



REPUBLIKA E SHQIPËRISË
UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

Për marrjen e gradës shkencore
DOKTOR

Titulli

**Konvergjencat statistikore, metodat e shumueshmërisë dhe
teoremat e Korovkin-it**

Paraqitur nga:

Valdete Loku

Udhëheqës shkencor:

Prof. Dr. Agron Tato

Tiranë, 2017

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MATEMATIKE DHE INXHINIERISË
FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISË MATEMATIKE

DISERTACION

I

Paraqitur nga

Valdete Loku

Për marrjen e gradës shkencore

DOKTOR

Programi i studimit : Analizë Numerike dhe Ekuacione Diferenciale

Tema: Konvergjencat statistikore, metodat e shumueshmërisë dhe teoremat e Korovkin-it

Udhëheqës shkencor: Prof. Dr. Agron TATO

Mbrohet më datë: 01-11-2017, para jurisë:

1. Prof. Dr. Lulëzim Hanelli, Kryetar(oponent)
2. Prof. Dr. Fatmir Hoxha, Anëtar
3. Prof. Dr. Shpëtim Bozdo, Anëtar
4. Prof. Asoc. Kristaq Gjino, Anëtar (oponent)
5. Prof. Asoc. Luela Prifti, Anëtar

Përmbajtja

Abstrakt	vi
Abstract	vii
Hyrje	viii
Falënderim	x
1 Kuptimet hyrëse	1
1.1 Koncepte themelore për hapësirat e Banach-ut	1
1.1.1 Hapësirat duale	2
1.1.2 Shembuj me rëndësi të hapësirave duale	3
1.2 Pohime me rëndësi	4
1.3 Konvergjencia statistikore	7
1.4 Metodat e shumueshmërisë	8
1.4.1 Metoda e shumueshmërisë matricore	9
1.4.2 Metoda e Cesáros e rendit të parë	11
1.4.3 Metoda e përgjithësuar e Cesáros	14
1.4.4 Metoda e shumueshmërisë sipas Nörlund-it	15
1.4.5 Metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it	17
1.4.6 Metoda e përgjithësuar e shumueshmërisë sipas Nörlund-it	19
1.4.7 Metoda e shumueshmërisë sipas Euler-it	20
1.5 Teoremat e Korovkin-it dhe Voronoj-it	21
2 Vargjet e hapësirave të ndërtuara me konvergjencia statistikore	23
2.1 Vargjet e hapësirave të ndërtuara me Λ^2 – konvergjencën statistikore	23
2.1.1 Disa veti të hapësirave $[N, \lambda^2]$ dhe S_{λ^2}	25
2.1.2 Relacionet ndërmjet shumueshmërisë statistikore Λ^2 , vargjeve Λ^2 – statistikisht konvergjente dhe fort shumueshmërisë së Λ_r^2 të vargjeve.	29
2.2 Shumueshmëria sipas Nörlund-it dhe konvergjencia statistikore	33

2.2.1	Konvergenca statistikore sipas Nörlund-it	34
2.2.2	Konvergenca statistikore dhe funksionet e Orlicz-it	36
2.3	Konvergenca statistikore sipas funksioneve modulare	38
2.3.1	Relacionet ndërmjet klasëve $N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$ dhe $N_\theta(A, u, \Delta^m)$	42
2.3.2	Vargjet lakunare (A, u, Δ^m) -statistikisht konvergjente	43
2.3.3	Vargjet e përkufizuara sipas Cesáro's- (A, u, Δ^m)	47
3	Teoremat e Korovkin-it dhe Voronoj-it	49
3.1	Teorema e dytë e Korovkin-it për	
	Λ^2 -shumueshmëritë statistikore	49
3.1.1	Shkalla e konvergjencës	
	sipas Λ^2 -konvergjencës statistikore	52
3.1.2	Teorema e parë e Korovkin-it dhe Voronoj-it sipas	
	Λ^2 -konvergjencës statistikore	55
3.1.3	Shkalla e konvergjencës	58
3.1.4	Teorema e Voronoj-it	60
3.2	Teorema e Korovkin-it sipas shumueshmërisë së Nörlund-it	63
3.2.1	Shkalla e konvergjencës	66
	Përfundim	69
	Conclusion	70
	Biografia dhe lista e punimeve	71
	Literatura	73

Abstrakt

Në këtë punim të doktoraturës, do të përkufizojmë disa konvergjenca të reja statistikore përmes metodave të shumueshmërisë dhe përmes tyre do të vërtetojmë teoremat e Korovkin-it (për disa klasë prej tyre) dhe ato të Voronoj-it.

Në kapitullin e parë do të bëhet paraqitja e koncepteve themelore në lidhje me konvergjencat statistikore, si përgjithësime të konvergjencave të zakonshme. Më pas do të jepen disa nga metodat e shumueshmërisë të cilat do t'i përdorim në këtë punim dhe format themelore të teoremave të Korovkin-it dhe teoremat e Voronoj-it.

Në kapitullin e dytë do të jepen konvegjenca statistikore të reja dhe përmes tyre do të bëhet përkufizimi i hapësirave të vargjeve si dhe do të bëhet krahasueshmëria e hapësirave të fituara në këtë mënyrë. Gjithashtu do të jepen metodat e reja të shumueshmërisë të cilat përkufizohen përmes këtyre konvergjencave dhe lidhmëritë ndërmjet tyre.

Në kapitullin e fundit do të japim Teoremat mbi shkallën e konvergjencës sipas konvergjencave statistikore të definuara në kapitullin e dytë, teoremat bazike të Korovkin-it dhe teoremat e Voronoj-it.

Klasifikimi sipas AMS 2010: 40G15, 41A36, 46A45, 40C05, 41A36, 46A45, 40A05. Secondary 46A35, 46B45.

Fjalët kyçe: konvegjenca statistikore me peshë Λ^2 , teoremat e tipit të Korovkin-it, shkalla e konvergjencës, konvergjenca statistikore dhe shumueshmëria statistikore, teoremat e tipit të Voronoj-it, operatorët linear pozitivë, funksionet e vazhdueshme dhe të kufizuara, modulet e vazhdueshmërisë, funksionet jorritëse dhe jozvogëluese, diferencat e vargjeve, vargjet lakunare, vargjet e funksioneve modulare, funksionet e Orlicz-it, metodat e shumueshmërisë sipas Cesàros, metoda e shumueshmërisë sipas Nörlund-it, metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it, metoda e shumueshmërisë sipas Euler-it, metoda e shumueshmërisë matricore.

Abstract

In this doctoral thesis we will define some new statistical convergences, using summability methods and based on those definitions we prove some kind of Korovkin type theorems (in some classes of spaces) and Voronoi theorems, too.

In the first chapter we have define those new type of statistical convergences, which are generalization of the "random convergences", and then we will give definition and some properties of the basic summability methods, which will be used in this doctoral thesis and basic forms of the Korovkin and Voronoi type theorems.

In The second chapter we have defined new statistical convergences and using into consideration those definitions, we have defined sequence spaces and are given inclusion relations between those defined classes of sequence spaces. Also we have define some new summability methods, which are defined by those new statistical convergences and their relationship between them.

In the last chapter we have given some kind the rate of convergence, based in the new defined statistical convergences and we have proved some kind of Korovkin type theorems, and Voronoi type theorems.

Classification according to AMS 2010: 40G15, 41A36, 46A45, 40C05, 41A36, 46A45, 40A05. Secondary 46A35, 46B45.

Key words: Weighted statistical convergence Λ^2 , Korovkin type theorems, rate of convergence, statistical convergence and statistical summability, Voronoi type theorems, positive linear operators, bounded and continuity functions, modulus of continuity, non-decreasing and non-increasing functions, generalized difference of functions, lacunary sequences, sequence of modular functions, Orlicz functions, Cesàros summability method, Nörlund summability method, Riesz summability method, Euler summability method, matrices summability method.

Hyrje

Ky punim është i ndarë në tre kapituj.

Kapitulli i parë: **Kuptimet hyrëse**

Në kapitullin e parë kemi dhënë kuptimet themelore dhe pohimet ndihmëse, të cilat do t'i shfrytëzojmë për vërtetimin e pohimeve themelore në kapitujt dy dhe tre, të cilët kapituj janë të përbërë kryesisht nga punime autoriale. Këtu kemi dhënë kuptimet themelore në lidhje me hapësirat e vargjeve dhe hapësirat duale të tyre.

Në vijim jepet kuptimi i konvergjencës statistikore, si përgjithësim i konvergjencës së zakonshme dhe metodat e shumueshmërisë, si ajo e Cesáros e rendit të parë, rendit të çfarëdoshëm, metoda e përgjithësuar e Cesáros, shumueshmëria e tipit të Nörlund-it dhe ajo e përgjithësuar e tij, shumueshmëria e Riesz-it, shumueshmëria e tipit të Euler-it dhe shumueshmëria e tipit Λ^2 . Gjithashtu jepen disa pohime ndihmëse bazike nga analiza funksionale. Në fund jepen teoremat bazike të Korovkin-it, e para dhe e dyta.

Kapitulli i dytë: **Vargjet e hapësirave të ndërtuara me konvergjencat statistikore**

Këtu kemi dhënë përkufizimet e konvergjencave të reja statistikore dhe përmes tyre janë përkufizuar disa hapësira të vargjeve. Këto konvergjenca merren nga shumueshmëria Λ^2 , ku përkufizohen hapësirat e vargjeve $[N, \lambda^2]$ dhe S_{λ^2} . Shqyrtohen disa veti të këtyre hapësirave të vargjeve dhe relacionet përfshirëse në mes të tyre. Më pas përkufizohen hapësirat e vargjeve Λ_r^2 dhe shikohen disa veti të tyre. Në vijim merren konvergjenca statistikore sipas metodës së shumueshmërisë së Nörlund-it dhe përmes tyre përkufizohen hapësirat e vargjeve $N_{p,q}$.

Në kuadër të këtij kapitulli gjithashtu përkufizohet konvergjenca statistikore duke shfrytëzuar funksionet e Orlitz-it, si dhe përkufizohet hapësira e vargjeve $[N_{p,q}, M, p]$. Për këtë hapësirë provohen disa veti të saj. Në vijim jepet përkufizimi i konvergjencës statistikore sipas funksioneve modulare, duke shfrytëzuar edhe metodën matricore të shumueshmërisë dhe diferencat e përgjithësuara të rendit n , për termat e vargjeve. Për këtë llojë konvergjençe përkufizohet hapësira e vargjeve $N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$.

Gjithashtu jepen hapësirat e vargjeve lakunare me diferenca të përgjithësuara dhe përkufizohet hapësira (A, u, Δ^m) . Në fund të kapitullit jepen hapësirat e vargjeve të përkufizuara përmes vargjeve lakunare, diferencave të përgjithësuara dhe metodës së shumueshmërisë sipas Cesáros.

Kapitulli i tretë: **Teorema e dytë e Korovkin-it për Λ^2 —shumueshmëritë statistikore**

Në këtë kapitull jepen teoremat e Korovkin-it, shkalla e konvergjencës, modulet e vazhdueshmërisë si dhe teoremat e Voronoj-it.

Në fillim kemi dhënë teoremat e Korovkin-it sipas konvergjencës statistikore Λ^2 , për rastin e funksioneve testuese trigonometrike. Më pas shqyrtohet shkalla e konvergjencës së tyre përmes kësaj metode dhe modulit të vazhdueshmërisë. Në vijim merret një shembull i cili tregone se pohimet tona janë më të përgjithësuara se pohimet e dhëna në punimin [2].

Në pjesën e dytë merret një formë e teoremës së Korovkin-it sipas të njëjtës konvergjencë statistikore, por tani si test funksione kemi funksionet algebrike $1, x$ dhe x^2 . Gjithashtu edhe në këtë rast shqyrtohet shkalla e konvergjencës së operatorëve linear pozitivë, përmes të vargut të test funksioneve $1, x, x^2$ dhe modulit të vazhdueshmërisë. Në po këtë pjesë jepet edhe një formë e teoremës së Voronoj-it, përmes përkufizimeve të dhëna më parë.

Në pjesën e fundit jepen trajta të teoremës së Korovkin-it, duke shfrytëzuar konvergjencat statistikore sipas metodës së shumueshmërisë së Nörlund-it. Jepet një shembull përmes të cilit tregohet se këto pohime të dhëna në këtë punim janë me të përgjithësuara se sa pohimet e dhëna në punimet [48] dhe [2]. Po ashtu jepet shkalla e konvergjencës së vargut të operatorëve linear pozitivë, përmes të test funksionit 1 dhe modulit të vazhdueshmërisë.

Falënderim

Falënderoj udhëheqësin tim shkencor, profesorin Agron Tato për mundin, përkushtimin, përkrahjen dhe ndihmën e pakursyer të dhënë që ky punim të jetë sa më profesional. Gjithashtu, shfrytëzoje rastin të falënderoj familjen time për mbështetje të vazhdueshme, gjatë gjithë punës sime në studimet e doktoratës.

Kapitulli 1

Kuptimet hyrëse

1.1 Koncepte themelore për hapësirat e Banach-ut

Le të jetë X bashkësi e çfarëdoshme.

Përkufizim 1.1.1. Norma $\|\cdot\|$, për ndonjë $x \in X$, është funksioni nga hapësira X në $\mathbb{R}$, i cili i plotëson kushtet e mëposhtme:

1. $\|x\| \geq 0$, dhe $\|x\| = 0 \iff x = 0$,
2. Për çdo numër të dhënë $\lambda \in \Phi$, ku $\Phi = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ vlen relacioni: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, për çdo $x, y \in X$.

Çifti $(X, \|\cdot\|)$ quhet hapësirë e normuar. Për vargun e dhënë $(x_n) \in X$, themi se konvergjon te $x \in X$ sipas normës, nëse vlen relacioni

$$(1.1.1) \quad \|x_n - x\| \rightarrow 0, \quad \text{kur } n \rightarrow \infty.$$

Themi se vargu $(x_n) \in X$, është varg i Koshit në hapësirën e normuar X , nëse vlen relacioni:

$$(1.1.2) \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 = n(\epsilon))(\forall n > n_0, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow \|x_{n+p} - x_n\| < \epsilon).$$

Dihet se nëse (x_n) është varg konvergjent në hapësirën e normuar, atëherë është edhe varg i Koshit, por anasjelltas nuk vlen gjithnjë. Për këtë arsye përkufizohen hapësirat e Banach-ut.

Përkufizim 1.1.2. Themimi se hapësira e normuar X , është hapësirë e Banach-ut, nëse secili varg i Koshit $(x_n) \in X$, konvergjon në atë hapësirë te një pikë $x \in X$.

Në vijim do të përmendim disa nga hapësirat e vargjeve të cilat do t'i shfrytëzojmë në punimin tonë. Fillojmë me hapësirën l_p e cila përkufizohet si në vijim:

$$(1.1.3) \quad l_p = \left\{ x = (x_n) \in \mathbb{R} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}, \quad \text{për } 1 \leq p < \infty.$$

e cila është hapësirë e Banach-ut në lidhje me normën e dhënë me relacionin

$$(1.1.4) \quad \|x\|_{l_p} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right]^{\frac{1}{p}} \quad \text{per } 1 \leq p < \infty.$$

Në rastin kur $p = \infty$, hapësira e mësipërme është hapësirë e Banach-ut në lidhje me normën e dhënë me relacionin

$$(1.1.5) \quad \|x\|_{l_{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n|.$$

Për vargun e dhënë (x_n) , themi se është nga hapësira e vargjeve c , nëse (x_n) , është varg konvergjent. Në rastin kur limiti i vargut është 0, atëherë atë hapësirë të vargjeve do ta shënojmë me c_0 .

Në vijim japim disa pohime të rëndësishme nga analiza funksionale. Për këtë le të konsiderojmë një operator A nga hapësira e Banach-ut X në X .

Themi se operatori i dhënë është linear nëse $\forall x, y \in X$ dhe $\alpha, \beta \in \Phi$, ku $\Phi = \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, plotësohet relacioni

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y).$$

1.1.1 Hapësirat duale

Le të shënojmë me X^* hapësirën e të gjithë funksionalëve linear të kufizuar nga hapësira e normuar X në Φ . Dimë se hapësira e funksionalëve të tillë është e paisur me normën,

$$\|f\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|},$$

për çdo $f \in X^*$.

Nga relacioni i mësipërm merret drejtpërdrejtë se vlen:

$$|f(x)| \leq \|f\| \cdot \|x\|.$$

Teoremë 1.1.1. *Për çdo hapësirë të normuar X , hapësira duale e saj X^* është hapësirë e Banach-ut në lidhje me normën e funksionalit të dhënë më lart.*

Vlen edhe kjo:

Teoremë 1.1.2. (Teorema e Hahn-Banach-ut) Le të jetë E një nënbashkësi e hapësirës X dhe le të jetë $f_0 \in E$. Atëherë, gjendet një zgjerim $f \in X^*$ me vetinë që $f|_E = f_0$, (që d.m.th. se për çdo $x \in E$ vlen $f(x) = f_0(x)$) dhe $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_E$. Kjo d.m.th. se

$$\sup_{x \neq 0, x \in X} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{|f_0(x)|}{\|x\|}.$$

1.1.2 Shembuj me rëndësi të hapësirave duale

Në këtë pjesë do të shohim disa shembuj me rëndësi nga hapësirat duale të vargjeve.

Shembull 1.1.3. Hapësira duale e të gjitha vargjeve konvergjente në zero c_0 , është hapësira l_1 .

Le të jetë $a = (a_n) \in c_0$. Përkufizojmë funksionalin f duke fiksuar vargun $(b_n) \in l_1$, që për çdo $x \in c_0$, përkufizojmë

$$f(x) = \sum_n a_n b_n.$$

Atëherë,

$$|f(x)| \leq \sum_n |a_n b_n| \leq \max_n |a_n| \sum_n |b_n| = \|x\|_{c_0} \cdot \|f\|_{l_1}.$$

Nga kjo merret

$$\|f\|_{c_0^*} \leq \|f\|_{l_1}.$$

Shohim tani të anasjelltën, le të jetë $f \in c_0^*$. Përkufizojmë $f(e_n) = b_n$, ku

$$e_n = (0, 0, \dots, \underbrace{1}_{\text{pozita e } n\text{-të}}, \dots) \in c_0.$$

Marrim $y_n = \sum_{k=1}^n e^{-i \cdot \arg b_k} e_k$. Atëherë, $\|y_n\|_{c_0} = 1$ dhe për çdo $n \in \mathbb{N}$ kemi

$$\|f\|_{c_0^*} \geq |f(y)| = \sum_{k=1}^n |b_k|,$$

prej nga merret se

$$\|f\|_{c_0^*} \geq \|(b_n)\|_{l_1}.$$

Tani duke identifikuar $f \in c_0^*$ me vargun $f = (b_n) \in l_1$, shohim se

$$\|f\|_{c_0^*} \geq \|f\|_{l_1}.$$

Nga ky relacion dhe relacioni më lart, merret pohimi i kërkuar.

Në mënyrë analoge sikurse më sipër tregohet se vlen relacioni:

$$l_1^* = l_\infty.$$

Shembull 1.1.4. Nëse $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dhe $1 < p < \infty$, atëherë vlen relacioni

$$l_p^* = l_q.$$

Le të shënojmë me $f = (b_i) \in l_q$, atëherë f përkufizon një funksional linear në l_p me shprehjen e mëposhtme,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i,$$

për $x = (a_i)$, dhe

$$|f(x)| \leq \left| \sum_i a_i b_i \right| \leq (|a_i|^p)^{\frac{1}{p}} \cdot (|b_i|^q)^{\frac{1}{q}}.$$

Pra

$$\|f\|_{l_p^*} \leq \|f\|_{l_q}.$$

Tani provojmë të anasjelltën. Le të konsiderojmë tani $f \in l_p^*$. Marrim $c_n = f(e_n)$, ku vektorët e_n janë definuar si më parë. Le të shënojmë me

$$y_n = \sum_{k=1}^n e^{-i \arg c_k} |c_k|^{q-1} e_k.$$

Duke ditur se $(q-1)p = q$, ne përfitojmë

$$\|y_n\|_{l_p} = \left(\sum_i^n |c_i|^{(q-1)p} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_i^n |c_i|^q \right)^{\frac{1}{p}}$$

dhe nga kjo

$$\begin{aligned} \|f\|_{l_p^*} \cdot \|y_n\|_{l_p} &\geq |f(y_n)| = \sum_1^n |c_i|^q = \\ &\left(\sum_i^n |c_i|^q \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_i^n |c_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|y_n\|_{l_p} \cdot \left(\sum_i^n |c_i|^q \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Duke vepruar me limit në relacionin e fundit sipas n -it do të marrim se

$$\|f\|_{l_p^*} \geq \|(c_i)\|_{l_q}.$$

Duke identifikuar $f \in l_p^*$ me vargun $f = (c_n) \in l_q$, merret se

$$\|f\|_{l_p^*} = \|f\|_{l_q}.$$

1.2 Pohime me rëndësi

Le të jetë dhënë hapësira e normuar X . Me $L(X)$, do të shënojmë hapësirën e të gjithë operatorëve të kufizuar nga X në X . Dimë se norma e operatorit A jepet me anë të relacionit:

$$\|A\|_X = \sup_{\|x\| \leq 1} \{\|Ax\|\}$$

Konvergjencia sipas normës e vargut të operatorëve A_n tek operatori A jepet me anë të relacionit:

$$\|A_n - A\| \rightarrow 0, \quad \text{kur } n \rightarrow \infty,$$

e cila konvergjencë njihet si konvergjencë uniforme.

Ndërsa themi se vargu i operatorëve A_n konvergjon te operatori A sipas konvergjencës së fortë nëse

$$\forall x \in X, A_n x \rightarrow A, \quad \text{kur } n \rightarrow \infty.$$

Tani e tutje, në këtë pjesë me X do të kuptojmë hapësirën e Banach-ut dhe me $K^0, \overline{K}$ dhe K^c , do t'i shënojmë përkatësisht bashkësinë e hapur, mbyllur dhe atë komplement, për bashkësinë e dhënë K .

Përkufizim 1.2.1. Bashkësia $K \subset X$ quhet bashkësi "perfekte konvekse", atëherë dhe vetëm atëherë, nëse për çdo varg të kufizuar $(x_i) \in K$ dhe për çdo varg numrash realë $(\alpha_i) \geq 0$ të tillë që $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = 1$, vlen

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i \in K.$$

Gjithashtu përkufizojmë bërthamën e bashkësisë K e cila jepet me ane të relacionit:

$$K^c = \{x \in K : \forall y \in X, \text{ ekziston } \alpha > 0, \text{ e tillë që } \lambda y + (1 - \lambda)x \in K, \forall 0 \leq \lambda \leq \alpha\}.$$

Për çdo $x \in X$ mund të vejmë $K_x = K - x$ dhe në atë rast fitojmë:

$$\overline{K_x} = \overline{K} - x, K_x^0 = K^0 - x, K_x^c = K^c - x.$$

Teoremë 1.2.1. ([27]) Nëse K është bashkësi perfekte konvekse në hapësirën e Banach-ut X , atëherë vlen relacioni

$$(1.2.1) \quad K^0 = K^c = \overline{K}^c = \overline{K}^0.$$

Një kuptim tjetër i cili na nevojitet për vërtetim të teoremës së Banach-Steinhaus-it është edhe ky:

Përkufizim 1.2.2. Le të jetë dhënë funksioni μ në hapësirën e Banach-ut X . Funksioni μ , quhet funksion perfekt konveks nëse plotësohet relacioni

$$(1.2.2) \quad \mu \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(x_n),$$

për çdo $a_n \geq 0$ të cilët plotësojnë kushtin $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ dhe për çdo varg të kufizuar $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X$.

Teoremë 1.2.2. ([27]) Le të jetë μ një funksion i përkufizuar në hapësirën e Banach-ut X , me vetin që $\mu(\lambda x) = \lambda \mu(x)$, për $\lambda \geq 0$ dhe supozojmë gjithashtu se μ është një funksion perfekt konveks. Atëherë, ekziston një konstante $C > 0$ me vetinë që $\mu(x) \leq C\|x\|$, për çdo $x \in X$.

Vërtetim. Le të konsiderojmë bashkësinë $M = \{x : \mu(x) \leq 1\}$. Atëherë, nga fakti se $\mu(\lambda x) = \lambda \mu(x)$ merret se $0 \in M^0$ dhe meqë μ është funksion perfekt konveks, atëherë

$$\mu\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu(x_n) \leq 1,$$

për çdo $a_n \geq 0$ me kushtin që $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$ dhe $x_n \in M_\epsilon$, ku M_ϵ është një rruzull i hapur me qendër në origjinë dhe rreze ϵ . Nga këto merret se M është bashkësi perfekte konvekse. Nga teorema e kaluar rrjedh se $0 \in M^0$ që d.m.th. se ekziston $\delta > 0$ e tillë që rruzulli me qendër në zero dhe rreze δ , D_δ , përmbahet në bashkësinë M . Kjo nënkupton se për çdo $\delta > 0$ të tillë që $\|x\| \leq \delta$ rrjedh $\mu(x) \leq 1$.

Duke shfrytëzuar homogjenitetin e funksionit μ , konkludojmë se

$$\mu(x) \leq \frac{1}{\delta} \|x\|,$$

për çdo $x \in X$. □

Tani marrim pohimin e njohur si Teorema e Banach-Steinhaus-it.

Teoremë 1.2.3. (*Pohimi i Banach-Steinhaus-it*) ([27]) *Le të jetë $\{A_\alpha : X \rightarrow Y\}_\alpha$ një familje e operatorëve të kufizuar nga hapësira e Banach-ut X në atë të Banach-ut Y . Supozojmë se për çdo $x \in X$ ekziston një konstante $C_x > 0$ e tillë që*

$$\sup_{\alpha} \|A_\alpha x\| \leq C_x.$$

Atëherë, ekziston konstanta $C > 0$ me vetin që $\|A_\alpha x\| \leq C \|x\|$ për çdo x dhe për çdo A_α nga familja e dhënë më lart. Kjo d.m.th. se bashkësia e operatorëve A_α është e kufizuar në bashkësinë $L(X \rightarrow Y)$.

Vërtetim. Le të shënojmë me

$$\mu(x) = \sup_{\alpha} \|A_\alpha x\|.$$

Atëherë, për funksionin e përkufizuar në këtë mënyrë plotësohen kushtet e dhëna në pohimin e kaluar, që d.m.th. se ekziston një konstante C ashtu që $\mu(x) \leq C \|x\|$. Me çka u vërtetua teorema. □

Një rrjedhim i drejtpërdrejtë i pohimit të Banach-Steinhaus-it është kjo teoremë:

Teoremë 1.2.4. ([27]) *Vargu i operatorëve $T_n \in L(X, Y)$ konvergjon fortë te operatori $T \in L(X, Y)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur plotësohen kushtet:*

1. *Vargu $(T_n x)$ konvergjon për çdo $x \in M$, ku M është nënbashkësi e dendur në X .*
2. *Ekziston konstanta $C > 0$ ashtu që plotëson relacionin $\|T_n\| \leq C$.*

Vërtetim. Supozojmë se vargu i operatorëve (T_n) konvergjon fortë te operatori T , atëherë kushti i parë merret drejtpërdrejtë, ndërsa kushti i dytë rrjedh nga Pohimi i Banach-Steinhaus-it.

Shohim tani të anasjelltën. Supozojmë se plotësohen kushtet e dhëna me relacionet 1. dhe 2. dhe tregojmë se vargu i operatorëve T_n konvergjon fortë te operatori T . Supozojmë se vargu $(T_n x)$ konvergjon për çdo $x \in M$, ku M është bashkësi e dendur në X dhe se $\|T_n\| \leq C$, për ndonjë konstantë C . Për çdo $x \in M$ përkufizojmë operatorin T_0 të tillë që $T_0 x = \lim_n T_n x$. Është e qartë se operatori T_0 është linear e aq më tepër vlen vlerësimi: $\|T_0\| \leq C$, sepse $\|T_n x\| \leq C\|x\|$. Tani zgjerojmë operatorin T_0 në tërë hapësirën X si në vijim: për çdo $x \in X$ marrim $x_m \in M$ të tillë që $x_m \rightarrow x$ kur $m \rightarrow \infty$ dhe marrim $Tx = \lim_m T_0 x_m$. Shihet lehtë se ky limit ekziston dhe nuk varet nga zgjedhja e vargut x_m si dhe vlen vlerësimi $\|T\| \leq C$. Le të shohim më tej se për çdo $x \in X$, $T_n x \rightarrow Tx$. Le të jetë dhënë $\epsilon > 0$ i çfarëdoshëm dhe marrim $x_0 \in M$ të tillë që

$$\|x - x_0\| < \frac{\epsilon}{4(C+1)},$$

dhe marrim $N_0 > 0$ ashtu që për çdo $n > N_0$ të vlen relacioni

$$\|T_n x_0 - T x_0\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Atëherë, për çdo $n > N_0$ do të kemi

$$\begin{aligned} \|T_n x - T x\| &\leq \|T_n x - T_n x_0\| + \|T_n x_0 - T x_0\| + \|T x_0 - T x\| \\ &\leq (\|T_n\| + \|T\|)\|x - x_0\| + \|T_n x - T x_0\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

Me çka është vërtetuar teorema. □

1.3 Konvergjencia statistikore

Le të shënojmë me w hapësirën e të gjitha vargjeve me terma realë ose kompleksë. Nëse $x \in w$, do të shënojmë shkurt $x = (x_k)$ në vend të $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Këtu do të paraqesim përkufizimin e konvergjencës statistikore për vargun e çfarëdoshëm numerik. Paraprakisht e marrim konceptin e densitetit asimptotik të bashkësisë së çfarëdoshme $K \subset \mathbb{N}$.

Densiteti asimptotik i bashkësisë së dhënë K , përkufizohet me anë të relacionit:

$$(1.3.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|k \leq n : k \in K|}{n}.$$

Tani duke u mbështetur në përkufizimin e mësipërm mund të marrim edhe konvergjencën statistikore të një vargu të dhënë numerik:

Përkufizim 1.3.1. ([29],[31]) Vargu $x = (x_k)$ themi se konvergjon statistikisht te numri L nëse për çdo $\epsilon > 0$

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0,$$

Vlen të ceket se kuptimi i konvegjencës statistikore është kuptim më i përgjithësuar se sa kuptimi i konvergjencës së zakonshme. Për të treguar këtë marrim shembullin në vijim:

Shembull 1.3.1. *Le të konsiderojmë vargun e dhënë me anë të relacionit:*

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{k}, & k = n^2 \\ 0, & \text{në të kundërtën} \end{cases}$$

Atëherë, shihet se vlen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}|}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n} = 0,$$

për ndonjë numër të fundmë L . Mirëpo siç shihet vargu i mësipërm nuk konvergjon në kuptimin e zakonshëm.

Teoria e konvergjencave statistikore ka zbatime të mëdha dhe përdoret në metodat e shumueshmërisë, në teorinë e integraleve (shihe [17, 18]), në teorinë e martingaleve (shihe [14, 15]) e në shumë lëmi tjera.

1.4 Metodatat e shumueshmërisë

Në këtë pjesë do të japim kuptimin themelore të shumueshmërisë dhe vetitë e tyre. Gjithashtu do të shfrytëzojmë edhe disa metoda të reja të shumueshmërisë dhe përmes tyre do të bëhet ndërtimi i teoremave bazike të Korovkin-it, shqyrtohet shkalla e konvegjencës së tyre dhe teoremat e Voronoj-it.

Në fillim marrim disa koncepte themelore mbi seritë e pafundme. Le të jetë dhënë vargu (x_n) me vlera reale apo komplekse. Atëherë, shprehja e formës:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$$

quhet seri e pafundme. Në përgjithësi seria shënohet në trajtën

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ ose } \sum_n x_n,$$

ndërsa shuma e n -të pjesshme e saj me shprehjen:

$$s_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n.$$

Duke u bazuarë në përkufizimin e Koshit, themi se seria e mësipërme është një seri konvergjente apo divergjente, nëse vargu i shumave të pjesshme të saj është varg konvergjent apo divergjent.

Përkufizim 1.4.1. (Përkufizimi sipas Koshit) Themi se seria e dhënë më sipër është seri konvergjente te numri s , nëse

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > n_0 \implies |s_n - s| < \epsilon).$$

Simbolikisht shënojmë

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = s.$$

Parashtohet pyetja se cka është një metodë e shumueshmërisë? Për këtë fillimisht marrim një shembull. Hardy në [33] ka treguar se seria divergjente

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 \cdots,$$

mund të riradhitet në disa forma si

$$s = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \cdots) = 1 - s,$$

prej nga ka marrë se $s = \frac{1}{2}$.

Dhe duke marrë forma të tilla të riradhitjes ai ka ardhë në përfundim se duhet të ekzistojë një përkufizim ndryshe për përshkrimin e këtyre shumave që po paraqiten, se sa përkufizimi i Koshit. Në vitin 1890 Cesáro ka publikuar punimin e parë në të cilin jepen mënyrat se si një seri divergjent mund të bëhet konvergjente.

1.4.1 Metoda e shumueshmërisë matricore

Në vijim do të shohim se si bëhet përkufizimi i metodave të shumueshmërisë sipas matricave. Le të jetë dhënë shuma e pafundme $\sum_n u_n$ dhe vargu i shumave të pjesshme të saj (s_n) . Gjithashtu marrim se është dhënë matrica e çfarëdoshme $T = (a_{nk})$ me elemente numra realë apo kompleksë. Atëherë, shumueshmëria matricore të cilën si transformim do ta shënojmë me t_n , e shumës së pjesshme s_n , jepet me anë të relacionit:

$$t_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} s_k, \quad \text{për } n \in \{0, 1, 2, 3 \cdots\}.$$

Nëse me λ dhe μ shënojmë dy hapësira të vargjeve të çfardoshëm, atëherë me $A \in (\lambda; \mu)$, do të shënojmë faktin se matrica A si bashkësi nisjeje ka hapësirën e vargjeve λ dhe përfundon në hapësirën e vargjeve μ . Vlen pohimi:

Teoremë 1.4.1. ([3]) Matrica $T = (a_{nk})$ është nga hapësira $(l_\infty; l_\infty)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur vlen relacioni:

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty.$$

Vërtetim. Le të jetë dhënë vargu $(x_n) \in l_\infty$ dhe supozojmë se plotësohen kushtet e mësipërme. Duhet treguar se $(Ax) \in l_\infty$, ku $A = \sum_k a_{nk}$. Meqë vlen kushti i dhënë

kjo d.m.th. se $(a_{nk}) \in l_\infty^*$ për çdo numër të fiksuar n , e që kjo e fundit është l_1 . D.m.th. se transformimi i dhënë përmes matricës A ekziston. Më tej

$$\sup_n |(Ax)_n| = \sup_n \left| \sum_k a_{nk} x_k \right| \leq \|x\|_{l_\infty} \cdot \left(\sum_k |a_{nk}| \right) < \infty,$$

që tregon se $Ax \in l_\infty$.

Shohim tani të anasjelltën. Le të jetë $A \in (l_\infty; l_\infty)$, dhe marrim $Ax = (Ax)_n$. Atëherë, duke ditur se vargu i operatorëve është i kufizuar në l_∞ , sepse $\sup_n |(Ax)_n| < \infty$, duke zbatuar teoremën e Banach-Steinhaus-it, merret rezultati i dëshiruar. $\square$

Në vijim shohim pohimin i cili jep kushtet nën të cilat metoda matricore e ruan hapësirën konvergjente, kjo jepet me anë të kësaj teoreme:

Teoremë 1.4.2. (Kojima-Schur) ([3]) Le të jetë $A = (a_{nk})$ një matricë e çfarëdoshme. Matrica $A = (a_{nk})$ është nga $(c; c)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur të vlejnjë kushtet:

$$\begin{aligned} \sup_n \sum_k |a_{nk}| &< \infty, \\ \lim_n a_{nk} &= \alpha_k, \quad \text{për çdo } k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

dhe

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = \alpha.$$

Vërtetim. Le të supozojmë se janë plotësuar kushtet e dhëna dhe tregojmë se $A \in (c; c)$. Le të jetë $x = (x_k) \in c$, ashtu që $x_k \rightarrow l$, kur $k \rightarrow \infty$. Meqë $(a_{nk}) \in l_1$, për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë transformimi matricor ekziston dhe vlen:

$$\sum_k a_{nk} x_k = \sum_k a_{nk} (x_k - l) + l \sum_k a_{nk},$$

për çdo $n \in \mathbb{N}$. Tani duke u bazuar në kushtet e dhëna dhe duke vepruar me limit në shprehjen e fundit kur $n \rightarrow \infty$, marrim

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_k = \sum_k \alpha_k (x_k - l) + l\alpha.$$

Në anën tjetër duke ditur se $\sum_k \alpha_k < \infty$ dhe $\lim_k x_k = l$, merret se ana e djathtë e relacionit të mësipërm është e fundme, rrjedhimisht $Ax \in c$.

Tani shohim kahjen e anasjelltë. Le të supozojmë se $A \in (c; c)$, d.m.th. se Ax ekziston për çdo $x \in c$. Kushti i dytë dhe i tretë i dhënë në pohim, merren nëse në vend të x do të vëmë $x = e^{(k)}$, përkatësisht $x = e$, ku $e^{(k)}$ është baza e Schauder-it për hapësirën c . Meqë $c \subset l_\infty$, atëherë kushti i parë i pohimit merret nga Teorema 1.4.1. $\square$

Tani jemi në gjendje të marrim pohimin e Silvermann-Toeplitz, me anë të cilit tregohet se kur një matricë është e rregullt (regulare), d.m.th. nëse për vargun e dhënë numerik u_n , vlen relacioni $\lim_n u_n = u$, atëherë vlen relacioni

$$\lim_n \sum_k a_{nk} x_k = u.$$

Bashkësinë e të gjitha matricave regulare të cilat plotësojnë kushtin e Silvermann-Toeplitz do ta shënojmë me $(c; c; p)$. Vlen kjo teoremë:

Teoremë 1.4.3. (Silvermann-Toeplitz) ([3]) Matrica $A = (a_{nk})$ i takon $(c; c; p)$, atëherë dhe vetëm atëherë, nëse plotësohen kushtet e mëposhtme:

$$\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty,$$

$$\lim_n a_{nk} = \alpha_k, \quad \text{për çdo } k \in \mathbb{N}, \quad \text{për } \alpha_k = 0, \forall k \in \mathbb{N},$$

dhe

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = \alpha, \quad \text{për } \alpha = 0.$$

1.4.2 Metoda e Cesáros e rendit të parë

Le të jetë dhënë seria e pafundme $\sum_n x_n$, me terma numra realë apo kompleksë dhe

$$s_n = \sum_{k=0}^n x_k, \quad \text{për } n = 0, 1, 2, \dots$$

Shënojmë me

$$t_n = \frac{s_0 + s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n+1}, \quad n \geq 0.$$

Atëherë, t_n quhet metoda e shumueshmërisë sipas Cesáros e rendit të parë, për vargun (s_n) . Nëse $\lim_n t_n = s$, atëherë themi se seria (s_n) është e shumueshme sipas metodës Cesáro të rendit të parë apo shkurt $(C, 1)$.

Më vonë Cesáro e ka përkufizuar metodën e shumueshmërisë të shkallës α , ku α është një numër pozitiv i plotë (shihe [19]) dhe më pas Knopp (shihe [35]), këtë metodë të shumueshmërisë sipas Cesáros të rendit α e ka përgjithësuar për thyesa pozitive. Ndërsa, Chapman ([20]) dhe Chapman-Hardy ([21]) këtë e kanë përgjithësuar për çfarëdo $\alpha > -1$. Nëse në shumueshmërinë matricore merret

$$a_{nk} = \begin{cases} A_{n-k}^{\alpha-1} & ; \text{për } k \leq n \\ 0 & ; \text{për } k > n \end{cases},$$

ku

$$A_{n-k}^{\alpha-1} = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha+1)},$$

atëherë si rast i veçantë i saj merret metoda e shumueshmërisë sipas Cesáros.

Në vijim japim metodën e shumueshmërisë sipas Cesáros të rendit α . Kjo definohet si më poshtë:

$$t_n = \frac{1}{A_n^\alpha} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1} s_k,$$

dhe simbolikisht shënohet me (C, α) .

Nëse t_n është me variacion të kufizuar, d.m.th

$$\sum_n |t_n - t_{n-1}| < \infty,$$

atëherë, themi se seria $\sum_n x_n$ është absolutisht e shumueshme (C, α) .

Vlen të theksohet se shumueshmëria e Cesáros për indeksa pozitivë është metodë regulare. Kjo jepet me anë të këtij pohimi:

Teoremë 1.4.4. [16, 44] (*Cauchy's limit Theorem*) Nëse (x_n) është varg i tillë që $\lim_n x_n = x$, atëherë

$$\lim_n \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1} = x.$$

Vërtetim. Pa prishur përgjithësimin mund të marrim se $\lim_n x_n = 0$. Tregojmë se edhe

$$\lim_n \frac{x_0 + x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n+1} = 0.$$

Nga fakti i parë merret se

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n > n_0 \implies |x_n| < \frac{\epsilon}{2}).$$

Në anën tjetër për $k_0 < n_0$, kemi

$$\frac{1}{n_0 + 1} \sum_{k=0}^{k_0} |x_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tani për çdo $n > n_0$, do të fitojmë:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n x_k \right| &\leq \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k_0} x_k \right| + \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=k_0+1}^n x_k \right| \\ &\leq \frac{1}{n_0+1} \sum_{k=0}^{k_0} |x_k| + \frac{n-k_0}{n} \frac{\epsilon}{2} = \epsilon. \end{aligned}$$

□

Vlejnë edhe këto veti të shumueshmërisë sipas Cesáros:

1. Metoda $(C, 0)$ është ekuivalente me konvegjencën e zakonshme
2. Metoda $(C, 1)$ është e njëjtë me mesin aritmetikë të anëtarëve të serisë
3. Seria $1 + 0 - 1 + 1 + 0 - 1 + \dots$, është e shumueshme sipas $(C, 1)$, te numri $\frac{2}{3}$

4. Seria

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots$$

është e shumueshme $(C, 1)$ te shuma $\frac{\cot \frac{x}{2}}{2}$, nëse $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

5. Seria

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots$$

është e shumueshme $(C, 1)$ te 0, për $x \neq 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

6. Nëse seria e dhënë $\sum_n x_n$, është $(C, 1)$ e shumueshme, atëherë $s_n = 0(n)$
7. Le të jetë $t_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$. Nëse seria $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas $(C, 1)$, atëherë kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që ajo të jetë konvergjente, është që të plotësohet relacioni $t_n = 0(n)$.
8. Nëse seria $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas $(C, 1)$ dhe $u_n = o(\frac{1}{n})$, atëherë $\sum_n u_n$ është konvergjente.
9. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që $\sum_n u_n$ të jetë e shumueshme sipas $(C, 1)$, është që seria $\sum_n \frac{t_n}{n(n+1)}$, të konvergjojë.
10. Nëse seria $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas $(C, 1)$ dhe $u_n = 0(\frac{1}{n})$, atëherë $\sum_n u_n$ është konvergjente.
11. Seria me terma pozitivë është e shumueshme sipas $(C, 1)$, vetëm nëse ajo është konvergjente.
12. Nëse seria $\sum_n u_n$ konvergjon te s dhe $u_n = 0(\frac{1}{n})$, atëherë $\sum_n u_n = s(C, -1 + \delta)$, për çdo δ të dhënë pozitiv.

13. Nëse $k > -1$ dhe $\sum_n u_n = s(C, k)$, atëherë $A_n^{k_1} = o(n^k)$, për $k_1 < k$, ku

$$A_n^{k_1} = \sum_v \binom{\nu + \delta - 1}{\delta - 1} A_{n-\nu}^k.$$

14. Nëse

$$m_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_n}{n + 1},$$

atëherë

$$s_n \rightarrow s(C, k), m_n \rightarrow s(C, k + 1)$$

janë konvergjencat ekuivalente.

15. Nëse seria $\sum_n u_n$ është e shumueshme (C, k) , për $k > -1$, atëherë

$$u_n = ((u_m - u_{m-1}) + (u_{m-1} - u_{m-2} + \cdots))(C, k).$$

1.4.3 Metoda e përgjithësuar e Cesáros

Përveçë metodës së dhënë më lart të Cesáros jepet edhe metoda e përgjithësuar e tij. Këtë metodë e ka dhënë Zygmund ([57]) dhe ajo merret si kombinim në mes të metodës bazike të Cesáros dhe metodës së shumueshmërisë harmonike. Le të shohim se si merret kjo metodë në vijim.

Le të jenë dhënë dy numra realë α dhe δ , të tillë që $\alpha > -1$, dhe $(A_n^{\alpha, \delta})$ varg i numrave të zbërthimit të serisë polinomiale

$$\frac{1}{(1+z)^{\alpha+1}} \left(\frac{\log \alpha}{1-z} \right)^\delta = \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{\alpha, \delta} z^n,$$

ku $\alpha \geq 2$ dhe $0 < z < 1$.

Dihet se për n mjaftë të mëdhenjë (shihe [34]), vlen relacioni:

$$A_n^{\alpha, \delta} = \begin{cases} \frac{n^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)} (\log n)^\delta & , \alpha \neq -1, -2, \dots \\ (-1)^\alpha (|\alpha| - 1)! n^\alpha \delta (\log n)^{\delta-1} & , \alpha = -1, -2, \dots \end{cases}$$

Nëse kemi serinë e pafundme $\sum_n x_n$ dhe s_n vargun e shumave të pjesshme të tij, atëherë transformimi:

$$T_n^{\alpha, \delta} = \frac{1}{A_n^{\alpha, \delta}} \sum_{k=0}^n A_{n-k}^{\alpha-1, \delta} s_k,$$

përkufizon metodën e përgjithësuar të shumueshmërisë sipas Cesáros dhe shënohet me anë të simbolit (C, α, δ) .

Themi se seria e dhënë më lart është e shumueshme sipas kësaj metode të numri s , nëse vlen relacioni $\lim_n T_n^{\alpha, \delta} = s$. Seria themi se është absolutisht e shumueshme sipas (C, α, δ) , ose e shumueshme $|C, \alpha, \delta|$, nëse vlen relacioni:

$$\sum_n |T_n^{\alpha, \delta} - T_{n-1}^{\alpha, \delta}| < \infty.$$

Vlen të ceket se metoda e shumueshmërisë $|C, \alpha, \delta|$, është regulare për çdo α të fundme dhe $\delta > 0$. Gjithashtu, dihet se për $\alpha = 0$, metoda e mësipërme kthehet në metodën e fillimit të Cesáros, d.m.th. $|C, \alpha, \delta|$, kthehet në $|C, \alpha|$ dhe për $\delta > 0$, e implikon $|C, \alpha, \delta|$. Nga këto të dhëna thuhet se kjo metodë e shumueshmërisë është e përgjithësuar e Cesáros. Ndërsa për $\alpha = 0$, metoda $|C, \alpha, \delta|$, është ekuivalente me metodën e shumueshmërisë harmonike.

1.4.4 Metoda e shumueshmërisë sipas Nörlund-it

Në punimin [58], Voronoji ka përkufizuar një metodë të shumueshmërisë, e cila më vonë quhet metoda e Nörlund-it, dhe për këtë asrye nga njëherë kjo metodë quhet edhe metoda e Voronoji-Nörlund-it.

Le të jetë dhënë një varg i çfarëdoshëm i numrave (p_k) . Me P_n do të shënojmë shumën e pjesshme të tij, d.m.th.

$$P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n \neq 0.$$

Marrim vargun e koeficientëve (a_{nk}) , në kuadër të shumueshmërisë matricore si më poshtë:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k}}{P_n} & ; \text{ për } k \leq n \\ 0; & \text{ për } k > n \end{cases},$$

Atëherë, metoda matricore e dhënë me vargun e mësipërm njihet si metoda e shumueshmërisë sipas Nörlund-it.

Për serinë e pafundme $\sum_n x_n$, me vargun e shumave të pjesshme të saj s_n , transformimi sipas vargjeve jepet me anë të shprehjes:

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k} S_k, P_n \neq 0, n \in \mathbb{N},$$

dhe përkufizon metodën e shumueshmërisë sipas Nörlund-it. Këtë do ta shënojmë simbolikisht me anë të shprehjes (N, p_n) .

Themi se seria e pafundme e dhënë më lart është e shumueshme sipas metodës së Nörlund-it te numri s , nëse vlen $\lim_n t_n = s$. Ndërsa themi se seria e dhënë më lart është absolutisht e shumueshme sipas Nörlund-it, nëse vlen relacioni

$$\sum_n |t_n - t_{n-1}| < \infty,$$

dhe simbolikisht e shënojmë me $|N, p_n|$.

Kushtet nënë të cilat kjo metodë e shumueshmërisë është regulare, paraqiten me anë të relacioneve të mëposhtme:

1. $\lim_n \frac{p_n}{P_n} = 0$,
2. $\sum_{i=1}^n p_i \leq C \cdot P_n$,

ku C është një konstante. Vlen të theksohet se kushtet e dhëna më sipër janë ekuivalente me kushtin

$$\lim_n \frac{P_{n-1}}{P_n} = 1.$$

Metoda e shumueshmërisë sipas Nörlund-it është zhvilluar nga Mears (shihe [43]) i cili kushtin e nevojshëm dhe të mjaftueshëm për regularitetin e metodës së Nörlund-it e jep si në vijim:

1. $\lim_n \frac{p_n}{P_n} = 0$,
2. $\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{p_{n-k}}{P_n} - \frac{p_{n-k-1}}{P_{n-1}} \right|$, për çdo $k \geq 1$.

Në rastin e veçantë kur $p_n = \frac{1}{n+1}$, atëherë nga metoda e Nörlund-it marrim metodën e shumueshmërisë harmonike.

Nëse

$$p_n = \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n + 1)\Gamma(\alpha)},$$

atëherë metoda e Nörlund-it kalon në metodën e Cesáros (C, α) dhe shumueshmëria $|N, p_n|$ është e njëjtë me shumueshmërinë $|C, \alpha|$.

Në vijim përmendim disa veti të metodës së Nörlund-it.

1. Çdo dy metoda të dhëna të shumueshmërisë së Nörlund-it, janë konsistente në mes veti
2. Nëse (N, p_n) është metodë regulare dhe seria $\sum_n u_n = s$, konvergjon sipas metodës së dhënë, atëherë seria $\sum_n u_n x^n$ ka rreze pozitive të konvergjencës dhe përkufizon një funksion analitik $u(x)$ i cili është regular për $0 \leq x < 1$ dhe ka limit numrin s kur $x \rightarrow 1$ sipas vlerave reale më të vogla se 1.
3. Le të jenë (p_n) dhe (q_n) dy vargje të numrave jo negativë. Shënojmë me

$$p(x) = \sum_n p_n x_n, q(x) = \sum_n q_n x_n, k(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Atëherë, kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që metoda regulare (N, p_n) të përfshihet në metodën (N, q_n) është

$$|k_0|P_n + |k_1|P_{n-1} + \cdots + |k_n|P_0 \leq H Q_n,$$

ku H është e pavarur nga n dhe $\frac{k_n}{Q_n} \rightarrow 0$, kur $n \rightarrow \infty$.

4. Nëse (N, p_n) është metodë regulare me varg rritës (p_n) , atëherë nga $s_n \rightarrow s$, sipas metodës $(C, 1)$ rrjedh se edhe $s_n \rightarrow s$, sipas metodës (N, p_n) .
5. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që dy metoda të shumueshmërisë sipas Nörlund-it (N, p_n) dhe (N, q_n) , të jenë ekuivalente në mes veti, është që të plotësohen kushtet:

$$\sum_n |k_n| < \infty, \quad \sum_n |l_n| < \infty,$$

ku

$$k_n = \sum_n k_n x^n = \frac{q(x)}{p(x)} \text{ dhe } l(x) = \sum_n l_n x^n = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

6. (Kaluza's theorem) Nëse $p(x) = \sum_n p_n x^n$ është konvergjente për $|x| < 1$ dhe

$$p_0 = 1, p_n > 0, \frac{p_{n+1}}{p_n} \geq \frac{p_n}{p_{n_1}}, n > 0,$$

atëherë

$$[p(x)]^{-1} = 1 - c_1 x - c_2 x^2 - \dots,$$

ku $c_n \geq 0$, $\sum_n c_n \leq 1$. Nëse $\sum_n p_n = \infty$, atëherë $\sum_n c_n = 1$.

7. Nëse (N, p_n) dhe (N, q_n) janë dy metoda regulare të Nörlund-it, ndërsa p_n është i definuar si në Teoremën e Kaluza's, $q_n > 0$, $\frac{p_n}{p_{n-1}} \leq \frac{q_n}{q_{n-1}}$, $n > 0$, atëherë metoda e shumueshmërisë (N, q_n) përmbahet në (N, p_n) .
8. Për çdo dy metoda regulare të shumueshmërisë (N, p_n) dhe (N, q_n) , gjithmonë gjendet një metodë e tretë regulare e Nörlundit (N, r_n) me vetinë që $(N, r_n) \supseteq (N, p_n)$ dhe $(N, r_n) \supseteq (N, q_n)$.

9. Çdo dy metoda të Nörlund-it janë a -konsistente.

1.4.5 Metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it

Le të jetë dhënë një varg i çfarëdoshëm numrashë (p_k) . Me P_n shënojmë shumën e pjesshme të tij, d.m.th.

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n \neq 0.$$

Metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it, merret në formën matricore, nëse

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_k}{P_k}, & P_k \neq 0, \text{ për } k \leq n \\ 0, & \text{për } k > n. \end{cases}$$

Simbolikisht do ta shënojmë me (R, p_n) .

Nëse $\sum_n u_n$ është një seri numerike e çfarëdoshme, me shuma të pjesshme s_n , atëherë përkufizimi i shumueshmërisë së Riesz-it, sipas transformimit të vargjeve jepet me anë të relacionit:

$$t_n = \frac{1}{P_n} \sum_{k=0}^n p_k s_k, P_n \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Nëse $\lim_n t_n = s$, atëherë themi se seria $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas metodës së Riesz-it, simbolikisht themi se është $(R, p_n)-$ e shumueshme. Më tej nëse (t_n) është me variacion të kufizuar, atëherë themi se seria $\sum_n u_n$ është absolutisht e shumueshme (R, p_n) ose shkurt $|(R, p_n)|-$ e shumueshme.

Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që metoda e Riesz-it të jetë regulare është që të plotësohen relacionet:

1. $\lim_n P_n = \infty$,
2. $\sum_{i=1}^n p_i \leq C \cdot |P_n|$,

ku C është një konstante e çfarëdoshme reale. Në rastin kur vargu (p_n) është varg i numrave pozitivë, atëherë kushtet e regularitetit të metodës së shumueshmërisë sipas Riesz-it, e që janë

1. $\lim_n \frac{p_n}{P_n} = 0$,
2. $\sum_{i=1}^n p_i \leq C \cdot P_n$,

kthehen në një kusht, dhe atë kushti i parë, sepse kushti i dytë plotësohet nga pozitiviteti i vargut (p_n) . Disa raste të veçanta të kësaj metode janë:

1. Nëse $p_n = 1$, atëherë metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it, (R, p_n) përputhet me atë të Cesáros $(C, 1)$.
2. Nëse $p_n = e^n$, atëherë metoda e Riesz-it (R, p_n) përputhet me atë të Cesáros $(C, 0)$.

Veti të metodës së Riesz-it.

1. Transformimi $t_1 = s_1, t_n = \frac{s_{n-1} + s_n}{2}, n \geq 2$, nuk mund të shprehet përmes të metodës së shumueshmërisë së Riesz-it.
2. Nëse $p_n > 0$ dhe $s_n \rightarrow s(R, p_n)$, atëherë

$$s_n - s = o\left(\frac{P_n}{p_n}\right).$$

3. Nëse $p_n > 0, q_n > 0, \sum_n p_n = \infty, \sum_n q_n = \infty$, dhe vlen njëri nga relacionet

$$\frac{q_{n+1}}{q_n} \leq \frac{p_{n+1}}{p_n}$$

ose

$$\frac{p_{n+1}}{p_n} \leq \frac{q_{n+1}}{q_n},$$

apo relacioni

$$\frac{P_n}{p_n} \leq \frac{HQ_n}{q_n},$$

atëherë nga $\sum_n u_n = s(R, p_n)$ rrjedh $\sum_n u_n = s(R, q_n)$.

4. Nëse $\frac{Q_{n+1}}{Q_n} \geq 1 + \delta > 1$, atëherë seria $\sum_n u_n$ nuk mund të shumëhet me metodën e Riesz-it, përveç rastit kur është konvergjente.
5. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që matrica regulare $A = (a_{nk})$ të jetë më e fortë se sa metoda e shumueshmërisë sipas Riesz-it, (R, p_n) , ku $p_n > 0$, është që të plotësohen kushtet e mëposhtme:

$$\lim_k \frac{n_{nk}}{p_k} = 0, \quad \text{për të gjithë } n$$

dhe ekziston konstanta K e tillë që

$$\sum_k \left| \frac{a_{nk}}{p_k} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{k+1}} \right| < K$$

për të gjithë n .

6. Supozojmë se shumueshmëria matricore $A = (a_{nk})$ dhe metoda e Riesz-it (R, p_n) janë që të dy metoda regulare. Më tej marrim se $p_n > 0$ për çdo n dhe $\frac{P_n}{p_n} - \frac{P_{n+1}}{p_{n+1}}$ është e kufizuar. Atëherë, kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që metoda e shumueshmërisë matricore të jetë më e fortë se ajo e Riesz-it (R, p_n) , është që të ekzistoj një konstant K ashtu që të plotësohet relacioni:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{n,k+1}| \frac{P_k}{p_k} < K, \quad \text{për çdo } n.$$

1.4.6 Metoda e përgjithësuar e shumueshmërisë sipas Nörlund-it

Në këtë pjesë do të japim metodën e përgjithësuar të shumueshmërisë sipas Nörlund-it. Le të jenë dhënë vargjet e numrave realë apo kompleksë (p_n) dhe (q_n) . Atëherë, trajta matricore e shumueshmërisë së përgjithësuar të Nörlund-it jepet me anë të relacionit:

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{p_{n-k}q_k}{r_n} & ; r_n \neq 0, \quad \text{për } k \leq n \\ 0 & ; \quad \text{për } k > n \end{cases},$$

ku

$$r_n = \sum_{k=0}^n p_{n-k}q_k.$$

Metoda e marrë në këtë formë quhet metodë e përgjithësuar e Nörlund-it. Simbolikisht do ta shënojmë me (N, p, q) . Nëse $\sum_n u_n$ është një seri e pafundme dhe (s_n) , vargu i shumave të pjesshme të saj, atëherë transformimi i mësipërm sipas vargjeve jepet me anë të relacionit:

$$t_n = \frac{1}{r_n} \sum_{k=0}^n p_{n-k}q_k s_k, r_n \neq 0, n \in \mathbb{N}.$$

Nëse $\lim_n t_n = s$, dhe s është i fundmë, atëherë themi se seria është e shumueshme sipas metodës së përgjithësuar të Nörlund-it. Nëse merret $p_n = 1$, për të gjitha vlerat e n -së, atëherë fitohet metoda e Riesz-it (R, p_n) . Nëse merret $q_n = 1$, për të gjitha vlerat e n -së, atëherë fitohet metoda e Nörlund-it e trajtës (N, p_n) .

Nëse t_n është me variacion të kufizuar, atëherë themi se seria $\sum_n u_n$ është absolutisht e shumueshme (N, p, q) ose $|(N, p, q)|$ e shumueshme te numri s . Kushtet e nevojshme dhe të mjaftueshme që metoda e përgjithësuar e shumueshmërisë sipas Nörlund-it të jetë e regulare janë dhënë në pohimin në vijim.

Teoremë 1.4.5. *Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që metoda e përgjithësuar e shumueshmërisë sipas Nörlund-it, (N, p, q) të jetë regulare është që të plotësohen kushtet:*

1. $\lim_n \frac{p_{n-k}q_k}{r_n} = 0$, për të gjithë numrat e plotë $k \geq 0$.
2. $\sum_{k=1}^n |p_{n-k}q_k| \leq C \cdot |r_n|$, ku C është një konstante.

1.4.7 Metoda e shumueshmërisë sipas Euler-it

Le të supozojmë se kemi këtë seri polinomiale: $\sum_n u_n x^n$ e cila konvergjon te funksioni $f(x)$ për x -a mjaft të vegjël. Për $q > 0$, le të përkufizojmë shprehjet:

$$x = \frac{y}{1 - qy}, y = \frac{x}{1 + qx}.$$

Atëherë, shihet qartë se kur $x = 1$ merret se $y = (1 + q)^{-1}$, për x dhe y mjaft të

vegjël, vlejné relacionet:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\frac{y}{1-xy} \right)^{n+1} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n \sum_{m=n}^{\infty} \binom{m}{n} q^{m-n} y^{m+1} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} y^{m+1} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n} u_n \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} u_m^{(q)} ((q+1)y)^{m+1},
 \end{aligned}$$

ku

$$u_m^{(q)} = \frac{1}{(q+1)^{m+1}} \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} q^{m-n} u_n.$$

Nëse merret se

$$\lim_m u_m^{(q)} = s,$$

atëherë themi se seria e pafundme $\sum_m u_m$, është e shumueshme me metodën e Euler-it. Këtë shkurtimisht do ta shënojmë me (E, q) . Nëse si rast të veçantë marrim $q = 0$, atëherë metoda e shumueshmërisë sipas Euler-it kthehet në metodën e zakonshme të shumueshmërisë. Vlejné këto veti të metodës së shumueshmërisë sipas Euler-it.

1. Metoda (E, q) , është metodë regulare.
2. Nëse seria e dhënë e pafundme $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas (E, q_1) dhe $q > q_1$, atëherë seria e fillimit do të jetë e shumueshme edhe sipas metodës (E, q) .
3. Secili r transformim i Euler-it për një q transformim të Euler-it, është një $(q + r + qr)$ transformim i Euler-it për serinë e dhënë.
4. Nëse $\sum_n u_n$ është e shumueshme sipas Euler-it (E, q) , atëherë vlen vlerësimi: $u_n = o((2q+1)^n)$.

1.5 Teoremat e Korovkin-it dhe Voronoj-it

Me $F[a, b]$ do të shënojmë hapësirën lineare të të gjitha funksioneve me vlera reale të përkufizuara në $[a, b]$. Dhe me $C[a, b]$, do të shënojmë hapësirën e të gjitha funksioneve të kufizuara dhe të vazhdueshme të cilat janë të përkufizuara në $[a, b]$. Dimë se hapësira $C[a, b]$, është hapësirë e Banach-ut në lidhje me normën e dhënë me relacionin

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|, f \in C[a, b].$$

Në këtë pjesë do të japim teoremat e Korovkin-it(bazike) dhe ato të Voronoj-it. Dihet se Vajershtasi ka dhënë pohimet e mëposhtme:

Teoremë 1.5.1. [1, 37] Nëse $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm në segmentin $[-\pi, \pi]$ dhe $f(-\pi) = f(\pi)$, atëherë për çdo $\epsilon > 0$ gjendet polinomi trigonometrik

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

ashtu që

$$|f(x) - T_n(x)| < \epsilon, \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Teoremë 1.5.2. [1, 38] Nëse $f(x)$ është funksion i vazhdueshëm në segmentin $[a, b]$, atëherë për çdo $\epsilon > 0$ gjendet polinomi algjebrik $P(x)$ i tillë që

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \forall x \in [a, b].$$

Nga pohimet mësipërme shihet se funksioni i vazhdueshëm mund të përafrohet me një polinom trigonometrik(algjebrik) me një shkallë përafrimi sa do të vogël qoftë ajo. Por nuk jep ndonjë mënyrë më konkrete se si bëhet ky përafrim. Një gjë të tillë na e ofrojnë Teorema e parë e Korovkin-it dhe Teorema e dytë e Korovkin-it (bazike), [37, 38, 1].

Le të jetë T_n , një varg i operatorëve pozitivë nga $[a, b]$ në $[a, b]$. Themi se T është pozitivë nëse $T(f; x) \geq 0$, gjithashtu kur $f(x) \geq 0$.

Teoremë 1.5.3. Le të jetë (T_n) varg i operatorëve pozitivë të definuar nga $C[0, 1]$ në $F[0, 1]$. Atëherë,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f, x) - f(x)\|_{\infty} = 0,$$

për çdo $f \in C[0, 1]$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f_i, x) - f_i(x)\|_{\infty} = 0,$$

për $i \in \{0, 1, 2\}$ ku $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$ dhe $f_2(x) = x^2$.

Teoremë 1.5.4. Le të jetë (T_n) një varg i operatorëve linear pozitivë nga $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ në $F(\mathbb{R})$. Atëherë

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f, x) - f(x)\|_{2\pi} = 0,$$

për çdo $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f_i, x) - f_i(x)\|_{2\pi} = 0,$$

për $i \in \{0, 1, 2\}$ ku $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$ dhe $f_2(x) = \sin x$.

Teoremat e Korovkin-it, janë shqyrtuar nga shumë matematicientë. Ato janë përgjithësuar në shumë mënyra dhe në shume hapësira të funksioneve, në laticat të Banach-ut, algjebra të Banach-ut dhe të tjera. Kjo teori është shumë e përdorshme në analizë reale, analizë funksionale, analizë harmonike, dhe fusha tjera. Për më shumë rezultate nga teoremat e Korovkin-it shihni referencat ([28, 45, 47, 48, 55, 10, 12]).

Kapitulli 2

Vargjet e hapësirave të ndërtuara me konvergjenca statistikore

2.1 Vargjet e hapësirave të ndërtuara me Λ^2 – konvergjencën statistikore

Le të jetë

$$\Lambda = \{\lambda_k : k = 0, 1, \dots\}$$

një varg jo-zvogëlues i numrave pozitivë i cili tenton në ∞ , kur $k \rightarrow \infty$ dhe $\Delta^2 \lambda_n \geq 0$, për çdo $n \in \mathbb{N}$. Diferenca e parë definohet si vijon:

$$\Delta \lambda_k = \lambda_k - \lambda_{k-1},$$

ku $\lambda_{-1} = \lambda_{-2} = 0$, dhe diferenca e dytë definohet si:

$$\Delta^2(\lambda_k) = \Delta(\Delta(\lambda_k)) = \lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2}.$$

Le të jetë $x = (x_k)$ një varg i numrave kompleksë i tillë që $x_{-1} = x_{-2} = 0$. Shënojmë

$$(2.1.1) \quad \Lambda^2(x) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}).$$

Dimë se seria $\sum_n x_n$ është e shumueshme sipas metodës së shumueshmërisë Λ^2 , nëse $\lim_n \Lambda^2 = s$.

Vargu $x = (x_k)$, thuhet se është fort i shumueshëm sipas (N, λ^2) – te numri L (shihe [7]) nëse

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| = 0.$$

Le të shënojmë me

$$[N, \lambda^2] = \left\{ x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{C}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| = 0 \right\},$$

bashkësinë e vargjeve $x = (x_n)$ të cilët janë fort të shumueshëm sipas (N, λ^2) te L , d.m.th. $x_k \rightarrow L[N, \lambda^2]$.

Ideja e konvergjencës statistikore është dhënë fillimisht nga Fast [29] dhe studiuar nga shumë autorë si ([22], [30], [5], [9]).

Vargu $x = (x_k)$ themi se konvergjon statistikisht te numri L nëse për çdo $\epsilon > 0$

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0,$$

ku vijat vertikale paraqesin në këtë rast numrin kardinal të bashkësisë në shqyrtim.

Simbolikisht shënojmë $S - \lim_n x_n = L$ ose $x_n \rightarrow L(S)$. Me S do të shënojmë bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat konvergjojnë statistikisht.

Tani përkufizojmë konceptin e konvergjencës statistikore sipas λ^2 - dhe do të përcaktojmë sjelljen e saj në lidhje me klasët e vargjeve $[N, \lambda^2]$ dhe S .

Përkufizim 2.1.1. Vargu $x = (x_n)$ themi se konvergjon statistikisht sipas λ^2 - ose është S_{λ^2} -konvergjent te numri L , nëse për çdo $\epsilon > 0$

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Simbolikisht shënojmë $S_{\lambda^2} - \lim_n x_n = L$ ose $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2})$. Ndërsa me

$$S_{\lambda^2} = \{x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{C}, S_{\lambda^2} - \lim_n x_n = L\}$$

shënojmë bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat konvergjojnë statistikisht sipas λ^2 -.

Përkufizim 2.1.2. Vargu $x = (x_n)$, themi se është λ^2 -statistikisht i Koshit nëse për çdo $\epsilon > 0$ ekziston numri natyral $N = N(\epsilon)$, i tillë që

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |\Delta^2 \lambda_k(x_k) - \Delta^2 \lambda_N(x_N)| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Vargu i numrave pozitivë $\theta = (k_r)$ quhet lakunar nëse

$$k_0 = 0, 0 < k_r < k_{r+1} \text{ dhe } h_r = k_r - k_{r-1} \rightarrow \infty \text{ kur } r \rightarrow \infty.$$

Me I_r do të shënojmë intervalin $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ ndërsa me q_r raportin $\frac{k_r}{k_{r-1}}$.

Përkufizim 2.1.3. Vargu $x = (x_n)$ quhet varg lakunar λ^2 -statistikisht konvergjent ose $S_{\lambda^2}^\theta$ -konvergjent te L nëse për çdo $\epsilon > 0$

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Në këtë rast do të shënojmë $S_{\lambda^2}^\theta - \lim_n x_n = L$ ose $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2}^\theta)$, dhe

$$S_{\lambda^2}^\theta = \{x = (x_n) : \exists L \in \mathbb{C}, S_{\lambda^2}^\theta - \lim_n x_n = L\}$$

shënojmë bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat konvergjojnë statistikisht sipas $S_{\lambda^2}^\theta$.

Përkufizim 2.1.4. Vargu $x = (x_n)$ themi se është varg lakunar λ^2 -statistikisht i Koshit nëse për çdo $\epsilon > 0$, ekziston numri natyral $N = N(\epsilon)$, ashtu që

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : |\Delta^2 \lambda_k(x) - \Delta^2 \lambda_N(x)| \geq \epsilon\}| = 0.$$

2.1.1 Disa veti të hapësirave $[N, \lambda^2]$ dhe S_{λ^2} .

Në këtë pjesë do të shohim relacionet në mes të hapësirave $[N, \lambda^2]$ dhe S_{λ^2} .

Teoremë 2.1.1. [39] *Le të jetë (λ_n) një varg nga hapësira Λ . Atëherë, vlejnjë:*

1. Nëse $x_n \rightarrow L[N, \lambda^2]$, atëherë $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2})$ dhe përfshirja është rigoroze, që d.m.th. se anasjelltas nuk vlen,
2. Nëse $\Delta^2 \lambda(x) \in l_\infty$ dhe $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2})$, atëherë $x_n \rightarrow L[N, \lambda^2]$,
3. $S_{\lambda^2} \cap l_\infty = [N, \lambda^2] \cap l_\infty$.

Vërtetim. (1) Le të supozojmë se vlen $x_n \rightarrow L[N, \lambda^2]$. Atëherë, për çdo $\epsilon > 0$ kemi:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \\ & \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \\ & \geq \epsilon |\{k \leq n : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}|. \end{aligned}$$

Për këtë arsye nga $x_n \rightarrow L[N, \lambda^2]$ atëherë $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2})$.

Për të provuar se nuk vlen përfshirja e anasjelltë ne marrim këtë shembull:

Shembull 2.1.2. *Le të jetë dhënë vargu $x = x_n$ si më poshtë:*

$$x_n = \begin{cases} \lfloor \sqrt{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rfloor & 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \text{ në rastet tjera.} \end{cases}$$

Atëherë, $x = (x_n) \notin l_\infty$ dhe për çdo $\epsilon > 0$, fitojmë

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - 0| \geq \epsilon\}| \leq$$

$$\lim_n \frac{\lfloor \sqrt{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rfloor}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = 0.$$

Nga ana tjetër

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - 0| = \\ & \lim_n \frac{\lambda_n \lfloor \sqrt{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \rfloor - 2\lambda_{n-1} \lfloor \sqrt{\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}} \rfloor + \lambda_{n-2} \lfloor \sqrt{\lambda_{n-2} - \lambda_{n-3}} \rfloor}{\lambda_n - 2\lambda_{n-1} + \lambda_{n-2}} = \infty. \end{aligned}$$

(2) Le të supozojmë se $x_n \rightarrow L(S_{\lambda^2})$ dhe $\Delta^2 \lambda(x) \in l_\infty$. Mund të konsiderojmë se

$$|\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2} - L| \leq M.$$

Për çdo $\epsilon > 0$ marrim këtë vlerësim:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| = \\ & \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon}}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| + \\ & \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| < \epsilon}}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \leq \\ & \frac{M}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| + \epsilon, \end{aligned}$$

nga e cila marrim se $x_k \rightarrow L[N, \lambda^2]$.

(3) Kjo rrjedh drejtpërdrejtë nga (1) dhe (2). □

Pohim 2.1.3. [39] Nëse $x = (x_n)$ është λ^2 -statistikisht konvergjent te L , atëherë rrjedh se x është varg λ^2 -statistikisht i Koshit.

Vërtetim. Le të supozojmë se x konvergjon Λ^2 -statistikisht te L dhe $\epsilon > 0$. Atëherë,

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

plotësohet për pothuajse të gjitha k -të dhe nëse N është zgjedhur në atë mënyrë që

$$\frac{1}{\lambda_N - \lambda_{N-1}} |\{k \leq N : |(\lambda_N x_N - 2\lambda_{N-1} x_{N-1} + \lambda_{N-2} x_{N-2}) - L| \geq \epsilon\}| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

atëherë do të kemi:

$$\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq n : |\Delta^2 \lambda_k(x) - \Delta^2 \lambda_N(x)| \geq \epsilon\}| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

për pothuajse të gjitha k -të. Pra merret se vargu x është varg λ^2 -statistikisht i Koshit. □

Pohim 2.1.4. [39] Nëse vargu $x = (x_n)$ është lakunar λ^2 -statistikisht konvergjent te L , atëherë rrjedh se vargu x është λ^2 -statistikisht lakunar i Koshit.

Pohim 2.1.5. [39] Nëse $x = (x_n)$ është varg për të cilin gjendet një varg λ^2 -statistikisht konvergjent $y = (y_n)$, ashtu që

$$\Delta^2 \lambda(x_k) = \Delta^2 \lambda(y_k)$$

për pothuajse të gjitha k -të, atëherë rrjedh se x është λ^2 -statistikisht konvergjent.

Vërtetim. Le të supozojmë se $\Delta^2\lambda(x_k) = \Delta^2\lambda(y_k)$ pothuajse për të gjitha k -të dhe $y_k \rightarrow L(S_{\lambda^2})$. Atëherë, për çdo $\epsilon > 0$ dhe për çdo n kemi:

$$\{k \leq n : |\Delta^2\lambda(x_k) - L| \geq \epsilon\} \subset$$

$$\{k \leq n : \Delta^2\lambda(x_k) \neq \Delta^2\lambda(y_k)\} \cup \{k \leq n : |\Delta^2\lambda(y_k) - L| \geq \epsilon\}.$$

Ngase $y_k \rightarrow L(S_{\lambda^2})$, rrjedhë se bashkësia

$$\{k \leq n : |\Delta\lambda^2(y_k) - L| \geq \epsilon\}$$

ka numër të fundmë të cilët nuk varen nga n , përkatësisht

$$\frac{|\{k \leq n : |\Delta\lambda^2(y_k) - L| \geq \epsilon\}|}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Nga ana tjetër, meqë $\Delta^2\lambda(x_k) = \Delta^2\lambda(y_k)$ për pothuajse të gjithë k -të, marrim:

$$\frac{|\{k \leq n : \Delta\lambda^2(x_k) \neq \Delta\lambda^2(y_k)\}|}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Nga dy relacionet e fundit merret se:

$$\frac{|\{k \leq n : |\Delta\lambda^2(x_k) - L| \geq \epsilon\}|}{n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

□

Pohim 2.1.6. [39] Nëse $x = (x_n)$ është një varg për të cilin gjendet një varg lakunar λ^2 -statistikisht konvergjent $y = (y_n)$ me vetinë që

$$\Delta^2\lambda(x_k) = \Delta^2\lambda(y_k)$$

për pothuajse të gjitha k -të, atëherë rrjedh se x është lakunar λ^2 -statistikisht konvergjent.

Teoremë 2.1.7. [39] Le të jetë θ një varg lakunar. Atëherë,

1. $L(S_{\lambda^2}) \subset L(S_{\lambda^2}^\theta)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\lim_r \inf q_r > 1$,
2. $L(S_{\lambda^2}^\theta) \subset L(S_{\lambda^2})$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\lim_r \sup q_r < \infty$, dhe
3. $L(S_{\lambda^2}) = L(S_{\lambda^2}^\theta)$, atëherë dhe vetëm atëherë, kur

$$1 < \lim_r \inf q_r \leq \lim_r \sup q_r < \infty.$$

Vërtetim. Vërtetimi i propozimit merret direkt nga Lemat 2,3 në punimin [32]. $\square$

Shënojmë me

$$\Lambda^2(X) = \{x = (x_n) \in w : \Lambda^2(x) \in X\}.$$

Është e njohurë se $(\Lambda^2(X), \|\cdot\|_{\Lambda^2(X)})$ është hapësirë e normuar me normën e dhënë në punimin ([7]), si vijon:

$$\|x\|_{\Lambda^2(X)} := \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n |\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}|,$$

ku $x = (x_k)$.

Teoremë 2.1.8. [39] $\Lambda^2(X)$ është hapësirë e Banach-ut.

Vërtetim. Le të jetë (x_n) një varg Koshi në $\Lambda^2(X)$, ku $x^s = (x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s, \dots)$. Atëherë, merret se :

$$\|x^s - x^t\|_{\Lambda^2(X)} \rightarrow 0, s, t \rightarrow \infty.$$

Nga relacioni i fundit kemi:

$$\sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n \left| \lambda_k (x_k^s - x_k^t) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1}^s - x_{k-1}^t) + \lambda_{k-2} (x_{k-2}^s - x_{k-2}^t) \right| \rightarrow 0, s, t \rightarrow \infty.$$

Përkatesisht,

$$|x_k^t - x_k^s| \rightarrow 0, t, s \rightarrow \infty,$$

për çdo $k \in \mathbb{N}$. Për këtë, vargu $(x_k^1, x_k^2, \dots)$, është varg Koshi në bashkësinë e numrave kompleksë $\mathbb{C}$. Meqë $\mathbb{C}$ është hapësirë komplete, ai konvergjon. Le të themi p.sh. se

$$\lim_s x_k^s = x_k,$$

për çdo $k \in \mathbb{N}$. Meqë (x^s) është varg i Koshit, për çdo $\epsilon > 0$, gjendet numri natyral $N = N(\epsilon)$ i tillë që

$$\|x^s - x^t\|_{\Lambda^2(X)} < \epsilon,$$

për çdo $s, t \geq N$ dhe për çdo $k \in \mathbb{N}$, përkatesisht

$$\sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n \left| \lambda_k (x_k^s - x_k^t) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1}^s - x_{k-1}^t) + \lambda_{k-2} (x_{k-2}^s - x_{k-2}^t) \right| < \epsilon,$$

për çdo $s, t \geq N$, dhe $k \in \mathbb{N}$. Nëse kalojmë me limit në relacionin e fundit, kur $t \rightarrow \infty$, do të kemi:

$$\lim_t \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n \left| \lambda_k (x_k^s - x_k^t) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1}^s - x_{k-1}^t) + \lambda_{k-2} (x_{k-2}^s - x_{k-2}^t) \right| =$$

$$\sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n \left| \lambda_k (x_k^s - x_k) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1}^s - x_{k-1}) + \lambda_{k-2} (x_{k-2}^s - x_{k-2}) \right| < \epsilon,$$

për çdo $s \geq N$ dhe $k \in \mathbb{N}$. Kjo implikon

$$\|x^s - x\|_{\Lambda^2(X)} < 2\epsilon,$$

për çdo $s \geq N$, që d.m.th. se $x^s \rightarrow x$, kur $s \rightarrow \infty$ ku $x = (x_k)$.

Ngase

$$\begin{aligned} \|x\|_{\Lambda^2(X)} &= \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n |\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}| = \\ \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n &\left| \lambda_k (x_k - x_k^N + x_k^N) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1} - x_{k-1}^N + x_{k-1}^N) + \lambda_{k-2} (x_{k-2} - x_{k-2}^N + x_{k-2}^N) \right| \leq \\ \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n &\left| \lambda_k (x_k - x_k^N) - 2\lambda_{k-1} (x_{k-1} - x_{k-1}^N) + \lambda_{k-2} (x_{k-2} - x_{k-2}^N) \right| + \\ \sup_{n \geq 0} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n &\left| \lambda_k x_k^N - 2\lambda_{k-1} x_{k-1}^N + \lambda_{k-2} x_{k-2}^N \right| \leq \|x^N - x\|_{\Lambda^2(X)} + \|x\|_{\Lambda^2(x^N)} = O(1), \end{aligned}$$

fitojmë $x \in \Lambda^2(X)$. □

2.1.2 Relacionet ndërmjet shumueshmërisë statistikore Λ^2 , vargjeve Λ^2 -statistikisht konvergjente dhe fort shumueshmërisë së Λ_r^2 të vargjeve.

Fillimisht marrim këtë përkufizim:

Përkufizim 2.1.5. Vargu $x = (x_n)$ thuhet se është fort Λ_r^2 -i shumueshëm ($0 < r < \infty$) te numri L nëse

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L|^r = 0,$$

dhe shënojmë $x_k \rightarrow \Lambda_r^2$. Në këtë rast L quhet limit i fortë Λ_r^2 i vargut $x = (x_n)$.

Teoremë 2.1.9. [39] *Le të jetë*

$$|(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \leq M,$$

për çdo $k \in \mathbb{N}$. Nëse vargu $x = (x_k)$ është Λ^2 -statistikisht konvergjent te L , atëherë ai është $\Lambda^2(st)$ -i shumueshëm te L , por jo edhe anasjelltas.

Vërtetim. Ngase $x = (x_k)$ është Λ^2 -statistikisht konvergjent te L , kjo d.m.th. se

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |\{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Le të shënojmë:

$$K = \{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}$$

dhe

$$K^c = \{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| < \epsilon\}.$$

Atëherë, marrim

$$\begin{aligned} |\Lambda^2 - L| &= \left| \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L \right| \leq \\ &\left| \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K}}^n (\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L \right| + \\ &\left| \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K^c}}^n (\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L \right| \leq \\ &\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K}}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| + \\ &\frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K^c}}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \cdot M \cdot |K| + \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k \in K^c}^n \epsilon \rightarrow 0 + \epsilon \cdot 1 = \epsilon \end{aligned}$$

kur $n \rightarrow \infty$. Çka implikon se (x_n) është Λ^2 - i shumueshëm te L . Kjo d.m.th. se $x = (x_n)$ është Λ^2 - i shumueshëm te L , në mënyrë të zakonshme, e nga kjo merret se vargu është $\Lambda^2(st)$ - i shumueshëm te L . Për të provuar se nuk vlen e anasjellta, marrim këtë shembull në vijim

Shembull 2.1.10. Le të jetë $\lambda_n = n^2$. Atëherë,

$$\begin{aligned} \Lambda^2(x) &= \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) \\ &= \frac{1}{2n-1} (n^2 x_n - (n-1)^2 x_{n-1}). \end{aligned}$$

Përkufizojmë

$$x_k = \begin{cases} \frac{1}{m^{3+\alpha}}, & \text{për } \alpha > 0 \text{ dhe } k = m^2 - m, \dots, m^2 - 1 \\ -\frac{1}{m^4}, & \text{për } k = m^2, m = 2, \dots \\ 0, & \text{për të tjera vlera} \end{cases}$$

Nga të dhënat e mësipërme merret: $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^2(x) = 0$, dhe $st - \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^2(x) = 0$, që d.m.th. se, $x = (x_n)$ është $\Lambda^2(st)$ - i shumueshëm te 0. Në anën tjetër vargu $(m^2; m = 2, 3, \dots)$ është statistikisht konvergjent te 0, prandaj është e qartë se $st - \liminf_n x_n = 0$ dhe $st - \limsup_n x_n = 1$. Nga këtu konkludojmë se $x = (x_n)$ nuk është statistikisht konvergjent, e as Λ^2 - statistikisht konvergjent.

□

Në vijim do të shohim se nën çfarë kushtesh konverjencia Λ^2 - statistikore, merret nga Λ_r^2 - shumueshmëria dhe anasjelltas.

Pohim 2.1.11. [39] Le të supozojmë se $x = (x_n)$ është Λ_r^2 i shumueshëm te L . Nëse

$$1. \ 0 < r < 1 \text{ dhe } 0 \leq |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| < 1,$$

$$2. \ 1 \leq r < \infty \text{ dhe } 1 \leq |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| < \infty,$$

atëherë, x është Λ^2 - statistikisht konvergjent te L .

Vërtetim. Le të supozojmë se $x = (x_n)$ është Λ_r^2 i shumueshëm te L . Nga të dhënat e mësipërme merret se:

$$|(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L|^r \geq |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L|,$$

në të dy rastet. Respektivisht

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} |K| \\ &= \frac{1}{\epsilon \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K}}^n \epsilon \\ &\leq \frac{1}{\epsilon \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K}}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon \cdot (\lambda_n - \lambda_{n-1})} \sum_{k=1}^n |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L|^r \rightarrow 0, \end{aligned}$$

kur $n \rightarrow \infty$. Pra $x = (x_n)$ është Λ^2 - statistikisht konvergjent te L . □

Pohim 2.1.12. [39] Le të supozojmë se $x = (x_n)$ është Λ^2 - statistikisht konvergjent te L dhe

$$|(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| \leq M (k \in \mathbb{N}).$$

Nëse

$$1. \ 0 < r < 1 \text{ dhe } 1 \leq M < \infty,$$

$$2. \ 1 \leq r < \infty \text{ dhe } 0 \leq M < 1$$

atëherë, x është Λ_r^2 - i shumueshëm te L .

Pohim 2.1.13. [39]

(i) Nëse $x = (x_k) \rightarrow L$ është statistikisht konvergjent, atëherë ai është Λ^2 - statistikisht konvergjent te L , por jo edhe anasjelltas.

(ii) Nëse $\left(\frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{n}\right)$ është varg i kufizuar, atëherë konvergjencia statistikore është ekuivalente me Λ^2 -statistikisht konvergjencën.

Teoremë 2.1.14. [39] Një varg $x = (x_n)$ është $\Lambda^2(st)$ i shumueshëm te L , atëherë dhe vetëm atëherë nëse ekziston një bashkësi

$$K = \{r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots\}$$

e tillë që $\delta(K) = 1$ dhe $\lim_n \Lambda^2(x_{r_n}) = L$, ku $\delta(K)$ -shënon densitetin natyral të bashkësisë $K \subset \mathbb{N}$.

Vërtetim. Le të supozojmë se ekziston një bashkësi

$$K = \{r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots\} \subset \mathbb{N}$$

me vetin që $\delta(K) = 1$ dhe $\lim_n \Lambda^2(x_{r_n}) = L$. Atëherë, gjendet një numër i plotë pozitiv $n_0 \in \mathbb{N}$ me vetin që për çdo $n > n_0 \Rightarrow$

$$(2.1.2) \quad \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^{r_n} |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L| < \epsilon.$$

Le të shënojmë me

$$K_\epsilon = \{n \in \mathbb{N} : |\Lambda^2(x_{r_n}) - L| \geq \epsilon\} \text{ dhe } K'_\epsilon = \{r_{n_0+1}, r_{n_0+2}, \dots\}.$$

Atëherë, $\delta(K'_\epsilon) = 1$ dhe $K_\epsilon \subset \mathbb{N} \setminus K'_\epsilon$, prej nga rrjedh se $\delta(K_\epsilon) = 0$. Pra merret se $x = (x_k)$ është $\Lambda^2(st)$ i shumueshëm te L .

Anasjelltas, le të jetë $x = (x_k)$ një varg $\Lambda^2(st)$ i shumueshëm te L . Për $r = 1, 2, 3, \dots$, kemi vënë

$$K_q = \{j \in \mathbb{N} : |\Lambda^2(x_{r_j}) - L| \geq \frac{1}{q}\} \text{ dhe } M_q = \{j \in \mathbb{N} : |\Lambda^2(x_{r_j}) - L| < \frac{1}{q}\}.$$

Atëherë, $\delta(K_q) = 0$ dhe

$$(2.1.3) \quad M_1 \supseteq M_2 \supseteq \dots \supseteq M_i \supseteq M_{i+1} \dots$$

dhe

$$(2.1.4) \quad \delta(M_q) = 1, q = 1, 2, 3, \dots$$

Tani mbetet të shihet se për $j \in M_q$, vargu (x_{k_j}) është Λ^2 -i shumueshëm te L . Supozojmë se (x_{k_j}) nuk është Λ^2 -i shumueshëm te L . Atëherë, gjendet një $\epsilon > 0$ i tillë që $|\Lambda^2(x_{r_j}) - L| \geq \epsilon$ për infinit shumë terma. Le të jetë

$$M_\epsilon = \{j \in \mathbb{N} : |\Lambda^2(x_{r_j}) - L| < \epsilon\} \text{ dhe } \epsilon > \frac{1}{q}, (q = 1, 2, 3, \dots).$$

Atëherë,

$$(2.1.5) \quad \delta(M_\epsilon) = 0,$$

nga (2.1.3), $M_q \subset M_\epsilon$. Pra $\delta(M_q) = 0$, me çka kemi fituar kontradiksion (2.1.4) dhe mbetet se (x_{k_j}) është Λ^2 -i shumueshëm te L . Kjo vërteton teoremën. $\square$

2.2 Shumueshmëria sipas Nörlund-it dhe konvergjencia statistikore

Këtu do të japim kuptimin e konvergjencës statistikore me peshë, në lidhje me metodën e shumueshmërisë sipas Nörlund-it, (N, p, q) . Le të jenë (p_n) dhe (q_n) , dy vargje të numrave jo-negativë të tillë që

$$P_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n, \quad P_{-1} = p_{-1} = 0,$$

$$Q_n = q_1 + q_2 + \cdots + q_n, \quad Q_{-1} = q_{-1} = 0.$$

Konvolucionin e atyre vargjeve do ta shënojmë si vijon:

$$R_n = (p \star q)_n = \sum_{k=0}^n p_k \cdot q_{n-k}.$$

dhe marrim

$$T_n = \frac{1}{R_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} q_v x_v.$$

Themi se vargu (x_n) është statistikisht i shumueshëm te L me anë të metodës me peshë të përcaktuar me anë të vargjeve të numrave (p_n) dhe (q_n) ose shkurt, statistikisht i shumueshëm (N, p, q) , nëse $st - \lim_n T_n = L$.

Simbolikisht do të shënojmë këtë faktë me $L = N_{p,q}(st) - \lim_n x_n$.

Me $N_{p,q}$ do të shënojmë bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat janë statistikisht të shumueshme sipas metodës së Nörlund-it, (N, p, q) .

Përkufizim 2.2.1. Themi se vargu (x_n) është statistikisht konvergjent me peshë (ose $S_{N_{p,q}}$ - konvergjent) te numri L , nëse për çdo $\epsilon > 0$, bashkësia

$$\{k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}$$

ka densitetin me peshë zero, d.m.th,

$$\lim_n \frac{1}{R_n} |\{k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Shkurt shënojmë

$$L = S_{N_{p,q}} - \lim_n x_n.$$

Përkufizimi i dhënë më lart është një përgjithësim i përkufizimeve të njohura më parë dhe disa prej të cilave janë dhënë së fundmi.

Vërejtje 2.2.1. 1. Nëse $p_n = 1$ dhe $q_n = 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë metoda e shumueshmërisë (N, p, q) kthehet në metodën e shumueshmërisë së Cesáros $(C, 1)$.

2. Nëse $q_n = 1$ për çdo $n \in \mathbb{N}$, atëherë metoda e shumueshmërisë (N, p, q) kthehet në metodën e shumueshmërisë $(\bar{N}, p_n)$ - të përkufizuar nga Mursaleen dhe të tjerët, shihe [48].

Përkufizim 2.2.2. Për vargun $x = (x_n)$ themi se është $(N, p, q)_r$ – i shumueshëm ($0 < r < \infty$) te vlera numerike L , nëse

$$\lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k |x_k - L|^r = 0,$$

dhe këtë do ta shënojmë me $x_k \rightarrow L(N, p, q)_r$, ndërsa L do ta quajmë $(N, p, q)_r$ limiti i vargut $x = (x_n)$.

Tani do të fokusohemi në vetitë e klasës së vargjeve $S_{N,p,q}$ – dhe relacionin e saj me dy klasët të cilat i përkufizuamë më sipër, e që janë (N, p, q) – metoda e shumueshmërisë dhe $(N, p, q)_r$ – metoda e shumueshmërisë.

2.2.1 Konvergjenca statistikore sipas Nörlund-it

Teoremë 2.2.1. [40] *Le të jetë $p_{n-v} q_v |x_k - L| \leq M$, për çdo $k \in \mathbb{N}$. Nëse vargu $x = (x_k)$ është $S_{N,p,q}$ – statistikisht konvergjent te numri L , atëherë ai është statistikisht i shumueshëm sipas metodës (N, p, q) – te L , por anasjelltas nuk vlen.*

Vërtetim. Përderisa $x = (x_k)$ është statistikisht $S_{N,p,q}$ – konvergjent te L , kjo do të thotë se

$$\lim_n \frac{1}{R_n} |\{k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Le të shënojmë me:

$$K_{R_n} = \{k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon\} \text{ dhe } K_{R_n}^c = \{k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| < \epsilon\}.$$

Atëherë, kemi:

$$\begin{aligned} |T_n - L| &= \left| \frac{1}{R_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k (x_k - L) \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}^c}}^n p_{n-k} q_k (x_k - L) \right| + \left| \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}}}^n p_{n-k} q_k (x_k - L) \right| \\ &\leq \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}}}^n p_{n-k} q_k |x_k - L| + \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}^c}}^n p_{n-k} q_k |x_k - L| \\ &\leq \frac{1}{R_n} \cdot M \cdot |K_{R_n}| + \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}^c}}^n \epsilon \rightarrow 0 + \epsilon \cdot 1 = \epsilon \end{aligned}$$

kur $n \rightarrow \infty$. Nga kjo marrim se $T_n \rightarrow L$. Që d.m.th. se $x = (x_n)$ është (N, p, q) – i shumueshëm te numri L , në kuptimin e zakonshëm të konvergjencës, rrjedhimisht kjo na sjell (N, p, q) – shumueshmërinë statistikore te L . Për të provuar se e anasjellta nuk është e vërtetë, marrim këtë shembull:

Shembull 2.2.2. Nëse kemi vlerat $p_n = 2$ dhe $q_n = 1$, për dy vargje të numrave, atëherë metoda e shumueshmërisë (N, p, q) kthehet në metoden e Cesáros të rendit të parë $(C, 1)$. Në këtë rast konvergjenca statistikore $S_{N,p,q}$ – reduktohet në konvergjencë statistikore. Duke përcjell Moritz dhe të tjerët (shihë [46]) dhe Moursaleen me të tjerët (shihë [48]), ne përkufizojmë vargun $x = (x_n)$ në këtë mënyrë:

$$x_k = \begin{cases} 1 & \text{nëse } k = m^2 - m, m^2 - m + 1, \dots, m^2 - 1 \\ -m & \text{nëse } k = m^2, m = 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{për raste tjera} \end{cases}$$

Nën këto kondita do të kemi:

$$T_n = \frac{1}{R_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} q_v x_v = \frac{1}{2(n+1)} \sum_{v=0}^n 2x_v = \begin{cases} \frac{l+1}{n+1} & \text{nëse } n = m^2 - m + l; l = 0, 1, \dots, m-1; m = 2, 3, \dots, \\ 0 & \text{në raste tjera} \end{cases}$$

Prej nga merret $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$, përkatësisht $st - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 0$, që d.m.th. se, $x = (x_n)$ është (N, p, q) – i shumueshëm te 0. Në anën tjetër, vargu $(m^2; m = 2, 3, \dots)$ është statistikisht konvergjent te 0, dhe është e qartë se $vlen\ st - \liminf_n x_n = 0$ dhe $st - \limsup_n x_n = 1$. Pra $x = (x_n)$ nuk është statistikisht konvergjent, e as $S_{N,p,q}$ – statistikisht konvergjent.

□

Në vijim do të shohim se nën çfarë kushtesh nga konvergjenca statistikore $S_{N,p,q}$ – merret shumueshmëria $(N, p, q)_r$ – dhe anasjelltas.

Pohim 2.2.3. [40] Le të supozojmë se vargu $x = (x_n)$ është konvergjent sipas shumueshmërisë $(N, p, q)_r$ te numri L . Nëse

1. $0 < q < 1$ dhe $0 \leq |x_k - L| < 1$,
2. $1 \leq q < \infty$ dhe $1 \leq |x_k - L| < \infty$

atëherë, x është $S_{N,p,q}$ – statistikisht konvergjent te L .

Vërtetim. Le të supozojmë se vargu $x = (x_n)$ është konvergjent sipas shumueshmërisë $(N, p, q)_r$ te L . Nën kushtet e mësipërme do të kemi:

$$p_{n-k} q_k |x_k - L|^r \geq p_{n-k} q_k |x_k - L|,$$

përkatësisht

$$\begin{aligned} \lim_n \frac{1}{R_n} |K_{R_n}| &= \frac{1}{\epsilon \cdot R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}}}^n \epsilon \leq \frac{1}{\epsilon \cdot R_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K_{R_n}}}^n p_{n-k} q_k |x_k - L| \\ &\leq \frac{1}{\epsilon \cdot R_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k (x_k - L) \leq \frac{1}{\epsilon \cdot R_n} \sum_{k=1}^n p_{n-k} q_k |x_k - L|^r = 0. \end{aligned}$$

Pra kemi se $x = (x_n)$ është $S_{N,p,q}$ – statistikisht konvergjent te L .

□

Pohim 2.2.4. [40] Le të supozojmë se vargu $x = (x_n)$ është konvergjent sipas shumueshmërisë $S_{N_{p,q}}$ – te L dhe $p_{n-k}q_k|x_k - L| \leq M (k \in \mathbb{N})$. Nëse

1. $0 < q < 1$ dhe $1 \leq M < \infty$,

2. $1 \leq q < \infty$ dhe $0 \leq M < 1$

atëherë x është konvergjent sipas shumueshmërisë $(N, p, q)_r$ – te L .

Pohim 2.2.5. [40]

- (i) Nëse $x = (x_k) \rightarrow L$ është statistikisht konvergjent, atëherë ai është statistikisht $S_{N_{p,q}}$ – konvergjent te L , gjithashtu.
- (ii) Nëse $\left(\frac{R_n}{n}\right)$ është varg i kufizuar, atëherë konvergjencia statistikore është ekuivalente me $S_{N_{p,q}}$ – konvergjencën statistikore.

2.2.2 Konvergjencia statistikore dhe funksionet e Orlicz-it

Në këtë pjesë do të përkufizojmë një llojë të konvergjencës statistikore duke shfrytëzuar funksionin e Orlicz-it.

Përkufizim 2.2.3. Le të jetë M një funksion i Orlicz-it dhe $p = (p_k)$ një varg i numrave realë rigorozisht pozitivë. Vargu $a = (a_k)$ themi se konvergjon fortë $N_{p,q}$ – te numri L në lidhje me funksionin e Orlicz-it M , nëse vlen relacioni

$$(2.2.1) \quad \lim_n \frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} \left[M \left(\frac{p_{n-k}q_k|x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = 0.$$

Bashkësinë e të gjitha vargjeve konvergjente sipas $N_{p,q}$ – te numri L , në lidhje me funksionin e Orlicz-it M , do ta shënojmë me $[N_{p,q}, M, p]$. Në këtë rast, këtë lloj konvergjence do ta shënojmë me $x_k \rightarrow L([N_{p,q}, M, p])$. Në raste të veçanta, kur $M(x) = x, p_k = p_0$ për të gjitha $k \in \mathbb{N}$, do të shënojmë me $[N_{p,q}]$, në vend të $[N_{p,q}, M, p]$.

Teoremë 2.2.6. [40]

- (i) Nëse $x = (x_k)$ konvergjon fortë sipas $[N_{p,q}]$ – te numri L , atëherë ai është $S_{N_{p,q}}$ – statistikisht konvergjent te numri L .
- (ii) Nëse vargu i kufizuar $x = (x_k)$, është $S_{N_{p,q}}$ – statistikisht konvergjent te L , atëherë ai konvergjon fortë sipas $[N_{p,q}]$ – te numri L .

Vërtetim. (i) Le të supozojmë se vargu $x = (x_k)$ konvergjon fortë $[N_{p,q}]$ – te L . Kjo d.m.th se vlen

$$\frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} [p_{n-k}q_k|x_k - L|]^{p_0} \rightarrow 0,$$

kur $n \rightarrow \infty$. Prej nga merret se:

$$\frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} [p_{n-k} q_k |x_k - L|]^{p_0} \geq \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon}} [p_{n-k} q_k |x_k - L|]^{p_0} \geq \epsilon^{p_0} |k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon|.$$

Pra $x_k \rightarrow L(S_{N_{p,q}})$.

(ii) Le të supozojmë se $x_k \rightarrow L(S_{N_{p,q}})$ dhe le të marrim se $x = (x_k) \in l_\infty$. Për çdo $\epsilon > 0$ të dhënë zgjedhim një n_ϵ të tillë që

$$\frac{1}{R_n} \left| k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p_0}} \right| \leq \frac{\epsilon}{2A^{p_0}}$$

për çdo $n \geq n_\epsilon$, ku $A = \sup_n |x_k|$ dhe duke vënë

$$B = \left\{ k \leq R_n : p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \left(\frac{\epsilon}{2} \right)^{\frac{1}{p_0}} \right\}.$$

Tani për çdo $n > n_\epsilon$ do të kemi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} [p_{n-k} q_k |x_k - L|]^{p_0} &= \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ k \in B}} [p_{n-k} q_k |x_k - L|]^{p_0} + \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ k \notin B}} [p_{n-k} q_k |x_k - L|]^{p_0} \\ &\leq \frac{1}{R_n} \left(\frac{\epsilon \cdot R_n}{2A^{p_0}} \right) A^{p_0} + \frac{\epsilon}{2R_n} R_n = \epsilon. \end{aligned}$$

Nga relacionet e mësipërme merret se $(x_k) \rightarrow L([N_{p,q}])$. □

Teoremë 2.2.7. [40] Le të jetë M një funksion i Orlicz-it, dhe $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup p_k = H$. Atëherë, $[N_{p,q}, M, p] \subset S_{N_{p,q}}$.

Vërtetim. Le të supozojmë se $a \in [N_{p,q}, M, p]$. Atëherë, ekziston një $\rho > 0$ e tillë që

$$\frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} \left[M \left(\frac{p_{n-k} q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \rightarrow 0,$$

kur $n \rightarrow \infty$.

Për çdo $\epsilon > 0$ të dhënë marrim:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} \left[M \left(\frac{p_{n-k} q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} &\geq \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{p_{n-k} q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\ &\geq \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k} q_k |x_k - L| \geq \epsilon}} [M(\epsilon_1)]^{p_k} \end{aligned}$$

ku

$$\begin{aligned}
 \left(\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{\rho} \right) & \\
 & \geq \frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} \min \{ [M(\epsilon_1)]^h, [M(\epsilon_1)]^H \} \\
 & \geq \frac{1}{R_n} |\{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}| \cdot \min \{ [M(\epsilon_1)]^h, [M(\epsilon_1)]^H \}.
 \end{aligned}$$

Përkatesisht $x = (x_k) \in S_{N_{p,q}}$. □

Teoremë 2.2.8. [40] *Le të jetë M një funksion i Orlicz-it, dhe $0 < h = \inf p_k \leq p_k \leq \sup p_k = H$. Nëse $a = (a_n)$ është një varg i kufizuar, ashtu që $a_n \rightarrow L[S_{N_{p,q}}]$, atëherë merret se $a_n \rightarrow L[N_{p,q}, M, p]$.*

Vërtetim. Le të supozojmë se $a_n \rightarrow L[S_{N_{p,q}}]$. Atëherë, gjendet një konstantë K me vetinë $p_{n-k}q_k |x_k - L| \leq K$. Le të jetë $\epsilon > 0$ i dhënë. Atëherë, fitojmë:

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{R_n} \sum_{k \leq R_n} \left[M \left(\frac{p_{n-k}q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} = \\
 & \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k}q_k |x_k - L| \geq \epsilon}} \left[M \left(\frac{p_{n-k}q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} + \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k}q_k |x_k - L| < \epsilon}} \left[M \left(\frac{p_{n-k}q_k |x_k - L|}{\rho} \right) \right]^{p_k} \\
 & \leq \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k}q_k |x_k - L| \geq \epsilon}} \max \left\{ \left[M \left(\frac{K}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{K}{\rho} \right) \right]^H \right\} + \frac{1}{R_n} \sum_{\substack{k \leq R_n \\ p_{n-k}q_k |x_k - L| < \epsilon}} \left[M \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]^{p_k} \leq \\
 & \max \left\{ \left[M \left(\frac{K}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{K}{\rho} \right) \right]^H \right\} \frac{1}{R_n} |\{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}| + \\
 & \max \left\{ \left[M \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]^h, \left[M \left(\frac{\epsilon}{\rho} \right) \right]^H \right\}.
 \end{aligned}$$

Pra, $a_n \rightarrow L[N_{p,q}, M, p]$. □

2.3 Konvergjencia statistikore sipas funksioneve modulare

Hapësira e vargjeve lakunare të cilat konvergjojnë fortë, është studiuar nga Freedman dhe të tjerët (shihe [30]).

Hapësira e vargjeve konvergjente lakunare N_θ , është përkufizuar si më poshtë:

$$N_\theta = \{x = (x_i) : \lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} |x_i - s| = 0, \text{ për ndonjë } s\}.$$

Kuptimi i funksionit modular është dhënë nga Nakano (shihe [49]).

Funksion modular quajmë funksionin f , i cili është i përkufizuar nga $[0, \infty)$ në $[0, \infty)$ dhe që i plotëson kushtet e mëposhtme:

1. $f(x) = 0$, atëherë dhe vetëm atëherë kur $x = 0$,
2. $f(x + y) \leq f(x) + f(y)$ për çdo $x, y \geq 0$,
3. f është funksion rritës,
4. f është funksion i vazhdueshëm në të djathtë të 0-s.

Përderisa vlen

$$|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|),$$

atëherë nga kushtet (2) dhe (4) rrjedh se f është i vazhdueshëm gjithkund në $[0, \infty)$. Et dhe Çolak, në punimin [25], më pas Et dhe Nuray, në punimin [26], kanë shfrytëzuar diferencat e përgjithësuara për të konstruktuar hapësirat e vargjeve. Por edhe autorët Bilgin [5], Connor [23], Esi [24], Maddox [41],[42], Kolk [36], Ozturk dhe Bilgin [50], Pehlivan dhe Fisher [51], Ruckle [53], Braha e të tjerët, [9] dhe të tjerë, kanë shfrytëzuar funksionet modulare për të konstruktuar hapësira të vargjeve.

Le të jetë $A = (a_{ik})$, një matricë e pafundme me numra kompleksë. Shënojmë me $Ax = (A_i(x))$ nëse

$$A_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k$$

konvergon për çdo i .

Bilgin [5], ka gjeneralizuar konceptin e vargjeve të cilat konvergjojnë fortë dhe janë lakunar dhe përmes tyre ka përkufizuar këtë hapësirë të re:

$$N_\theta(A, f) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r \rightarrow \infty} h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f(|A_i(x) - s|) = 0, \text{ për ndonjë } s \right\}.$$

Tani e tutje, vargu i funksioneve modulare të përcaktuara në F , do të shënohet me anë të shprehjes $f = (f_i) \in F$, për çdo $i \in \mathbb{N}$, me vetinë

$$\lim_{l \rightarrow 0^+} \sup_i f_i(l) = 0.$$

Ne tani do të përkufizojmë një hapësirë të re të vargjeve duke shfrytëzuar funksionet modulare dhe funksionin e Orlicz-it.

$$N_\theta(A, F, u, \Delta^m) = \left\{ x = (x_i) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) = 0, \text{ uniformisht sipas } m \right\},$$

dhe

$$N_{\theta}^0(A, F, u, \Delta^m) = \left\{ x = (x_i) : \lim_r \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x)|) = 0, \text{ uniformisht sipas } m \right\},$$

ku $e = (1, 1, 1, \dots)$, dhe

$$\Delta^m x_i = \Delta^{m-1} x_i - \Delta^{m-1} x_{i+1},$$

ndërsa

$$A_i(u\Delta^m x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} u \Delta^m x_k.$$

Duke vënë $f_i = f$ për çdo i , hapësira e vargjeve e përkufizuar më lart do të marrë trajtën:

$$N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m) = N_{\theta}(A, f, u, \Delta^m).$$

Do të shënojmë me $N_{\theta}(A, f, u, \Delta^m) = N_{\theta}(A, u, \Delta^m)$, për $f(x) = x$. Nëse $x = (x_i)$ është varg i cili konvergjon (A, u, Δ^m) -në mënyrë të fortë dhe lakunare te numri s , në lidhje me F , atëherë mund të shënojmë $x_i \rightarrow s(N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m))$. Nëse $A = I$, është një matricë njësi, shënojmë $N_{\theta}(F, u, \Delta^m)$ dhe $N_{\theta}^0(F, u, \Delta^m)$, në vend të $N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m)$ dhe $N_{\theta}^0(A, F, u, \Delta^m)$, në mënyrë respektive.

Si rast i veçantë, nëse merret $m = 1$ atëherë ne do të fitojmë klasën e hapësirës së vargjeve të përkufizuara në [4], dhe nëse marrim $m = 0$, atëherë do të fitojmë klasën e vargjeve të përkufizuara në [6]. Në rastin kur $m = 1$, $u = I_x$ dhe $f_i = f$, për çdo $i \in \mathbb{N}$, atëherë fitojmë hapësirën e vargjeve të përkufizuara në [5]. Nëse merret se $A = I$, $u = 1_x$, $m = 1$ dhe $f_i = f$, për çdo $i \in \mathbb{N}$, atëherë fitojmë hapësirën e vargjeve të përkufizuara në [52].

Lemë 2.3.1. [13] *Hapësirat e vargjeve $N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m)$ dhe $N_{\theta}^0(A, F, u, \Delta^m)$, janë hapësira lineare.*

Vërtetim. Do të provojmë këtë faktë vetëm për njërin nga to, sepse tjetra provohet njësoj. Le të provojmë për $N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m)$. Le të jetë $x_i \rightarrow s$ nga $N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m)$, $y_i \rightarrow t$ dhe a, b numra kompleksë të dhënë. Atëherë, ekzistojnë numrat t_a dhe t_b , ashtu që $|a| < t_a$ dhe $|b| < t_b$. Për këtë arsye duke marrë në konsiderim vetitë (2) dhe (3) të funksioneve modulare f_i , do të kemi:

$$\begin{aligned} & h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(au\Delta^m x + bu\Delta^m y) - (ase + bte)|) \leq \\ & h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} (f_i(a|A_i(u\Delta^m x - se)|) + f_i(b|A_i(u\Delta^m y - te)|)) \leq \\ & t_a h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x - se)|) + t_b h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m y - te)|). \end{aligned}$$

Nga relacioni i fundit marrim se $ax + by \rightarrow ase + bte$ është në $N_{\theta}(A, F, u, \Delta^m)$. $\square$

Tani shohim këtë rezultat:

Lemë 2.3.2. [13] Hapësira e vargjeve $N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$ është e paranormuar (nuk do me thënë se është totalisht e paranormuar) në lidhje me

$$g(x) = \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x)|) \right\}.$$

Vërtetim. Qartë shihet se $g(0) = 0$, dhe $g(-x) = g(x)$. Në vijim tregojmë jo-barazimin e trekëndëshit dhe vazhdueshmërinë e shumëzueshmërisë. Le të jenë $x, y \in N_\theta^0(A, F, u, \Delta^m)$, duke u bazuar në vetitë e funksioneve modulare dhe definimin e diferencës së përgjithësuar Δ^m , do të përfitojmë relacionin:

$$\begin{aligned} & \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m(x+y))|) \right\} \leq \\ & \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x)|) \right\} + \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m y)|) \right\} = \\ & g(x) + g(y). \end{aligned}$$

Le të shohim tani vazhdueshmërinë e shumëzimit. Le të jetë $\lambda \in \mathbb{C}$, një numër i çfarëdoshëm kompleks. Nga përkufizimi i funksionit $g(x)$, do të kemi:

$$\begin{aligned} g(\lambda \cdot x) &= \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m \lambda x)|) \right\} \\ &\leq \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|\lambda| \cdot |A_i(u\Delta^m x)|) \right\}. \end{aligned}$$

Duke marrë në konsiderim vetitë e funksioneve modulare dhe duke ditur faktin se $|\lambda| \leq 1 + \lceil |\lambda| \rceil$, ku $\lceil x \rceil$ përkufizon pjesën e plotë të x , kemi:

$$(2.3.1) \quad \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|\lambda| \cdot |A_i(u\Delta^m x)|) \right\} \leq \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} (1 + \lceil |\lambda| \rceil) \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x)|) \right\}.$$

Tani dallojmë dy raste:

- Nëse $|\lambda| < 1$, atëherë nga relacioni (1) rrjedh:

$$g(\lambda x) = \sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m \lambda x)|) \right\} \leq g(x) < \epsilon,$$

për çdo $r > N(\epsilon)$.

- Për $1 < r < N(\epsilon)$, duke marrë λ mjaft të vogël, përderisa f_i janë të vazhdueshëm, do të kemi

$$\sup_{r \in \mathbb{N}} \left\{ h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m \lambda x)|) \right\} < \epsilon.$$

Nga dy relacionet e fundit marrim se $g(\lambda x) \rightarrow 0$, kur $\lambda \rightarrow 0$. □

2.3.1 Relacionet ndërmjet klasëve $N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$ dhe $N_\theta(A, u, \Delta^m)$

Këtu do të shohim relacionet përfshirëse në mes të klasëve $N_\theta(A, u, \Delta^m)$ dhe $N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$.

Teoremë 2.3.3. [13] *Le të jetë $A = (a_{ij})$, një matricë e pafundme e numrave kompleksë dhe $f = (f_i)$ varg i funksioneve modulare nga F . Nëse $x = (x_j)$ është varg lakunar i cili konvergjon (A, u, Δ^m) -fortë te s , atëherë $x = (x_j)$ është varg lakunar i cili konvergjon (A, F, u, Δ^m) -fortë te s në lidhje me F , kjo d.m.th. se,*

$$N_\theta(A, u, \Delta^m) \subset N_\theta(A, F, u, \Delta^m).$$

Vërtetim. Le të jetë $f = (f_i)$ varg i funksioneve modulare nga familja F dhe marrim $\sup_i f_i(1) = K$. Le të jetë $x \in N_\theta(A, u, \Delta^m)$, $0 < \epsilon < 1$ dhe zgjedhim δ me vetinë që $0 < \delta < 1$ ashtu që $f_i(t) < \epsilon$ për $0 \leq t \leq \delta$. Shënojmë me $|A_i(u\Delta^m x) - se| = t_i$ dhe konsiderojmë

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) = \sum_1 + \sum_2,$$

ku shuma e parë është marrë për $t_i \leq \delta$, ndërsa shuma e dytë është marrë për $t_i > \delta$. Nga përkufizimi i vargut të funksioneve modulare f , për shumën e parë është e qartë se $\sum_1 \leq \epsilon$, në vijim do të shohim rastin kur $t_i > \delta$. Duke u nisur nga fakti se

$$t_i < \frac{t_i}{\delta} < 1 + \left\lceil \frac{t_i}{\delta} \right\rceil < 2 \cdot \left\lceil \frac{t_i}{\delta} \right\rceil,$$

ku $[x]$, shënonë pjesën e plotë të x .

Nga vetitë e funksioneve modulare marrim këtë vlerësim:

$$f(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \leq \left(1 + \left\lceil \frac{|A_i(u\Delta^m x) - se|}{\delta} \right\rceil\right) f(1) \leq 2 \cdot K \cdot \frac{|A_i(u\Delta^m x) - se|}{\delta}.$$

Nga relacioni i fundit marrim:

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) = \sum_1 + \sum_2 < \epsilon,$$

përkatesisht $x \in N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$. □

Teoremë 2.3.4. [13] *Le të jetë dhënë matrica e pafundme me numra kompleksë $A = (a_{ik})$, dhe vargu i funksioneve modulare $f = (f_i)$, nga familja F . Nëse $\liminf_i \frac{f_i(l)}{l} > 0$, atëherë*

$$N_\theta(A, u, \Delta^m) = N_\theta(A, F, u, \Delta^m).$$

Vërtetim. Nëse $\liminf_i \frac{f_i(l)}{l} > 0$, atëherë ekziston një numër $\beta > 0$ me vetinë që $f_i(l) > \beta l$, për çdo $l > 0$ dhe $i \in \mathbb{N}$. Le të jetë $x \in N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$. Atëherë,

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \geq h_r^{-1} \beta \sum_{i \in I_r} (|A_i(u\Delta^m x) - se|),$$

prej nga rrjedh se $x \in N_\theta(A, u, \Delta^m)$. □

Shembull 2.3.5. Tani japim këtë shembull i cili tregon përfshirjen

$$N_\theta(A, F, u, \Delta^m) \neq N_\theta(A, u, \Delta),$$

në rastin kur $\beta = 0$. Le të konsiderojmë se $A = I$, $f_r = x^{\frac{1}{r+1}}$ ($r \geq 1, x > 0$) dhe $u = e$. Definojmë

$$\Delta^m x_r = \begin{cases} h_r & , \text{ nëse } i = i_r \text{ për ndonjë } r \geq 1 \\ 0 & \text{ në rastet tjera} \end{cases}$$

Atëherë, kemi:

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x)|) = h_r^{-1} f_{i_r}(|h_r|) = h_r^{-1} h_r^{\frac{1}{1+r}} \rightarrow 0, r \rightarrow \infty$$

pra,

$$x \in N_\theta^0(A, F, u, \Delta^m) \subset N_\theta(A, F, u, \Delta^m).$$

Në anën tjetër kemi

$$h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} (|A_i(u\Delta^m x)|) = h_r^{-1} h_r = 1, r \rightarrow \infty.$$

Nga relacionet e fundit merret se vlen

$$x \notin N_\theta^0(A, u, \Delta^m) \subset N_\theta(A, u, \Delta^m).$$

2.3.2 Vargjet lakunare (A, u, Δ^m) -statistikisht konvergjente

Në këtë pjesë do të shohim relacionet ndërmjet klasës së vargjeve lakunare (A, u, Δ^m) -statistikisht konvergjente dhe klasës së vargjeve lakunare (A, u, Δ^m) -fortë konvergjente, në lidhje me vargun e funksioneve modulare.

Schoenberg [54], ka studiuar konvergjencën statistikore për metodat e shumueshmërisë dhe ka provuar disa nga rezultatet e konvergjencave statistikore. Më tej Fridy dhe Orhan [32], kanë futur konceptin e konvergjencës lakunare statistikore, si më poshtë.

Përkufizim 2.3.1. Le të jetë θ një varg lakunar. Për vargun $x = (x_k)$ themi se konvergon në mënyrë lakunare statistikore te numri s , nëse për çdo $\epsilon > 0$, të dhënë plotësohet relacioni

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |x_r - s| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Bashkësinë e të gjitha vargjeve lakunare statistikisht konvergjente do ta shënojmë me S_θ .

Kuptimi i konvergjencës lakunare A -statistikore është dhënë nga Bilgin, në [5].

Përkufizim 2.3.2. Le të jetë dhënë matrica e pafundme $A = (a_{ik})$, me elemente numra kompleksë. Për vargun $x = (x_k)$ themi se është lakunar dhe A -statistikisht konvergjent te numri s , nëse për çdo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |A_i(x) - s| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Bashkësinë e të gjitha vargjeve lakunare, të cilat konvergjojnë në mënyrë matricore sipas matricës A , do ta shënojmë me $S_\theta(A)$.

Kuptimi i konvergjencës statistikore te vargjet lakunare, sipas matricës së shumueshmërisë, (A, u, Δ) është përkufizuar nga autorët Bataineh, Ahmad H. A. and Al-O'dat, Naser A, në punimin [4], si vijon:

Përkufizim 2.3.3. Le të jetë $A = (a_{ik})$, një matricë e pafundme me elemente numra kompleksë. Për vargun $x = (x_k)$, themi se është lakunar dhe (A, u, Δ) -statistikisht konvergjent te numri s , nëse për çdo $\epsilon > 0$, plotësohet relacioni

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |A_i(u\Delta x) - se| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Bashkësinë e të gjitha vargjeve lakunare të cilat janë (A, u, Δ) -statistikisht konvergjent, do ta shënojmë me $S_\theta(A, u, \Delta)$.

Tani do të japim një përkufizim, i cili përgjithëson përkufizimet e mësipërme:

Përkufizim 2.3.4. Le të jetë $A = (a_{ik})$ një matricë e pafundme me elemente numra kompleksë. Për vargun $x = (x_k)$ themi se është lakunar dhe (A, u, Δ^m) -statistikisht konvergjent te një numër s , nëse për çdo $\epsilon > 0$, të dhënë, vlen relacioni

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |A_i(u\Delta^m x) - se| \geq \epsilon\}| = 0,$$

uniformisht sipas m -së. Bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat janë lakunar dhe (A, u, Δ^m) -statistikisht konvergjente, do ta shënojmë me $S_\theta(A, u, \Delta^m)$.

Përkufizim 2.3.5. Le të jetë $A = (a_{ik})$, një matricë e pafundme me elemente numra kompleksë. Për vargun $x = (x_k)$ themi se është lakunar dhe (A, u, Δ^m) -statistikisht i Koshit, nëse për çdo $\epsilon > 0$ të dhënë, gjendet një numër $n_0 = n(\epsilon) \in \mathbb{N}$, ashtu që

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |A_i(u\Delta^m x_n) - A_i(u\Delta^m x_{n_0})| \geq \epsilon\}| = 0,$$

uniformisht sipas m -së. Bashkësinë e të gjitha vargjeve lakunare të cilat janë (A, u, Δ^m) -statistikisht të Koshit, do ta shënojmë me $S_\theta^c(A, u, \Delta^m)$.

Tani provojmë këto veti të këtyre vargjeve:

Teoremë 2.3.6. [13] *Le të jetë $f = (f_i)$, një varg i funksioneve modulare nga F dhe (f_i) një varg i cili konvergjon sipas koordinatave. Atëherë,*

$$N_\theta(A, F, u, \Delta^m) \subset S_\theta(A, u, \Delta^m),$$

atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\lim_i f_i(l) > 0$, ($l > 0$).

Vërtetim. Le të jetë $x \in N_\theta(A, F, u, \Delta^m)$ dhe $\epsilon > 0$. Nëse $\lim_i f_i(l) > 0$, atëherë gjendet një numër $C > 0$, me vetinë që $f_i(\epsilon) \geq C$, për çdo $l > \epsilon$ dhe $i \in \mathbb{N}$. Le të shënojmë me

$$\sigma_1 = \{i \in I_r : |A(u\Delta^m x) - se| \geq \epsilon\},$$

kemi

$$\begin{aligned} h_r^{-1} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \\ \geq h_r^{-1} \sum_{i \in \sigma_1} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \\ \geq Ch_r^{-1} |\{i \in \sigma_1 : |A_i(u\Delta^m x) - se| \geq \epsilon\}|, \end{aligned}$$

pra $x \in S_\theta(A, u, \Delta^m)$.

Anasjelltas, le të supozojmë se $\lim_i f_i(l) > 0$ nuk plotësohet, atëherë gjendet një numër $t > 0$ i tillë që të plotësohet relacioni $\lim_i f_i(t) = 0$. Tani mund të zgjedhim vargun (h_r) me vetinë që $f_i(t) < 2^{-r}$ për çdo $i > h_r$. Le të jetë $A = I$, dhe përkufizojmë vargun si më poshtë

$$\Delta^m x_r = \begin{cases} t & \text{nëse } h_{r-1} < t \leq \frac{h_{r-1} + h_r}{2} \\ 0 & \text{nëse } \frac{h_{r-1} + h_r}{2} < t \leq h_r \end{cases}$$

atëherë rrjedh se

$$x \in N_\theta^0(A, F, u, \Delta^m) \subset N_\theta(A, F, u, \Delta^m),$$

mirëpo $x \notin S_\theta(A, u, \Delta^m)$. □

Pohimi i radhës, do të na japë kushtet nën të cilat vlen përfshirja e anasjelltë.

Teoremë 2.3.7. [13] *Le të jetë $f = (f_i)$, një varg i funksioneve modulare nga familja F . Atëherë, vlen relacioni:*

$$S_\theta(A, u, \Delta^m) \subset N_\theta(A, F, u, \Delta^m),$$

atëherë dhe vetëm atëherë, kur $\sup_l \sup_i f_i(l) < \infty$.

Vërtetim. Vërtetimi i pohimit është i ngjashëm me vërtetimin e Teoremës të dhënë në punimin [4], për këtë arsye nuk po e japim këtu. □

Tani do të shohim se konverjenca e zakonshme $u_i \Delta x_i \rightarrow se$, e implikon konvergjencën

$$u_i \Delta^m x_i \rightarrow s(N_\theta(A, F, u, \Delta^m)).$$

Teoremë 2.3.8. *Supozojmë se A , është një matricë regulare, $\lim_i \inf q_i > 1$, dhe $\sup_l \sup_i f_i(l) < \infty$. Atëherë, $u_i \Delta x_i \rightarrow se$, implikon konvergjencën*

$$u_i \Delta^m x_i \rightarrow s(N_\theta(A, F, u, \Delta^m)).$$

Vërtetim. Vërtetimi rrjedh direkt nga lema e dhënë në punimin ([31]) dhe Teoremës 2.3.7. □

Në vijim do të tregojmë konvergjencën statistikore sipas (A, u, Δ^m) .

Teoremë 2.3.9. [13] Nëse vargu $x = (x_k)$ është i tillë që për të ekziston një varg $y = (y_k)$, i cili konvergjon (A, u, Δ^m) -statistikisht dhe me vetinë që

$$A_i(u\Delta^m x_i) = A_i(u\Delta^m y_i),$$

për pothuajse të gjithë i , atëherë $x = (x_n)$ është po ashtu varg konvergjent (A, u, Δ^m) statistikisht.

Vërtetim. Le të marrim se $A_i(u\Delta^m x_i) = A_i(u\Delta^m y_i)$, për pothuajse të gjithë i -të dhe $y_i \rightarrow S_\theta(A, u, \Delta^m)$. Le të jete dhënë një $\epsilon > 0$, atëherë për çdo r , kemi:

$$\{i \in I_r : |A_i(u\Delta^m x) - se| \geq \epsilon\} \subset$$

$$\{i \in I_r : A_i(u\Delta^m x_i) \neq A_i(u\Delta^m y_i)\} \cup \{i \in I_r : |A_i(u\Delta^m x) - se| \leq \epsilon\}.$$

Përderisa $y_i \rightarrow S_\theta(A, u, \Delta^m)$, termi i dytë në përfshirjen e mësipërme përmban një numër të fundmë numrash të plotë, p.sh. le të themi se përmban i_0 -sish. Për këtë arsye

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : |A_i(u\Delta^m x) - se| \geq \epsilon\}| \leq$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} |\{i \in I_r : A_i(u\Delta^m x_i) \neq A_i(u\Delta^m y_i)\}| + \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{i_0}{h_r} = 0.$$

Përkatësisht $x = (x_n)$ është (A, u, Δ^m) statistikisht konvergjent. $\square$

Teoremë 2.3.10. [13] Nëse $x = (x_k)$ është një varg i cili konvergjon (A, u, Δ^m) -statistikisht, atëherë $x = (x_k)$ është (A, u, Δ^m) -statistikisht i Koshit.

Vërtetim. Vërtetimi i pohimit merret drejtëpërdrejt nga përkufizimi 2.3.5 dhe për këtë arsye nuk do ta shënojmë. $\square$

Teoremë 2.3.11. [13] Le të jetë M , një funksion modular dhe le të jetë $\liminf q_r > 1$. Nëse $x = (x_n)$ është varg lakunar i cili konvergjon te numri s në mënyrë (A, u, Δ^m) -statistikore, atëherë për çdo $\epsilon > 0$, plotësohet relacioni i mëposhtëm:

$$\lim_r \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \geq \epsilon\}| = 0.$$

Vërtetim. Le të supozojmë se $\liminf q_r > 1$, atëherë gjendet një $\delta > 0$ me vetinë që $q_r \geq 1 + \delta$, për numra mjaft të mëdhenjë r , prej nga merret se

$$\frac{h_r}{k_r} \geq \frac{\delta}{\delta + 1}.$$

Nëse $x = (x_n)$ është një varg i cili konvergjon te numri s , në mënyrë lakunare dhe (A, u, Δ^m) -statistikisht, atëherë për çdo $\epsilon > 0$ dhe për numrin r , mjaft të madhë, kemi

$$\frac{1}{k_r} |\{k \leq k_r : M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \geq \epsilon\}| \geq$$

$$\frac{1}{k_r} |\{k \in I_r : M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \geq \epsilon\}| \geq \frac{\delta}{1 + \delta} \frac{1}{h_r} |\{k \in I_r : M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \geq \epsilon\}|.$$

Nga ana tjetër, nga fakti se M plotëson kushtet $M(x) \leq 2M(1)\delta^{-1}x$, për çdo $x \geq \delta$ dhe $0 < \delta < 1$ (shihe [52]), atëherë do të përfitojmë

$$(2.3.2) \quad M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \leq K \cdot |A_i(u\Delta^m x) - se|,$$

për ndonjë konstante $K > 0$, në të dy raste kur

$$|A_i(u\Delta^m x) - se| \leq 1 \text{ dhe } |A_i(u\Delta^m x) - se| \geq 1.$$

Në rastin e parë, ajo rrjedh drejtpërdrejtë, nga përkufizimi i funksionit modular. Në rastin e dytë kemi këtë:

$$|A_i(u\Delta^m x) - se| = 2 \cdot L^{(1)} = 2^2 \cdot L^{(2)} = \dots = 2^s \cdot L^{(s)},$$

ashtu që $L^{(s)} \leq 1$. Duke marrë parasysh dy relacionet e fundit, do të fitojmë:

$$(2.3.3) \quad M(|A_i(u\Delta^m x) - se|) \leq T \cdot L^{(s)} \cdot M(1) = K \cdot |A_i(u\Delta^m x) - se|,$$

ku T dhe K , janë konstante. Tani vërtetimi i teoremës merret nga relacionet 2.3.2 dhe 2.3.3. $\square$

2.3.3 Vargjet e përkufizuara sipas Cesáro's- (A, u, Δ^m)

Në këtë pjesë do të shohim hapësirën e vargjeve të ndërtuara me anë të shumueshmërisë sipas Cesáros.

Le të shënojmë me

$$N^c(A, F, u, \Delta^m) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) = 0, \text{ për ndonjë } s \right\},$$

dhe $N^{c0}(A, F, u, \Delta^m)$, ku $s = 0$. Gjithashtu

$$N_\theta^c(A, F, u, \Delta^m) = \left\{ x = (x_i) : \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{h_r} \sum_{i \in I_r} f_i(|A_i(u\Delta^m x) - se|) = 0, \text{ për ndonjë } s \right\},$$

dhe $N_\theta^{c0}(A, F, u, \Delta^m)$, në rastin kur $s = 0$.

Vërtetimi i teoremës është i ngjashëm me vërtetimin e teoremave 5.1 dhe 5.2, të dhëna në punimin [8]. Për këtë arsye këtu nuk do ta japim.

Teoremë 2.3.12. [13] *Le të jetë M , një funksion modular. Atëherë,*

1. Nëse $\liminf q_r > 1$, atëherë $N^c(A, F, u, \Delta^m) \subset N_\theta^c(A, F, u, \Delta^m)$

2. Nëse $\limsup q_r < \infty$, atëherë $N_\theta^c(A, F, u, \Delta^m) \subset N^c(A, F, u, \Delta^m)$

3. Nëse $1 < \liminf q_r < \limsup q_r < \infty$, atëherë $N^c(A, F, u, \Delta^m) = N_\theta^c(A, F, u, \Delta^m)$

Teoremë 2.3.13. [13] *Le të jetë M , një funksion modular. Atëherë,*

1. Nëse $\liminf q_r > 1$, atëherë $N^{c0}(A, F, u, \Delta^m) \subset N_\theta^{c0}(A, F, u, \Delta^m)$

2. Nëse $\limsup q_r < \infty$, atëherë $N_\theta^{c0}(A, F, u, \Delta^m) \subset N^{c0}(A, F, u, \Delta^m)$

3. Nëse $1 < \liminf q_r < \limsup q_r < \infty$, atëherë $N^{c0}(A, F, u, \Delta^m) = N_\theta^{c0}(A, F, u, \Delta^m)$

Kapitulli 3

Teoremat e Korovkin-it dhe Voronoj-it

3.1 Teorema e dytë e Korovkin-it për Λ^2 —shumueshmëritë statistikore

Themi se vargu (x_n) është Λ^2 — i shumueshëm te L nëse $\lim_n \Lambda^2 = L$.

Përkufizim 3.1.1. Themi se vargu (x_n) është statistikisht i shumueshëm te L me metodën me peshë të përkufizuar me anë të vargut Λ^2 , nëse $st - \lim_n \Lambda^2 = L$.

Shënojmë me $\Lambda^2(st)$ bashkësinë e të gjitha vargjeve të cilat konvergjojnë statistikisht përmes shumueshmërisë Λ^2 .

Me $F(\mathbb{R})$ do të shënojmë hapësirën lineare të të gjitha funksioneve me vlera reale të definuara në $\mathbb{R}$, ndërsa me $C(\mathbb{R})$ do të shënojmë hapësirën e të gjitha funksioneve të kufizuara dhe të vazhdueshme në $\mathbb{R}$. Është e njohur se $C(\mathbb{R})$ është hapësirë e Banach-ut në lidhje me normën

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|, f \in C(\mathbb{R}).$$

Hapësirën e të gjitha funksioneve periodike me periodë 2π dhe të vazhdueshme, do ta shënojmë me $C_{2\pi}(\mathbb{R})$, e cila po ashtu është hapësirë e Banach-ut me normën e përkufizuar me

$$\|f\|_{2\pi} = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Teoremë 3.1.1. [39] *Le të jetë (T_n) , një varg i operatorëve pozitivë të definuar nga $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ në $C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Atëherë,*

$$(3.1.1) \quad \Lambda^2(st)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f, x) - f(x)\|_{2\pi} = 0 \text{ për } f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$$

atëherë dhe vetëm atëherë

$$(3.1.2) \quad \Lambda^2(st)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \|T_n(f_i, x) - f_i(x)\|_{2\pi} = 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

ku $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = \cos x$ dhe $f_2(x) = \sin x$.

Vërtetim. Le të konsiderojmë se relacioni (3.1.1) është i vërtetë për çdo $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Atëherë, është i vërtetë edhe në rastin e veçantë për test funksionet: $f(x) = 1$, $f(x) = \cos x$ dhe $f(x) = \sin x$, dhe relacioni (3.1.2) vlen. Tani duhet të provojmë të kundërtën. Le të supozojmë se relacioni (3.1.2) është i vërtetë dhe do të provojmë se (3.1.1) vlen gjithashtu. Le të jetë $I = (a, a + 2\pi]$ një nëninterval i gjatësisë 2π nga $\mathbb{R}$. Le të fiksojmë $x \in I$. Nga konditat e dhëna për funksionin $f(x)$, vlen:

$$(3.1.3) \quad (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta(\epsilon) > 0) \rightarrow |f(t) - f(x)| < \epsilon,$$

për çdo t , gjithashtu që $|t - x| < \delta$. Nëse $|t - x| \geq \delta$. Le të konsiderojmë se $t \in (x + \delta, 2\pi + x + \delta]$, atëherë kemi:

$$(3.1.4) \quad |f(t) - f(x)| \leq 2\|f\|_{2\pi} \leq \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t)$$

ku $\psi(t) = \sin^2 \left(\frac{t-x}{2} \right)$. Nga relacionet (3.1.3) dhe (3.1.4) për ndonjë $x \in I$ të fiksuar dhe për çdo t fitojmë:

$$(3.1.5) \quad |f(t) - f(x)| \leq \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) + \epsilon.$$

Respektivisht,

$$-\epsilon - \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) < f(t) - f(x) < \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) + \epsilon.$$

Duke aplikuar operatorin $T_n(1, x)$ në këtë jobarazim, marrim:

$$T_k(1, x) \left(-\epsilon - \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) \right) < T_k(1, x) (f(t) - f(x)) < T_k(1, x) \left(\frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \psi(t) + \epsilon \right).$$

Meqë vlera e x është fikse, kjo d.m.th. se $f(x)$ është konstant dhe relacioni i mësipërm merrë trajtën:

$$(3.1.6) \quad -\epsilon T_k(1, x) - \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} T_k(\psi(t), x) < T_k(f, x) - f(x) T_k(1, x) < \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} T_k(\psi(t), x) + \epsilon T_k(1, x).$$

Nga ana tjetër

$$(3.1.7) \quad T_k(f, x) - f(x) = T_k(f, x) - f(x) T_k(1, x) + f(x) [T_k(1, x) - 1].$$

Nga relacionet (3.1.6) dhe (3.1.7) merret:

$$(3.1.8) \quad T_k(f, x) - f(x) < \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} T_k(\psi(t), x) + \epsilon T_k(1, x) + f(x) [T_k(1, x) - 1].$$

Le të vlerësojmë tani shprehjen:

$$\begin{aligned} T_k(\psi(t), x) &= T_k \left(\sin^2 \left(\frac{t-x}{2} \right), x \right) = T_k \left(\frac{1}{2} (1 - \cos t \cos x - \sin t \sin x), x \right) \\ &= \frac{1}{2} \{ T_k(1, x) - \cos x T_k(\cos t, x) - \sin x T_k(\sin t, x) \} \\ &= \frac{1}{2} \{ [T_k(1, x) - 1] - \cos x [T_k(\cos t, x) - \cos x] - \sin x [T_k(\sin t, x) - \sin x] \} \end{aligned}$$

Nga relacioni i fundit dhe (3.1.8), marrim

$$\begin{aligned}
 T_k(f, x) - f(x) &< \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} \left\{ [T_k(1, x) - 1] - \cos x [T_k(\cos t, x) - \cos x] \right. \\
 &\quad \left. - \sin x [T_k(\sin t, x) - \sin x] \right\} + \epsilon T_k(1, x) + f(x) [T_k(1, x) - 1] \\
 &= \epsilon + \epsilon [T_k(1, x) - 1] + f(x) [T_k(1, x) - 1] + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \frac{1}{2} \left\{ [T_k(1, x) - 1] \right. \\
 &\quad \left. - \cos x [T_k(\cos t, x) - \cos x] - \sin x [T_k(\sin t, x) - \sin x] \right\}.
 \end{aligned}$$

Për këtë shkakë,

$$\begin{aligned}
 |T_k(f, x) - f(x)| &\leq \epsilon + \left(\epsilon + |f(x)| + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) |T_k(1, x) - 1| \\
 &\quad + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \left\{ |\cos x| \cdot |T_k(\cos t, x) - \cos x| \right. \\
 &\quad \left. + |\sin x| \cdot |T_k(\sin t, x) - \sin x| \right\} \\
 &\leq \epsilon + \left(\epsilon + |f(x)| + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right) |T_k(1, x) - 1| \\
 &\quad + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \left\{ |T_k(\cos t, x) - \cos x| + |T_k(\sin t, x) - \sin x| \right\}.
 \end{aligned}$$

Duke marrë $\sup_{x \in I}$ në relacionin e sipërm, fitojmë:

$$\begin{aligned}
 \|T_k(f, x) - f(x)\|_{2\pi} &\leq \epsilon + K \left(\|T_k(1, x) - 1\|_{2\pi} + \|T_k(\cos t, x) - \cos x\|_{2\pi} \right. \\
 &\quad \left. + \|T_k(\sin t, x) - \sin x\|_{2\pi} \right),
 \end{aligned}$$

ku

$$K = \max \left\{ \epsilon + \|f\|_{2\pi} + \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}}, \frac{2\|f\|_{2\pi}}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} \right\}.$$

Zëvendësojmë $T_k(., x)$ me

$$\Lambda^2(., x) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k T_k(., x) - 2\lambda_{k-1} T_{k-1}(., x) + \lambda_{k-2} T_{k-2}(., x))$$

në të dy anët e relacionit më sipër. Për $r > 0$ të dhënë, mund të zgjedhet ϵ_1 i tillë që $\epsilon_1 < r$. Tani definojmë këto bashkësi:

$$D = \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|\Lambda^2(f, x) - f(x)\|_{2\pi} \geq r \right\},$$

$$D_i = \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|\Lambda^2(f_i, x) - f_i(x)\|_{2\pi} \geq \frac{r - \epsilon_1}{3K} \right\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

Atëherë, $D \subset \cup_{i=0}^2 D_i$ dhe për densitetin e tyre plotësohet relacioni:

$$\delta(D) \leq \delta(D_0) + \delta(D_1) + \delta(D_2).$$

Përfundimisht, nga relacioni (3.1.2) dhe ai më lart merret:

$$\Lambda^2(st)\text{-}\lim_n \|\Lambda^2(f, x) - f(x)\|_{2\pi} = 0,$$

me çka u vërtetua teorema. □

Vërejtje 3.1.1. [39] Nëse merret $\lambda_n = n^2$, atëherë teorema e jonë 3.1.1 reduktohet në Teoremën 2.1 nga [45].

3.1.1 Shkalla e konvergjencës sipas Λ^2 – konvergjencës statistikore

Në këtë pjesë do të shqyrtojmë shkallën e Λ^2 – statistikisht konvergjencës për operatorët pozitivë linear nga hapësira $C_{2\pi}(\mathbb{R})$.

Përkufizim 3.1.2. Le të jetë (a_n) varg i numrave pozitivë, jo-zvogëlues. Them i se vargu $x = (x_n)$ është Λ^2 – statistikisht konvergjent te numri L , me shkallë të konvergjencës $o(a_n)$, nëse për çdo $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \frac{1}{a_n} |\{m \leq n : |T_m - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Simbolikisht shënojmë

$$x_n - L = \Lambda^2(st) - o(a_n).$$

Lemë 3.1.2. [39] Le të jenë (a_n) dhe (b_n) dy vargje të numrave pozitivë dhe jo-zvogëlues, dhe le të jenë po ashtu $x = (x_n)$ dhe $y = (y_n)$ dy vargje të tilla që

$$x_n - L_1 = \Lambda^2(st) - o(a_n) \text{ dhe } y_n - L_2 = \Lambda^2(st) - o(b_n).$$

Atëherë,

$$1. \alpha(x_n - L) = \Lambda^2(st) - o(a_n), \text{ për çdo numër të dhënë } \alpha,$$

$$2. (x_n - L_1) \pm (y_n - L_2) = \Lambda^2(st) - o(c_n),$$

$$3. (x_n - L_1)(y_n - L_2) = \Lambda^2(st) - o(a_n b_n),$$

ku $c_n = \max \{a_n, b_n\}$.

Tani do të marrim kuptimin e modulit të vazhdueshmërisë.

Moduli i vazhdueshmërisë për funksionin $f(x) \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, jepet me anë të relacionit:

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|h| < \delta} |f(x+h) - f(x)|.$$

Dihet se për çdo vlerë të shprehjes $|x - y|$, vlen([56]):

$$(3.1.9) \quad |f(x) - f(y)| \leq \omega(f, \delta) \left(\frac{|x - y|}{2} + 1 \right).$$

Vlen ky pohim:

Teoremë 3.1.3. [39] *Le të jetë (T_n) , një varg i operatorëve linear pozitivë nga $C_{2\pi}(\mathbb{R})$ në $C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Supozojmë se*

$$1. \|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi} = \Lambda^2(st) - o(a_n),$$

$$2. \omega(f, \lambda_k) = \Lambda^2(st) - o(b_n), \text{ ku}$$

$$\lambda_n = \sqrt{T_n(\phi_x, x)} \text{ dhe } \phi_x(y) = (y - x)^2.$$

Atëherë, për çdo $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$, vlen:

$$\|T_n(f, x) - f(x)\|_{2\pi} = \Lambda^2(st) - o(c_n),$$

ku $c_n = \max \{a_n, b_n\}$.

Vërtetim. Le të jetë $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$ dhe $x \in [-\pi, \pi]$. Nga relacioni (3.1.7) dhe (3.1.9) merret ky vlerësim:

$$\begin{aligned} |T_n(f, x) - f(x)| &\leq |T_n(|f(y) - f(x)|, x)| + |f(x)| \cdot |T_n(1, x) - 1| \\ &\leq T_n\left(\frac{|x - y|}{\delta} + 1, x\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |T_n(1, x) - 1| \\ (\text{Joba. i Cauchy-Schwartz}) &\leq \frac{1}{\delta} (T_n((x - y)^2, x))^{\frac{1}{2}} (T_n(1, x))^{\frac{1}{2}} \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |T_n(1, x) - 1|. \end{aligned}$$

Duke vënë

$$\delta = \lambda_n = \sqrt{T_n(\phi_x, x)}$$

në relacionin e fundit, atëherë kemi:

$$\begin{aligned} &\|T_n(f, x) - f(x)\|_{2\pi} \\ &\leq \|f\|_{2\pi} \|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi} + 2\omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi} + \omega(f, \lambda_n) \sqrt{\|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi}} \\ &\leq C \left\{ \|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi} + \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi} + \omega(f, \lambda_n) \sqrt{\|T_n(1, x) - 1\|_{2\pi}} \right\}, \end{aligned}$$

ku

$$C = \max \{ \|f\|_{2\pi}, 2 \}.$$

Duke zëvendësuar $T_k(., x)$ me

$$\Lambda^2(., x) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k T_k(., x) - 2\lambda_{k-1} T_{k-1}(., x) + \lambda_{k-2} T_{k-2}(., x)),$$

merret

$$\|\Lambda^2(f, x) - f(x)\|_{2\pi} \leq C \left\{ \|\Lambda^2(1, x) - 1\|_{2\pi} + \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|\Lambda^2(1, x) - 1\|_{2\pi} \right\}.$$

Tani vërtetimi i pohimit merret nga relacionet 1. dhe 2.

□

Në shembullin e mëposhtëm tregojmë se Teorema 3.1.1 është më e fortë se sa Teorema 1.5.4.

Shembull 3.1.4. Për çdo $n \in \mathbb{N}$, shënojmë me $S_n(f)$ shumën e pjesshme të n -të, të serisë Fourier për funksionin f , d.m.th

$$S_n(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

Le të konsiderojmë këtë shprehje:

$$\Lambda^2(f, x) = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k - 2\lambda_{k-1} + \lambda_{k-2}) S_k(f).$$

Dimë se $\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^2(f, x) = f$ (shihet [7]), dhe shënojmë me $L_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R})$ të përkufizuar me anë të:

$$L_n(f, x) = (1 + x_n) \Lambda^2(f, x)$$

ku (x_n) është i përkufizuar me:

$$(3.1.10) \quad x_n := \begin{cases} 1, & (n \text{ teke}) \\ -1, & (n \text{ çift}). \end{cases}$$

Pas disa njehësimeve merret se:

$$\Lambda^2(1, x) = 1,$$

$$\Lambda^2(\cos t, x) = \cos x,$$

$$\Lambda^2(\sin t, x) = \sin x.$$

Shohim se konditat (3.1.2) plotësohen dhe nga Teorema 3.1.1 merret se

$$\Lambda^2(st)\text{-}\lim_n \|L_n(f, x) - f\|_{2\pi} = 0,$$

mirëpo, Teorema 1.5.4 nuk plotësohet.

Vërejtje 3.1.2. [39] Bazuar në shembullin e mësipërm dhe vërejtjen 3.1.1, shohim se teorema 3.1.1 në punimin tonë është më e fortë edhe se sa Theorem 2.1 e dhënë nga autorët [45].

3.1.2 Teorema e parë e Korovkin-it dhe Voronoj-it sipas Λ^2 — konvergjencës statistikore

Në këtë pjesë do të bëjmë zgjerimin e rezultateve të dhëna nga autorët Boyanov dhe të tjerët në punimin ([2]), duke shfrytëzuar kuptimin e shumueshmërisë Λ^2 — të përkufizuar më lart.

Le të jetë $C(I)$, hapësira e Banachut e të gjitha funksioneve dydimensionale të vazhdueshme në $I = [0, \infty)$, me normën $\|\cdot\|_\infty$, të tilla që $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ është i fundmë. Le të supozojmë se $B_n : C(I) \rightarrow C(I)$. Shënojmë me $B_n(f; x)$ për $B_n(f(s); x)$.

Teoremë 3.1.5. [11] *Le të jetë (B_k) , një varg i operatorëve linear pozitivë nga $C(I)$ në $C(I)$. Atëherë, për çdo $f \in C(I)$*

$$(3.1.11) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - f(x)\|_\infty = 0$$

atëherë dhe vetëm atëherë, nëse vlen

$$(3.1.12) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - 1\|_\infty = 0,$$

$$(3.1.13) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - e^{-x}\|_\infty = 0,$$

$$(3.1.14) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - e^{-2x}\|_\infty = 0.$$

Vërtetim. Le të supozojmë se relacioni (3.1.11) është i vërtet, përderisa funksionet $1, e^{-x}, e^{-2x}$ janë të vazhdueshëm, atëherë relacionet (3.1.12), (3.1.13) dhe (3.1.14) rrjedhin drejtpërdrejt nga relacioni (3.1.11). Tani do të provojmë të anasjelltën, se relacionet (3.1.12-3.1.14) janë të vërteta dhe duhet treguarë se vlen edhe relacioni (3.1.11). Le të jetë $f \in C(I)$. Atëherë, gjendet një konstante $K > 0$ e tillë që $|f(x)| \leq K$ për çdo $x \in (I)$. Prej nga merret se

$$(3.1.15) \quad |f(t) - f(x)| \leq 2K, x \in I.$$

Për çdo $\epsilon > 0$, gjendet një $\delta > 0$ ashtu që

$$(3.1.16) \quad |f(t) - f(x)| \leq \epsilon$$

gjithsaherë që $|e^{-t} - e^{-x}| < \delta$, për çdo $x \in (I)$. Le të shënojmë me $\psi \equiv \psi(t, x) = (e^{-t} - e^{-x})^2$. Nëse $|t - x| \geq \delta$, atëherë merret:

$$(3.1.17) \quad |f(t) - f(x)| \leq \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x).$$

Tani nga relacionet (3.1.15)-(3.1.17) do të kemi

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon + \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x).$$

Respektivisht,

$$-\epsilon - \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x) < f(t) - f(x) < \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x) + \epsilon.$$

Duke zbatuar operatorin $B_k(1, x)$ në jobarazimin e fundit, meqë $B_k(1, x)$ është monoton dhe linear, do të kemi:

$$\begin{aligned} B_k(1, x) \left(-\epsilon - \frac{2K}{\delta^2} \psi \right) &< B_k(1, x) (f(t) - f(x)) < B_k(1, x) \left(\frac{2K}{\delta^2} \psi + \epsilon \right) \Rightarrow \\ (3.1.18) \quad -\epsilon B_k(1, x) - \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) &< B_k(f, x) - f(x) B_k(1, x) < \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) + \epsilon B_k(1, x). \end{aligned}$$

Nga ana tjetër

$$(3.1.19) \quad B_k(f, x) - f(x) = B_k(f, x) - f(x) B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1].$$

Nga relacionet (3.1.18) dhe (3.1.19) vlen:

$$(3.1.20) \quad B_k(f, x) - f(x) < \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) + \epsilon B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1].$$

Tani vlerësojmë shprehjen:

$$\begin{aligned} B_k(\psi(t), x) &= B_k((e^{-x} - e^{-t})^2, x) = B_k((e^{-2x} - 2e^{-x}e^{-t} + e^{-2t}), x) \\ &= e^{-2x} B_k(1, x) - 2e^{-x} B_k(e^{-t}, x) + B_k(e^{-2t}, x) \end{aligned}$$

Nga relacioni i fundit dhe ai (3.1.20), marrim

$$\begin{aligned} B_k(f, x) - f(x) &< \frac{2K}{\delta^2} \left\{ e^{-2x} [B_k(1, x) - 1] - 2e^{-x} [B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}] \right. \\ &\quad \left. + [B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}] \right\} + \epsilon B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1] \\ &= \epsilon + \epsilon [B_k(1, x) - 1] + f(x) [B_k(1, x) - 1] + \\ &\quad \frac{2K}{\delta^2} \left\{ e^{-2x} [B_k(1, x) - 1] - 2e^{-x} [B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}] \right. \\ &\quad \left. + [B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}] \right\}. \end{aligned}$$

Për këtë arsye,

$$\begin{aligned} |B_k(f, x) - f(x)| &\leq \epsilon + \left(\epsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} \right) |B_k(1, x) - 1| \\ &\quad + \frac{4K}{\delta^2} |B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}| \\ &\quad + \frac{2K}{\delta^2} |B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}|. \end{aligned}$$

Duke marrë supremumin e shprehjes së mësipërme, $\sup_{x \in I}$ vlen:

$$\begin{aligned} \|B_k(f, x) - f(x)\|_{C(I)} \leq & \epsilon + M \left(\|B_k(1, x) - 1\|_{C(I)} + \|B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}\|_{C(I)} \right. \\ & \left. + \|B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}\|_{C(I)} \right), \end{aligned}$$

ku

$$M = \max \left\{ \epsilon + K + \frac{2K}{\delta^2}, \frac{4K}{\delta^2} \right\}.$$

Duke zëvendësuar $B_k(., x)$ me

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k B(., x) - 2\lambda_{k-1} B(., x) + \lambda_{k-2} B(., x))$$

në jobarazinë e mësipërme në të dy anët. Për $r > 0$ të dhënë, zgjedhim një ϵ_1 të tillë që $\epsilon_1 < r$. Tani përkufizojmë këto bashkësi:

$$D = \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|\Lambda^2(f, x) - f(x)\|_{C(I)} \geq r \right\},$$

$$D_i = \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|\Lambda^2(f_i, x) - f_i(x)\|_{C(I)} \geq \frac{r - \epsilon_1}{3K} \right\}, \quad i = 0, 1, 2.$$

atëherë $D \subset \cup_{i=0}^2 D_i$ dhe për densitetin natyrorë të tyre kemi këtë vlerësim:

$$\delta(D) \leq \delta(D_0) + \delta(D_1) + \delta(D_2).$$

Në fund, nga relacionet (3.1.12)-(3.1.14) dhe vlerësimet e fundit merret se:

$$\Lambda^2(st) - \lim_n \|\Lambda^2(f; x) - f(x)\|_\infty = 0,$$

dhe me këtë përfundon vërtetimi i teoremës. □

Teorema e mësipërme është e vërtet edhe për test funksionet $f_i(x) = x^i$, për $i \in \{0, 1, 2\}$.

Vërejtje 3.1.3. [11] Le të jetë (B_k) , varg operatorësh linear dhe pozitivë nga $C(I)$ në $C(I)$. Atëherë, për çdo $f \in C(I)$

$$(3.1.21) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - f(x)\|_\infty = 0$$

atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$(3.1.22) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - 1\|_\infty = 0,$$

$$(3.1.23) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - x\|_\infty = 0,$$

$$(3.1.24) \quad \Lambda^2(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - x^2\|_\infty = 0.$$

Në vijim japim një shembull përmes të cilit tregohet se teorema jonë 3.1.5, është më e përgjithësuar se sa ajo e dhënë në punimin [2].

Shembull 3.1.6. *Do ta ndërtojmë shembullin përmes operatorëve të Baskakovit, si në vijim*

$$V_n(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} x^k \cdot (1+x)^{-(n+k)},$$

ku $x \in [0, \infty)$, (see [59]). Le të jetë $L_n : C(I) \rightarrow C(I)$ i përkufizuar si më poshtë:

$$L_n(f, x) = (1+x_n)V_n(f, x),$$

ku $x = (x_n)$ është i përkufizuar në shembullin 3.1.4. Vlen të theksohet se ky varg është statistikisht i shumueshëm Λ^2 te 0, mirëpo nuk është konvergjent e as statistikisht konvergjent. Kemi këtë vlerësim:

$$L_n(1, x) = 1,$$

$$L_n(e^{-s}, x) = (1+x - xe^{-\frac{1}{n}})^{-n},$$

$$L_n(e^{-2s}, x) = (1+x - xe^{-\frac{2}{n}})^{-n}.$$

Ku nga teorema 3.1.5 rrjedh se

$$\Lambda^2(st) - \lim_n \|L_n(f; x) - f(x)\|_{\infty} = 0.$$

Nga vlerësimet e mësipërme merret se vargu i operatorëve L_n nuk i plotëson konditat e teoremës së dhënë nga autorët Boyanov dhe Veselinov (shihe [2]). Pra teorema e jonë është më e fort se sa ajo e Boyanov dhe Veselinov (shihe [2]).

3.1.3 Shkalla e konvergjencës

Në këtë pjesë do të shohim shkallën e konvergjencës së vargut të operatorëve pozitivë linear përmes konvergjencës Λ^2 të përkufizuar në segmentin $C[a, b]$. Fillojmë me këtë përkufizim.

Përkufizim 3.1.3. Le të jetë (a_n) një varg i numrave pozitivë, jozvogëlues. Themi se vargu $x = (x_n)$ është Λ^2 —statistikisht konvergjent te numri L me shkallë të konvergjencës $o(a_n)$, nëse për çdo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n(\lambda_n - \lambda_{n-1})} |\{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1} x_{k-1} + \lambda_{k-2} x_{k-2}) - L| \geq \epsilon\}| = 0.$$

Në këtë rast shënojmë

$$x_k - L = st_{\Lambda^2} - o(a_n).$$

Lemë 3.1.7. [11] *Le të jenë (a_n) dhe (b_n) dy vargje të numrave pozitivë jozvogëlues. Le të jenë po ashtu edhe $x = (x_n)$ dhe $y = (y_n)$ dy vargje të tilla që*

$$x_n - L_1 = st_{\Lambda^2} - o(a_n) \text{ dhe } y_n - L_2 = st_{\Lambda^2} - o(b_n).$$

Atëherë,

1. $(x_n - L_1) \pm (y_n - L_2) = st_{\Lambda^2} - o(c_n)$,
2. $\alpha(x_n - L) = st_{\Lambda^2} - o(a_n)$, për çdo numër të dhënë α ,
3. $(x_n - L_1)(y_n - L_2) = st_{\Lambda^2} - o(a_n b_n)$,

ku $c_n = \max \{a_n, b_n\}$.

Vërtetim. Mjafton të tregohet vetëm relacioni i parë sepse dy relacionet tjera merren në mënyrë analoge. Për çdo $\epsilon > 0$, le të shënojmë me

$$\begin{aligned} A_1 &= \{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) + \\ &\quad (\lambda_k y_k - 2\lambda_{k-1}y_{k-1} + \lambda_{k-2}y_{k-2}) - (L_1 + L_2)| \geq \epsilon\}, \\ A_2 &= \left\{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k x_k - 2\lambda_{k-1}x_{k-1} + \lambda_{k-2}x_{k-2}) - L_1| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}, \\ A_3 &= \left\{k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} : |(\lambda_k y_k - 2\lambda_{k-1}y_{k-1} + \lambda_{k-2}y_{k-2}) - L_2| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Atëherë, shihet se $A_1 \subset A_2 \cup A_3$. Aqë më tepër, nga

$$c_n = \max \{a_n, b_n\},$$

marrim:

$$(3.1.25) \quad \frac{|A_1|}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot c_n} \leq \frac{|A_2|}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot a_n} + \frac{|A_3|}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot b_n}.$$

Duke vepruarë me limit në të dy anët e relacionit të mësipërm kur $n \rightarrow \infty$ ((3.1.25)) dhe duke u bazuar në supozimet e bëra, do të marrim

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_1|}{(\lambda_n - \lambda_{n-1}) \cdot c_n} = 0,$$

me çka është provuar teorema. □

Vlen pohimi i mëposhtëm

Teoremë 3.1.8. [11] *Le të jetë (B_n) , një varg i operatorëve linear pozitivë të përkufizuar nga $C[a, b]$ në $C[a, b]$. Supozojmë gjithashtu se*

1. $\|B_n(1, x) - 1\|_\infty = st_{\Lambda^2} - o(a_n)$,
2. $\omega(f, \lambda_n) = st_{\Lambda^2} - o(b_n)$, ku $\lambda_n = \sqrt{B_n(\psi, x)}$ dhe $\psi \equiv \psi(t, x) = (e^{-t} - e^{-x})^2$.

Atëherë, për çdo $f \in C[a, b]$ dhe $x \in [a, b]$, vlen:

$$\|B_n(f, x) - f(x)\|_\infty = st_{\Lambda^2} - o(c_n),$$

ku $c_n = \max \{a_n, b_n\}$.

Vërtetim. Le të jetë $f \in C[a, b]$ dhe $x \in [a, b]$. Nga relacionet (3.1.19) dhe (3.1.9) merret vlerësimi:

$$\begin{aligned} |B_n(f, x) - f(x)| &\leq |B_n(|f(y) - f(x)|, x)| + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\ &\leq B_n\left(\frac{|x - y|}{\delta} + 1, x\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\ &\leq B_n\left(1 + \frac{M}{\delta}(e^{-t} - e^{-x})^2, x\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\ &\leq \left(B_n(1, x) + \frac{M}{\delta} B_n(\psi, x)\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1|. \end{aligned}$$

Duke vënë

$$\delta = \frac{\lambda_n^2}{M} = \frac{B_n(\psi, x)}{M},$$

në relacionin e fundit do të kemi:

$$\begin{aligned} \|B_n(f, x) - f(x)\|_\infty &\leq \|f\|_\infty \|B_n(1, x) - 1\|_\infty + \omega(f, \lambda_n) \\ &\quad + \omega(f, \lambda_n) \|B_n(1, x) - 1\|_\infty \\ &\leq C \{ \|B_n(1, x) - 1\|_\infty + \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|B_n(1, x) - 1\|_\infty \}, \end{aligned}$$

ku

$$C = \max \{ \|f\|_\infty, 1 \}.$$

Tani duke zëvendësuar $B_k(., x)$ me

$$\Lambda^2 = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \sum_{k=0}^n (\lambda_k B_k(., x) - 2\lambda_{k-1} B_{k-1}(., x) + \lambda_{k-2} B_{k-2}(., x)),$$

merret

$$\|\Lambda^2(f, x) - f(x)\|_\infty \leq C \{ \|\Lambda^2(1, x) - 1\|_\infty + \omega(f, \lambda_n) + \omega(f, \lambda_n) \|\Lambda^2(1, x) - 1\|_\infty \}.$$

Tani vërtetimi merret nga relacionet 1., 2. dhe Lemma 3.1.7.

□

3.1.4 Teorema e Voronoj-it

Në këtë pjesë ne do të shohim operatorët pozitivë L_n , të përkufizuar në shembullin 3.1.6 dhe do të tregojmë se këta operatorë plotësojnë një formë të teoremës së Voronoj-it, në lidhje me shumueshmërinë $\Lambda^2(st)$. Së pari do të tregojmë këtë Lemë. Forma bazike e këtij pohimi është dhënë në [58].

Lemë 3.1.9. [11] Për $x \in [0, 1]$, $\Phi(y) = y - x$ atëherë

$$n^2 L_n(\Phi^4) \sim 3x^2(1+x)^2(\Lambda^2(st)) \quad \text{në } [0, 1].$$

Vërtetim. Pas disa njehsimeve ne marrim se vlen:

$$n^2 L_n(\Phi^4) = n^2(1+x_n) \left[\frac{3x^2(1+x)^2}{n^2} + \frac{x(1+x)(6x^2+6x+1)}{n^3} \right].$$

Prej nga merret se

$$\begin{aligned} & \left| n^2 L_n(\Phi^4) - 3x^2(1+x)^2 \right| = \\ & \left| (1+x_n)3x^2(1+x)^2 + (1+x_n) \frac{x(1+x)(6x^2+6x+1)}{n} - 3x^2(1+x)^2 \right| \leq \\ & 3x^2(1+x)^2 |(1+x_n) - 1| + \left| (1+x_n) \frac{x(1+x)(6x^2+6x+1)}{n} \right| \rightarrow 0(\Lambda^2(st)), \end{aligned}$$

në $[0, 1]$. Me çka është vërtetuar Lema. $\square$

Tani do të formulojmë teoremën e Voronoj-it për operatorët L_n , të përkufizuar në shembullin 3.1.6.

Teoremë 3.1.10. [11] Për çdo $f \in C[0, 1]$ të tillë që $f', f'' \in C[0, 1]$, atëherë

$$n(L_n(f) - f) \sim \frac{1}{2}(x+x^2)f''(x)(\Lambda^2(st))$$

në $[0, 1]$.

Vërtetim. Le të supozojmë se $f', f'' \in C[0, 1]$ dhe $x \in [0, 1]$. Përkufizojmë

$$\psi_x(y) = \begin{cases} \frac{f(y)-f(x)-(y-x)f'(x)-\frac{1}{2}(y-x)^2f''(x)}{(y-x)^2} & \text{për } x \neq y \\ 0 & x = y. \end{cases}$$

Atëherë, $\psi_x(x) = 0$ dhe $\psi_x \in C[0, 1]$. Nga formula e Tejlorit, marrim

$$(3.1.26) \quad f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \frac{1}{2}(y-x)f''(x) + (y-x)^2\psi_x(y).$$

Duke ditur se

$$L_n(1, x) = (1+x_n); L_n((y-x), x) = 0 \quad \text{dhe} \quad L_n((y-x)^2, x) = (1+x_n) \frac{x(1+x)}{n},$$

dhe pas veprimit me operatorët L_n , në të dy anët e relacionit (3.1.26), përfitojmë:

$$L_n(f) = f(x) + x_n f(x) + \frac{f''(x)}{2} \frac{x(1+x)}{n} (1+x_n) + (1+x_n) V_n(\Phi^2 \psi_x, x),$$

dhe nga kjo rrjedh

$$\left| n[L_n(f) - f(x)] - \frac{1}{2}(x+x^2)f''(x) \right| \leq nx_n |f(x)| + x_n |f''(x)| + n(1+x_n) |V_n(\Phi^2 \psi_x, x)|,$$

respektivisht

$$(3.1.27) \quad \left| n[L_n(f) - f(x)] - \frac{1}{2}(x + x^2)f''(x) \right| \leq nx_n M + n(1 + x_n) |V_n(\Phi^2 \psi_x, x)|,$$

ku $\Phi(y) = y - x$ dhe

$$M = \|f\|_{C[0,1]} + \|f''\|_{C[0,1]}.$$

Më pas duke zbatuar jobarazimin e Cuachy-Schwarz-it në shprehjen e dytë të relacionit (3.1.27), marrim:

$$(3.1.28) \quad n |V_n(\Phi^2 \psi_x, x)| \leq [n^2 V_n(\Phi^4, x)]^{\frac{1}{2}} \cdot [V_n(\psi_x, x)]^{\frac{1}{2}}.$$

Duke vënë $\eta_x(y) = (\psi_x(y))^2$, marrim se $\eta_x(x) = 0$ dhe $\eta_x(\cdot) \in C[0, 1]$. Tani nga Vërejtja 3.1.3, rrjedh se

$$(3.1.29) \quad L_n(\eta_x) \rightarrow 0(\Lambda^2(st)) \quad \text{në} \quad [0, 1].$$

Nga relacionet (3.1.28), (3.1.29) dhe Lema 3.1.9, përfitojmë

$$(3.1.30) \quad L_n(\Phi^2 \psi_x, x) \rightarrow 0(\Lambda^2(st)) \quad \text{në} \quad [0, 1].$$

Për një $\epsilon > 0$, të dhënë, përkufizojmë bashkësitë si në vijim

$$A_n(x, \epsilon) = \left| \left\{ k : k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} \quad \text{dhe} \quad \left| k(V_k(f, x) - f(x)) - \frac{1}{2}(x + x^2)f''(x) \right| \geq \epsilon \right\} \right|,$$

$$A_{1,n}(x, \epsilon) = \left| \left\{ k : k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} \quad \text{dhe} \quad |kx_n| \geq \frac{\epsilon}{2M} \right\} \right|,$$

dhe

$$A_{2,n}(x, \epsilon) = \left| \left\{ k : k \leq \lambda_n - \lambda_{n-1} \quad \text{dhe} \quad |kV_n(\Phi^2 \psi_x, x)| \geq \frac{\epsilon}{2} \right\} \right|.$$

Nga relacionet e fundit merret:

$$A_n(x, \epsilon) \leq A_{1,n}(x, \epsilon) + A_{2,n}(x, \epsilon),$$

përkatësisht

$$(3.1.31) \quad \Lambda^2(A_n(\cdot, \epsilon)) \leq \Lambda^2(A_{1,n}(\cdot, \epsilon)) + \Lambda^2(A_{2,n}(\cdot, \epsilon)).$$

Duke marrë në konsiderim përkufizimin e vargut (x_n) , marrim

$$(3.1.32) \quad nx_n \rightarrow 0(\Lambda^2(st)) \quad \text{on} \quad [0, 1].$$

Tani duke shfrytëzuar relacionet (3.1.30) dhe (3.1.32), ana e djathtë e relacionit (3.1.31), shkon në zero kur $n \rightarrow \infty$. Nga marrim se

$$st - \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^2(A_n(\cdot, \epsilon)) = 0,$$

e cila provon se

$$n(L_n(f) - f) \sim \frac{1}{2}(x + x^2)f''(x)(\Lambda^2(st)),$$

në $[0, 1]$. □

Vërejtje 3.1.4. [11] Përderisa vargu (x_n) i përkufizuar në shembullin 2.2.2, nuk është statistikisht konvergjent, ne përfundojmë se operatorët (L_n) të përkufizuar në shembullin 3.2.2, nuk e plotësojnë teoremën e Voronoj-it në kuptimin e zakonshëm të saj.

3.2 Teorema e Korovkin-it sipas shumueshmërisë së Nörlund-it

Këtu do të zgjerojmë rezultatin e dhënë nga Mursaleen dhe të tjerët në punimin [48] dhe nga autorët Boyanov dhe të tjerët të dhënë në punimin ([2]), duke shfrytëzuar kuptimin e shumueshmërisë sipas Nörlund-it.

Le të shënojmë me $C(I)$, hapësirën e Banach-ut me normën e dhënë në të $\|\cdot\|_\infty$, për të gjitha funksionet reale të vazhdueshme dydimensionale, të përkufizuara në $I = [0, \infty)$; me vetinë që $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, të jetë i fundmë. Supozojmë gjithashtu se operatorët linear janë përkufizuar me $B_n : C(I) \rightarrow C(I)$. Shënojmë me $B_n(f; x)$, për shënimin $B_n(f(s); x)$.

Teoremë 3.2.1. [40] *Le të jetë (B_k) , një varg i operatorëve linear pozitivë nga hapësira $C(I)$ në $C(I)$. Atëherë, për çdo $f \in C(I)$*

$$(3.2.1) \quad N_{p,q}(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - f(x)\|_\infty = 0$$

atëherë dhe vetëm atëherë kur

$$(3.2.2) \quad N_{p,q}(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - 1\|_\infty = 0,$$

$$(3.2.3) \quad N_{p,q}(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - e^{-x}\|_\infty = 0,$$

$$(3.2.4) \quad N_{p,q}(st) - \lim_n \|B_k(f; x) - e^{-2x}\|_\infty = 0.$$

Vërtetim. Le të supozojmë se vlen relacioni (3.2.1), përderisa test funksionet $1, e^{-x}, e^{-2x}$, janë të vazhdueshëm, atëherë relacionet (3.2.2), (3.2.3) dhe (3.2.4) merren drejtpërdrejtë nga relacioni (3.2.1). Tani do të provojmë të anasjelltën: nëse vlejné relacionet (3.2.2-3.2.4), atëherë do të vlejë edhe relacioni (3.2.1). Le të jetë $f \in C(I)$, atëherë gjendet një konstante $K > 0$ me vetinë që $|f(x)| \leq K$ për çdo $x \in (I)$. Për këtë arsye

$$(3.2.5) \quad |f(t) - f(x)| \leq 2K, x \in I.$$

Nga ana tjetër duke shfrytëzuar vazhdueshmërinë e funksionit, për çdo $\epsilon > 0$ gjendet $\delta > 0$, me vetinë që

$$(3.2.6) \quad |f(t) - f(x)| \leq \epsilon$$

gjithsaherë që $|e^{-t} - e^{-x}| < \delta$, për çdo $x \in (I)$. Le të shënojmë me $\psi \equiv \psi(t, x) = (e^{-t} - e^{-x})^2$. Nëse $|e^{-t} - e^{-x}| \geq \delta$, atëherë vlen vlerësimi:

$$(3.2.7) \quad |f(t) - f(x)| \leq \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x).$$

Nga relacionet (3.2.5)-(3.2.7), merret se vlen

$$|f(t) - f(x)| < \epsilon + \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x).$$

Respektivisht,

$$-\epsilon - \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x) < f(t) - f(x) < \frac{2K}{\delta^2} \psi(t, x) + \epsilon.$$

Duke aplikuar operatorin $B_k(1, x)$ në jobarazimin e fundit, duke ditur se $B_k(1, x)$ është monoton dhe linear, kemi:

$$\begin{aligned} B_k(1, x) \left(-\epsilon - \frac{2K}{\delta^2} \psi \right) &< B_k(1, x) (f(t) - f(x)) < B_k(1, x) \left(\frac{2K}{\delta^2} \psi + \epsilon \right) \Rightarrow \\ (3.2.8) \quad -\epsilon B_k(1, x) - \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) &< B_k(f, x) - f(x) B_k(1, x) < \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) + \epsilon B_k(1, x). \end{aligned}$$

Nga ana tjetër

$$(3.2.9) \quad B_k(f, x) - f(x) = B_k(f, x) - f(x) B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1].$$

Prej relacioneve (3.2.8) dhe (3.2.9) përfitojmë:

$$(3.2.10) \quad B_k(f, x) - f(x) < \frac{2K}{\delta^2} B_k(\psi(t), x) + \epsilon B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1].$$

Le të vlerësojmë tani shprehjen:

$$\begin{aligned} B_k(\psi(t), x) &= B_k((e^{-x} - e^{-t})^2, x) = B_k((e^{-2x} - 2e^{-x}e^{-t} + e^{-2t}), x) \\ &= B_k(1, x) - 2e^{-x} B_k(e^{-t}, x) + B_k(e^{-2t}, x) \end{aligned}$$

Nga relacioni i fundit dhe ai (3.2.10), marrim

$$\begin{aligned} B_k(f, x) - f(x) &< \frac{2K}{\delta^2} \left\{ e^{-2x} [B_k(1, x) - 1] - 2e^{-x} [B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}] \right. \\ &\quad \left. + [B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}] \right\} + \epsilon B_k(1, x) + f(x) [B_k(1, x) - 1] \\ &= \epsilon + \epsilon [B_k(1, x) - 1] + f(x) [B_k(1, x) - 1] + \\ &\quad \frac{2K}{\delta^2} \left\{ e^{-2x} [B_k(1, x) - 1] - 2e^{-x} [B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}] \right. \\ &\quad \left. + [B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}] \right\}. \end{aligned}$$

Për këtë arsye,

$$\begin{aligned} |B_k(f, x) - f(x)| &\leq \epsilon + \left(\epsilon + K + \frac{2K}{\delta^2} \right) |B_k(1, x) - 1| \\ &\quad + \frac{4K}{\delta^2} |B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}| \\ &\quad + \frac{2K}{\delta^2} |B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}|. \end{aligned}$$

Duke marrë $\sup_{x \in I}$ në relacionin e fundit, kemi:

$$\begin{aligned} \|B_k(f, x) - f(x)\|_{C(I)} &\leq \epsilon + M \left(\|B_k(1, x) - 1\|_{C(I)} + \|B_k(e^{-t}, x) - e^{-x}\|_{C(I)} \right. \\ &\quad \left. + \|B_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}\|_{C(I)} \right), \end{aligned}$$

ku

$$M = \max \left\{ \epsilon + K + \frac{2K}{\delta^2}, \frac{4K}{\delta^2} \right\}.$$

Tani duke zëvendësuar $B_k(., x)$ me

$$T_n = \frac{1}{R_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} q_v B_v(., x)$$

në të dy anët e relacionit të mësipërm merret:

$$\begin{aligned} \|T_k(f, x) - f(x)\|_{C(I)} &\leq \epsilon + M \left(\|T_k(1, x) - 1\|_{C(I)} + \|T_k(e^{-t}, x) - e^{-x}\|_{C(I)} \right. \\ &\quad \left. + \|T_k(e^{-2t}, x) - e^{-2x}\|_{C(I)} \right). \end{aligned}$$

Për një $r > 0$ të dhënë, zgjedhim ϵ_1 me vetin që $\epsilon_1 < r$. Tani përkufizojmë këto bashkësi:

$$\begin{aligned} D &= \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|T_n(f, x) - f(x)\|_{C(I)} \geq r \right\}, \\ D_i &= \left\{ k \leq \mathbb{N} : \|T_n(f_i, x) - f_i(x)\|_{C(I)} \geq \frac{r - \epsilon_1}{3K} \right\}, \quad i = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

atëherë vlen përfshirja $D \subset \cup_{i=0}^2 D_i$ dhe për densitetin e tyre plotësohet relacioni:

$$\delta(D) \leq \delta(D_0) + \delta(D_1) + \delta(D_2).$$

Në fund, nga relacionet (3.2.2)-(3.2.4) dhe vlerësimi i mësipërm merret se:

$$N_{p,q}(st) - \lim_n \|T_n(f; x) - f(x)\|_{\infty} = 0,$$

çka vërteton teoremën. □

Tani do të japim një shembull përmes të cilit tregojmë se rezultatet e dhëna këtu janë zgjerim i atyre të dhëna në punimet [48] dhe [2].

Shembull 3.2.2. *Le të konsiderojmë këto polinome të modifikuara të Baskakov-it*

$$V_n^{M,p,q}(f, x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k} q_k f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n+k-1}{k} x^k \cdot (1+x)^{-(n+k)},$$

ku $x \in [0, \infty)$ dhe forma bazike e tyre është dhënë në punimin [59].

Le të jetë $L_n : C(I) \rightarrow C(I)$, varg operatorësh të përkufizuar si vijon:

$$L_n(f, x) = (1+x_n) V_n^{M,p,q}(f, x),$$

ku $x = (x_n)$ është i përkufizuar si në shembullin 2.2.2. Kujtojmë se ky varg është statistikisht $N_{p,q}(st)$ –konvergjente te 0, mirëpo nuk konvergjon as në mënyrë të rregullt e as statistikisht. Le të konsiderojmë se $p_n \equiv 2$ dhe $q_n \equiv 1$. Atëherë, do të kemi këtë vlerësim:

$$\begin{aligned} L_n(1, x) &= 2, \\ L_n(e^{-s}, x) &= 2(1 + x - xe^{-\frac{1}{n}})^{-n}, \\ L_n(e^{-2s}, x) &= 2(1 + x - xe^{-\frac{2}{n}})^{-n}. \end{aligned}$$

Nga këto vlerësime të vargut të operatorëve L_n , shihet se ky nuk i plotëson kushtet e pohimit të teoremës 3.1, të dhënë nga Mursaleen dhe të tjerët (shihe [48]). Pra teorema jonë është më e fortë se sa ajo e dhënë nga Mursaleen dhe të tjerët, por edhe më e fortë se sa ajo e dhënë nga Boyanov dhe të tjerët (shihe [2]).

3.2.1 Shkalla e konvergjencës

Në këtë pjesë do të shohim shkallën e konvergjencës statistikore për operatorët linear dhe pozitivë T_n , të përkufizuar në $C[a, b]$. Fillojmë me përkufizimin e mëposhtëm.

Përkufizim 3.2.1. Le të jetë (a_n) , varg i numrave pozitivë, jorritës. Them i se vargu $x = (x_n)$ është $N_{p,q}$ –statistikisht konvergjent te numri L , me shkallë të konvergjencës $o(a_n)$, nëse për çdo $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \frac{N_{p,q}(x)}{a_n} = 0,$$

ku

$$N_{p,q}(x) = \frac{1}{R_n} |\{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |x_k - L| \geq \epsilon\}|.$$

Në këtë rast shënojmë

$$x_k - L = N_{p,q}(st) - o(a_n).$$

Lemë 3.2.3. [40] Le të jenë (a_n) dhe (b_n) dy vargje të numrave pozitivë, jorritës dhe le të jenë gjithashtu $x = (x_n)$ dhe $y = (y_n)$ dy vargje të numrave të tillë që

$$x_n - L_1 = N_{p,q}(st) - o(a_n) \text{ dhe } y_n - L_2 = N_{p,q}(st) - o(b_n).$$

Atëherë, vlejnë vlerësimet

1. $(x_n - L_1) \pm (y_n - L_2) = N_{p,q}(st) - o(c_n)$,
2. $\alpha(x_n - L) = N_{p,q}(st) - o(a_n)$, për çdo numër të dhënë α ,
3. $(x_n - L_1)(y_n - L_2) = N_{p,q}(st) - o(a_nb_n)$,

ku

$$c_n = \max \{a_n, b_n\}.$$

Vërtetim. Meqë vërtetimi i vetive të mësipërme është i ngjashëm, ne do të marrim vetëm njërin nga ta, dhe për këtë do të provojmë vetëm të parin. Le të jetë dhënë $\epsilon > 0$, dhe do të shënojmë me

$$A_1 = \{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |x_k + y_k - (L_1 + L_2)| \geq \epsilon\},$$

$$A_2 = \left\{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |x_k - L_1| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\},$$

$$A_3 = \left\{k \leq R_n : p_{n-k}q_k |y_k - L_2| \geq \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

atëherë shihet qartë se vlen përfshirja $A_1 \subset A_2 \cup A_3$. Për më shumë, ngase

$$c_n = \max \{a_n, b_n\},$$

kemi:

$$(3.2.11) \quad \frac{|A_1|}{R_n \cdot c_n} \leq \frac{|A_2|}{R_n \cdot c_n} + \frac{|A_3|}{R_n \cdot c_n}.$$

Tani nëse marrim limitin kur $n \rightarrow \infty$, në relacionin (3.2.11) dhe pohimin e dhënë, atëherë fitojmë se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_1|}{R_n \cdot c_n} = 0,$$

me çka provohet edhe vërtetimi i lemës. □

Tani duke ditur kuptimin e modulit të vazhdueshmërisë, do të marrim rezultatin në vijim i cili na mundëson paraqitjen e vlerësimit të vargut të operatorëve linear pozitivë, duke shfrytëzuarë vlerësimin e modulit të vazhdueshmërisë dhe vlerësimin e vargut të operatorëve dhe test funksionit $e_0 = 1$.

Teoremë 3.2.4. [40] *Le të jetë dhënë vargu i operatorëve linear dhe pozitivë (B_n) , nga hapësira $C[a, b]$ në $C[a, b]$. Supozojmë gjithashtu se vlejné vlerësimet*

$$1. \|B_n(1, x) - 1\|_\infty = N_{p,q}(st) - o(a_n),$$

$$2. \omega(f, \lambda_k) = N_{p,q}(st) - o(b_n), \text{ ku}$$

$$\lambda_n = \sqrt{B_n(\psi, x)} \text{ dhe } \psi \equiv \psi(t, x) = (e^{-t} - e^{-x})^2.$$

Atëherë, për çdo $f \in C[a, b]$ dhe $x \in [a, b]$, kemi vlerësimin:

$$\|B_n(f, x) - f(x)\|_\infty = N_{p,q}(st) - o(c_n),$$

ku $c_n = \max \{a_n, b_n\}$.

Vërtetim. Le të jetë $f \in C[a, b]$ dhe $x \in [a, b]$. Nga relacionet (3.2.9) dhe (3.1.9), merret vlerësimi:

$$\begin{aligned}
 |B_n(f, x) - f(x)| &\leq |B_n(|f(y) - f(x)|, x)| + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\
 &\leq B_n\left(\frac{|x - y|}{\delta} + 1, x\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\
 &\leq B_n\left(1 + \frac{K_1}{\delta}(e^{-y} - e^{-x})^2, x\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1| \\
 &\leq \left(B_n(1, x) + \frac{K_1}{\delta} B_n(\psi, x)\right) \omega(f, \delta) + |f(x)| \cdot |B_n(1, x) - 1|,
 \end{aligned}$$

për ndonjë konstantë K_1 . Duke vënë

$$\delta = K_1 \cdot \lambda_n^2 = K_1 \cdot B_n(\psi, x),$$

në relacionin e fundit, atëherë përfitojmë se:

$$\begin{aligned}
 \|B_n(f, x) - f(x)\|_\infty &\leq K \|B_n(1, x) - 1\|_\infty + 2\omega(f, \delta) \\
 &\quad + \omega(f, \delta) \|B_n(1, x) - 1\|_\infty \\
 &\leq C \{ \|B_n(1, x) - 1\|_\infty + \omega(f, \delta) + \omega(f, \delta) \|B_n(1, x) - 1\|_\infty \},
 \end{aligned}$$

ku $C = \max\{K, 2\}$. Duke zëvendësuar $B_k(., x)$ me

$$T_n = \frac{1}{R_n} \sum_{v=0}^n p_{n-v} q_v B_v(., x),$$

marrim

$$\|T_n(f, x) - f(x)\|_\infty \leq C \{ \|T_n(1, x) - 1\|_\infty + \omega_2(f, \delta) + \omega_2(f, \delta) \|T_n(1, x) - 1\|_\infty \}.$$

Tani vërtetimi merret nga kushtet e dhëna me relacionet 1. dhe 2.

□

Përfundim

Në këtë punim të doktoraturës kemi përkufizuar disa konvergjenca të reja statistikore dhe përmes tyre kemi përkufizuar disa hapësira të reja të vargjeve. Më pas janë dhënë disa metoda të reja të shumueshmërisë si dhe duke i shfrytëzuar ato përkufizime kemi bërë paraqitjen e disa tipeve të reja të teoremave të Korovkinit, shkallës së konvergjencës dhe teoremave të Voronojit.

Për më tepër kemi përkufizuar hapësirat e vargjeve $[N, \lambda^2]$ dhe S_{λ^2} , duke shfrytëzuar konceptin e konvergjencës Λ^2 dhe për ato hapësira janë dhënë një mori vetish. Në kuadër të punimit jepet edhe hapësira e vargjeve Λ_r^2 , e cila merret me anë të Λ^2 -konvergjencës, sipas fuqisë r .

Po ashtu jepen hapësirat e vargjeve sipas konvergjencës statistikore e cila përkufizohet me anë të metodës së shumueshmërisë së Nörlund-it si dhe hapësirat e vargjeve të ndërtuara përmes konvergjencave statistikore dhe funksioneve të Orlitz-it. Vlen të theksohet se janë dhënë edhe hapësirat e vargjeve duke shfrytëzuar konvergjencat statistikore dhe funksionet modulare me metodën e shumueshmërisë sipas Cesáros.

Në pjesën e fundit të punimit merren teoremat e Korovkinit të llojit të parë dhe llojit të dytë. Duke shfrytëzuar konvergjencat statistikore të përkufizuara më lartë, shqyrtohet shkalla e konvergjencës së operatorëve linear pozitiv, duke marrë test funksionet dhe modulin e vazhdueshmërisë. Një vend të rëndësishëm zënë edhe teoremat e Voronojit.

Conclusion

In this doctoral thesis we have defined some new statistical convergences and based on them we have defined some new sequence spaces. Then are defined some new summability methods, and using those definitions we have given some new type of Korovkin theorems and Voronoi theorems.

Furthermore we have defined new sequence spaces $[N, \lambda^2]$ and S_{λ^2} , using into consideration staitical converge of type Λ^2 and for those spaces are given several properties. Also are defined the sequence spaces Λ_r^2 , which is defined from statistical convergence of type Λ^2 , in power r . New sequence spaces are defined by statistical summability method of Nörlund. In the sequel are defined new sequence spaces by statistically methods and Orlicz functions. Using into consideration modular functions and Cesàro summability method, are defined new sequence spaces. In the last part we have given some kind of Korovkin first type theorems and second kind Korovkin type theorems. Is given the rate of convergence of linear positive operators by test functions and modulus of continuity. Lastely, are given some kind of Voronoi type theorems.

Biografia dhe lista e punimeve

Jam e lindur më 11.03.1985 në Kaçanikë. Shkollën fillore dhe të mesme i kam kryer në vendlindje.

Në vitin shkollor 2003/2004 kam filluar studimet universitare, drejtimi i Matematikës Arsimore, në Fakultetin e Shkencave Matematiko-Natyrore pranë Universitetit të Prishtinës. Kam diplomuar në vitin 2011.

Në vitin akademik 2012/2013 kam regjistruar studimet e doktoraturës në Universitetin Politeknik të Tiranës, Fakulteti i Inxhinierisë Matematike dhe Inxhinierisë Fizike, Departamenti i Matematikës, në Programin Analizë. Deri tani kam kryer provimet dhe kam përgatitur punimin e doktoraturës me titull:

Konvergjencat statistikore, metodat e shumueshmërisë dhe teoremat e Korovkinit.

Deri tani kam botuar këto punime:

1. Valdete Loku and N.L. Braha, Λ^2 -statistical convergence and its application to Korovkin second theorem, Thai Journal of Mathematics, 2017(i pranuarë për publikim).
2. Loku, Valdete; Braha, N. L. Some weighted statistical convergence and Korovkin type-theorem. J. Inequal. Spec. Funct. 8 (2017), no. 3, 139-150. MR3673358
3. Loku, Valdete; Braha, Naim L.; Et, Mikail; Tato, Agron. Tauberian theorems for the generalized de la Vallée-Poussin mean-convergent sequences of fuzzy numbers. Bull. Math. Anal. Appl. 9 (2017), no. 2, 45-56. MR3672228
4. Loku, Valdete; Braha, Naim L. Tauberian theorems by weighted summability method. Armen. J. Math. 9 (2017), no. 1, 35-42.
5. Elida Hoxha, Ekrem Aljimi and Valdete Loku, Weighted Norlund-Euler A-statistical convergence for sequences of positive linear operators, Mat. Bilten 38 (2014), no. 1, 21-33.

6. Naim L.Braha, Valdete Loku and H. M. Srivastava, Λ^2 -weighted statistical convergence and Korovkin and Voronovskaya type theorems, Appl. Math. Comput. 266 (2015), 675-686.
7. Ekrem A. Aljimi and Valdete Loku, Generalized weighted Norlund-Euler statistical convergence, Int. J. Math. Anal. (Ruse) 8 (2014), no. 5-8, 345-354.
8. Ekrem A. Aljimi Elida Hoxha and Valdete Loku, Some results of weighted Norlund-Euler statistical convergence, Int. Math. Forum 8 (2013), no. 37-40, 1797-1812
9. Braha, N.L.; Esi, Ayhan; Loku, Valdete On lacunary strong (A, u, Δ^m) -convergent sequences with respect to a sequence of modulus functions. (English) Zbl 1307.46002 Ilirias J. Math. 2, No. 1, 11-19 (2013).

Gjithashtu kam marrë pjesë në konferencat:

1. *Algerian-Turkish International Days on Mathematics*, të organizuar nga Fatih University, Istanbul, Turkey të mbajtur me 12-14 September 2013, me punimin e paraqitur: Λ^2 -weighted statistical convergences and Korovkin type theorem.
2. *1st- International Western Balkans Conference of Mathematical Sciences IW-BCMS - 2013*, të organizuar nga Universiteti i Elbasanit "Aleksander Xhuvani", Universiteti i Prishtinës dhe Universiteti Politeknik i Tiranës, të mbajtur më 30-31 maj dhe 1 qershor të vitit 2013, në të cilën konferencë kam prezantuar punimin: *Weighted Nörlund-Cesáro statistical convergences*.
3. *The first International conference-Mathematical Days in Tirana*, e mbajtur më 11-12 Dhjetor, 2015, Tirane, në të cilën kam prezantuar punimin: *Statistical convergences and its applications to Korovkin second theorem*.
4. *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016)* të organizuar nga Istanbul Commerce University and Istanbul Medeniyet University, me 19-23 Maj në Bodrum-Mugla, 2016, ku kam paraqitur punimin: *A Tauberian theorem for the generalized Nörlund-Euler summability method*.

Referimet

- [1] F. Altomare, Korovkin-type theorems and approximation by positive linear operators, *Survey in Approximation Theory* 5 (2010) 92-164.
- [2] B. D. Boyanov and V. M. Veselinov, A note on the approximation of functions in an infinite interval by linear positive operators. *Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie (N.S.)* 14(62) (1970), 9-13 (1971)
- [3] F. Basar, *Summability theory and its applications*. With a foreword by M. Mursaleen. Edited by Rifat Colak. Bentham Science Publishers, Ltd., Oak Park, IL, 2012. iv+402 pp. ISBN: 978-1-60805-252-3; 978-1-60805-420-6
- [4] Bataineh, Ahmad H. A. and Al-O'dat, Naser A. On lacunary strong (A, u, Δ) -convergent sequences with respect to a sequence of modulus functions, *South-east Asian Bull. Math.* 32 (2008), no. 2, 235–241.
- [5] T. Bilgin, Lacunary strong A -convergence with respect to a modulus, *Mathematica XLVI* 4, 39-46 (2001).
- [6] T. Bilgin, Lacunary strong A -convergence with respect to a sequence of modulus functions, *Appl. Math. Comput.* 151, 595-600 (2004).
- [7] N. L. Braha and T. Mansour, On Λ^2 -strong convergence of numerical sequences and Fourier series, *Acta Math. Hungar.*, 141 (1-2) (2013), 113-126.
- [8] N. L. Braha, A new class of sequences related to the l_p spaces defined by sequences of Orlicz functions. *J. Inequal. Appl.* 2011, Art. ID 539745, 10 pp.
- [9] N. L. Braha and Mikail Et, The sequence space $E_n^q(M, p, s)$ and N_k -lacunary statistical convergence, *Banach J. Math. Anal.* 7 (2013), no. 1, 88-96.
- [10] Naim L. Braha, H. M. Srivastava and S. A. Mohiuddine, A Korovkin's type approximation theorem for periodic functions via the statistical summability of the generalized de la Vallée Poussin mean, *Appl. Math. Comput.* 228 (2014), 162-169.
- [11] Braha, Naim L.; Loku, Valdete; Srivastava, H. M. Λ^2 -weighted statistical convergence and Korovkin and Voronovskaya type theorems. *Appl. Math. Comput.* 266 (2015), 675-686.

- [12] Braha, Naim L. Some Weighted Equi-Statistical Convergence and Korovkin Type-Theorem. Results Math. 70 (2016), no. 3-4, 433-446.
- [13] Braha, N.L.; Esi. Ayhan; Loku. Valdete, On lacunary strong (A, u, Δ^m) -convergent sequences with respect to a sequence of modulus functions. (English) Zbl 1307.46002 Ilirias J. Math. 2, No. 1, 11-19 (2013).
- [14] D. Braho, A. Tato, Martingales via statistical convergence, Journal of Advances in Mathematics, Volume 12, no.7, 2016, pp.6402-6406.
- [15] D. Braho and A. Tato, Statistical Convergence of Banach Valued Martingales, ISJ, Journal of Mathematics, Vol. 2, 2016, pp.71-75
- [16] J. Boos, Classical and Modern Methods in Summability, Oxford University Press, 2000.
- [17] A. Çaushi, A. Tato, A statistical integral of Bohnner type on Banach space, Applied Mathematical Sciences, Vol. 6, 2012, no. 138, 6857- 6870, 2012.
- [18] A. Çaushi, A. Tato, Pettis Integration via Statistical Convergence, Journal of Advances in Mathematics Vol 3, No 2.p.159-167, 2013.
- [19] E. Cesaro, Sur la multiplication des series. Bull. Sci. Math. 14, 114-120 (1890).
- [20] S. Chapman, On non-integrable orders of summability of series and integrals. Proc. Lond. Math. Soc. 2, 369-409 (1910)
- [21] S. Chapman, G. H. Hardy, A general view of the theory at summable series. Q. J. Math. 42, 181-215 (1911)
- [22] J. S. Connor, The statistical and strong p -Cesaro convergence of sequences, Analysis 8 (1988), 47-63.
- [23] J. S. Connor, On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull. 32, 194-198 (1989).
- [24] A. Esi, The A -statistical and strongly $(A - p)$ -Cesaro convergence of sequences, Pure Appl. Math. Sci. XLIII(1-2), 89-93 (1996).
- [25] M. Et and R. Colak, On some generalized difference sequence spaces, Soochow Journal of Mathematics, Vol. 21(4), (1995) 377-386.
- [26] M. Et and F. Nuray, Δ^m -statistical convergence, Indian J. Pure and Appl. Math., 32:6 (2001), 961-969.
- [27] Y. Eidelman, V. Milman, A. Tsolomitis, Functional analysis, and introduction, Providence Rhode Island, 2004.
- [28] O. H. H. Edely, S. A. Mohiuddine, A. K. Noman, Korovkin type approximation theorems obtained through generalized statistical convergence, Applied Math. Letters 23 (2010) 1382-1387.

- [29] H. Fast, Sur la convergence statistique, Colloq. Math. 2 (1951) 241-244.
- [30] A. R. Freedman, I. J. Sember, and M. Raphael, Some Cesaro-type summability spaces, Proc. Lond. Math. Soc. 37 , 508-520 (1978).
- [31] J. A. Fridy, On statistical convergence, Analysis 5 (1985), 301-313.
- [32] J. A. Fridy and C. Orhan, Lacunary statistical convergences, Pacific J. Math. 160 (1993), no. 1, 43-51.
- [33] G. H. Hardy, Divergent series, Oxford University Press, 1949,
- [34] S. Izumi, Absolute convergence of some Trigonometric series II. J. Math. Anal. Appl. 1, 184-194 (1960)
- [35] K. Knop, Norlund-vergahren fur functionen. Math. Z. 63, 39-52 (1955)
- [36] E. Kolk, On strong boundedness and summability with respect to a sequence moduli, Tartu Ul. Toimetised. 960 , 41-50 (1993).
- [37] P. P. Korovkin, Convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian). Doklady Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 90 (1953) 961-964.
- [38] P.P. Korovkin, Linear operators and approximation theory, Hindustan Publ. Co., Delhi, 1960.
- [39] Valdete Loku and N.L. Braha, Λ^2 -statistical convergence and its application to Korovkin second theorem, Thai Journal of Mathematics, 2017(i pranuare per publikim).
- [40] Loku, Valdete; Braha, N. L. Some weighted statistical convergence and Korovkin type-theorem. J. Inequal. Spec. Funct. 8 (2017), no. 3, 139-150. MR3673358
- [41] I.J. Maddox, Sequence spaces defined by a modulus, Mat. Proc. Camb. Phil. Soc. 100, 161-166 (1986).
- [42] I.J. Maddox, Inclusion between FK spaces and Kuttner's theorem, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 101, 523-527 (1987).
- [43] F. M. Mears, Absolute regularity and Nörlund mean. Ann. Math. 38, 594-601 (1937)
- [44] U. K. Misra, An introduction to summability methods. Current topics in summability theory and applications, 1-27, Springer, [Singapore], 2016
- [45] S.A. Mohiuddine, A. Alotaibi, M. Mursaleen, Statistical summability $(C, 1)$ and a Korovkin type approximation theorem, J. Inequa. Appl. 2012, 2012:172.

- [46] F. Moricz and C. Orhan, Tauberian conditions under which statistical convergence follows from statistical summability by weighted means. *Studia Sci. Math. Hungar.* 41 (2004), no. 4, 391–403
- [47] M. Mursaleen, A. Alotaibi, Statistical lacunary summability and a Korovkin type approximation theorem, *Ann. Univ. Ferrara* 57(2) (2011) 373–381.
- [48] M. Mursaleen, V. Karakaya, M. Erturk, F. Gursoy, Weighted statistical convergence and its application to Korovkin type approximation theorem, *Appl. Math. Comput.* 218 (2012) 9132–9137.
- [49] H. Nakano, Concave modulars, *J. Math. Soc. Jpn.* 5, 29–49 (1953).
- [50] E. Ozturk, and T. Bilgin, Strongly summable sequence spaces defined by a modulus, *Indian J. Pure Appl. Math.* 25(6), 621–625 (1994).
- [51] S. Pehlivan, and B. Fisher, On some sequence spaces, *Indian J. Pure Appl. Math.* 25(10), 1067–1071 (1994).
- [52] S. Pehlivan, and B. Fisher, Some sequence spaces defined by a modulus, *Math. Slovaca*, 45 (1995), No. 3, 275–280.
- [53] W. H. Ruckle, FK spaces in which the sequence of coordinate vectors is bounded, *Canad. J. Math.* 25, 973–978 (1973).
- [54] I. J. Schoenberg, The integrability of certain functions and related summability methods, *Am. Math. Monthly* 66, 361–375 (1959).
- [55] H. M. Srivastava, M. Mursaleen, A. Khan, Generalized equi-statistical convergence of positive linear operators and associated approximation theorems, *Math. Comput. Modelling* 55 (2012) 2040–2051.
- [56] O. Shisha and B. Mond, The degree of convergence of sequences of linear positive operators. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 60 1968 1196–1200.
- [57] A. Zygmund, *Trigonometrical Series*, vol. I, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge (1959)
- [58] G. F. Woronoi, Verallgemeinerung des Begriffs der summe inner unendischer Reihen, pp. 60–61. *Proceedings of the XI congress of Russian Naturalists and Physicians*, St.Petersburg (1902)
- [59] Wang, Jian-Jun; Xu, Zong-Ben. Approximation with Jacobi weights by Baskakov operators. *Taiwanese J. Math.* 13 (2009), no. 1, 157–168.