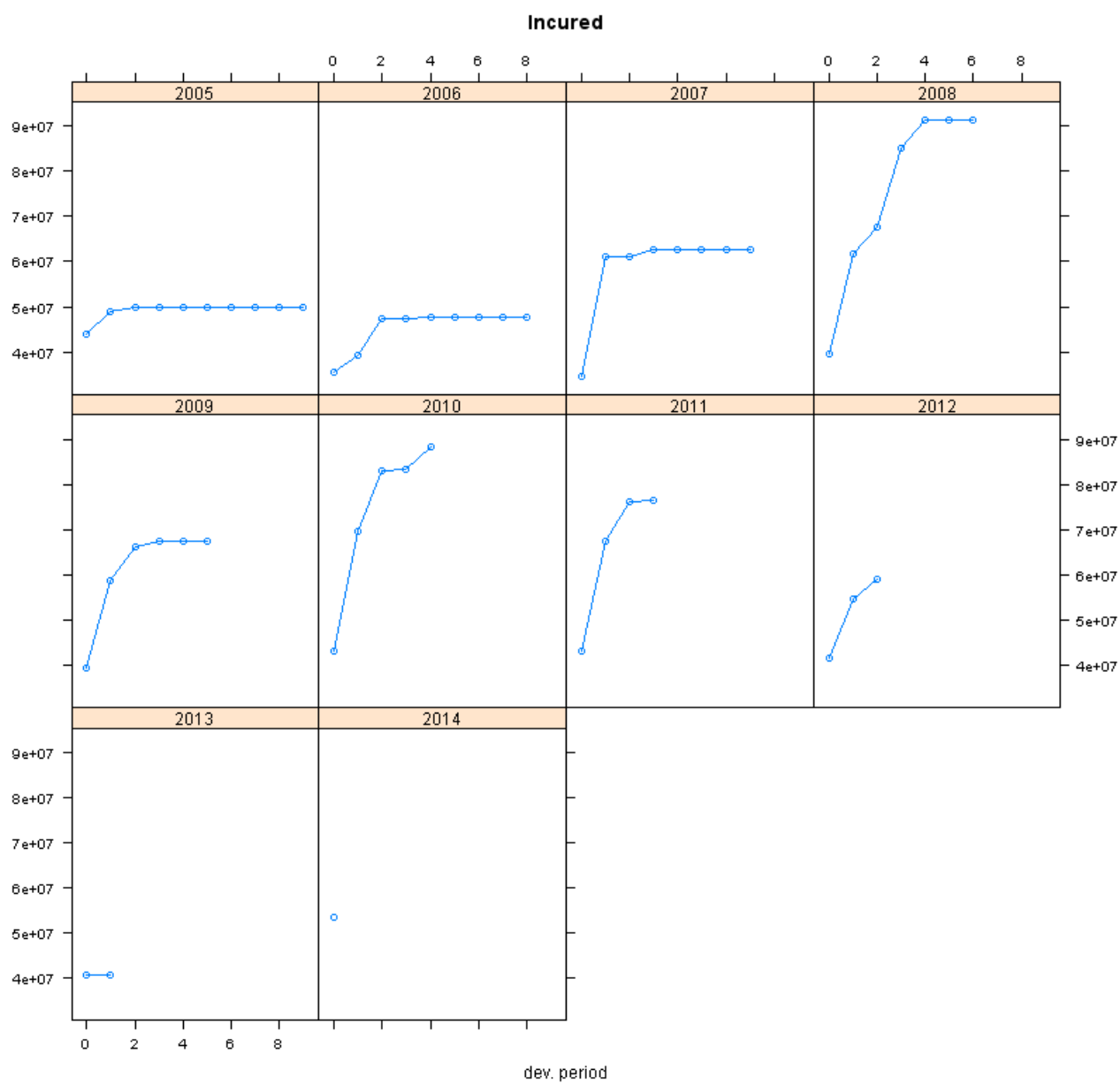
\$Totals

Totals	
Latest:	6.366063e+08
Dev:	9.275733e-01
Ultimate:	6.863137e+08
IBNR:	4.970744e+07
Mack S.E.:	2.233284e+07
CV(IBNR):	4.492856e-01

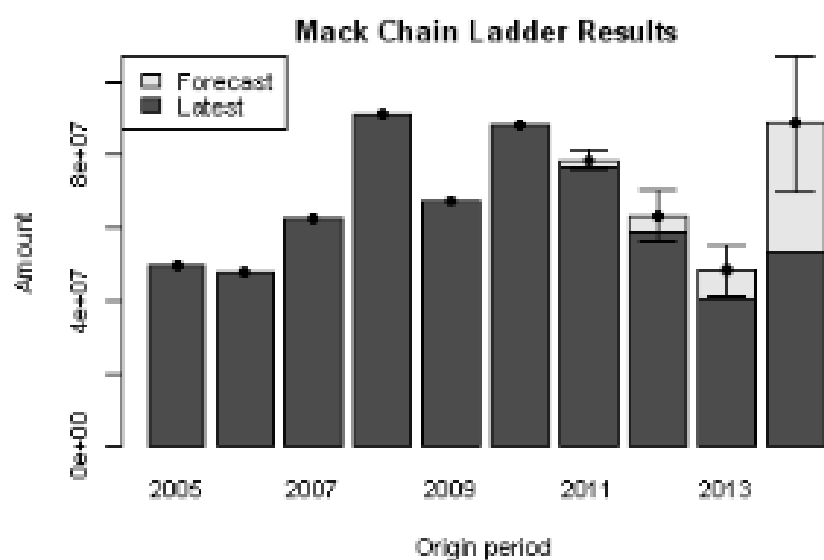
Grafik 3.12: Paraqitja e trekëndëshit



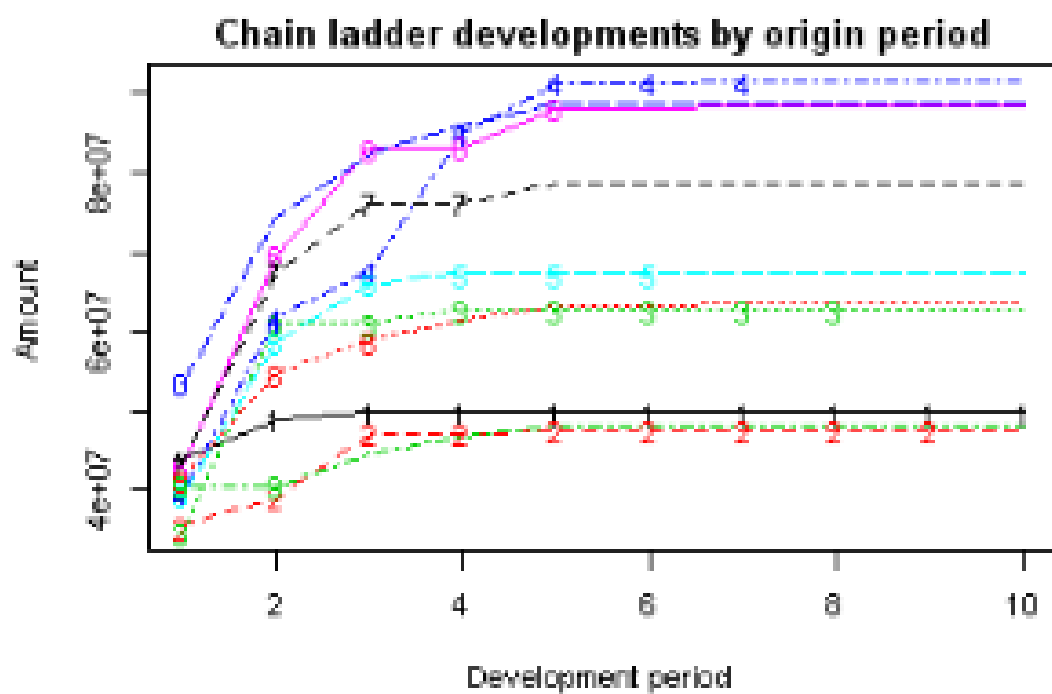
Paraqitja sipas viteve të zhvillimit



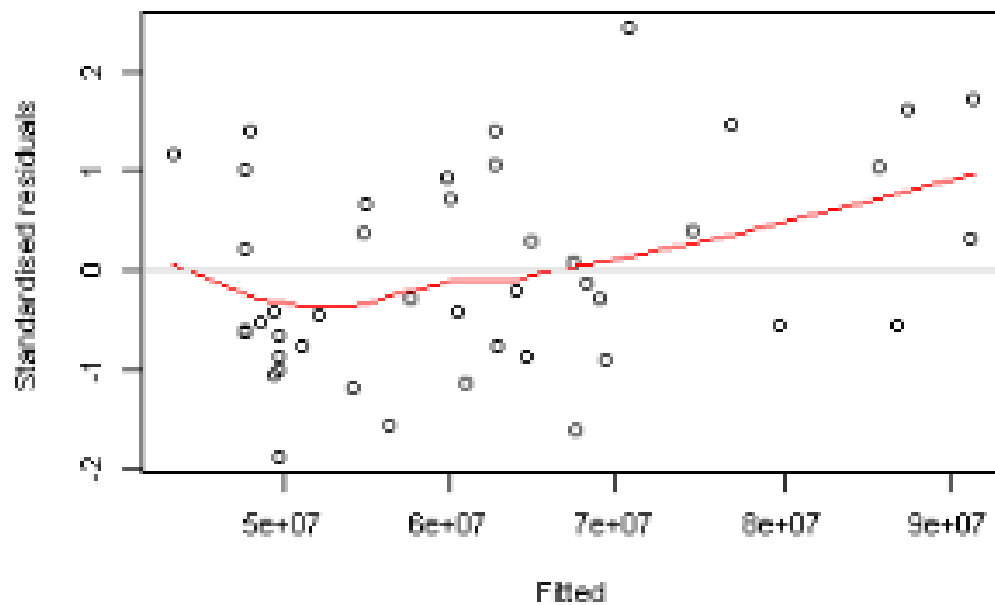
Grafik 3.13: Paraqitja grafike e rezultateve të metodës



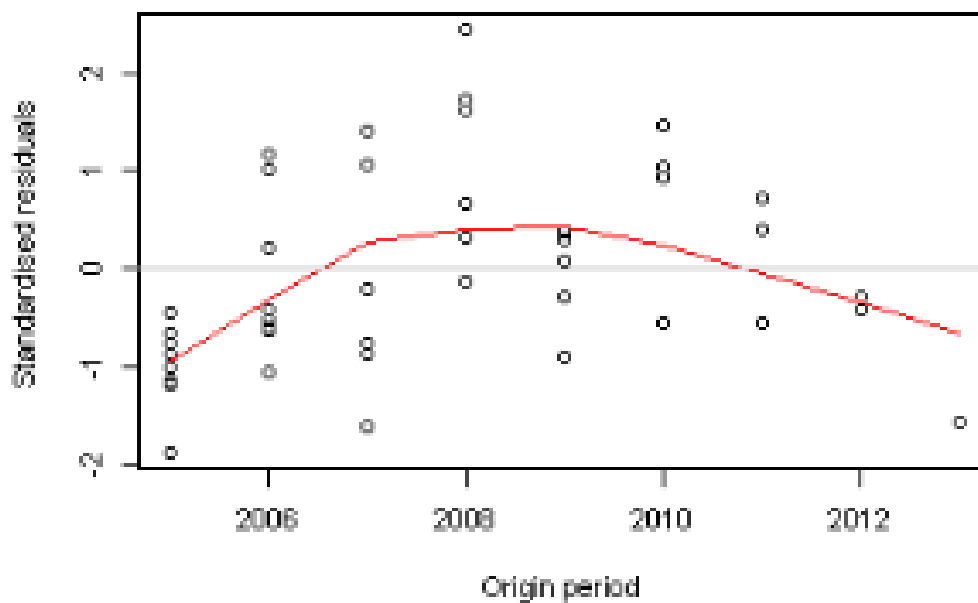
Grafik 3.14: Paraqitja sipas viteve të zhvillimit



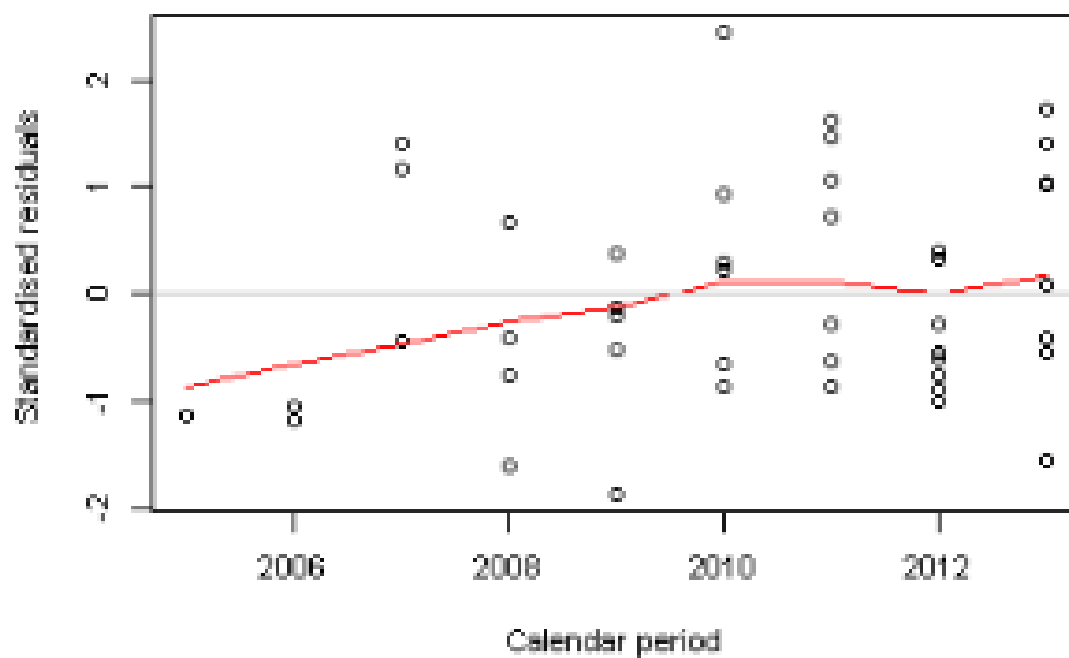
Grafik 3.15: Mbetjet e standartizuara



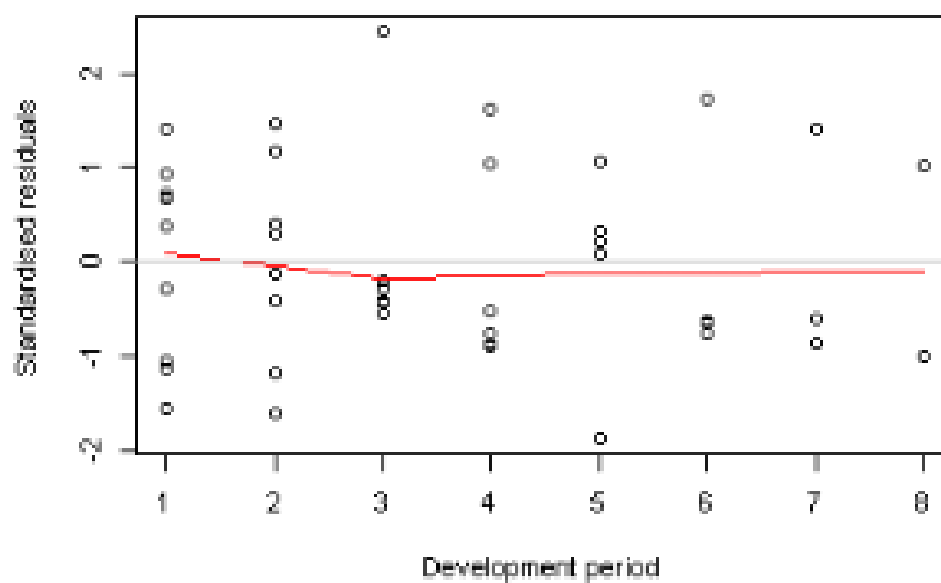
Grafik 3.16: Mbetjet e standartizuara – vitet e origjinës



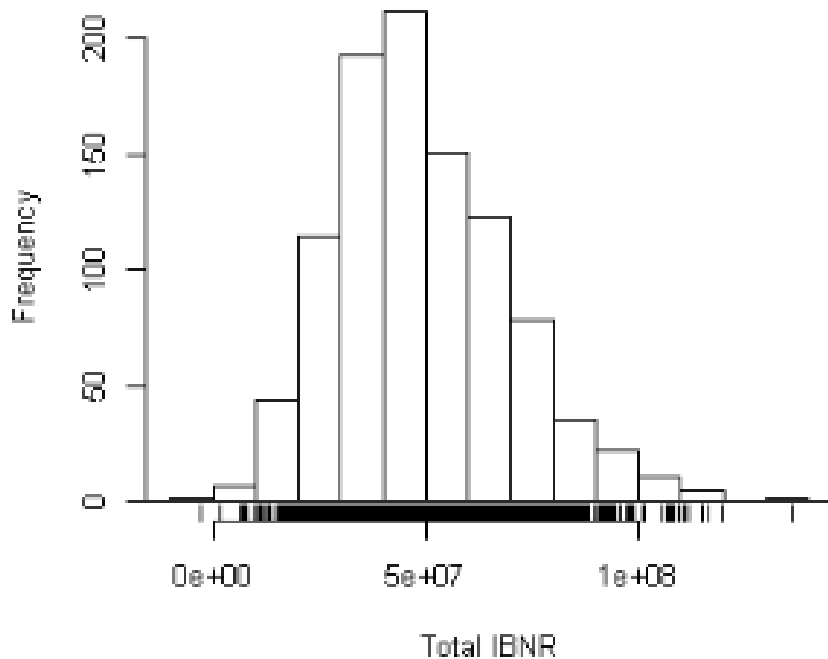
Grafik 3.17: Mbetjet e standartizuara – sipas viteve kalendarike



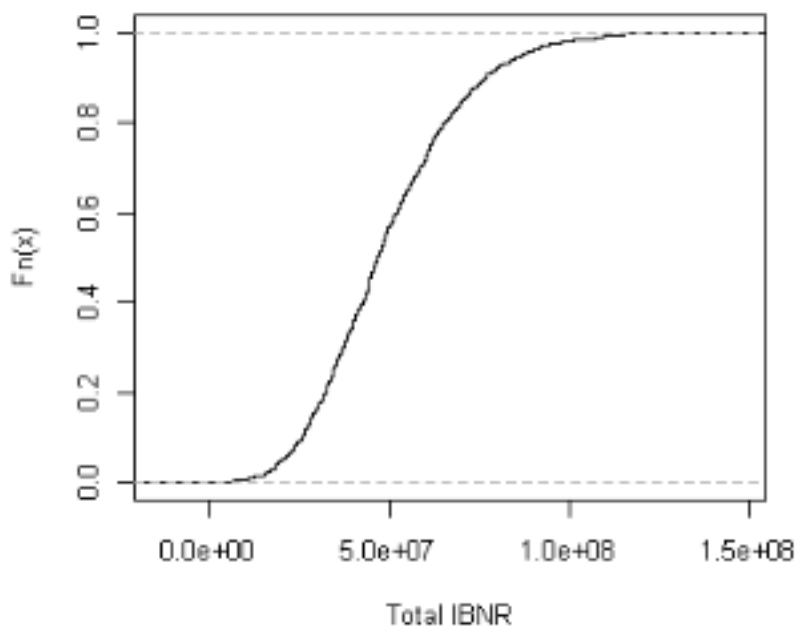
Grafik 3.18: Mbetjet e standartizuara – vitet e zhvillimit



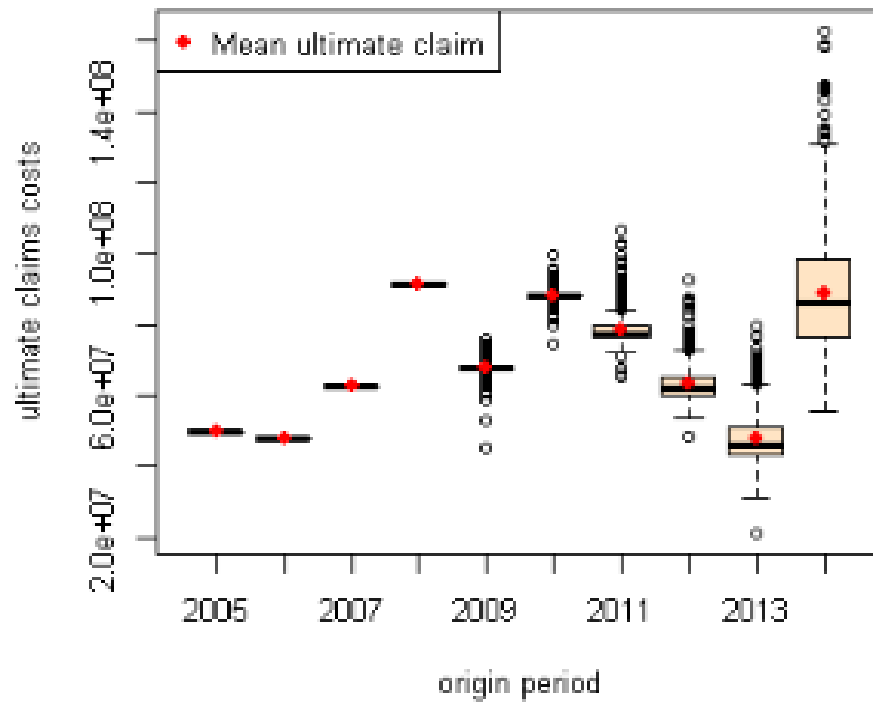
Aplikimi i Bootstrap mbi trekëndëshin e dëmeve të ndodhur për vlerësimin e rezervës IBNR
(England, P. and Verrall, R. 1999)



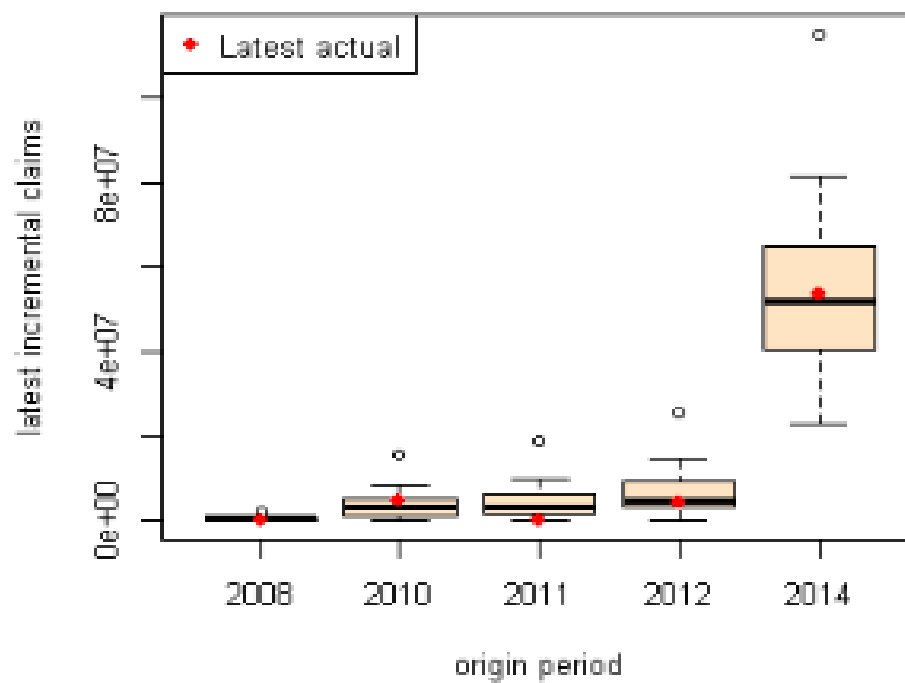
Grafik 3.19: Histograma e IBNR



Grafik 3.20: Funkzioni i shpërndarjes së rezervës IBNR



Grafik 3.21: Simulimi i kostove të dëmeve të fundit



Grafik 3.22: Dëmet aktuale progressive krahasuar me vlerat e simuluar

Rezultatet e Bootstrap

	IBNR	IBNR.S.E	CDR(1)S.E	CDR(1)75%	CDR(1)95%
2005	0.00	0	0.0	0.000000e+00	0.0
2006	0.00	0	0.0	0.000000e+00	0.0
2007	0.00	0	0.0	0.000000e+00	0.0
2008	0.00	0	0.0	0.000000e+00	0.0
2009	-30874.35	1175573	1175572.9	3.055410e-02	333071.4
2010	34908.16	1114999	325261.4	4.609545e+04	138250.7
2011	2286286.29	3730724	3560858.2	3.100934e+06	9490720.3
2012	4268742.21	4695012	3669716.0	5.480899e+06	11305163.3
2013	7400861.06	6445493	4763506.1	9.240526e+06	17177433.5
2014	35223467.12	16865013	13989727.9	4.333243e+07	61660479.1
Total	49183390.50	20347382	16598737.6	5.933358e+07	80454709.7

	Latest	Mean	Ultimate	Mean IBNR	SD IBNR	IBNR 75%	IBNR 95%
2005	49781761		49781761	0.00	0	0.000000e+00	0.0
2006	47638070		47638070	0.00	0	0.000000e+00	0.0
2007	62748791		62748791	0.00	0	0.000000e+00	0.0
2008	91421764		91421764	0.00	0	0.000000e+00	0.0
2009	67412109		67381235	-30874.35	1175573	3.055410e-02	333071.4
2010	88216570		88251478	34908.16	1114999	5.407122e+01	806895.8
2011	76325810		78612096	2286286.29	3730724	3.272270e+06	9485105.8
2012	58893154		63161896	4268742.21	4695012	6.013946e+06	13997581.3
2013	40571725		47972586	7400861.06	6445493	1.069327e+07	19898811.9
2014	53596544		88820011	35223467.12	16865013	4.453004e+07	66095427.5

\$Totals

	Totals
Latest:	636606298
Mean Ultimate:	685789688
Mean IBNR:	49183390
SD IBNR:	20347382
Total IBNR 75%:	61321248
Total IBNR 95%:	86880186

Rezultatet e metodës për vlerësimin e rezervës IBNR në 31.12.2014 është:

	<i>Të paguara</i>	<i>Të ndodhura</i>
s.e.	25,575,300	22,332,840
IBNR	76,138,640	49,707,440

Rezultatet e Bootstrap

	<i>Të paguara</i>	<i>Të ndodhura</i>
SD	27,143,258	20,347,382
IBNR 75%	94,328,659	61,321,248
IBNR 95%	123,871,292	86,880,186

Kapitulli 4. METODA E RAPORTIT PROGRESIV

4.1 Formulimi i modelit (ILR)

Në rezervimin e dëmeve zakonisht bëhet supozimi që vitet e aksidenteve të trekëndëshave të zhvillimit janë të ngjashëm me njëri-tjetrin. Supozimi më i thjeshtë është të konsiderohet që pagesat e dëmeve në çdo vit aksidenti të kenë të njëjtën shpërndarje. Ky kusht nuk përmbushet pothuajse asnjëherë pasi vëllimi i biznesit në vite të caktuara mund të jetë i ndryshëm dhe si rrjedhim dhe shpërndarja e dëmeve mund të mos jetë identike. Influenca e vëllimit të dëmeve në shpërndarjet bazë mund të modelohet në përputhje me konceptin që shpeshherë quhet “model individual”. Sipas këtij koncepti supozimi është që për çdo vit zhvillimi k , ka raporte progresive m_k të tillë që kanë lidhje të fortë me pagesën e dëmeve të parashikuar për çdo vit aksidenti:

$$E\left(\frac{S_{ik}}{v_i}\right) = m_k \quad (1)$$

ku v_i – është masa e ekspozimit për vitin e aksidentit i

S_{ik} - pagesat progresive të bëra gjatë vitit të aksidentit i dhe vitit të zhvillimit k

m_{ik} - raporti progresiv i dëmeve gjatë vitit të aksidentit i dhe vitit të zhvillimit k

Pagesat individuale S_{ik} në çdo vit aksidenti dhe zhvillimi janë të pavarura për çdo i, k . Modeli individual nënkupton se S_{ik} ndikohet nga masa e ekspozimit. Për çdo vit zhvillimi k ka s_k^2 të tillë që

$$D\left(\frac{S_{ik}}{v_i}\right) = \frac{s_k^2}{v_i} \quad (2)$$

Pra supozimet për këtë metodë janë (Mack, T. 1993):

- Për një vit të caktuar zhvillimit raporti progresiv i dëmeve i pritshëm është i njëjtë për të gjitha vitet e aksidentit (1)
- Pagesa në çdo qelizë është e pavarur nga të gjitha pagesat e tjera
- Dispersioni i raportit të dëmeve zvogëlohet në proporcion me vëllimin e dëmeve (2)

Kuptohet që supozimi i dytë është ai që mund të mos verifikohet gjithmonë. Vlerësimi i m_k na drejton menjëherë në vlerësimin e pagesave të ardhshme. Pagesat e ardhshme projektohen nëpërmjet

$$\tilde{R}_{ik} = v_i \cdot \tilde{m}_k$$

dhe vlerësimi i rezervës në vitin i jepet nga vlerësimi i pazhvendosur

$$\tilde{R}_i = \sum_k \tilde{R}_{ik}$$

4.2 Vlerësimet e parametrave të modelit

Vlerësimet e pazhvendosura të m_k dhe s_k^2 bazuar në supozimet e mësipërme janë (Gerigk, Erasmus 2004):

$$\tilde{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}$$

$$\tilde{s}_k^2 = \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{n+1-k} v_i \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \tilde{m}_k \right)^2$$

Formula e $\tilde{m}_j$ është në fakt mesatarja e ponderuar e ekspozimit të raportit progresiv të dëmeve $m_{ik} = \frac{S_{ik}}{v_{ij}}$ dhe mund të shkruhet:

$$\tilde{m}_k = \sum_{i=1}^{n+1-k} \left(\frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} m_{ik} \right)$$

Meqë m_{ij} është vlerësim i pazhvendosur, mund të kemi shume vlerësime për m_k , si p.sh. mesatarja aritmetike e raporteve progresive individuale, por

$$\tilde{m}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n+1-k} S_{ik}}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}$$

ka dispersionin më të vogël.

4.3 Analiza e variabilitetit

4.3.1 Gabimi standard i raportit progresiv të dëmeve

Dispersioni i vlerësimit $\tilde{m}_k$ është

$$D(\tilde{m}_k) = \frac{s_k^2}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i}$$

dhe na jep vlerësimin e gabimit standard s.e. për këtë metodë, ndërsa shprehja e mëposhtme mund të interpretohet si “dispersioni i peshuar” i devijimeve të raporteve progresive të dëmeve individuale përreth mesatares së tyre (Gerigk, Erasmus 2004).

$$\frac{s_k^2}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} = \frac{1}{n-k} \sum_i^{n+1-k} \frac{v_i}{\sum_{i=1}^{n+1-k} v_i} \left(\frac{S_{ik}}{v_i} - \tilde{m}_k \right)^2$$

4.3.2 Gabimi standard për një vit aksidenti

Gabimi i procesit për një vit aksidenti jepet nga

$$D(\tilde{C}_{i,k+1}) = v_i \cdot \tilde{s}_{k+1}^2 + D(\tilde{C}_{i,k+1})$$

Gabimi i vlerësimit për një vit aksidenti mund të vlerësohet në mënyrë rekursive nëpërmjet

$$(\tilde{C}_{i,k+1} - E(C_{i,k+1}))^2 = v_i^2 \cdot s.e.(\tilde{m}_{k+1})^2 + (\tilde{C}_{i,k} - E(C_{i,k}))^2$$

Termi $s.e.(\tilde{m}_k)$ mat variacionin e raportit mesatar të vlerësuar progresiv të dëmit $\tilde{m}_k$ nga raporti progresiv m_k , pra gabimi në vlerësim. Gabimin e vlerësimit mund ta shkruajmë edhe si më poshtë:

$$(\tilde{C}_{i,k+1} - E(C_{i,k+1}))^2 = ([\tilde{S}_{i,k} - E(S_{i,k})] + [\tilde{C}_{i,k} - E(C_{i,k})])^2.$$

Po të kombinojmë formulat e gabimit të procesit dhe të gabimit të vlerësimit marrim formulën rekursive për gabimin standard për një vit aksidenti

$$s.e.(\tilde{C}_{i,k+1})^2 = v_i \cdot \tilde{s}_{k+1}^2 + v_i^2 \cdot s.e.(\tilde{m}_{k+1})^2 + s.e.(\tilde{C}_{i,k+1})^2$$

4.3.3 Gabimi standard total

Me termin e ndërmjetëm u_k

$$u_k = \sum_{i=n-k+2}^n v_i$$

që është ekspozimi total që i korrespondon periudhë së zhvillimit $k+1$, formula rekursive për gabimin standard total $\tilde{C}_k = \sum_{i=1}^n C_{i,k}$ me vlerë fillestare është

$$s.e.(\tilde{C}_{i,k+1})^2 = u_i \cdot \tilde{s}_{k+1}^2 + u_i^2 \cdot s.e.(\tilde{m}_{k+1})^2 + s.e.(\tilde{C}_k)^2$$

me vlerë fillestare $s.e.(\tilde{C}_2)^2 = s.e.(\tilde{C}_{n,2})^2$. Në të njëjtën mënyrë mund të llogaritet total i gabimit të procesit dhe atij të vlerësimit.

$$D(\tilde{C}_{i,k+1}) = u_i \cdot \tilde{s}_{k+1}^2 + D(\tilde{C}_{i,k+1})$$

$$(\tilde{C}_{i,k+1} - E(C_{i,k+1}))^2 = u_i^2 \cdot s.e.(\tilde{m}_{k+1})^2 + (\tilde{C}_{i,k} - E(C_{i,k}))^2$$

4.3.4 Aplikim (Haxhi, K., Xhaja, B. 2015)

Trekëndëshi është ndërtuar nga të dhënat e sigurimit motorik, përgjegjësia ndaj palëve të treta MTPL. Janë shqyrtuar të dhënat në nga 2009 deri 30.06.2014. Trekëndëshat janë tre mujorë, pra për çdo vit aksidenti kemi 4 rreshta. Vlerësimet janë bërë fillimisht duke konsideruar si outliers dëmet mbi 4 milionë lekë, pastaj janë kryer duke përfshirë të gjitha të dhënat.

Vlerësimi	Totali i parashikimeve të dëmeve të paguara	
	CL	ILR
<i>Rezerva Total</i>	869,679,546	870,988,859

Vlerësimi	IBNR	
	CL	ILR
<i>Përfshirë Dëmet e mëdha</i>	95,018,904	96,328,217
<i>Pa Dëmet e mëdha</i>	81,941,658	76,757,356

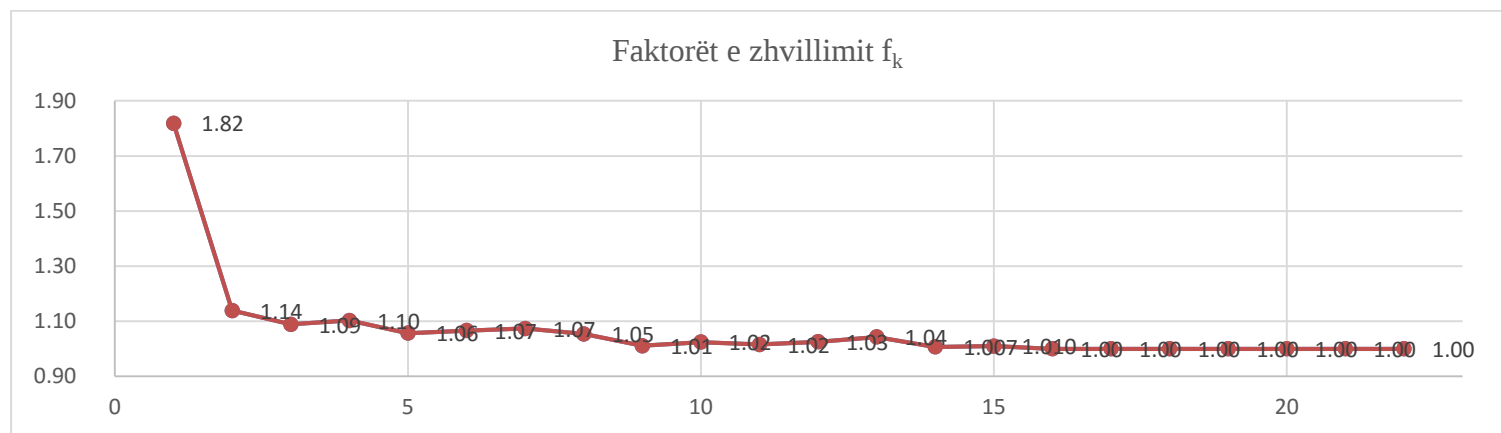
Llogaritjet e gabimit standard janë bërë sipas shkallëzimit zinxhir të Mack. Përdorim si tregues në këtë metodë dhe koeficientin e variacionit VC, që është raporti i gabimit standard SE dhe vlerës së rezervës së vlerësuar. Kemi që koeficienti i variacionit është 45% për shkallëzimin zinxhir të zakonshëm dhe 38% për metodën e raportit progresiv të dëmeve

VC CL = 45% dhe VC ILR = 38%

Nga llogaritjet rezulton që paqëndrueshmëria e të dhënave është e lartë.

Trekëndëshi i pagesave bazuar në pagesat 3 mujore

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
2009	1	2,434,034	4,293,363	5,977,405	6,744,455	7,168,555	7,323,555	7,758,555	8,179,915	8,279,915	8,279,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915	8,298,915
2009	2	1,990,700	4,320,100	6,049,600	6,810,283	6,810,283	7,402,943	7,403,343	7,502,343	7,502,343	7,528,843	7,528,843	7,528,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843	10,593,843
2009	3	6,203,860	16,866,920	17,921,420	18,887,140	19,508,313	19,508,313	19,508,313	22,008,313	22,008,313	22,008,313	22,308,313	22,308,313	22,878,313	22,878,313	22,878,313	24,108,037	24,108,037	24,108,037	24,108,037	24,108,037	24,108,037	24,108,037
2009	4	7,345,900	10,137,720	11,137,140	11,707,140	11,987,140	12,129,140	12,129,140	12,151,140	12,151,140	12,451,140	12,451,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140	13,051,140
2010	1	4,848,700	7,933,200	8,444,700	8,658,700	8,658,700	8,673,200	9,423,200	9,423,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200	10,244,200
2010	2	8,481,664	15,055,098	15,895,265	17,484,865	17,624,365	17,720,865	17,720,865	17,728,865	21,228,865	21,228,865	23,028,865	23,328,865	23,463,865	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030	24,100,030
2010	3	11,523,000	15,108,372	16,847,272	18,356,772	18,719,832	18,799,832	19,877,332	21,083,359	21,483,359	21,483,359	21,483,359	22,628,779	22,628,779	22,670,779	23,654,438	23,654,438						
2010	4	8,772,324	11,253,324	11,478,324	11,641,824	11,641,824	11,641,824	11,641,824	12,441,824	12,441,824	12,441,824	12,441,824	12,441,824	12,460,324	12,460,324	12,460,324							
2011	1	4,432,600	9,307,797	9,631,827	11,169,227	12,355,527	12,894,527	13,423,557	13,423,557	13,423,557	13,680,857	13,680,857	13,680,857	13,894,857	13,894,857								
2011	2	2,162,600	6,979,027	7,188,527	10,896,508	11,983,928	11,983,928	12,375,594	12,375,594	13,025,189	13,025,189	13,025,189	14,008,848	14,165,764									
2011	3	8,061,820	12,236,020	15,329,687	15,943,687	16,722,687	17,067,687	17,067,687	17,067,687	17,067,687	17,074,687	17,074,687	17,074,687										
2011	4	6,080,334	12,469,134	17,665,467	17,988,317	20,827,857	20,827,857	24,686,257	24,686,257	26,486,257	26,486,257	31,586,257											
2012	1	9,253,899	16,545,939	16,686,939	21,774,381	25,274,381	25,452,381	27,093,503	27,113,503	27,113,503	27,113,503												
2012	2	4,038,169	7,202,571	8,465,512	8,474,512	10,007,412	18,048,534	18,048,534	18,048,534	18,048,534	19,848,534												
2012	3	3,719,920	8,048,879	8,162,979	9,412,841	19,212,240	19,382,240	19,649,240	21,032,592														
2012	4	7,193,861	15,768,528	21,066,566	21,356,928	21,356,928	21,356,928	24,863,015															
2013	1	5,100,436	7,558,136	8,946,636	8,969,636	9,332,636	10,562,057																
2013	2	5,002,900	7,593,200	8,205,600	8,812,600	12,105,600																	
2013	3	6,406,333	14,539,995	17,409,995	19,039,995																		
2013	4	4,778,692	9,646,325	10,593,325																			
2014	1	3,316,900	6,508,783																				
2014	2	3,214,939																					
[Lk]		1.81849182	1.138500134	1.080928744	1.103011889	1.056771557	1.066308706	1.073771869	1.054123656	1.010803736	1.024507324	1.015682323	1.025270868	1.042709421	1.00711804	1.00961571	1	1	1	1	1	1	1



Raportet

		1>2	2>3	3>4	4>5	5>6	6>7	7>8	8>9	9>10	10>11	11>12	12>13	13>14	14>15	15>16	16>17	17>18	18>19	19>20	20>21	21>22
2009	1	0.019585	0.019589	0.024568	0.026539	0.027438	0.028084	0.029550	0.033488	0.035642	0.038512	0.042966	0.050420	0.054713	0.060053	0.066242	0.072765	0.091806	0.125179	0.148058	0.192994	0.438264
2009	2	0.013690	0.019702	0.024885	0.026798	0.026066	0.028388	0.028540	0.030714	0.032295	0.035018	0.038979	0.045742	0.050643	0.056660	0.064561	0.092887	0.117194	0.159796	0.189000	0.246364	0.560756
2009	3	0.049901	0.076922	0.073719	0.074321	0.074668	0.074809	0.074300	0.080100	0.094739	0.102366	0.115496	0.135534	0.150833	0.165554	0.182616	0.211380	0.266693	0.363642	0.430102	0.560642	
2009	4	0.059087	0.046233	0.045812	0.046068	0.045786	0.046512	0.046196	0.049745	0.052307	0.057913	0.064463	0.079292	0.086044	0.094442	0.104175	0.114433	0.144377	0.196861	0.232840		
2010	1	0.039000	0.036179	0.034737	0.034072	0.033141	0.033259	0.035890	0.038578	0.044098	0.047648	0.053037	0.062239	0.067538	0.074130	0.081770	0.089822	0.113326	0.154522			
2010	2	0.068222	0.066059	0.065385	0.066803	0.067457	0.067954	0.067493	0.072580	0.091384	0.098740	0.119226	0.141735	0.154693	0.174395	0.192367	0.211310	0.266605				
2010	3	0.092685	0.068902	0.069301	0.072234	0.071650	0.072092	0.075706	0.086313	0.092479	0.099924	0.111225	0.137481	0.149188	0.164052	0.188811	0.207403					
2010	4	0.070960	0.051321	0.047216	0.045811	0.044559	0.044643	0.044340	0.050935	0.053558	0.057870	0.064415	0.075590	0.082149	0.090166	0.099459						
2011	1	0.035653	0.041992	0.039620	0.043951	0.047291	0.049447	0.051126	0.054955	0.057784	0.063633	0.070829	0.083118	0.091606	0.100547							
2011	2	0.017395	0.031828	0.029570	0.042878	0.045868	0.043955	0.047134	0.050664	0.056069	0.060583	0.067435	0.085111	0.093392								
2011	3	0.064845	0.055802	0.063058	0.062738	0.064006	0.065450	0.065005	0.069873	0.073471	0.079418	0.088400	0.103737									
2011	4	0.048907	0.056865	0.072666	0.070784	0.079718	0.079869	0.094021	0.101063	0.114015	0.132264	0.163530										
2012	1	0.074433	0.075458	0.068641	0.083662	0.096737	0.097603	0.101190	0.111090	0.118715	0.126111											
2012	2	0.032481	0.032847	0.034823	0.033347	0.038303	0.069211	0.068741	0.073889	0.085442												
2012	3	0.029921	0.036707	0.033578	0.037039	0.073535	0.074525	0.074837	0.086104													
2012	4	0.057864	0.071912	0.086607	0.084039	0.081743	0.081896	0.093933														
2013	1	0.041025	0.034469	0.036802	0.035295	0.035721	0.040502															
2013	2	0.040241	0.034629	0.033753	0.034678	0.046334																
2013	3	0.051529	0.066310	0.071615	0.074922																	
2013	4	0.038437	0.043992	0.043575																		
2014	1	0.026679	0.029683																			
2014	2	0.025859																				

Kapitulli 5. METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR MUNICH

Metoda më e zakonshme për llogaritjen e IBNR për një portofol është aplikimi i shkallëzimit zinxhir veçmas në trekëndëshat e dëmeve pezull dhe dëmeve të paguara. Kjo është metoda standard e shkallëzimit zinxhir.

Metoda e shkallëzimit zinxhir Mynih MCL, (Quarg, G.; Mack, T. 2008), kombinon dëmet e paguara (P) dhe dëmet e ndodhura (I) duke llogaritur vendosur P/I në projekte. Raporti P/I përdoret për të përcaktuar e raportin e dëmeve të paguara dhe atyre pezull. Merren në konsideratë drejtkëndëshat e formuar nga metoda standarte e shkallëzimit zinxhir për trekëndëshat e dëmeve të paguara dhe trekëndëshave të dëmeve pezull. Shënojmë $P_{i,t}$ totalin e dëmeve të akumuluar të paguara dhe $I_{i,t}$ totalin e dëmeve të akumuluar të ndodhura, përkatësisht për vitin i të aksidentit pas t vitesh zhvillimi. Raporti P/I i vitit i të aksidentit në vitin e zhvillimit t është:

$$(P/I)_{i,t} = \frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}$$

Raporti mesatar për të gjitha vitet e aksidenteve në vitin t është

$$(P/I)_{i,t} = \frac{\sum_{j=1}^n P_{j,t}}{\sum_{j=1}^n I_{j,t}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n I_{j,t}} \sum_{j=1}^n I_{j,t} (P/I)_{j,t}$$

që është mestarja e ponderuar e raporteve (P/I) në vitin e zhvillimit t me vlerën e dëmeve të ndodhura. Për $s=1, \dots, n-1$ përcaktojmë $f_{s \rightarrow s+1}^P$ faktorët e zhvillimit të dëmeve të paguara dhe $f_{s \rightarrow s+1}^I$ ato të dëmeve pezull, nga viti s i zhvillimit në vitin s+1 të zhvillimit kemi:

$$f_{s \rightarrow s+1}^P = \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \quad dhe \quad f_{s \rightarrow s+1}^I = \frac{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} I_{j,s}}$$

Për shumat e projektuara do të kemi

$$P_{i,s+1} = P_{i,s} f_{s \rightarrow s+1}^P \quad dhe \quad I_{i,s+1} = I_{i,s} f_{s \rightarrow s+1}^I$$

Për faktorët e zhvillimit të pagesave kemi ekuacionin

$$\begin{aligned}
f_{s \rightarrow s+1}^P \sum_{j=1}^n P_{j,s} &= f_{s \rightarrow s+1}^P \left(\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^n P_{j,s} \right) \\
&= \frac{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1}}{\sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s}} \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s} + \sum_{j=n-s+1}^n f_{s \rightarrow s+1}^P P_{j,s} \\
&= \sum_{j=1}^{n-s} P_{j,s+1} + \sum_{j=n-s+1}^n P_{j,s+1} = \sum_{j=1}^n P_{j,s+1}
\end{aligned}$$

Për çdo vit aksidenti, raporti i vlerës së projektuar (P/I) me mesataren korresponduese është e njëjtë me raportin e vlerës aktuale me mesataren korresponduese. Pra ky raport mbetet konstant në projeksionet bazuar në llogaritjet e veçanta të shkallëzimit zinxhir.

Shënojmë me $n \in \mathbb{N}$ numrin e viteve të aksidenteve dhe me $T = \{1, 2, \dots, m\}$ kohën e zhvillimit, ($m \in \mathbb{N}$, zakonisht $m=n$). për $i=1, \dots, n$ shënojmë $P_i = (P_{i,t})_{t \in T}$ proceset e pagesave në vitin e aksidentit i dhe $I_i = (I_{i,t})_{t \in T}$ procesin e dëmeve pezull. Ndryshorja e rastit $P_{i,t}$ tregon dëmet e paguara për vitin e aksidentit i pas t vitesh zhvillimit dhe $I_{i,t}$ tregon dëmet e ndodhura në vitin i pas t vitesh zhvillimi. Proceset P_i dhe I_i përshkruajnë zhvillimet e dëmeve të paguara dhe të ndodhura nëpërmjet viteve të zhvillimit.

Gjithashtu $P_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}\}$ paraqet kushtin që pagesa e vitit të zhvillimit i bëhet deri në fund të vitit s dhe $I_i(s) = \{I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ paraqet kushtin që dëmi i ndodhur vit aksidenti i raportohet deri në s duke e përfshirë dhe të.

5.1 Supozime mbi modelin (Quarg, G.; Mack, T. 2008)

Supozimet mbi modelin e shkallëzimit zinxhir për proceset e pagesave janë:

5.1.1 PE - supozimi për pritjen matematike

Për $s, t \in T$ me $t=s+1$, ekziston një faktor zhvillimi $f_{s \rightarrow t}^P > 0$ i tillë që për të gjitha $i=1, \dots, n$

$$E\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^P$$

5.1.2 PV – supozimi për dispersionin

Për $s, t \in T$ me $t=s+1$, ekziston një konstante proporcionale $\sigma_{s \rightarrow t}^P \geq 0$ i tillë që për të gjitha $i=1, \dots, n$

$$D\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^P)^2}{P_{i,s}}$$

5.1.3 PU – supozimi i pavarësisë

Vitet e ndryshme të zhvillimit janë të pavaruara, gjithashtu dhe $\{P_{1,t}|t \in T\}, \dots, \{P_{n,t}|t \in T\}$ janë stokastikisht të pavarura.

Dhe për proceset e dëmeve të ndodhura kemi:

5.1.4 IE - supozimi për pritjen matematike

Për $s, t \in T$ me $t=s+1$, ekziston një faktor zhvillimi $f_{s \rightarrow t}^P > 0$ i tillë që për të gjitha $i=1, \dots, n$

$$E\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathbb{I}_i(s)\right) = f_{s \rightarrow t}^I$$

5.1.5 IV – supozimi për dispersionin

Për $s, t \in T$ me $t=s+1$, ekziston një konstante proporcionale $\sigma_{s \rightarrow t}^I \geq 0$ i tillë që për të gjitha $i=1, \dots, n$

$$D\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathbb{I}(s)\right) = \frac{(\sigma_{s \rightarrow t}^I)^2}{I_{i,s}}$$

5.1.6 IU – supozimi i pavarësisë

Vitet e ndryshme të zhvillimit janë të pavaruara, gjithashtu dhe $\{I_{1,t}|t \in T\}, \dots, \{I_{n,t}|t \in T\}$ janë stokastikisht të pavarura.

Supozimet e mësipërme tregojnë që vitet e aksidenteve janë statistikisht të pavaruara, por kemi të njëjtët faktorë dhe parametrat σ në çdo vit zhvillimi. Këto supozime janë për projektimin e një trekëndëshi dhe nuk thonë asgjë për lidhjen ndërmjet proceseve të pagesave dhe të ndodhjes. Pritjet matematike me kusht japin mundësinë më të mirë për parashikimin e $P_{i,t}$ vetëm nëse njihet procesi i pagesave i vitit të aksidentit sipas deri në kohën s . E njëjta gjë vlen edhe për procesin e ndodhjes. Në praktikë nëse kemi të dy trekëndëshat dhe duam të bëjmë projeksione për të ardhmen, na duhen pritjet matematike me kusht

$$E\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right) \text{ dhe } E\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{B}_i(s)\right)$$

ku $\mathcal{B}_i(s) = \{P_{i,1}, \dots, P_{i,s}; I_{i,1}, \dots, I_{i,s}\}$ për të dy proceset deri në kohën s .

5.2 Shkallëzimi zinxhir Munich

Në metodën e shkallëzimit zinxhir në vend të kriterëve PU dhe IU, përdorim kriterin PIU, domethënë kriteri i pavarësisë nëpërmjet dhe dëmeve të paguar dhe dëmeve të ndodhur. Formalisht kjo do të thotë pavarësi stokastike për $\{P_{1,t}, I_{1,t} | t \in T\}, \dots, \{P_{n,t}, I_{n,t} | t \in T\}$

Përcaktojmë procesin (P/I)

$$Q_i = \frac{P_i}{I_i} = \left(\frac{P_{i,t}}{I_{i,t}}\right)_{t \in T}$$

Përcaktojmë konceptin e mbetjeve (Res). Nëse X është një ndryshore rasti, C kushti, devijimi standard me kusht

$$\sigma(X|C) = \sqrt{D(X|C)}$$

Quhet mbetja e X me kusht C

$$Res(X|C) = \frac{X - E(X|C)}{\sigma(X|C)}$$

Mbetja me kusht standardizohet në lidhje me pritjen matematike me kusht dhe me dispersionin me kusht

$$E(Res(X|C)|C) = 0 \text{ dhe } D(Res(X|C)|C) = 1$$

5.2.1 Supozimet mbi modelin (Quarg, G.; Mack, T. 2008)

Ajo që na intereson janë pritjet matematike me kusht për faktorët e zhvillimit të dëmeve të paguara dhe ato të ndodhura, si dhe mbetjet e tyre

$$Res\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right) \text{ dhe } Res\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathcal{I}_i(s)\right)$$

Duke bërë krahasimin me shkallëzimin zinxhir standard, hapi përpara i modelit të shkallëzimit zinxhir Munich formulon supozimet për mbetjet, pra

$$E \left(Res \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right) | \mathcal{B}_i(s) \right)$$

dhe

$$E \left(Res \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbb{I}_i(s) \right) | \mathcal{B}_i(s) \right)$$

Gjithashtu kemi dhe supozimin e varësisë lineare të pritjeve matematike me kusht nga mbetjet e raporteve I/P ose P/I në ekuacionin matematikor (Quarg, G.; Mack, T. 2008)

$$Res(Q_{i,s} | \mathbb{I}_i(s)) \quad \text{ose} \quad Res(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))$$

PQ - ekziston një konstante θ^P e tillë, për të gjitha $s, t \in T$ me $t=s+1$ dhe $i=1, \dots, n$ kemi

$$E \left(Res \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right) | \mathcal{B}_i(s) \right) = \theta^P Res(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))$$

ose ekuivalenten

$$E \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^P + \theta^P \frac{\sigma \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))} \left(Q_{i,s}^{-1} - E(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)) \right) \quad 1)$$

IQ - ekziston një konstante θ^I e tillë, për të gjitha $s, t \in T$ me $t=s+1$ dhe $i=1, \dots, n$ kemi

$$E \left(Res \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbb{I}_i(s) \right) | \mathcal{B}_i(s) \right) = \theta^I Res(Q_{i,s} | \mathbb{I}_i(s))$$

ose ekuivalenten

$$E \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s) \right) = f_{s \rightarrow t}^I + \theta^I \frac{\sigma \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbb{I}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s} | \mathbb{I}_i(s))} \left(Q_{i,s} - E(Q_{i,s} | \mathbb{I}_i(s)) \right) \quad 2)$$

Parametrat θ^P dhe θ^I të cilët përfaqësojnë pjerrësitë e drejtëzave të regresit në diagramat përkatëse të mbetjeve. Zakonisht $\theta^P \geq 0$ dhe $\theta^I \geq 0$. Ekuacionet 1 dhe 2 përfaqësojnë pritjet matematike me kusht për faktorët e zhvillimit si shumë e faktorëve të zhvillimit të shkallëzimit

zinxhir standard dhe një term korrektimi që është funksion i të dy llojeve të të dhënave. Modeli i shkallëzimit zinxhir Munich qëndron në supozimin e pavarësisë PIU për vitet e aksidenteve, shkallëzimi zinxhir standard ka si kusht paraprak PE, PV, IE dhe IV për dëmet e paguara dhe të ndodhura, ndërsa supozimet PQ e IQ që përshkruajnë varësinë e faktorëve të zhvillimit për të paguarat dhe të ndodhurat i paraprijnë përkatësisht raporteve I/P dhe P/I.

Pritja matematike me kusht $E\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s)\right)$ ose faktori i zhvillimit të dëmeve të ndodhur që përdoret për të projektuar vitin e aksidentit i nga s tek t , është një funksion linear monoton rritës i raportit P/I, $Q_{i,s}$. Tre faktorët e termave të korrektimit shpjegohen si më poshtë:

- Faktori θ^I (i pavarur nga i dhe nga s) është koeficienti i korrelacionit të mbetjeve i faktorëve të zhvillimit dhe të mbetjeve të raporteve P/I. E quajmë faktor ose parametër korrelacioni. θ^I merr vlera nga 0 në 1 dhe mat varësinë e faktorëve të zhvillimit në raportet P/I. Në qoftë se nuk ka varësi të fortë mes të dhënave, pra kur $\theta^I \approx 0$, faktorët mesatarë të zhvillimit projektohen si në metodën e shkallëzimit zinxhir standart.
- Faktori i devijimit standard është pjesa e devijimeve standard me kusht të faktorëve të zhvillimit të ndodhur dhe raporteve të menjëhershëm P/I. Kjo shkakton devijime të raporteve P/I nga mesatarja që duhet të ribalancohet si devijimet e faktorëve të zhvillimit. Sa më i madh të jetë devijimi standard i faktorëve të zhvillimit është aq më shumë e mundur të ketë devijim nga mesatarja dhe më i madh do jetë termi i korrektimit; më i vogël devijimi standard i raporteve P/I, më i madh do jetë termi i korrektimit.
- Termi linear $Q_{i,s} - E(Q_{i,s} | \mathcal{I}_i(s))$ përfshin raportin P/I në projektion. Raportet P/I të menjëhershme mbi mesataren kanë efektin e korregjimit të faktorëve të zhvillimit në ngjitje, ndërsa raportet nën mesataren e kanë këtë efekt në rënie.

Të njëjta formulime vlejnë dhe për faktorët e zhvillimit të të paguarave dhe raportet I/P.

Parametrat e korrelacionit θ^P dhe θ^I përfaqësojnë lidhjen trekëndëshe të dëmeve të paguara dhe trekëndëshe të dëmeve të ndodhura. Madhësia e këtyre parametrave tregon se si ndikohen të dhënat nga njëra-tjetra.

Kovarianca me kusht e dy ndryshoreve të rastit X e Y kur është dhënë kushti C është

$$Cov^C(X, Y) = Cov(X, Y | C)$$

dhe prej kësaj mund të llogaritim

$$Cov^{P_i(s)}\left(Q_{i,s}^{-1}, \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= Cov^{\mathcal{P}_i(s)} \left(Q_{i,s}^{-1}, E \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{B}_i(s) \right) \right) \\
&= Cov^{\mathcal{P}_i(s)} \left(Q_{i,s}^{-1}, f_{s \rightarrow t}^P + \theta^P \frac{\sigma \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))} (Q_{i,s}^{-1} - E(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))) \right) \\
&= \theta^P \frac{\sigma \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right)}{\sigma(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))} D(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)) \\
&= \theta^P \cdot \sigma \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right) \cdot \sigma(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s))
\end{aligned}$$

Me të njëjtat llogaritje arrijmë tek pagesat. Ndërsa për koeficientët me kusht të korrelacioneve kemi

$$\begin{aligned}
\theta^P &= corr \left(Q_{i,s}^{-1}, \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right) \\
\theta^I &= corr \left(Q_{i,s}, \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbb{I}_i(s) \right)
\end{aligned}$$

Dhe duke marrë parasysh pritjet matematike

$$\begin{aligned}
\theta^P &= corr \left(Res(Q_{i,s}^{-1} | \mathcal{P}_i(s)), Res \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} | \mathcal{P}_i(s) \right) \right) \\
\theta^I &= corr \left(Res(Q_{i,s} | \mathbb{I}_i(s)), Res \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} | \mathbb{I}_i(s) \right) \right)
\end{aligned}$$

5.3 Zbatim praktik (Haxhi, K., Baholli, B. 2015)

5.3.1 Parametrat e shkallëzimit zinxhir standard

Për faktorët e zhvillimit $f_{s \rightarrow t}^P$ dhe $f_{s \rightarrow t}^I$ për $s=1, \dots, n$, përdorim vlerësimet e zakonshme të shkallëzimit zinxhir standard:

Për trekëndëshin e dëmeve të paguara

$$\widehat{f_{s \rightarrow t}^P} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \cdot \frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s}}$$

Për trekëndëshin e dëmeve të ndodhura

$$\widehat{f_{s \rightarrow t}^I} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \cdot \frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,t}}{\sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s}}$$

Për vlerësimin e parametrit σ

$$\begin{aligned} \left(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}\right)^2 &= \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} P_{i,s} \left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^P}\right)^2 \\ \left(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I}\right)^2 &= \frac{1}{n-s-1} \cdot \sum_{i=1}^{n-s} I_{i,s} \left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f_{s \rightarrow t}^I}\right)^2 \end{aligned}$$

dhe që këtej

$$\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P} = \sqrt{\left(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^P}\right)^2} \text{ dhe } \widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I} = \sqrt{\left(\widehat{\sigma_{s \rightarrow t}^I}\right)^2}$$

5.3.2 Parametrat e shkallëzimit zinxhir Munich

Në mënyrë që të llogariten mbetjet me kusht të raporteve P/I dhe I/P, nevojiten vlerësimet e pritjeve matematike me kusht $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ e $E(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$, si edhe devijimet standard me kusht $\sigma(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ e $\sigma(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$.

Fillimisht supozohet që $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ është konstante, po ashtu dhe për supozimin IE për dëmet e ndodhura. Më pas supozojmë varësinë për dispersionet me kusht të raportit P/I në vëllimin e dëmeve të ndodhura, si në supozimin IV: sa më i madh vëllimi do të thotë dispersion më të vogël për raportin P/I. Për $s=1, \dots, n$ këto supozime për pritjen matematike me kusht dhe dispersionet e raporteve P/I vlerësimi që sugjerohet për $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$

$$\hat{q}_s = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot Q_{j,s} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}}{\sum_{i=1}^{n-s+1} I_{j,s}}$$

që është i njëjtë për të gjitha vitet e aksidenteve. Për $\sigma(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ përdoret

$$\frac{\hat{\rho}_s^I}{\sqrt{I_{i,s}}}$$

ku $\hat{\rho}_s^I$ përcaktohet nga

$$\widehat{\rho_s^I}^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s} \cdot (Q_{j,s} - \hat{q}_s)^2$$

për $s=1, \dots, n-1$. $\hat{\rho}_s^I$ është i pavarur nga viti i aksidentit me indeks i .

Është logjike që të gjitha këto supozime për raportet P/I të aplikohen dhe për pritjet matematike the dispersionet e raporteve I/P, ku në përputhje me kushte specifike, të paguarat marrin rolin e vlerësimit të vëllimit. Në të njëjtën mënyrë arrijmë te vlerësimi

$$\hat{q}_s^{-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s}} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot Q_{j,s}^{-1} = \frac{\sum_{j=1}^{n-s+1} I_{j,s}}{\sum_{i=1}^{n-s+1} P_{j,s}}$$

për

$$E(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$$

dhe

$$\frac{\widehat{\rho_s^P}}{\sqrt{P_{i,s}}}$$

për $\sigma(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$ ku $\widehat{\rho_s^P}$ përcaktohet nga

$$\widehat{\rho_s^P}^2 = \frac{1}{n-s} \cdot \sum_{j=1}^{n-s+1} P_{j,s} \cdot (Q_{j,s}^{-1} - \hat{q}_s^{-1})^2$$

Nga gjithë kjo procedurë lind një problem në lidhje me kërkesat për të dyja pritjet matematike me kusht $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ e $E(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$. Në qoftë se këto pritje matematike do të jenë konstante, edhe $Q_{i,s}$ do të jetë konstante, gjë që nuk përputhet me realitetin. Dhe si rrjedhim nuk mund ta marrim si supozim. Faktikisht duhet të kemi një strukturë varësie më komplekse për pritjet matematike me kusht përkatesisht për $\mathbb{I}_i(s)$ dhe $\mathcal{P}_i(s)$.

Duke pasur të dhënat e mjaftueshme, mund të vlerësojmë fillimisht $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ duke bërë mesataren $Q_{j,s}$ të raporteve P/I për ato vite aksidenti j për të cilët $\mathbb{I}_j(s)$ është e barabartë ose e ngjashme me $\mathbb{I}_i(s)$. Në kuadrin e shkallëzimit zinxhir, të qënurit “i ngjashëm” do të thotë që niveli i $I_{j,s}$ është afër $I_{i,s}$ ose që faktori i zhvillimit $I_{j,s}/I_{j,s-1}$ që i paraprin është afër $I_{i,s}/I_{i,s-1}$. Por tek e fundit, mund edhe të heqim ndonjë vit aksidenti j kur $\mathbb{I}_j(s)$ është shumë e ndryshme nga $\mathbb{I}_i(s)$. Të gjitha këto koncepte mund të aplikohen në mënyrë analoge për vlerësimin e $E(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$. Kjo qasje mund të japë vlerësime për pritjet matematike me kusht të cilat nuk janë të ndërsjellta sipas përkufimit dhe që janë specifike për çdo vit aksidenti, por këto do të ishin të dhëna shumë të varura dhe të realizueshme vetëm për vitet e para të zhvillimit të trekëndëshavë të mëdhenj.

Për dispersionet me kusht është e njëjta situatë. Kur kemi të dhëna të mjaftueshme, mund të merret parasysh një strukturë më e ndërlikuar varësie e me kusht të $Q_{i,s}$ dhe $Q_{i,s}^{-1}$ në bashkësitë $\mathbb{I}_i(s)$ dhe $\mathcal{P}_i(s)$.

Por, për qartësi dhe lehtësi të interpretimeve të mëtejshme mbajmë vlerësimet e mësipërme. Kjo justifikohet për sa kohë $E(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$ dhe $E(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s))$ janë funksione jo konstante, por ndryshojnë pak në zonën e vlerave të dëmeve të paguar ose pezull “normale, jo ekstreme”. Nëpërmjet formulave të mësipërme, jemi në gjendje të vlerësojmë mbetjet me kusht. Për lehtësi shënojmë përkatësisht

$$\widehat{Res}(P_{i,t}), \widehat{Res}(I_{i,t}), \widehat{Res}(Q_{i,t}^{-1}), \widehat{Res}(Q_{i,t})$$

vlerësimet e $Res\left(\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}}|\mathcal{P}_i(s)\right), Res\left(\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}}|\mathbb{I}_i(s)\right), Res(Q_{i,s}^{-1}|\mathcal{P}_i(s)), Res(Q_{i,s}|\mathbb{I}_i(s))$. Që këtëj

$$\widehat{Res}(P_{i,t}) = \frac{\frac{P_{i,t}}{P_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}$$

$$\widehat{Res}(I_{i,t}) = \frac{\frac{I_{i,t}}{I_{i,s}} - \widehat{f}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

$$\widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1}) = \frac{Q_{i,s}^{-1} - \widehat{q}_s^{-1}}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \sqrt{P_{i,s}}$$

$$\widehat{Res}(Q_{i,s}) = \frac{Q_{i,s} - \widehat{q}_s}{\widehat{\rho}_s^I} \cdot \sqrt{I_{i,s}}$$

Për parametrat e korrelacionit θ^P dhe θ^I përdorim vlerësimet që minimizojnë distancën mesatare kuadratike të koordinatës y në pikat e diagramës së mbetjeve me drejtëzën e regresit përmes origjinës me pjerrësi θ^P dhe θ^I .

$$\theta^P = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1})^2 \cdot \frac{\widehat{Res}(P_{i,t})}{\widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1}) \cdot \widehat{Res}(P_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}^{-1})^2}$$

$$\theta^I = \frac{1}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s})^2} \cdot \sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s})^2 \cdot \frac{\widehat{Res}(I_{i,t})}{\widehat{Res}(Q_{i,s})} = \frac{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s}) \cdot \widehat{Res}(I_{i,t})}{\sum_{i,s} \widehat{Res}(Q_{i,s})^2}$$

Po të fiksojmë një vit zhvillimi s në formulat e vlerësimeve për θ^P dhe θ^I dhe duke mbledhur vetëm përgjatë i jep vlerësime për vitin e zhvillimit për parametrat θ . Parametrat θ për çdo vit zhvillimi luhasin rastësisht dhe nuk tregojnë trendin dhe kjo mund të mos respektojë supozimet e modelit të shkallëzimit zinxhir Munich. Kjo ndodh shpesh në praktikë. Luhatjet në këto numra tregojnë gjithashtu paqëndrueshmërinë e vlerësimeve për çdo vit zhvillimi dhe përbën një argument mbështetës për të konsideruar të gjithë vitet e zhvillimit në një, si në rastin e supozimit të bërë për mbetjet.

Sipas supozimeve PQ dhe IQ arrijmë te formulat rekursive

$$\widehat{P}_{i,t} = \widehat{P}_{i,s} \cdot \left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P + \widehat{\theta}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \left(\frac{\widehat{I}_{i,s}}{\widehat{P}_{i,s}} - \widehat{q}_s^{-1} \right) \right)$$

$$\widehat{I}_{i,t} = \widehat{I}_{i,s} \cdot \left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^I + \widehat{\theta}^I \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^I}{\widehat{\rho}_s^I} \cdot \left(\frac{\widehat{P}_{i,s}}{\widehat{I}_{i,s}} - \widehat{q}_s \right) \right)$$

për $s \geq n - i + 1$ me vlerat fillestare $\widehat{P}_{i,s} = P_{i,s}$ dhe $\widehat{I}_{i,s} = I_{i,s}$ për $s=n-i+1$.

Po të konsiderojmë formulën rekursive për projeksionin e dëmeve të paguara

$$\widehat{P}_{i,t} = \widehat{P}_{i,s} \cdot \left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P + \widehat{\theta}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \left(\frac{\widehat{I}_{i,s}}{\widehat{P}_{i,s}} - \widehat{q}_s^{-1} \right) \right) = \widehat{I}_{i,s} \cdot \widehat{\theta}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} + \widehat{P}_{i,s} \cdot \left(\widehat{f}_{s \rightarrow t}^P - \widehat{\theta}^P \cdot \frac{\widehat{\sigma}_{s \rightarrow t}^P}{\widehat{\rho}_s^P} \cdot \widehat{q}_s^{-1} \right)$$

Vëmë re që vlera e parashikuar për $P_{i,t}$ ndikohet fort nga vlerësimi i $I_{i,s}$ dhe dobët nga vlerësimi $P_{i,s}$, me kusht që vlerësimi i të paguarave të jetë i vogël dhe nuk zhduket kur dëmi në vazhdim $P_{i,n-i+1} = 0$.

Në qoftë se dëmet e paguara të akumuluar janë shumë të vegjël ose zero, parashikimet e vlerave të paguara me metodën e shkallëzimit zinxhir Munich varen në radhë të parë nga vlerat në vazhdim të dëmeve të ndodhur. Në praktikë parashikimet e shkallëzimit zinxhir Munich për pagesat finale janë krejtësisht realiste, ndërsa për dëmet e ndodhura janë normalë. Në kontrast me ndikimin e fuqishëm në metodën e shkallëzimit zinxhir Munich, niveli i dëmeve të paguara pothuajse nuk luan asnjë rol.

Të dhënat e përdorura janë të produktit DMTPL (përgjegjësi ndaj palëve të treta në sigurimin motorik), të marra nga dy kompani sigurimi që operojnë në tregun shqiptar. Të dhënat janë për një periudhë 10 vjeçare, nga viti 2005 deri në vitin 2014. Më poshtë janë paraqitur trekëndëshat e zhvillimit, të akumuluar, për dëmet e paguara dhe për dëmet e ndodhura.

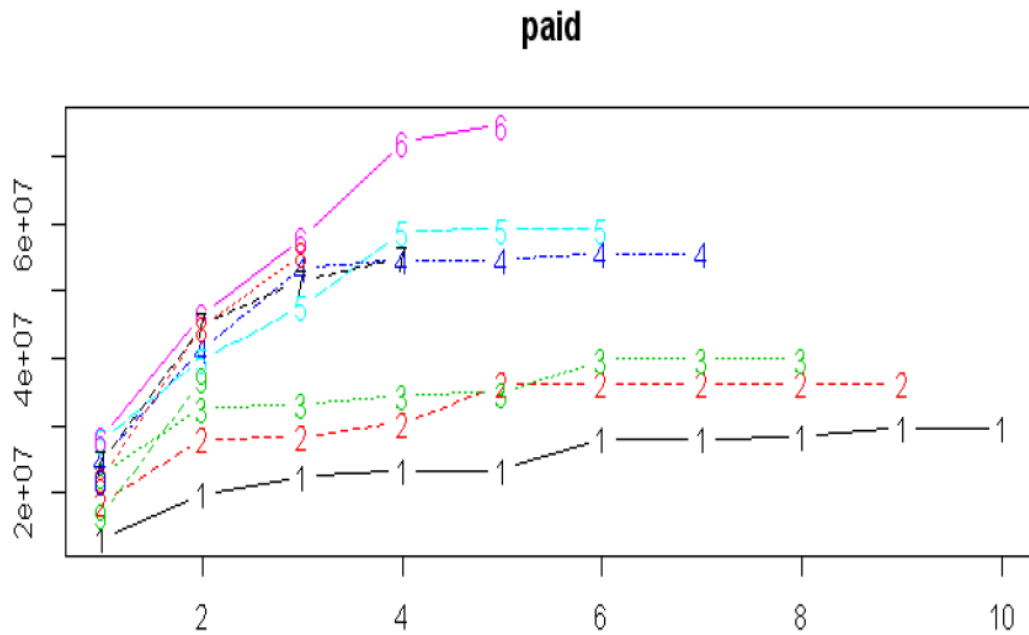
Trekëndëshi i akumuluar i pagesave

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	13,247,635	19,871,794	22,514,448	23,425,701	23,425,701	28,034,921	28,034,921	28,534,921	29,627,617	29,627,617
2006	18,545,283	28,096,622	28,505,022	30,384,866	36,210,297	36,210,297	36,210,297	36,210,297	36,210,297	
2007	22,805,548	32,677,287	33,056,967	34,544,398	34,901,048	39,901,048	39,901,048	39,901,048		
2008	25,061,272	41,450,112	53,532,128	54,632,128	54,632,128	55,482,000	55,482,000			
2009	27,800,292	39,885,124	47,736,642	58,826,959	59,226,959	59,226,959				
2010	28,171,203	46,485,088	57,877,529	72,033,666	74,682,850					
2011	24,747,420	45,051,323	51,535,064	54,831,028						
2012	22,311,896	44,679,545	55,642,105							
2013	16,811,300	36,981,386								
2014	21,903,227									

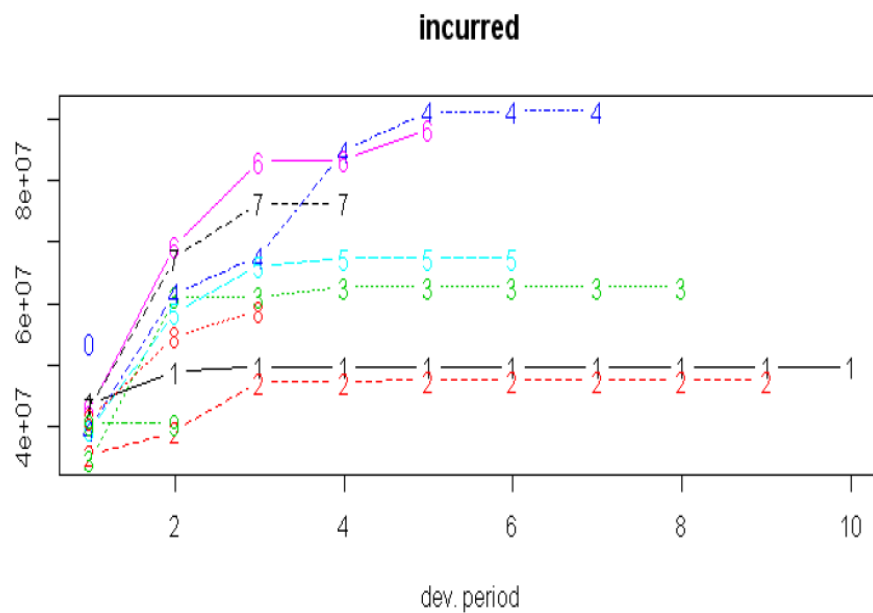
Trekëndëshi i akumuluar i dëmeve të ndodhura

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	43,855,985	48,981,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761	49,781,761
2006	35,549,677	39,261,019	47,261,019	47,261,019	47,638,070	47,638,070	47,638,070	47,638,070	47,638,070	
2007	34,563,960	61,123,045	61,123,045	62,748,791	62,748,791	62,748,791	62,748,791	62,748,791		
2008	39,563,188	61,731,322	67,677,605	84,949,636	91,255,164	91,255,164	91,421,764			
2009	39,467,409	58,680,818	66,055,173	67,412,109	67,412,109	67,412,109				
2010	43,035,761	69,523,122	83,069,602	83,319,602	88,216,570					
2011	43,195,291	67,457,014	76,275,810	76,325,810						
2012	41,495,136	54,703,915	58,893,154							
2013	40,571,725	40,571,725								
2014	53,596,544									

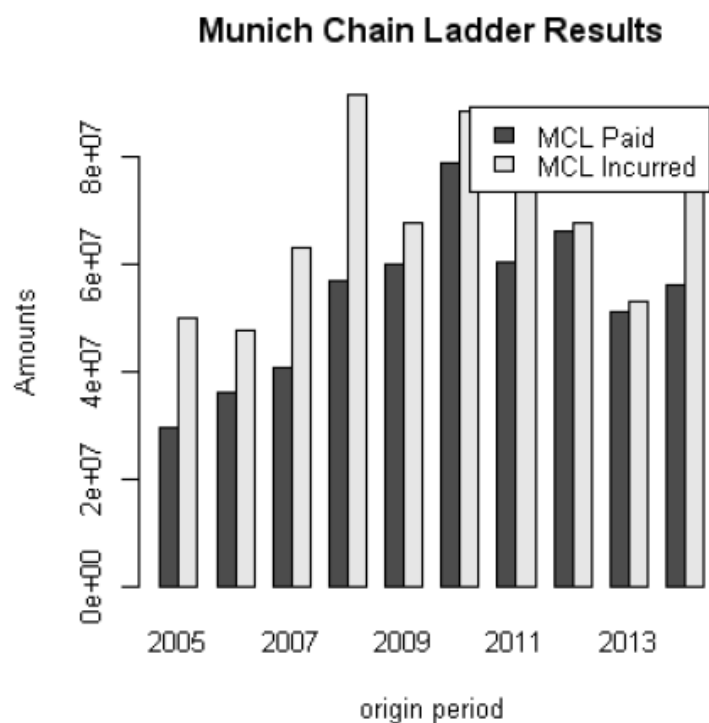
Grafik 5.1: Paraqitja e dëmeve të paguara (paid) dhe atyre të ndodhura (incurred) para aplikimit të shkallëzimit zinxhir Mynih (Munich Chain Ladder)



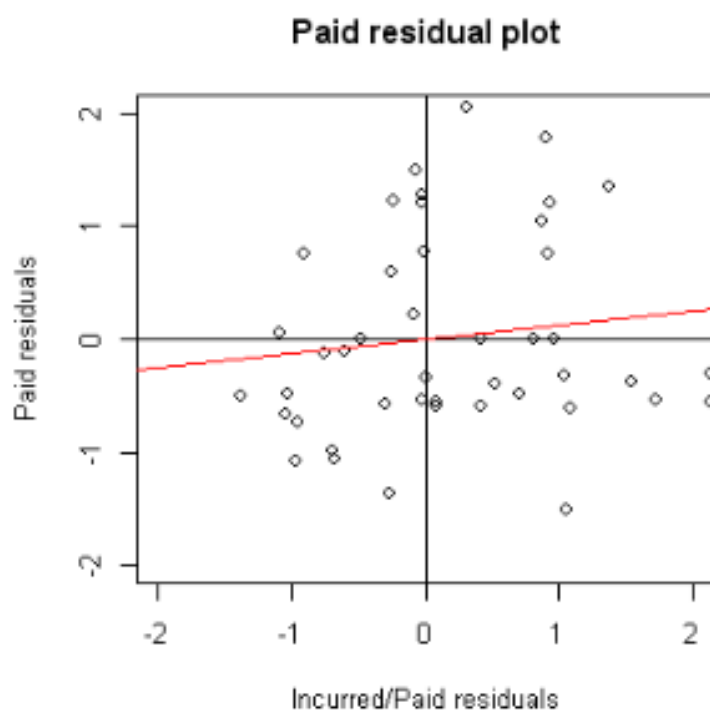
Grafik 5.2: Paraqitja e dëmeve të ndodhura (incurred) para aplikimit të shkallëzimit zinxhir Mynih (Munich Chain Ladder)



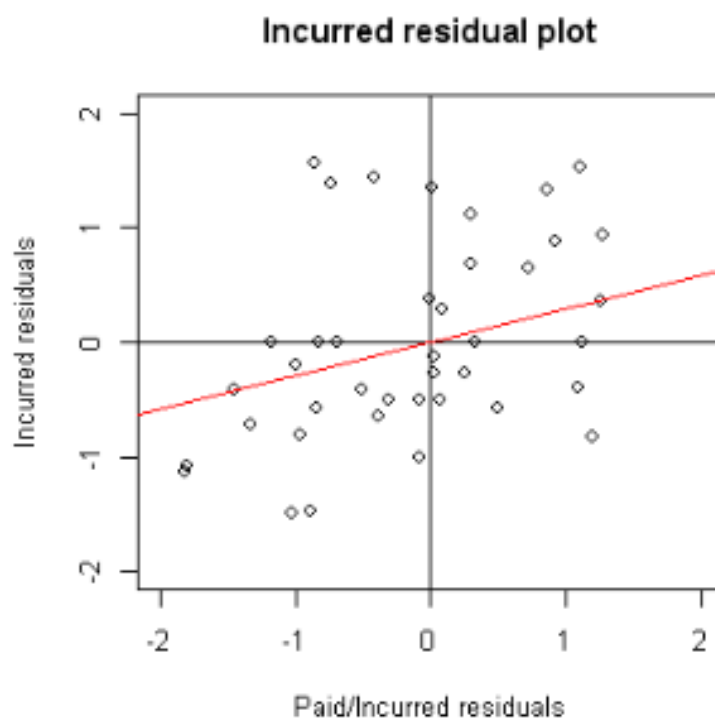
Grafik 5.3: Rezultati mbas Munich CL



Grafik 5.4: Paraqitja grafike e raporteve I/P



Grafik 5.5: Paraqitja grafike e raporteve P/I



Llogaritjet e MCL

	Latest Paid	Latest Incurred	Latest P/I Ratio	Ult. Paid Ult.	Incurred Ult.	P/I Ratio
2005	29627617	49781761	0.5951500	29627617	49781761	0.5951500
2006	36210297	47638070	0.7601126	36182431	47638070	0.7595276
2007	39901048	62748791	0.6358855	40612116	62748791	0.6472175
2008	55482000	91421764	0.6068796	56839121	91421764	0.6217242
2009	59226959	67412109	0.8785804	59905837	67485979	0.8876783
2010	74682850	88216570	0.8465853	78807308	88314186	0.8923516
2011	54831028	76325810	0.7183812	60355788	78739749	0.7665225
2012	55642105	58893154	0.9447975	65831451	67624301	0.9734881
2013	36981386	40571725	0.9115064	50866563	53035191	0.9591096
2014	21903227	53596544	0.4086686	55932426	80605061	0.6939071

Totalet

	Paid	Incurred	P/I Ratio
Latest:	464488517	636606298	0.7296323
Ultimate:	534960659	687394853	0.7782436

Parashikimi i Munich për trekëndëshin e pagesave

MCL të paguara

Viti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	13247635	19871794	22514448	23425701	23425701	28034921	28034921	28534921	29627617	29627617
2006	18545283	28096622	28505022	30384866	36210297	36210297	36210297	36210297	36210297	36182431
2007	22805548	32677287	33056967	34544398	34901048	39901048	39901048	39901048	40599576	40612116
2008	25061272	41450112	53532128	54632128	54632128	55482000	55482000	55772566	56804566	56839121
2009	27800292	39885124	47736642	58826959	59226959	59226959	59226959	59353914	60005744	59905837
2010	28171203	46485088	57877529	72033666	74682850	77926334	77926334	78090458	78940934	78807308
2011	24747420	45051323	51535064	54831028	56622516	59392062	59392062	59586714	60405696	60355788
2012	22311896	44679545	55642105	61198085	62704245	65255587	65255587	65354501	65972112	65831451
2013	16811300	36981386	42904531	47226714	48409706	50401215	50401215	50482508	50971549	50866563
2014	21903227	37537900	44646838	50230164	52077653	54840558	54840558	55068368	55942615	55932426

Parashikimi i Munich për trekëndeshin e dëmeve të ndodhurave

MCL të ndodhura

Viti	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	43855985	48981761	49781761	49781761	49781761	49781761	49781761	49781761	49781761	49781761
2006	35549677	39261019	47261019	47261019	47638070	47638070	47638070	47638070	47638070	47638070
2007	34563960	61123045	61123045	62748791	62748791	62748791	62748791	62748791	62748791	62748791
2008	39563188	61731322	67677605	84949636	91255164	91255164	91421764	91421764	91421764	91421764
2009	39467409	58680818	66055173	67412109	67412109	67412109	67485979	67485979	67485979	67485979
2010	43035761	69523122	83069602	83319602	88216570	88216570	88314186	88314186	88314186	88314186
2011	43195291	67457014	76275810	76325810	78675472	78675472	78739749	78739749	78739749	78739749
2012	41495136	54703915	58893154	64522884	67536952	67536952	67624301	67624301	67624301	67624301
2013	40571725	40571725	46405079	50658890	52968438	52968438	53035191	53035191	53035191	53035191
2014	53596544	70682877	76622566	78563956	80552705	80552705	80605061	80605061	80605061	80605061

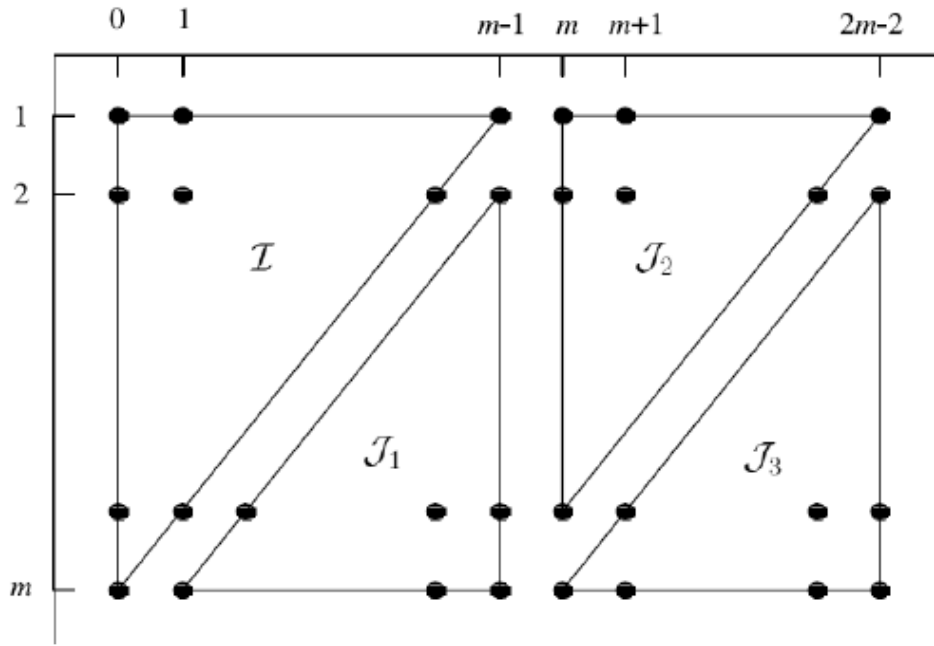
Vlerësimi për rezervën IBNR në 31.12.2014 është:

IBNR	
<i>Të paguara</i>	<i>Të ndodhura</i>
21,903,227	53,596,544

Kapitulli 6. METODA E SHKALLËZIMIT ZINXHIR TË DYFISHTË

Metoda e shkallëzimit zinxhir të dyfishtë DCL bazohet në dy trekëndësja zhvillimi, në trekëndëshin e dëmeve të paguara dhe në trekëndëshin e numrit të dëmeve të ndodhura (Martinez-Miranda M.D, Nielsen J.P. and Verrall, R. 2012).

Shënojmë me $\aleph_m = \{N_{ij}: (i, j) \in I\}$ numrin e dëmeve të ndodhura progresive. N_{ij} është numri i dëmeve të ndodhura në vitin i dhe të raportuara në vitin $i+j$, domethënë me një vonesë j nga viti i ndodhjes dhe $I = \{(i, j): i = 1, \dots, m; j = m-1; i+j \leq m\}$



Shënojmë me $\Delta_m = \{X_{ij}: (i, j) \in I\}$ pagesat progresive. X_{ij} janë pagesat totale nga dëmet e ndodhura në vitin i dhe të paguara me vonesë j nga viti i .

6.1 Shkallëzimi zinxhir i dyfishtë

Trekëndëshi i numrit të dëmeve $\aleph_m$ dhe trekëndëshi i pagesave Δ_m janë të dhëna reale të vrojtura, ndërsa vonesa e pagesave është komponenti stokastik që duhet modeluar duke marrë në konsideratë ndryshoret e pavrojtura N_{ijl}^{pag} që është numri i pagesave të ardhshme që krijohen nga dëmet e raportuara N_{ij} të cilët paguhet me periudhë vonesë $\ell = 0, \dots, m-1$. Me $Y_{ijl}^{(k)}$ shënojmë pagesat individuale që rrjedhin nga N_{ijl}^{pag} ; ($k = 1, \dots, N_{ijl}^{pag}, (i, j) \in I, \ell = 0, \dots, m-1$)

$$N_{ij}^{pag} = N_{ij0}^{pag} + N_{i,j-1,1}^{pag} + N_{i,j-2,2}^{pag} + \dots + N_{i0j}^{pag}$$

Me këto komponentë mund të vlerësohet rezerva e dëmeve pezull, pra të ndodhur dhe të papaguar ende (RBNS). Supozimet bazë të shkallëzimit zinxhir të dyfishtë janë:

- **Pavarësia**
- N_{ij} janë të pavarur
- Dëmet kryhen me një pagesë
- Ndryshoret $Y_{ij}^{(k)}$ janë të pavarura nga numri i dëmeve N_{ij} dhe të pavarura nga vonesa e raportimit dhe e pagesës

Kushtet e momentit të parë të shkallëzimit zinxhir të dyfishtë janë:

- **Vonesa e RBNS**
- Numri i dëmeve N_{ij} është ndryshore rasti me pritje matematike $E[N_{ij}] = \alpha_i \beta_j$; $\sum \beta_j = 1$
- Parametrat e vonesës janë $\pi = \{\pi_0, \dots, \pi_{m-1}\}$
- Pritja matematike e ndryshoreve të vonesës për çdo $(i, j) \in I, \ell = 0, \dots, m-1$ është $E[N_{ijl}^{paid} | \mathbf{x}_m] = N_{ij} \tilde{\pi}_l$
- Pagesat individuale $Y_{ij}^{(k)}$ janë të pavarura me pritje matematike μ_i dhe dispersion σ_i^2 , ndërsa μ dhe σ^2 faktorët e pritjes matematike dhe dispersionit, γ_i është inflacioni në vitin e aksidentit

$$E[Y_{ij}^{(k)}] = \mu \gamma_i \equiv \mu_i$$

$$D[Y_{ij}^{(k)}] = \sigma^2 \gamma_i^2 = \sigma_i^2$$

- Pritja matematike e pagesave individuale me kusht numrin e pagesave është

$$E[Y_{ijl}^{(k)} | N_{ijl}^{pag}] = \tilde{\mu}_l \gamma_i$$

Koncepti bazë i shkallëzimit zinxhir të dyfishtë është përfitimi i vlerësimeve përmes krahasimit të pritjeve matematike teorike të pakushtëzuara të numrit të dëmeve dhe pagesave të dëmeve të llogaritura nga supozimet bazë të shkallëzimit zinxhir të dyfishtë dhe shkallëzimit zinxhir të zakonshëm.

Po të përdorim supozimet e shkallëzimit zinxhir të dyfishtë kemi:

$$E \left[\sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} Y_{i,j-l,l}^{(k)} | \mathfrak{R}_m \right] = E \left[\sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} E[Y_{i,j-l,l}^{(k)} | \mathfrak{R}_m, N_{i,j-l,l}^{paid}] | \mathfrak{R}_m \right] = E[N_{i,j-l,l}^{paid} \tilde{\mu}_l \gamma_i | \mathfrak{R}_m] = N_{i,j-l} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l \gamma_i$$

dhe nëse totalin e dëmeve e shkruajmë

$$X_{ij} = \sum_{l=0}^j \sum_{k=1}^{N_{i,j-l,l}^{paid}} Y_{i,j-l,l}^{(k)} \quad \text{për çdo } (i, j) \in I$$

kemi pritjen matematike me kusht

$$E[X_{ij} | \mathfrak{R}_m] = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l \gamma_i = \sum_{l=0}^j N_{i,j-l} \pi_l \mu \gamma_i$$

dhe pritjen matematike pa kusht

$$E[X_{ij}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l$$

ku

$$\mu = \sum_{l=0}^{m-1} \tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l$$

$$\pi_l = \frac{\tilde{\pi}_l \tilde{\mu}_l}{\mu}$$

Për të vlerësuar rezervën e dëmeve pezull RBNS, mund të përdorim si pritjen matematike me kusht, ashtu edhe pritjen matematike të thjeshtë. Për pjesën e rezervës së dëmeve të ndodhur, po të paraportuar ende IBNR përdoret pritja matematike pa kusht. Parametrat α_i dhe β_j vlerësohen me anë të shkallëzimit zinxhir të zakonshëm të aplikuar në trekëndëshin e numrit të dëmeve. Duhet të vlerësojmë parametrat μ, γ_i dhe π_l .

Bazuar në supozimet e shkallëzimit zinxhir të zakonshëm, ekzistojnë parametrat $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j$ të tillë që plotësojnë kushtin

$$E[X_{ij}] = \tilde{\alpha}_i \tilde{\beta}_j$$

Krahasimi me këtë formulë

$$E[X_{ij}] = \alpha_i \mu \gamma_i \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l$$

na çon tek formulat e identifikimit

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_i &= \alpha_i \mu \gamma_i \\ \tilde{\beta}_j &= \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l \end{aligned}$$

Shënojmë vlerësimet e $\alpha_i, \beta_j, \tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_j$ me $\hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j, \hat{\tilde{\alpha}}_i, \hat{\tilde{\beta}}_j$. Këto vlerësime arrihen aplikuar metodën e shkallëzimit zinxhir të zakonshëm në trekëndëshat e dëmeve të ndoshur dhe atyre të dëmeve të paguara. Gjithashtu këto përdoren për të vlerësuar μ, γ_i and π_l . Formula e dytë e identifikimit është (Martinez-Miranda M.D, Nielsen J.P. and Verrall, R. 2012)

$$\tilde{\beta}_j = \sum_{l=0}^j \beta_{j-l} \pi_l$$

dhe na lejon të vlerësojmë π_l duke përdorur vlerësimet për dy koeficientët e tjerë $\hat{\beta}_j$ dhe $\hat{\tilde{\beta}}_j$. Për vlerësimin e π_l fillimisht duhet zgjidhur sistemi linear, zgjidhjet e të cili i shënojmë $\hat{\pi}_l$.

$$\begin{pmatrix} \hat{\tilde{\beta}}_0 \\ \vdots \\ \hat{\tilde{\beta}}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\beta}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \hat{\beta}_{m-1} & \dots & \hat{\beta}_1 & \hat{\beta}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_0 \\ \vdots \\ \pi_{m-1} \end{pmatrix}$$

Parametrat e tjerë mund të vlerësohen duke përdorur formulën e parë të identifikimit

$$\tilde{\alpha}_i = \alpha_i \mu \gamma_i$$

nga vlerësimet e dy koeficientëve të tjerë $\hat{\alpha}_i, \hat{\tilde{\alpha}}_i$ nëpërmjet shkallëzimit zinxhir të zakonshëm

$$\hat{\gamma}_i = \frac{\hat{\tilde{\alpha}}_i}{\hat{\alpha}_i \hat{\mu}}$$

meqënëse është e natyrshme të vendosim $\gamma_1 = 1$ kemi

$$\hat{\mu} = \frac{\hat{\tilde{\alpha}}_1}{\hat{\alpha}_1}$$

6.2 Vlerësimet për RBNS dhe IBNR

Dy mundësitë për vlerësimin e rezervës për dëmet pezull RBNS janë: (Haxhi, K., Baholli, B. 2015)

$$\hat{X}_{ij}^{RBNS(1)} = \sum_{l=i-m+j}^j N_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

$$\hat{X}_{ij}^{RBNS(2)} = \sum_{l=i-m+j}^j \hat{N}_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

Ndërsa vlerësimi për dëmet e ndodhuan port e paraportuara IBNR është

$$\hat{X}_{ij}^{IBNR} = \sum_{l=0}^{i-m+j-1} \hat{N}_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

ku $\hat{N}_{i,j} = \hat{\alpha}_i \hat{\beta}_j$.

Gjithashtu mund të vlerësojmë dhe faktorin “tail”, ku d është vonesa maksimale:

$$\hat{R}^{tail} = \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2 \cup \mathcal{J}_3} \sum_{l=0}^{\min(j,d)} \hat{N}_{i,j-l} \hat{\pi}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

Të dhënat e përdorura:***Trekëndëshi i numrit të dëmeve të ndodhura***

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	298	30	2	0	0	0	0	0	0	0
2006	447	14	1	0	1	0	0	0	0	
2007	439	27	0	2	0	0	0	0		
2008	542	41	5	2	1	2	0			
2009	569	54	5	3	0	0				
2010	531	34	9	1	1					
2011	462	37	10	1						
2012	507	45	8							
2013	427	39								
2014	395									

Trekëndëshi i dëmeve të paguara

i/j	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2005	13,247,635	6,624,159	2,642,654	911,253	0	4,609,220	0	500,000	1,092,696	0
2006	18,545,283	9,551,339	408,400	1,879,844	5,825,431	0	0	0	0	
2007	22,805,548	9,871,739	379,680	1,487,431	356,650	5,000,000	0	0		
2008	25,061,272	16,388,840	12,082,016	1,100,000	0	849,872	0			
2009	27,800,292	12,084,832	7,851,518	11,090,317	400,000	0				
2010	28,171,203	18,313,884	11,392,441	14,156,137	2,649,184					
2011	24,747,420	20,303,903	6,483,741	3,295,964						
2012	22,311,896	22,367,649	10,962,560							
2013	16,811,300	20,170,086								
2014	21,903,227									

Të dhënat janë të njëjtat, të përdorura në metodat e kapitullit të tretë dhe të pestë, të marra nga një nga kompanitë e sigurimit që operojnë në Shqipëri. Trekëndëshat e mëposhtëm janë të produktit DMTPL (përgjegjësia ndaj palëve të treta në sigurimin e brendshëm motorik). Është marrë në shqyrtim një periudhë 10 vjeçare të dhënash. Dëmet me vlerë mbi 5 milionë lekë janë hequr, janë konsideruar outliers. Gjithashtu këto dëme janë kryer me më shumë se një pagesë, gjë që bie ndesh me një nga kushtet e shkallëzimit zinxhir të dyfishtë. Vlera e dëmeve outliers përfshihet tek rezerva e dëmeve pezull RBNS.

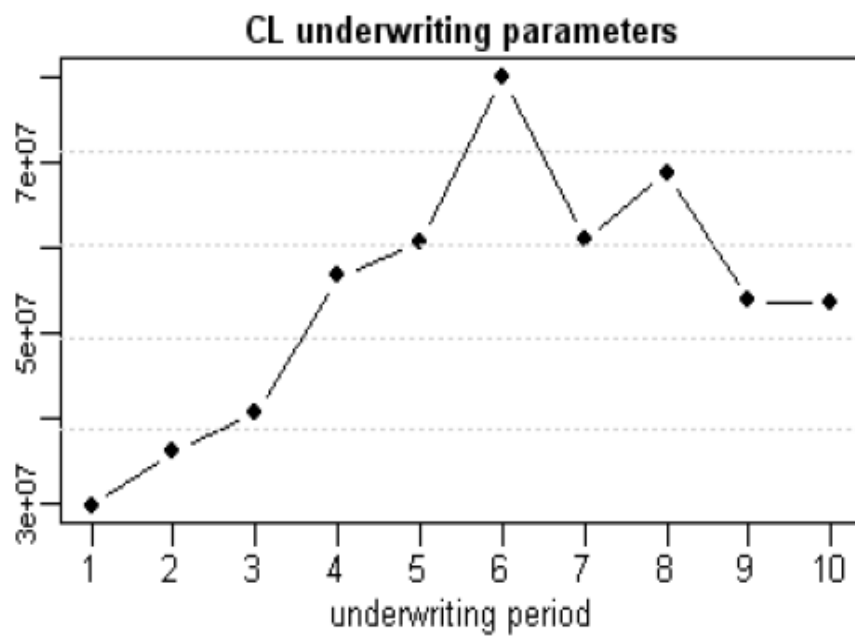
Vlerësimi i parametrave të shkallëzimit zinxhir të dyfishtë: parametrat e vonesave, ashpërsia e inflacionit, ashpërsia e pritjes matematike dhe dispersionit

	delay.par	delay.prob	inflation	severity.mean	severity.var
2005	0.4469	0.4469	1.0000	89786.67	1.021584e+12
2006	0.2700	0.2700	0.8711	78213.23	7.751949e+11
2007	0.1062	0.1062	0.9657	86703.36	9.526258e+11
2008	0.0894	0.0894	1.0648	95603.75	1.158245e+12
2009	0.0240	0.0240	1.0682	95910.81	1.165697e+12
2010	0.0473	0.0473	1.5484	139025.18	2.449274e+12
2011	-0.0044	0.0162	1.3259	119048.43	1.795965e+12
2012	0.0047	0.0000	1.3630	122374.75	1.897729e+12
2013	0.0176	0.0000	1.2667	113735.04	1.639227e+12
2014	-0.0014	0.0000	1.3820	124083.05	1.951081e+12

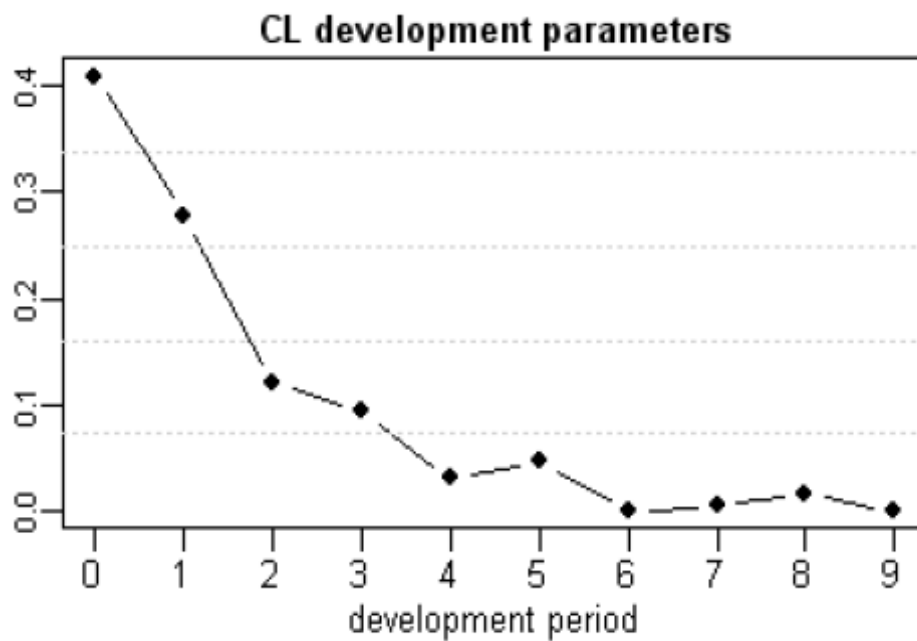
Vlerësimi dhe parashikimi i rezervës së dëmeve me anë të shkallëzimit zinxhir të dyfishtë të ndarë në RBNS dhe IBNR, si dhe vlerësimi me shkallëzimin zinxhir të zakonshëm

	Future years	RBNS	IBNR	TOTAL	CLM
1	1	32923044.1	2030773.81	34953817.95	34309555.4
2	2	16561954.8	1570470.67	18132425.44	17604387.6
3	3	10423063.3	798767.34	11221830.60	11209514.0
4	4	5047128.2	596156.38	5643284.53	5755111.6
5	5	3487774.3	248792.46	3736566.73	3834310.6
6	6	886542.6	276889.81	1163432.40	1394760.7
7	7	0.0	129006.74	129006.74	1143349.4
8	8	0.0	30102.14	30102.14	887649.8
9	9	0.0	9496.02	9496.02	0.0
10	10	0.0	3587.12	3587.12	0.0
11	11	0.0	697.88	697.88	
12	12	0.0	0.00	0.00	
13	13	0.0	0.00	0.00	
14	14	0.0	0.00	0.00	
15	15	0.0	0.00	0.00	
16	16	0.0	0.00	0.00	
17	17	0.0	0.00	0.00	
18	18	0.0	0.00	0.00	
19	Tot.	69329507.2	5694740.37	75024247.55	76138639.1

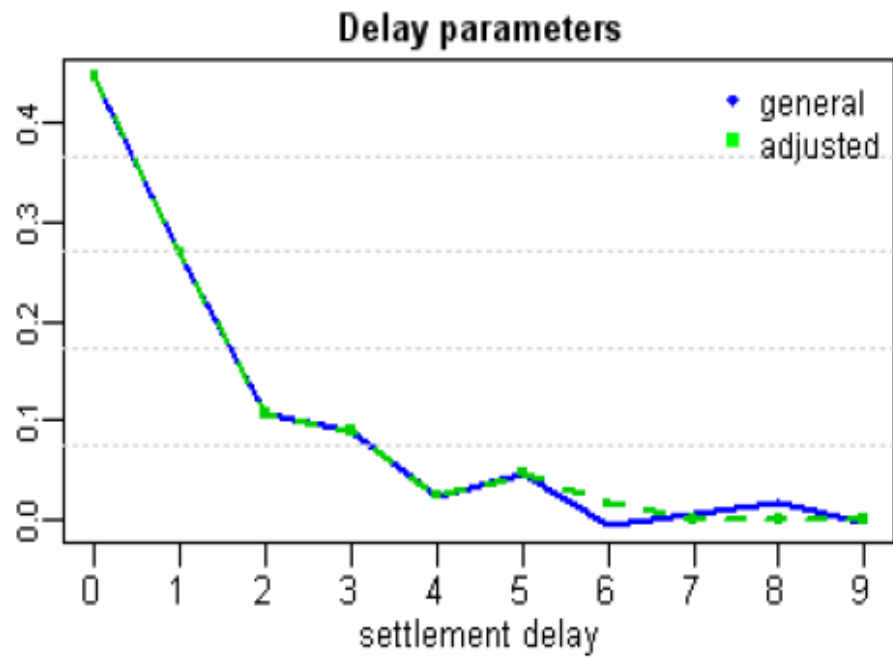
Grafik 6.1: Grafiku i parametrave të vitit të aksidentit



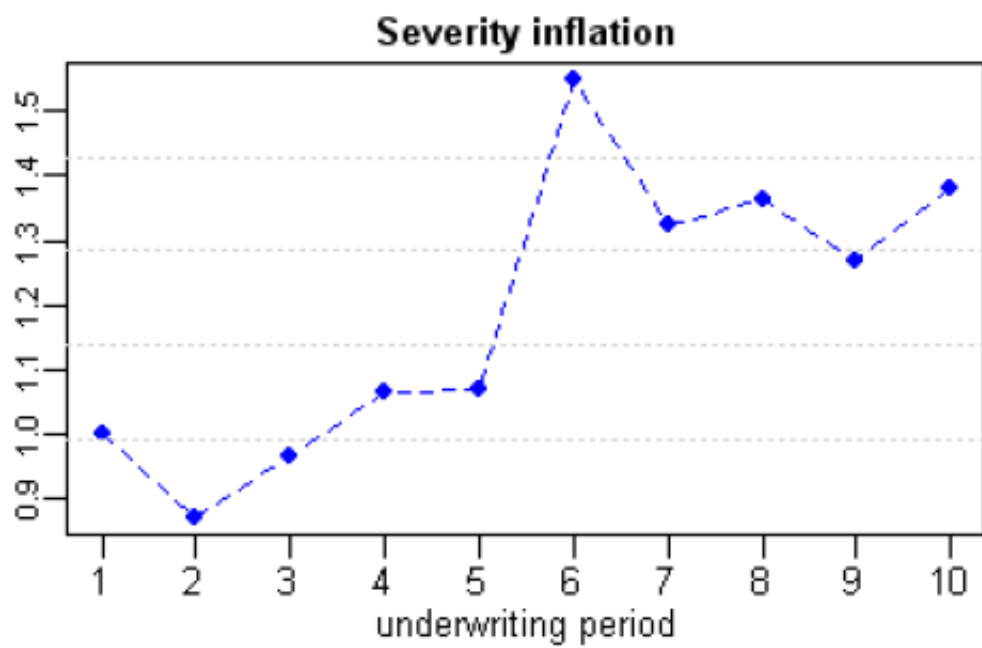
Grafik 6.2: Grafiku i parametrave të vitit të zhvillimit



Grafik 6.3: Grafiku i parametrat të vonesave



Grafik 6.4: Grafiku i ashpërsisë së inflacionit



6.3 Modeli parametrik – Bootstrap (England, P. and Verrall, R. 1999)

Formulimi i momentit të parë është i përshtatshëm për vlerësimin më të mirë. Për të parashikuar pagesat përdoret metoda Bootstrap. Kemi që:

N_{ijk}^{pag} - pjesa e dëmeve N_{ij} të paguara plotësisht me periudhë vonese k pas raportimit, $k=0,...,d$, $d \leq m-1$

N_{ij}^{pag} – numri i dëmeve të ndodhura në periudhën i dhe të paguar plotësisht me periudhë vonese j

$$N_{ij}^{pag} = N_{ij0}^{pag} + N_{i,j-1,1}^{pag} + N_{i,j-2,2}^{pag} + \dots + N_{i,j-\min(j,d),\min(j,d)}^{pag}$$

Për aplikimin e kësaj metode bëhen disa supozime:

- N_{ij} janë të pavaruara me shpërndarje Poisson
- Dhënë N_{ij} numri i pagesave ndjek një shpërndarje multinomiale

$$(N_{ij0}^{pag} \dots N_{ijd}^{pag}) \sim Multi(N_{ij}; p_0, \dots, p_d)$$

- Dëmet janë paguar me një pagesë, nëse shënojmë $Y_{ij}(k)$ pagesën për dëmin e k -të të ndodhur në periudhën i të paguar me j periudha vonese kemi

$$X_{ij} = Y_{ij}(1) + Y_{ij}(k2) + \dots + Y_{ij}(N_{ij}^{pag})$$

- $Y_{ij}(k)$ janë reciprokisht të pavarur, me shpërndarje f_i , pritje matematike $\mu_i = \mu\gamma_i$ dhe dispersion $\sigma_i^2 = \sigma^2\gamma_i^2$
- $Y_{ij}(k)$ janë të pavarur nga numri i dëmeve, të pavarur nga vonesa e raportimit dhe nga vonesa e pagesës

Shpërndarja individuale e dëmëve mund të zgjidhet si më poshtë:

- Shpërndarje Gamma me pritje matematike μ_i dhe dispersion σ_i^2
- Prandaj ka parametër të formës $\lambda_i = \mu_i^2/\sigma_i^2$ dhe parametër shkallëzimi $\kappa_i = \sigma_i^2/\mu_i$
- Dhënë numri N_{ij}^{pag} dëmet progresivë X_{ij} kanë përsëri shpërndarje Gamma me formë $N_{ij}^{pag} \lambda_i$ dhe shkallë κ_i

Ajo që duhet të bëjmë është vlerësimi i σ_i^2 . Duhet të vlerësohet dhe parametri p_i meqënëse vlerësimi i parë i parametrave π_i mund të na çojë në vlera negative dhe në vlera të cilat nuk e kanë shumën 1. Nga vlerësimi i π_i mund të vlerësohet p_i në disa mënyra.

- Vonesa maksimale d vlerësohet duke mbledhur numrin e vlerësimeve të njëpasnjëshme të π_i deri në një numër më të madh ose baraz me një.

$$\hat{p}_l = \pi_l \quad l = 0, \dots, d-1$$

$$\hat{p}_l = 1 - \sum_{l=0}^{d-1} \hat{p}_l$$

- Anullohen koeficientët π_l negativë dhe rishkallëzohen, si rrjedhim shumat e tyre do të jenë 1.

Për metodën bootstrap duhet gjithashtu të vlerësohen parametrat e dispersionit. Vlerësimi i tyre bazohet në faktin që vlerat e dëmeve kanë afërsisht shpërndarje Poisson të mbi shpërndarë (over-dispersed)

$$D[X_{ij}|\mathfrak{K}_m] \approx \frac{\sigma_i^2 + \mu_i^2}{\mu_i} E[X_{ij}|\mathfrak{K}_m]$$

$$= \gamma_i \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu} E[X_{ij}|\mathfrak{K}_m]$$

$$= \varphi_i E[X_{ij}|\mathfrak{K}_m]$$

$$\varphi_i = \gamma_i \varphi$$

$$\varphi = \frac{\sigma^2 + \mu^2}{\mu}$$

Këto parametra mund të vlerësohen duke përdorur statistikën e Pearson χ^2

$$\hat{\varphi} = \frac{1}{n - (d+1)} \sum_{i,j \in I} \frac{(X_{ij} - \hat{X}_{ij}^{DCL})^2}{\hat{X}_{ij}^{DCL} \hat{\gamma}_i}$$

ku $n = m(m+1)/2$ dhe

$$\hat{X}_{ij}^{DCL} = \sum_{l=0}^{\min(j,d)} N_{i,j-l} \hat{p}_l \hat{\mu} \hat{\gamma}_i$$

Faktorët e dispersionit vlerësohen nga

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\mu} \hat{\phi} - \hat{\mu}^2$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = \hat{\sigma}^2 \hat{\gamma}_i^2$$

6.4 Procedura Bootstrap për shkallëzimin zinxhir të dyfishtë (Haxhi, K., Baholli, B. 2015)

6.4.1 Procesi i dispersionit – gabimi stokastik

Për pjesën e RBNS bëhet simulimi i pjesëve të panjohura të trekëndëshit nga parametrat e vlerësuar. Për IBNR simulohet numri i dëmeve në trekëndëshin J_1 dhe bazuar në këtë simulohen pagesat e dëmeve si tek pjesa e RBNS.

6.4.2 Procesi i dispersionit dhe gabimet e vlerësimit të parametrave

Parametrat e vlerësuar përdoren për të simuluar trekëndëshat e pagesave për RBNS dhe të pagesave dhe të numrit të dëmeve të ndodhura për pjesën e IBNR.

Algoritmi për pjesën e RBNS

- Vlerësimi i parametrave – aplikohet procedura e përshkruar më lart për të marrë vlerësimet e $p, \mu, \sigma^2, \lambda, \kappa$
- Bootstrap të dhënat – mbahet i njëjtë numër dëmsh N, por bootstrap pagesat totale X^*
- Bootstrap parametrat – nga bootstrap it ë dhënave (N, X^*) të gjeneruara në pikën 2 për të marrë vlerësimet e reja për $p^*, \mu^*, \sigma^{2*}, \lambda^*, \kappa^*$
- Bootstrap parashikimin e RBNS – simulohet vonesat dhe pagesat toatale sin ë pikën 2
- Përafrimi Monte Carlo – përsëriten hapat 2-4 B herë dhe merren shpërndarja empirike e bootstrap për pjesën e rezervës RBNS

Vlerësimi i RBNS

	period	rbns	mean.rbns	sd.rbns	Q1.rbns	Q5.rbns	Q50.rbns	Q95.rbns	Q99.rbns
1	1	32923044.1	30310997.0	21000341	2470831.32	5235622.06	26009745.65	68006441	100387542
2	2	16561954.8	16095025.4	14734258	221629.05	855282.45	11403482.96	44981685	62171084
3	3	10423063.3	9478535.6	11608703	9535.83	165217.30	5152131.67	33630485	51959551
4	4	5047128.2	6256265.6	9008953	8.62	274.58	2351969.62	24242767	35530812
5	5	3487774.3	3844128.1	8720026	0.60	9.70	533507.38	18282955	39580296
6	6	886542.6	526321.3	1903836	0.00	0.00	25.09	3649100	9339174
7	7	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
8	8	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
9	9	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
10	10	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
11	11	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
12	12	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
13	13	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
14	14	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
15	15	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
16	16	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
17	17	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
18	18	0.0	0.0	0	0.00	0.00	0.00	0	0
19	Tot.	69329507.2	66511273.0	31690927	14460100.11	21831172.09	62308914.07	134994311	154962470

Vlerësimi i IBNR

	period	ibnr	mean.ibnr	sd.ibnr	Q1.ibnr	Q5.ibnr	Q50.ibnr	Q95.ibnr	Q99.ibnr
1	1	2030773.81	2258545.49	5279413.0	0.00	0.00	61818.50	15746843.23	25403513.75
2	2	1570470.67	1210444.53	3591506.9	0.00	0.00	1137.30	7736374.84	15637313.29
3	3	798767.34	735556.63	3328182.0	0.00	0.00	0.23	3433924.25	22716040.44
4	4	596156.38	450353.85	2300878.6	0.00	0.00	0.00	1001055.89	11854205.50
5	5	248792.46	191703.42	1293161.4	0.00	0.00	0.00	51970.71	8258638.05
6	6	276889.81	155813.40	904878.1	0.00	0.00	0.00	130694.03	6287408.47
7	7	129006.74	101510.89	668064.4	0.00	0.00	0.00	45873.87	3985549.55
8	8	30102.14	21372.57	301472.8	0.00	0.00	0.00	0.00	189.34
9	9	9496.02	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	10	3587.12	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	11	697.88	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	12	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	13	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	14	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	15	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	16	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17	17	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	18	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	Tot.	5694740.37	5125300.78	7244983.2	21.07	2579.25	1789533.21	22675740.78	29517415.18

Vlerësimi i totalit RBNS+IBNR

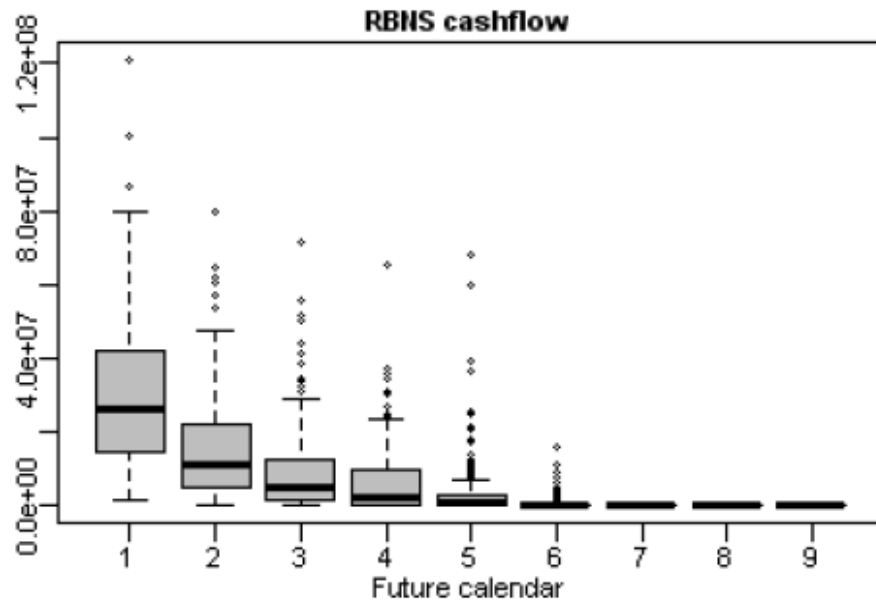
	period	total	mean.total	sd.total	Q1.total	Q5.total	Q50.total	Q95.total	Q99.total
1	1	34953817.95	32569542.51	21829695.1	3201777.03	6273082.52	27639943.20	68094765.73	100666514.81
2	2	18132425.44	17305469.98	15667458.6	221629.21	1016646.99	13377496.11	45213841.73	69628863.93
3	3	11221830.60	10214092.22	12461369.7	40261.27	219572.96	5440510.66	34779521.75	53114828.14
4	4	5643284.53	6706619.48	9524411.8	8.62	424.82	2526293.89	26722785.91	38446694.59
5	5	3736566.73	4035831.49	8880742.1	0.60	33.27	555771.22	20599163.67	39580295.54
6	6	1163432.40	682134.67	2188590.9	0.00	0.00	126.21	4863438.29	11149601.87
7	7	129006.74	101510.89	668064.4	0.00	0.00	0.00	45873.87	3985549.55
8	8	30102.14	21372.57	301472.8	0.00	0.00	0.00	0.00	189.34
9	9	9496.02	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
10	10	3587.12	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
11	11	697.88	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	12	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
13	13	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
14	14	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
15	15	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
16	16	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
17	17	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	18	0.00	0.00	0.0	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
19	Tot.	75024247.55	71636573.80	32971138.8	14601380.73	26381296.16	67804786.40	136469317.60	156163900.12

Vlerësimi më i mirë për rezervën IBNR në 31.12.2014 është:

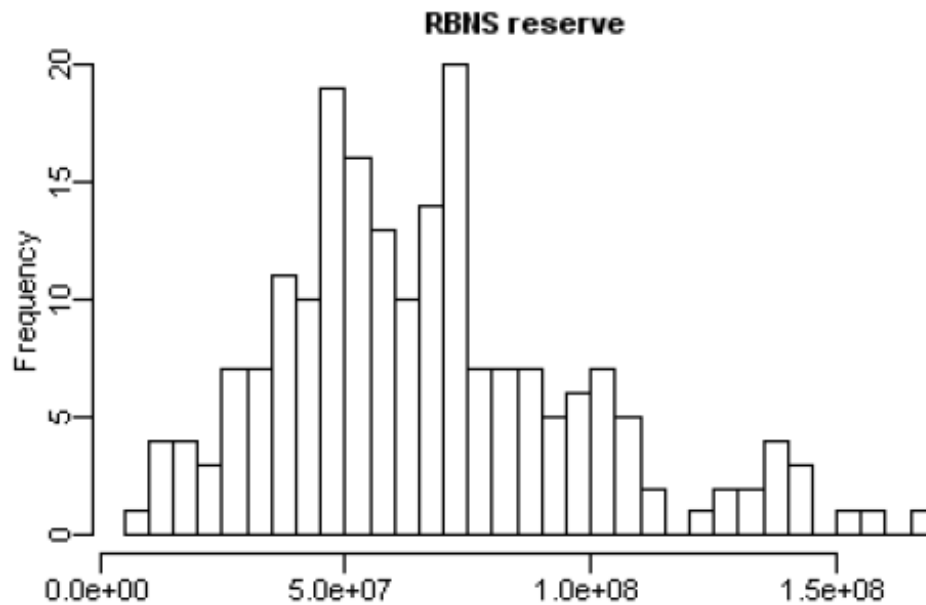
SD IBNR	IBNR
7,244,983	29,517,415

Histogramet dhe boxplotet e RBNS, IBNR dhe totalit. Boxplot-et japin shpërndarjen sipas përgjegjësi në të ardhmen. Histograme tregojnë shpërndarjen e rezervës.

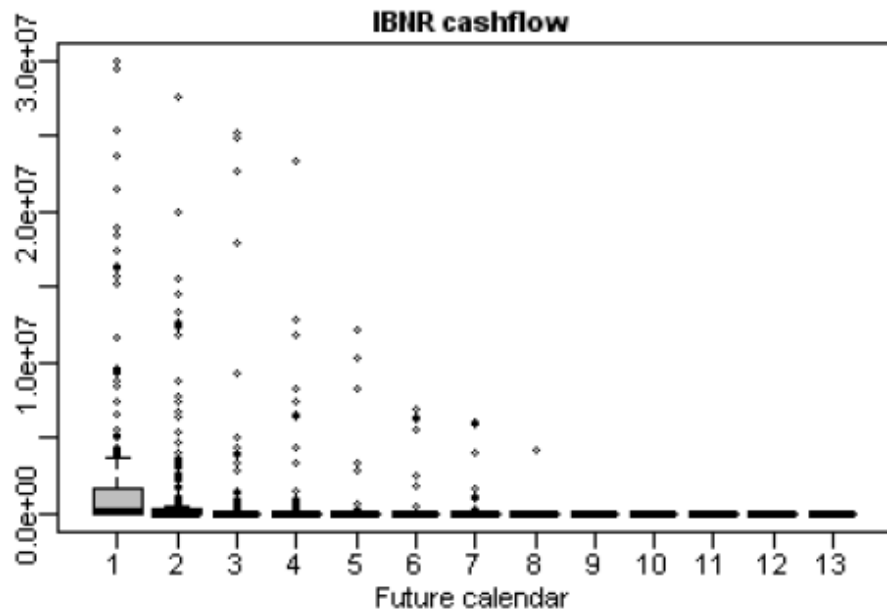
Grafik 6.5: Flukset e RBNS sipas viteve



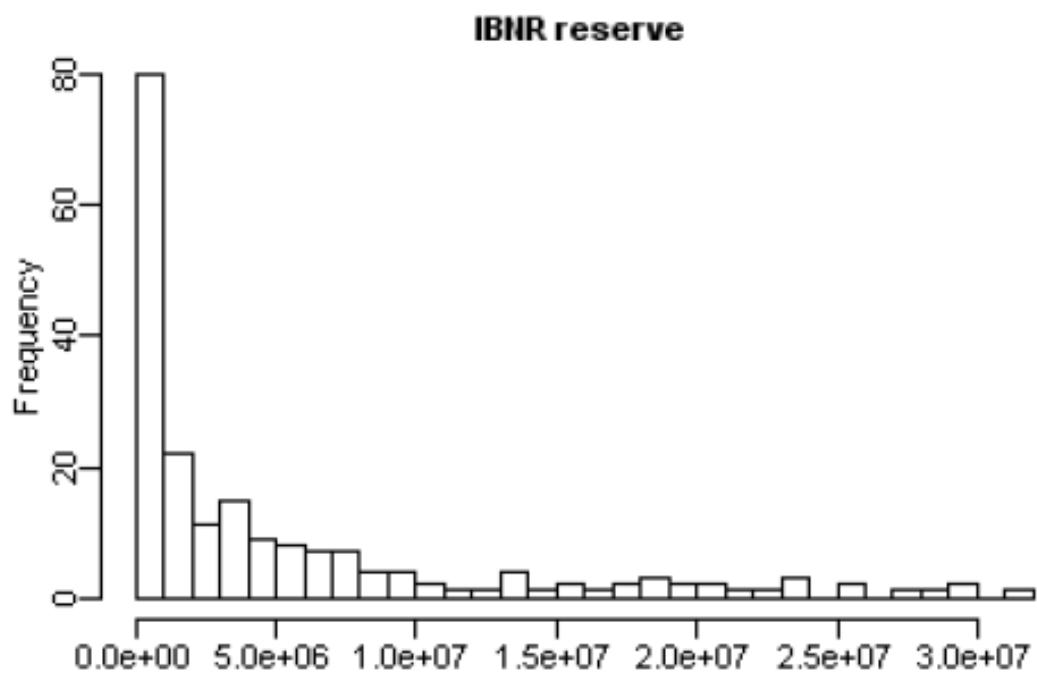
Grafik 6.6: Shpërndarja e rezervës RBNS



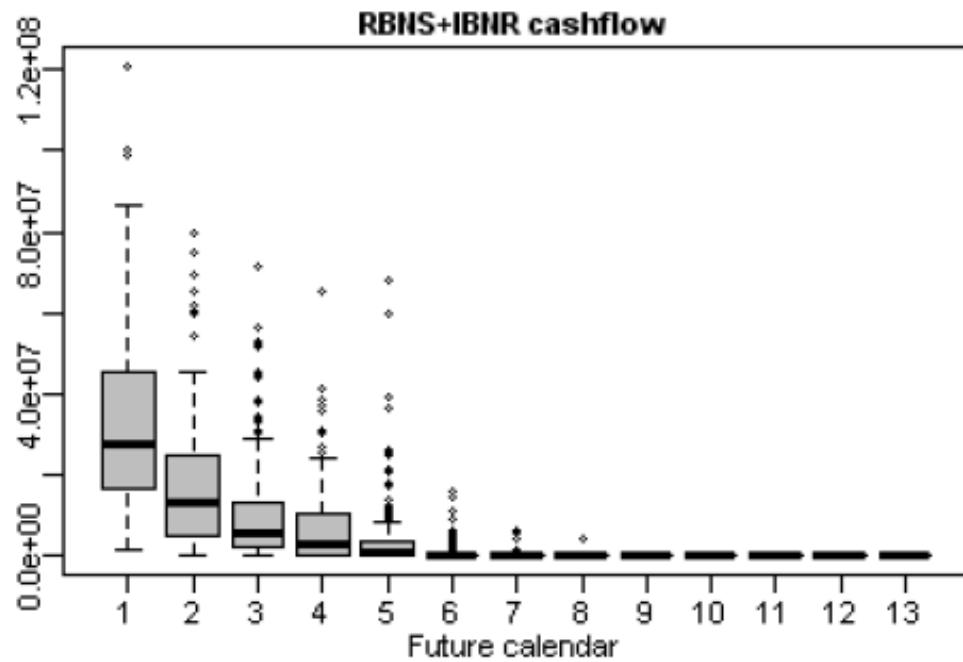
Grafik 6.7: Flukset e IBNR sipas viteve



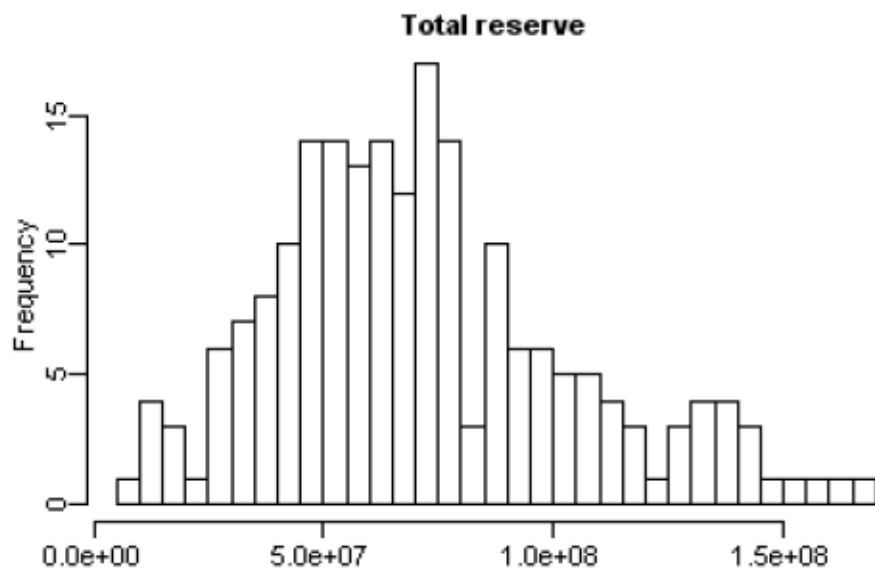
Grafik 6.8: Shpërndarja e rezervës IBNR



Grafik 6.9: Flukset e totalit RBNS+IBNR sipas viteve



Grafik 6.10: Shpërndarja e rezervës totale RBNS+IBNR



PËRFUNDIME

Rezervat teknike janë një çështje e rëndësishme në një kompani sigurimi. Sipas legjislacionit shqiptar në fuqi raportimi i tyre bëhet çdo tremujor ashtu si edhe pasqyrat financiare të kompanisë. Personi përgjegjës për vlerësimin e tyre është aktuari. Aktuari depoziton të firmosura këto rezerva, bazat teknike dhe metodologjinë e llogaritjes së tyre. Vlera e rezervave ndikon drejtpërdrejt në rezultatin teknik të kompanisë.

Metodat e vlerësimit të rezervave teknike të dëmeve janë të shumta. Fillimisht, shumica e këtyre metodave kanë nisur si algoritme deterministike. Me kalimin e kohës aktuarët nisën të zhvillonin dhe të analizonin modelet stokastike që justifikonin këto algoritme. Këto modele stokastike mundësojnë analizën dhe përcaktimin e sasisë së pasigurisë së parashikimit të përgjegjësive për dëmet pezull. Modelet të përdorura për janë: modeli i Poisson, i mbi shpërndarë i Poisson, modeli Gamma, modeli binomial negativ, modeli log-normal. Gjithashtu përdoren dhe modelë të tjerë parametrikë si ai i Wright dhe Bootstrap. Modelet lineare të përgjithshme përbëjnë një klasë fleksibël të modeleve stokastike dhe janë të vlefshme në analizën e pagesave të ardhshme. Ndërsa qëllimi i përdorimit të metodave Bayesiane është testimi i modeleve me grupe të ndryshme të dhënash dhe mundësia e shtrirjes së analizave për kompaninë në tërësi.

Modeli stokastik më i përhapur është modeli i shkallëzimit zinxhir i zhvilluar nga Mack, që është trajtuar në kapitullin e tretë të këtij punimi. Ky model ka për bazë trekëndëshin e zhvillimit të dëmeve të ndodhura ose të dëmeve të paguara dhe ka lehtësi përdorimi për faktin që mund të aplikohet në dëmet për të cilët nuk njohim shpërndarjen dhe mbi të gjitha nuk kërkon informacione të tjera shtesë. Bazuar në modelin e Mack, janë zhvilluar edhe modele të tjera lehtësisht të aplikueshme nëpërmjet softeve. Modeli i shkallëzimit zinxhir të dyfishtë i trajtuar në kapitullin e gjashtë përdor dy lloje trekëndëshash, trekëndëshin e zhvillimit të dëmeve të paguara dhe trekëndëshin e numrit të dëmeve të ndodhur. Një model tjetër bazuar në modelin e Mack i trajtuar në kapitullin e pestë është dhe ai i shkallëzimit zinxhir Munich, i cili përdor dy lloj trekëndëshash atë të dëmeve të ndodhur dhe atë të dëmeve. Këto metoda japin rezultate të ndryshme, shpeshherë të ngjashme me njëra-tjetrën, po edhe të ndryshme mes tyre. Këto rezultate ndikohen nga të dhënat që disponohen. Nga aplikimet e kryera nëpërmjet softit R dhe ne Excel, arrihet në konkluzionin se shpesh rezultatet ndikohen nga paqartësia e të dhënave.

Duke qënë se rezervat teknike të dëmeve, ashtu si gjithë rezervat teknike janë përgjegjësi, ndikojnë direkt pasqyrën humbje fitime, si dhe bilancin teknik të kompanisë, kërkohet vlerësimi sa më i drejtë i tyre.

Rezultatet e aplikimeve të metodave stokastike varen shumë nga besueshmëria dhe saktësia e të dhënave. Aktuari duke parë ecurinë dhe historikun e dëmeve në një portofol, tregun ku zhvillohen dëmet, pagesat ndër vite, vlerat e dëmeve pezull, dëmet në procese gjyqësore vlerëson cila nga vlerat është më e përshtatshme për të vendosur rezervat teknike. Gjithashtu kompania e sigurimit duhet të mbajë aktive të mjaftueshme në mbulim të rezervave teknike. Vlera e aktiveve në mbulim të rezervave teknike duhet në çdo kohë të jetë jo më e vogël se shuma bruto e rezervave teknike.

Metodat stokastike të vlerësimit të rezervave të trajtuara në këtë punim shërbejnë për vlerësimin e rezervave teknike të dëmeve pezull, si dhe për parashikimin e flukseve të pagesave të dëmeve në vitet në vazhdim.

Duke bërë krahasimin e metodave të ndryshme të vlerësimit të rezervave teknike të dëmeve mbi të dhënat e kompanisë në studim dhe duke ditur që shuma e dëmeve pezull është 83,189,473 lekë, vlerësimi më i përshtatshëm për rezervën IBNR mund të jetë ai i marrë nga vlerësimi i shkallëzimit zinxhir të dyfishtë ose i shkallëzimit zinxhir standart bazuar në dëmet e ndodhura.

REFERENCAT

1. Wüthrich, M.V., Merz, M. [2008] Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance, Wiley
2. Perna, C.; Sibillo, M. [2014] Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance, Springer
3. Wüthrich, M.V., Merz, M. [2013] Financial Modeling, Actuarial Valuation and Solvency in Insurance, Springer
4. Quarg, G.; Mack, T. [2008] Munich Chain Ladder: A Reserving Method that Reduces the Gap between IBNR Projections Based on Paid Losses and IBNR Projections Based on Incurred Losses. In: CAS, Volume 2, Issue 2, pp. 266 -299
5. Mack, T. [1993] Distribution-free calculation of the standard error of chain-ladder reserve estimates. ASTIN Bull. 23, 213–225.
6. Mack, T. [1997] Measuring the variability of chain-ladder reserve estimates. In: Claims Reserving Manual, vol. 2. London: Institute of Actuaries.
7. Gerigk, Erasmus [2004] The Mack-Method and Analysis of Variability, 2004 Institute of Actuaries of Australia
8. England, P. and Verrall, R. [1999] Analytic and Bootstrap estimates of prediction error in claims reserving. Insurance: Mathematics and Economics 25, 281-293
9. Verrall, R., Nielsen J.P. and Jessen A.(2010) Prediction of RBNS and IBNR claims using claim amounts and claim counts, ASTIN Bulletin, 40(2), 871-887
10. Martinez-Miranda M.D, Nielsen J.P. and Verrall, R. [2012] Double chain ladder, Astin Bulletin 42(1),59-76
11. Haxhi, K., Zaçaj, O. (2012) “Applications of risk models in claims reserving”, Shkup 2012, http://iash-takimet.org/tv2012/programi/programi_natyra.pdf , libri i pwrmbledhjeve tw “Takimi VII vjetor ndwrkombwtar, AlbShkenca, 29-31 gusht 2012” (Poster ISBN:978-608-65463-0-4,fq 441)
12. Haxhi, K., Zaçaj, O. (2012) “The dependence described by copulas in the reinsurance treaties”, IECMSA 2012, <http://2012.iecmsa.org/dosyalar/abstractbook2012.pdf> ; Prishtinw 2012, “1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Kosovo, September 3-7, 2012” ;
13. Haxhi, K., Xhaja, B. (2013) “Bayesian internal models for the reserve risk estimation”, IWBCSM 2013, Elbasan 2013, “1st International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences, May 30 –June 1, 2013” (Proccedings ISBN: 978-9928-115-27-0)

14. Haxhi, K., Xhaja, B. (2013) “Reinstatement premiums for an excess of loss reinsurance contract” - AlbShkenca, Tiranw 2013, libri i pwrmbledhjeve tw “Takimi VIII vjetor ndwrkombwtar, AlbShkenca, 29-31 gusht 2013” (fq. 341)
15. Haxhi, K., Xhaja, B. (2015): Estimating claims reserve in a non-life insurance company; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 6, June-2015, <http://www.jmest.org/wp-content/uploads/JMESTN42350835.pdf>
16. Haxhi, K., Baholli, B. (2015): Application of Munich Chain Ladder for an Albanian DMTPL portfolio; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 7, July 2015
<http://www.jmest.org/wp-content/uploads/JMESTN42350909.pdf>
17. Haxhi, K., Baholli, B. (2015): Claims reserving for a DMTPL portfolio using Double Chain Ladder; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 8, August – 2015,
<http://www.jmest.org/wp-content/uploads/JMESTN42351004.pdf>
18. Nelsen, R. B., An introduction to Copulas, Springer, New York 1999
19. Dhaene, J., Goovaerts, M.J., Dependency of risk and stop-loss order, Astin Bulletin, 1996
20. Joe H., Multivariate Models and Dependence Model Concepts, Chapman & Hall, London 1997
21. Goovaerts, M.J., Kaas, R., Van Heerwaarden, A.E., Optimal reinsurance in relation to ordering of risks, Insurance: Mathematics and Economics, 1989
22. Embrechts, P., Klüppelberg, F., McNeil, A., Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, ETHZ, Zürich
23. Dhaene, J., Denuit, M., Goovaerts, M.J., Kaas, R., Vyncke, D., The concept of comonotonicity in actuarial science and finance, Insurance: Mathematics and Economics, 2002
24. Scollnik D.P.M., [2004]: “Bayesian Reserving Methods inspired by Chain ladder Methods and implemented using WinBugs”, ARCH, n.2
25. Crawley, M.J., The R book [2008], Wiley

ANEKS

- Tabelat e rezervave
 - Tabela përmbledhëse e rezervave
 - Tabela e rezervave bruto të primeve
 - Tabela e dëmeve bruto, RBNS dhe IBNR
 - Tabela e rezervave të risiguruesit
- Pasqyra humbje-fitime
- Llogaritja e primit të rrezikut

Kompani sigurimi jo jete

Rezervat teknike sic paraqiten me: 31-Dec-14

Kurset e kembimit:

USD 124
EUR 140.20

ALL

UPR 222,586,392
UPR Risiguruesi 24,207,972
UPR neto 198,378,420

Rezerva e demeve bruto 120,915,458
Rezerva e demeve e risiguruesit 0
Rezerva e demeve neto 120,915,458

Rezerva te tjera bruto

Rezerva te tjera risiguruesi

Rezerva te tjera neto

Rezerva total bruto 343,501,850
Rezerva total risiguruesi 24,207,972
Rezerva total neto 319,293,878

Tabela e rezervave per primet e pafituara

	Rezerva i primit te pafituar 31-Dec-14				Rezerva shtese per riskun e paskaduar 31-Dec-14				Rezerva totale per primin e pafituar (bruto) 31-Dec-14			
	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke
Sigurime aksidente+shendeti	3,486,657	-	12,250	5,204,107	-	-	-	-	3,486,657	-	12,250	5,204,107
Aksidente personale	2,766,657	-	5,000	3,467,657	-	-	-	-	2,766,657	-	5,000	3,467,657
Shendeti ne Udhetim	-	-	7,250	1,016,450	-	-	-	-	-	-	7,250	1,016,450
Sigurimi i pergjegjesise se pasagjereve	720,000	-	-	720,000	-	-	-	-	720,000	-	-	720,000
Sigurime motorike	140,467,899	8,900	31,200	145,945,739	659,105	-	-	659,105	141,127,004	8,900	31,200	146,604,844
Kasko	5,900,000	8,900	24,500	10,438,500	659,105	-	-	659,105	6,559,105	8,900	24,500	11,097,605
TPL	134,567,899	-	-	134,567,899	-	-	-	-	134,567,899	-	-	134,567,899
Polica Kufitare	-	-	6,700	939,340	-	-	-	-	-	-	6,700	939,340
Sigurime te prones dhe te tjera	2,256,900	164	36,038	7,329,764	-	-	-	-	2,256,900	164	36,038	7,329,764
Zjarr	1,188,000	-	-	1,188,000	-	-	-	-	1,188,000	-	-	1,188,000
Vjedhje	972,990	164	6,583	1,916,263	-	-	-	-	972,990	164	6,583	1,916,263
CAR+EAR	89,210	-	28,935	4,145,897	-	-	-	-	89,210	-	28,935	4,145,897
CIS & CIT	6,700	-	520	79,604	-	-	-	-	6,700	-	520	79,604
Sigurim i marines dhe transportit	-	3,960	213	520,903	-	-	-	-	-	3,960	213	520,903
Mallra ne Transport	-	-	213	29,863	-	-	-	-	-	-	213	29,863
Sigurim anije	-	3,960	-	491,040	-	-	-	-	-	3,960	-	491,040
Sigurimi i pergjegjesise	6,632,938	55,636	46,927	20,110,967	-	-	-	-	6,632,938	55,636	46,927	20,110,967
Pergjegjesi civile dhe e produktit	6,632,938	55,636	46,927	20,110,967	-	-	-	-	6,632,938	55,636	46,927	20,110,967
Pergjegjesi profesionale	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pergjegjesi e karburanteve	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sigurimi i Garancive	11,406,340	-	-	11,406,340	-	-	-	-	11,406,340	-	-	11,406,340
Garanci Kontrate	11,138,293	-	-	11,138,293	-	-	-	-	11,138,293	-	-	11,138,293
Garanci Oferte	268,047	-	-	268,047	-	-	-	-	268,047	-	-	268,047
Totali	164,250,734	68,660	126,628	165,202,745	659,105	-	-	659,105	164,909,839	68,660	126,628	191,176,925

Tabela e rezervave per demet bruto

Tabela 2

	Rezerva per demet pezull (bruto) 31-Dec-14				Rezerva IBNR (bruto) 31-Dec-14				Rezerva e demeve (bruto) 31-Dec-14			
	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke
Sigurime												
Aksidente+shendeti	171,600	-	-	171,600	-	-	-	-	188,600	-	-	188,600
Aksidente personale				-				-	-	-	-	-
Shendeti ne Udhetim	171,600			171,600	17,000			17,000	188,600	-	-	188,600
Sigurimi i pergjegjesise se pasagjereve	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sigurime motorike	88,711,761	-	-	88,711,761	30,561,601	-	-	30,561,601	119,273,362	-	-	119,273,362
Kasko	5,522,288			5,522,288	1,044,186			1,044,186	6,566,474	-	-	6,566,474
TPL	83,189,473			83,189,473	29,517,415			29,517,415	112,706,888	-	-	112,706,888
Polica Kufitare				-				-	-	-	-	-
Sigurime te prones dhe te tjera	116,704	-	5,600	901,824	10,500	-	560	89,012	127,204	-	6,160	990,836
Zjarr	116,704		5,600	901,824	10,500		560	89,012	127,204	-	6,160	990,836
Vjedhje				-				-	-	-	-	-
CAR+EAR				-				-	-	-	-	-
CIS & CIT				-				-	-	-	-	-
Sigurim i marines dhe transportit	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Mallra ne Transport				-				-	-	-	-	-
Sigurim anije				-				-	-	-	-	-
Sigurimi i pergjegjesise	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pergjegjesi civile dhe e produktit				-				-	-	-	-	-
Pergjegjesi profesionale				-				-	-	-	-	-
Pergjegjesi e karburanteve				-				-	-	-	-	-
Sigurimi i Garancive	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Garanci Kontrate				-				-	-	-	-	-
Garanci Oferte				-				-	-	-	-	-
Totali	89,000,065	-	5,600	89,785,185	30,572,101	-	560	30,650,613	119,589,166	-	6,160	120,452,798

Tabela e rezervave pjesa e risiguruesit

Tabela 4

	Rezerva per primet e risigurimit 31-Dec-14				Rezerva e demeve (risigurues) 31-Dec-14				Rezervat total risiguruesi 31-Dec-14			
	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke	Leke	USD	EURO	Konvertuar ne leke
Sigurime												
Aksidente+shendeti	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Aksidente personale				-				-	-	-	-	-
Shendeti ne Udhetim				-				-	-	-	-	-
Sigurimi i pergjegjesise se pasagjereve	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Sigurime motorike	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kasko				-				-	-	-	-	-
TPL				-				-	-	-	-	-
Polica Kufitare				-				-	-	-	-	-
Sigurime te prones dhe te tjera	-	-	172,667	24,207,972	-	-	-	-	-	-	172,667	24,207,972
Zjarr			172,667	24,207,972				-	-	-	172,667	24,207,972
Vjedhje				-				-	-	-	-	-
CAR+EAR				-				-	-	-	-	-
CIS & CIT				-				-	-	-	-	-
Sigurim i marines dhe transportit	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Mallra ne Transport				-				-	-	-	-	-
Sigurim anije				-				-	-	-	-	-
Sigurimi i pergjegjesise	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Pergjegjesi civile dhe e produktit				-				-	-	-	-	-
Pergjegjesi profesionale				-				-	-	-	-	-
Pergjegjesi e karburanteve				-				-	-	-	-	-
Sigurimi i Garancive	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Garanci Kontrate				-				-	-	-	-	-
Garanci Oferte				-				-	-	-	-	-
Totali	-	-	172,667	24,207,972	-	-	-	-	-	-	172,667	24,207,972

PASQYRA E TE ARDHURAVE DHE SHPENZIMEVE

Prime te shkruara bruto	828,374,287	828,374,287
Ndryshimi ne rezerven e primit te Pafituar	-15,266,336	-15,266,336
Prime te shkruara, Neto	813,107,951	813,107,951
Prime te kaluara ne Risigurim	-176,316,340	-176,316,340
Ndryshimi ne rezerven e primit te pafituar te risiguresit	-36,828,674	-36,828,674
Prime te fituara neto	599,962,937	599,962,937
Te ardhura nga interesat dhe pjesemarrjet	148,922,114	148,922,114
Te ardhura nga kurset e kembimit	4,773,332	4,773,332
Te ardhura te tjera	5,308,833	5,308,833
Totali i te ardhurave Neto	758,967,216	758,967,216
Deme te paguara	363,836,991	363,836,991
Deme te paguara nga risiguresit	-93,578,984	-93,578,984
<i>Ndryshimi i rezerves se demeve</i>	<i>-121,364,264</i>	<i>-150,000,000</i>
Deme te sigurimit , neto	148,893,742	120,258,007
Shpenzime te marrjes ne sigurim	83,427,049	83,427,049
Shpenzime administrative	291,309,833	291,309,833
Shpenzime reklame, marketingu	29,496,954	29,496,954
Shpenzuime te tjera	1,496,359	1,496,359
Totali i humbjeve dhe shpenzimeve	554,623,937	525,988,201
Fitimi para tatimit	204,343,279	232,979,014
Tatim fitimi	23,956,200	24,123,159
Fitimi neto i vitit	180,387,079	208,855,855

Llogaritje e primit të rrezikut

	2012	2013	2014
Kontrata te lidhura	1,389	1,337	1485
Kontrata te pafituara te mbartura	309	390	333
Kontrata te pafituarate tanishme	390	333	481
Kontrata te fituara te vitit	1,308	1,394	1,337
Prime te shkruara	123,332,800	116,213,300	124,539,213
Primi te pafituara te mbartura	5,355,359	13,575,311	12,164,621
Prime te pafituara te tanishme	13,575,311	12,164,621	18,362,542
Primi i fituar	115,112,848	117,623,990	118,341,292
Numer demesh te ndodhura	1,179	1,126	1,151
Numer demesh te paguara	1,185	1,117	1,130
Numer demesh pezull te mbartura	10	4	13
Numer demesh pezull te tanishme	4	13	34
Vlere demesh te ndodhura	40,100,080	31,335,163	59,004,156
Vlere demesh te paguara	39,239,838	32,740,300	55,732,328
Rezerve demesh e mbartur ne vlere	12,367,508	13,227,750	11,822,613
Rezerve demesh te tanishme	13,227,750	11,822,613	15,094,440
Raporti Deme/Prime	35%	27%	50%
Demi mesatar	34,012	27,829	51,263
Frekuenca e demit	90.14%	80.77%	86.09%
Primi i Riskut	30,658	22,479	44,132

BIBLIOGRAFI

Publikime:

Haxhi, K., Xhaja, B. (2015): Estimating claims reserve in a non-life insurance company; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 6, June - 2015 (ISSN: 3159-0040, fq 1501)

Haxhi, K., Baholli, B. (2015): Application of Munich Chain Ladder for an Albanian DMTPL portfolio; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 7, July - 2015 (ISSN: 3159-0040, fq 1843)

Haxhi, K., Baholli, B. (2015): Claims reserving for a DMTPL portfolio using Double Chain Ladder; Journal of Multidisciplinary Engineering Science and Technology (JMEST) Vol. 2 Issue 8, August - 2015 (ISSN: 3159-0040, fq 2221)

Prezantime:

Haxhi, K., Zaçaj, O. (2012) Modelet e rrezikut në rezervimin e dëmeve nëpërmjet modeleve të përgjithshme lineare, Shkup 2012, botuar në librin e përmbledhjeve të “Takimi VII vjetor ndërkombëtar, AlbShkenca, 29-31 gusht 2012” (Poster ISBN: 978-608-65463-0-4, fq 441)

Haxhi, K., Zaçaj, O. (2012) Varësia e përshkruar nga Copulas në marrëveshjet e risigurimit - IECMSA 2012, Prishtinë 2012, botuar në librin e përmbledhjeve të “1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, Kosovo, September 3-7, 2012” Poster, fq.345)

Zaçaj O., Haxhi K. (2012): Shkallët Bonus-Malus: Një diskutim lidhur me trajtimet alternative për tarifatat e segmentuara [Bonus-Malus Scales: A Discussion on Alternative Approaches in Segmented Tariffs] Takimii VII vjetor Shkencor Nderkombetar, IASH 2012 Shkup, 29-31 Gusht 2012 (Poster ISBN: 978-608-65463-0-4, fq 398) http://iashtakimet.org/tv2012/programi/programi_natyra.pdf

Zaçaj O., Haxhi K., (2012): Applications to Markov Chains: Introducing a Bonus – Malus model for the MTPL Portfolio in Albania, “1st International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications, IECMSA 2012, Prishtinë,

Kosovo, September 3-7, 2012 (Poster, fq.358)
<http://2012.iecmsa.org/dosyalar/abstractbook2012.pdf>

Haxhi, K., Xhaja, B. (2013) Modelet Bayesiane në vlerësimin e rezervës së rrezikut- IWBCSM 2013, Elbasan 2013, paraqitur në Proceedings Book – “1st International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences, May 30 –June 1, 2013” (Prezantim, Proccedings ISBN: 978-9928-115-27-0, fq. 270)

Haxhi, K., Xhaja, B. (2013) Primet e rivendosjes në një kontratë risigurimi të tejkalimit të rrezikut – AlbShkenca, Tiranë 2013, paraqitur në librin e përmbledhjeve të “Takimi VIII vjetor ndërkombëtar, AlbShkenca, 29-31 gusht 2013” (Prezantim, fq. 341)