



**REPUBLIKA E SHQIPERISE
UNIVERSITETI POLITEKNIK, TIRANË
FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE INXHINIERISE FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE**

DISERTACION

**PËR MARRJEN E GRADËS SHKENCORE
DOKTOR**

TITULLI

**Rezultate në studimin e konvergjencave lokale me
anë të vargjeve ezaurues dhe aplikime të tyre**

Paraqitur nga:

M.Sc. Doris MUÇA (DODA)

Udhëheqës shkencor:

Prof.Dr. Agron TATO

Tiranë, Qershor 2020

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISE MATEMATIKE DHE INXHINIERISE FIZIKE
DEPARTAMENTI I INXHINIERISE MATEMATIKE

Disertacion
I
Paraqitur nga

M.Sc. Doris MUÇA (DODA)

Per marrjen e gradës shkencore

DOKTOR

Programi i studimit : Analizë Numerike dhe Ekuacione Diferenciale

**Tema : Rezultate në studimin e konvergjencave lokale me anë të
vargjeve ezaurues dhe aplikime të tyre**

Udhëheqës Shkencor: Prof. Dr. Agron TATO

Mbrohet më dt . 18. 06. 2020. para jurisë:

- | | |
|--------------------------------------|-------------------------|
| 1. Prof.Asoc.Dr.Ligor NIKOLLA | Kryetar |
| 2. Prof.Dr.Lulzim HANELLI | Anëtar (oponent) |
| 3. Prof.Asoc.Dr.Kristaq GJINO | Anëtar (oponent) |
| 4. Prof.Dr.Fatmir HOXHA | Anëtar |
| 5. Prof.Dr.Akli FUNDO | Anëtar |

PËRMBAJTJA E LËNDËS

HYRJE:.....	iii.
-------------	------

KAPITULLI 1

Kuptime bazë dhe terminologji.....	1
1.1.Hapësirat metrike.....	1
1.2.Konvergjenca e funksioneve në hapësirat metrike.....	3
1.3 Hapësirat vektoriale të normuara.....	5
1.4 Hapësirat topologjike.....	7
1.5 Metoda e gjenerimit të topologjive.....	9
1.6.Disa topologji në X	10
1.7.Një konvergjencë në hapësirat topologjike	12
1.8.Hapësirat Funksionale.....	13

KAPITULLI 2

Konvergjenca lokale uniforme.....	14
2.1 Funksionet e zaturues.....	15
2.2 Konvergjenca lokalisht uniforme.....	16
2.3 Lidhja midis δ , δ_a dhe α^* -konvergjencës me α -konvergjencën.....	17
2.4 Teoremat Arzela dhe Aleksandroff.....	20

KAPITULLI 3

Disa tipe konvergjencash në topologji dhe hapësirat e funksioneve.....	24
3.1.Konvergjenca e rrjetave	24
3.2.Konvergjenca e ndarë lokale.....	29
3.3.Krahasimi i topologjive uniforme në Y^X	31

KAPITULLI 4

Konvergjenca e barabarta.....	37
4.1.Disa forma të reja të konvergjencës së barabartë.....	37
4.2.Konvergjenca në laticë.....	42
4.3.Lidhja me konvergjencën e barabartë.....	45

KAPITULLI 5

Zbatime të Teoria e masës dhe integritimit.....	47
5.1 .Funksionet ideal të matshëm.....	47
5.2 .Zbatime të diferencës simetrike në teorinë e masës.....	49
5.3 . Δ -vazhdueshmëria.....	53
5.4. Aplikimet në integralin Henstock Kurzweil.....	55

HYRJE

Shkak i fillimit të këtij studimi u bë një artikull, relativisht i gjatë, i autorëve Gregoriades dhe Papanastassiou, të cilët në qendër të vëmendjes kishin një lloj konvergjence të studiuar më herët, që është quajtur dikur konvergjencia e vazhdueshme ose shkurt α -konvergjencia. Kjo konvergjencë kishte shumë aplikime në saje të një koncepti të formuluar nga vetë autorët (të familjes së funksioneve ezaurues) (Exhaustive). Në përpjekje për të kuptuar këtë konvergjencë, u interesuam për kuptimin fillestar dhe vumë re se autorët bazoheshin në një pohim, që gjendej në librin e njohur të Kelley-it për topologjinë. Përkufizimi lejonte shumë interpretime dhe autorët në hapësira metrike e përdornin atë më shumë intuitivisht.

Interpretimi i parë nënkuptonte që konvergjencia e vazhdueshme, e cila përbëhej nga dy konvergjencia një në bashkësinë fytyrë dhe një në atë shëmbëllim, të quhej e mirëqenë pa vënë në dukje shkallën e përafërimit të tyre. Duke formuluar kuptimin e konvergjencës lokale të fortë ose δ_a -konvergjencën, ne kërkonim, që këto dy konvergjencia të lidheshin ngushtë dhe, që të krahasoheshin dy konvergjencat duhej që, konvergjencia e vargut të pikave në bashkësinë fytyrë të vlerësohej me një metrikë ekuivalente me atë të δ_a -konvergjencës. Në këtë rast δ_a dilte më e fortë se α -konvergjencia, në të kundërt ato janë të ndryshme. Duke vënë kushte edhe për metrikën, në bashkësinë shëmbëllim fitohej një α^* -konvergjencë ekuivalente me δ_a -konvergjencën, por e ndryshme nga α -konvergjencia. Kuptimi shumë i njohur i konvergjencës lokalisht uniforme fitoi shumë aplikime nëse vargu i funksioneve ishte ezaurues.

Kështu, pohimet që për α -konvergjencës kishin vend për bashkësitë kompakte, mund të riformuloheshin me dallime të caktuara për hapësirat lokalisht kompakte (hapësira të cilat janë më të gjera se ato kompakte). Shumë autorë janë përpjekur të krahasojnë konvergjencat e ndryshme në bazë të shpejtësisë së tyre të konvergjimit dhe, midis rezultateve klasike mund të përmendim: krahasimi i konvergjencës uniforme me atë pikësore apo konvergjencën kompakte të hapur, që gjendet ndërmjet tyre. Teoremat Arzela apo Aleksandroff janë më të njohurat në këtë drejtim, ashtu si ka edhe të tjera ku mund të përmendim atë të V-fqinjësive të Bouleau.

Jemi përpjekur, që me konvergjencat e futura, të formulojmë pohime të përafërta për konvergjencia më të forta apo më të dobëta se ato. Meqenëse, siç dihet, një konvergjencë na krijon një topologji të caktuar, kemi bërë përpjekje të formulojmë topologjitë për dy konvergjencat e reja dhe të japim formën analitike të bazës së topologjisë së tyre, që, është një çështje e ndërlikuar, kur është fjala për hapësirën e funksioneve në përgjithësi dhe atë të vazhdueshme në veçanti. Këto probleme janë trajtuar në kreun e dytë dhe të tretë.

Në kreun e katërt, duke shqyrtuar morinë e përpjekjeve për formulimin e konvergjencave praktikisht më të dobëta se konvergjencia uniforme, që mbahet si referencë, kemi hasur në konvergjencën e barabartë të formuluar nga Császár dhe

Laczkovich. Kjo konvergjencë u forcua nga Papanastassiou në konvergjencën uniforme të barabartë, e cila u trajtuan nga Das dhe Papanastassiou në lidhje me konvergjencën e funksioneve realë, veçanërisht në hapësirat e renditura të funksioneve. Duke i zgjeruar këto konvergjenca, në rastin e konvergjencave lokale, kemi arritur në përfundime të ngjashme që janë shtrirje e pohimeve të marra.

Kreu i pestë, ka për synim aplikimet e koncepteve të trajtuara në krerët pararendës në lidhje me çështje të ndryshme të matematikës bashkëkohore. Së pari, duke futur funksionet ezauruese me anë të idealeve, kemi hartuar një integral të ri të Bohnnerit (me anë të idealeve të pranueshme), i cili përgjithëson të paktën integralin e Bohnnerit (sipas konvergjencës statistikore). Nxitur nga një artikull i Boccuto etj., që përdor diferencën simetrike për vargjet e masave të fundme jonegative e kemi përdorur atë jovetëm për masat por edhe për funksionet, që pasqyrojnë një bashkësi të dhënë; duke sjellë një zhvillim të rëndësishëm teorik dhe duke nxjerrë si raste të veçanta pohimet e zakonshme, siç është rasti i vargut monoton të bashkësive.

Punimi përfundon me një zbatim të vargjeve ezauruese dhe konvergjencës lokale uniforme tek integrali i Henstock-Kurzweil-it, si të zakonshmin ashtu edhe atë të fortin.

Fjalët kyçe: Konvergjenca e vazhdueshme, konvergjenca lokalisht uniforme, konvergjenca lokalisht uniforme e fortë, vargjet ezauruese, hapësirat e funksioneve, hapësira lokalisht uniforme e barabartë, ideal-konvergjenca, ideal-vazhdueshmëria, masa e diferencës simetrike, integrali ideal i Bohnnerit, integrali i Henstock-Kurzweil.

ABSTRACT

The reason for the launch of this study became a relatively long article of the authors Gregoriades and Papanastassiou who in the spotlight had a kind of convergence studied earlier that was once called continuous convergence or brief α -convergence. This convergence had many applications thanks to a concept formulated by the authors themselves, the exhaustive family of existing functions. In trying to understand this convergence, we were interested in the original meaning and found that the authors were based on a statement found in Kelley's well-known topology book. The definition allowed many interpretations, and the authors in metric space used it more intuitively. The first interpretation implied that the continuous convergence, which consisted of two convergences in one face community, and one in that image, was called without emphasizing the degree of their approximation. Formulating the meaning of the strong local convergence or the convergence we asked for these two convergences to be closely related and to compare the two convergences, the convergence of the line of points to the face should be evaluated by a metric equivalent to that of convergence. In this case, they are stronger than α -convergence, otherwise they are different. Putting conditions for the metric in the image community was also obtained an α^* convergence equivalent to δ_a - convergence but different from α -convergence. The very well-known sense of locally uniform convergence gained many applications if the range of functions was exhausting.

In trying to understand this convergence, we were interested in the original meaning and found that the authors were based on a statement found in Kelley's well-known

topology book. The definition allowed many interpretations, and the authors in metric space used it more intuitively. The first interpretation implied that the continuous convergence, which consisted of two convergences in one face community, and one in that image, was called without emphasizing the degree of their approximation. Formulating the meaning of the strong local convergence or the convergence we asked for these two convergences to be closely related and to compare the two convergences, the convergence of the line of points to the face should be evaluated by a metric equivalent to that of convergence. Thus, the assertions that α -convergence had room for compact communities could be reformulated with certain distinctions for locally compact spaces that are broader than the compact ones. Many authors have tried to compare different convergences based on their convergence rates and among the classical results we can mention: Comparison of uniform convergence with the point of view or compact open convergence between them.

The Arzela or Alexandroff theorems are best known in this regard as there are others where we can mention that of the Boule V neighborhoods. We have tried to formulate approximate claims for stronger or weaker convergence with converged convergences. Since, as is known, a convergence creates a certain topology, we have attempted to formulate topologies for the two new convergences and give the analytical form of their topology base, which is a complicated issue when it comes to the function space in generally and persistently in particular. These problems are addressed in the second and third chapters. In chapter four, examining the multitude of efforts to formulate convergence practically weaker than the uniform convergence held as a reference, we encountered the equal convergence formulated by Császár and Laczkovich. This convergence was strengthened by Papanastassiou on equal uniform convergence, which was dealt with by Das and Papanastassiou regarding the convergence of real functions, especially in the ordered spaces of functions. By expanding these convergence in the case of local convergence we have come to similar conclusions that are the extent of the assertions received.

The fifth chapter aims at applying the concepts dealt with in the leaders in various contemporary mathematics issues. First, by introducing my ideals of ideals, we have devised a new Bohnert integral with acceptable ideals that generalizes at least Bohnert's integral to statistical convergence. driven by an article by Boccuto and others. which uses the symmetric difference for the strings of finite non-ionic masses, we have used it in vain for the masses but also for the functions that reflect a given community in the community by giving a significant theoretical development and by making special cases such as is the case of the monotonous string of communities. The work ends with the implementation of exhaustive strata and uniform local convergence at the Henstock-Kurzweil integral as well as the common one.

Key words: Continuous convergence, local uniform convergence, local strong uniform convergence, striking verses, function spaces, locally uniform uniform space, ideal convergence, ideal continuity, symmetric differential mass, Bohnert's integral integral, Henstock integral, Kurzweil.

Falenderime

Së pari, unë falenderoj familjen time duke filluar nga prindërit e mi të cilët më janë ndodhur gjithmonë pranë dhe më kanë dhënë shtysë të madhe gjatë gjithë viteve të studimeve të mia, si dhe bashkëshortin tim, që më ka përkrahur në mënyrë të pakushtëzuar në studimin tim dhe më kanë ndihmuar në realizimin e këtij punimi.

Së dyti, një mirënjohje dhe falenderim i pamasë i takon udhëheqësit tim shkencor profesorit të nderuar **Prof.Dr.Agron Tato** për ndihmën dhe gatishmërinë në çdo kohë që kam pasur nevojë gjatë këtyre viteve studimore pa ndihmën e të cilit nuk do isha këtu sot..

Së treti ,falenderoj miqtë dhe kolegët për mbështetjen e veçantë , si dhe drejtuesit e departamentit të Fakultetit të Inxhinierisë Matematike për këshillat e tyre tepër të vlefshme

KAPITULLI I

Kuptime bazë dhe terminologji

Për shkak të një numri të madh përkufizimesh dhe termash të përdorura në këtë studim, për të lehtësuar leximin nga manuale shumë të njohura si Engelking [15], Kelley [19], Kollmogorov & Fomin [20] Schwabik & Go You [25], kemi sjellë në kujtesën tuaj, disa nga kuptimet dhe terminologjitë më të rëndësishme të përdorura.

1.1 Hapësirat metrike

Përkufizim 1.1.1: *Hapësirë metrike* quhet çifti (X, d) ku, X është një bashkësi dhe d një metrikë në X (ose funksion distancë), e cila është një funksion i përcaktuar në $X \times X$ e tillë që, për $x, y, z \in X$ të kemi:

1. $d: X \times X \rightarrow \mathbb{P}^+$ është një funksion me vlera reale i fundmë dhe jonegativ.
2. $d(x, y) = 0$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur $x = y$.
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (mosbarazimi i trekëndëshit)

X quhet bashkësi bazë, termat e saj quhen pika. *Nënhapësira* $(Y, \bar{d})$ e hapësirës (X, d) fitohet në qoftë se bashkësia Y është e tillë që, $Y \subset X$ dhe $\bar{d}$ është ngushtim i d në $Y \times Y$, pra $\bar{d} = d|_{Y \times Y}$ thuhet që $\bar{d}$ induktohet nga d . Në qoftë se $X = \mathbb{R}$ dhe $d(x, y) = |x - y|$ atëherë, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ do të jetë hapësira metrike e drejtëzës reale. Për $X = \mathbb{R}^2$ do të kemi disa hapësira metrike, njëra prej tyre është $(\mathbb{R}^2, d_e)$ ku, $d_e(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$ e cila quhet distancë euklidiane. Një vend të veçantë zë hapësira funksionale e funksioneve të vazhdueshme $C[a, b]$, ku si metrikë merret:

$$d(x(t), y(t)) = \max_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|.$$

Dy largesa të dhëna $d_1(x, y)$ dhe $d_2(x, y)$ në të njëjtën hapësirë X , quhen ekuivalente në qoftë se gjenden numrat pozitivë $0 < a \leq b$ për të cilët $a < d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq b$.

Në qoftë se (X, d) është një hapësirë metrike dhe $x_0 \in X$ dhe r një numër real, përcaktohen dy tipe bashkësish:

$$B(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) < r\} \text{ rruzulli i hapur}$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in X: d(x, x_0) \leq r\} \text{ rruzull i mbyllur.}$$

Në të dy rastet x_0 quhet qendër dhe r rreze.

Bashkësia V quhet *fqinjësi e pikës* x , në qoftë se kjo pikë përfshihet në bashkësinë V së bashku me një rruzull të hapur, që do të thotë se për pikën x gjendet numri r i tillë që, $B(x, r) \subset V$. Bashkësia që është fqinjësi e çdo pike të saj quhet *bashkësi e hapur*. Plotësi i një bashkësie të hapur quhet *bashkësi e mbyllur*.

Provohet se familja e bashkësive të hapura $\{G_i\}$ plotëson kushtet:

1. $\emptyset, X$ janë bashkësi të hapura.
2. Në qoftë se $G_1, G_2 \dots$ janë bashkësi të hapura, i tillë është edhe bashkimi i tyre $\bigcup_n G_n$.
3. Në qoftë se $G_1, G_2 \dots, G_n$ janë bashkësi të hapura, e tillë do të jetë edhe prerja e tyre e fundme $\bigcap_{i=1}^n G_i$.

Përkufizim 1.1.2. Familja e bashkësive që plotëson aksiomat 1.-3. quhet *topologji e hapësirës metrike*.

Në qoftë se pika $x_0 \in M$ përfshihet në M së bashku me një rruzull me qendër këtë pikë x_0 , atëherë kjo pikë quhet *pikë e brendshme*. Bashkësia e pikave të brendshme quhet *brendësi* e bashkësisë M dhe shënohet M^0 . Bashkësia M^0 është bashkësi e hapur.

Pika x_0 në lidhje me bashkësinë M quhet *pikë takimi*, në qoftë se $\forall r > 0, B(x_0, r) \cap M \neq \emptyset$. Bashkësia e pikave të takimit të bashkësisë M quhet *mbyllje* e saj dhe shënohet $\bar{M}$. Bashkësia $\bar{M}$ është bashkësi e mbyllur. Një bashkësi e dhënë M nënbashkësi e X quhet *e dendur* në X në qoftë se: $\bar{M} = X$.

Me fjalë të tjera, për çdo pikë nga X fqinjësia e saj ka prerje boshe me bashkësinë M . Bashkësia X quhet *separabël*, në qoftë se ajo ka një nënbashkësi të numërueshme që është e dendur në X .

Një varg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ në hapësirën metrike $X = (X, d)$ quhet *konvergjent* në një pikë $x \in X$ në qoftë se: $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

Ky fakt shënohet $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ose $x_n \xrightarrow{d} x$.

Do të na duhet ta gjeometrizojmë këtë fakt duke thënë se për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $p \in \mathbb{N}$, e tillë që për $n \in \mathbb{N}, n \geq p, x_n \in B(x, \varepsilon)$.

Vargu konvergjent ka limit të vetëm dhe është i kufizuar. Një bashkësi A në hapësirën metrike quhet *e kufizuar*, në qoftë se gjendet një rruzull me rreze sado të madhe por të fundme që $A \subset B(a, r)$.

Vargu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quhet *varg Koshi* në hapësirën metrike (X, d) , në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet një $p \in \mathbb{N}$ i tillë që, për $n \in \mathbb{N}$ dhe $n > p$ të kemi $d(x_n, x_m) < \varepsilon$. Në hapësirën $(\mathbb{R}, | \cdot |)$ mosbarazimi i mësipërm do të kishte trajtën $|x_n - x_m| < \varepsilon$ dhe

në sajë të Teoremës Bolcano-Vajershttras ky do të ishte kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm, që vargu Koshi i mësipërm të jetë konvergjent.

Një hapësirë metrike quhet *e plotë*, në qoftë se çdo varg Koshi në të është konvergjent dhe konvergon në një pikë të kësaj hapësire.

Ky përkufizim tregon se jo të gjitha hapësirat janë të plota, p.sh. bashkësia e polinomeve P në lidhje me metrikën $\max_{\alpha \leq t \leq \beta} |P_n(t) - Q_n(t)|$ nuk është hapësirë e plotë.

Çdo varg konvergjent është varg Koshi, e anasjellta në përgjithësi nuk ka vend.

Në qoftë se $f: (X, d) \rightarrow (Y, p)$, funksioni f quhet *i vazhdueshëm* në këtë pikë $a \in X$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet $\delta(\varepsilon) > 0$ e tillë që, për $d(x, a) < \delta$ të kemi $p(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Krahas këtij përkufizimi ka vend dhe *trajta Hajne* e vazhdueshmërisë: për çdo varg

$$x_n \xrightarrow{d_1} a \text{ vargu korrespondues } f_n(x_n) \xrightarrow{p} f(a).$$

1.2- Konvergjencat e funksioneve në hapësirat metrike.

Përkufizime 1.2.1. Le të jenë dhënë funksionet $f_n, f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$.

(1) Thuhet që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergon *në mënyrë pikësore* në X (në çdo pikë të $x \in X$), në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ reale pozitive, gjendet numri natyror $n_0(\varepsilon, x)$ i tillë që, për $n > n_0(\varepsilon, x)$ të kemi $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

(2) Thuhet që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergon *uniformisht* në hapësirën X , në qoftë se për çdo $x \in X$ dhe për çdo numër real pozitiv $\varepsilon > 0$, gjendet një numër natyror $n_0 \in \mathbb{N}$ i tillë që, për $n > n_0$ të kemi $\rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Vërejtje 1.2.2. Në përkufizimin (1) kuptohet që për çdo $x \in X$, gjendet një $n(\varepsilon, x)$ përkatës, kurse në përkufizimin (2) numri natyror n_0 vlen për çdo $x \in X$ dhe është unik.

Pjesë e studimit tonë do të jetë një konvergjencë e veçantë që quhet zakonisht *α -konvergjencia*.

Lidhur me të, vitet e fundit ka një interes të veçantë nga shumë studiues. Fillimisht është quajtur konvergjencia e vazhdueshme (“stetige konvergenz”) dhe njihet qysh në fillimet e shekullit XX. Nga literatura për këtë problem mësohet se rreth vitit 1950 Stoilov [26] dhe Arens [2] sollën në dritë disa fakte të cilat karakterizonin këtë tip konvergjence. Kjo konvergjencë është krahasuar me tipe të tjerë nga shumë autorë ndërmjet tyre Boccuto etj.[6]

E shprehur jorigorizisht α -konvergjencia karakterizohet nga dy konvergjencia. Në qoftë se: $x_n \rightarrow x$ atëherë $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Kuptohet se kur $f: (X, d) \rightarrow (Y, \rho)$ kjo do të thotë se kur $x_n \xrightarrow{d} x$ atëherë $f_n(x_n) \xrightarrow{\rho} f(x)$.

Ne do të shqyrtojmë disa lidhje të saj me konvergjencat lokale, duke patur parasysh paraqitjet e bëra nga Gregorides etj [18].

Në artikullin e Das etj [11], [12] janë studiuar një numër konvergjencash që lidhen me α -konvergjencën. Ato marrin emërtimet konvergjencë α -uniformisht e barabartë, e cila është më e fortë se α -konvergjencia dhe konvergjencia α -e barabartë. Në studimin tonë do të jenë në konsideratë zgjerime të këtyre koncepteve. Le të sjellim në vëmendje këtu dy prej konvergjencave të këtij artikulli.

Përkufizim 1.2.3 [24]: Një familje funksionesh $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \Phi$ do të thuhet se konvergon në mënyrë uniforme të barabartë te një funksion f (simbolikisht $f_n \xrightarrow{u.b.} f$), në qoftë se ekziston një varg numrash realë pozitivë $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjent në zero dhe një numër natyror n_0 i tillë që, kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}$ është të shumtën n_0 për çdo $x \in X$.

Përkufizim 1.2.4 [10]: Vargu i funksioneve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nga familja Φ quhet konvergjent i barabartë tek f (simbolikisht $f_n \xrightarrow{b.} f$), në qoftë se ekziston një varg numrash realë pozitivë $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjentë në zero, i tillë që, për çdo $x \in X$ gjendet numri natyror $n(x) \in \mathbb{N}$, që mosbarazimi $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ të ketë vend për $n \geq n(x)$.

Nga përkufizimet del qartë se konvergjencia uniforme sjell konvergjencën në mënyrë uniforme të barabartë. Nga ana tjetër konvergjencia në mënyrë uniforme të barabartë, sjell konvergjencën e barabartë.

Shembull 1.2.5. [11] Funksioni $f_n(x) = x^n$ për $x \in [0,1[$ konvergon në mënyrë të barabartë te zero në këtë interval $[0,1[$ por nuk konvergon në mënyrë uniforme të barabartë.

1.3. Hapësirat vektoriale të normuara.

Përkufizim 1.3.1. Hapësirë vektoriale (ose hapësirë lineare) mbi një fushë K është bashkësia jo boshe X me elementet e saj $x, y, \dots$ të quajtur vektorë së bashku me dy operacione algjebrikë; mbledhja e elementeve dhe shumëzimi i elementit nga X me një numër $\lambda \in K$. Elementët e hapësirës vektoriale, së bashku me këto dy veprime, formojnë një strukturë algjebrike me këto 8 aksioma:

1) $x + y = y + x$,

- 2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
- 3) Ekziston elementi $\theta \in X$ që, për çdo $x \in X$: $x + \theta = x$
- 4) Për çdo $x \in X$ gjendet elementi $x' \in X$ i tillë që, $x + x' = \theta$,
- 5) Ekziston numri $1 \in K$ që $1 \cdot x = x$
- 6) Për çdo $\alpha, \beta \in K$: $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$
- 7) Për çdo $\lambda \in K$: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
- 8) Për çdo $\alpha, \beta \in K$: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$

Në qoftë se $K = \mathbb{P}$, hapësira quhet *vektoriale reale*, ndërsa kur $K = \mathbb{C}$ quhet *komplekse*. Hapësirat reale janë të shumta. Këtu do të përdoret hapësira e numrave të plotë, hapësira vektoriale e funksioneve të vazhdueshme, hapësira vektoriale e funksioneve të integrueshme.

Nënhapësirë e hapësirës vektoriale X është një nënbashkësi joboshe Y e tillë që, për $y_1, y_2 \in Y$ dhe skalarët $\alpha, \beta \in K$ kemi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$.

Në një hapësirë vektoriale fusim një funksion të ri që është shtrirje e largesës së njohur në gjeometrinë elementare.

Përkufizim 1.3.2. Hapësira vektoriale X quhet *e normuar*, në qoftë se çdo elementi të saj $x \in X$ i vihet në korrespondencë numri jonegativ $\|x\|$, i cili plotëson kushtet:

1. $\|x\| \geq 0$ dhe $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ për çdo $x \in X$ dhe çdo $\alpha \in K$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$.

Numri $\|x\|$ quhet *normë* dhe çifti $(X, \|\cdot\|)$ quhet hapësirë vektoriale e normuar. Hapësira vektoriale e normuar është hapësirë e metrizueshme.

Barazimi $d(x, y) = \|x - y\|$ na lejon të provojmë lehtë se kjo distancë plotëson vetitë e metrikës. Kjo distancë quhet e prejardhur nga norma.

Hapësirat vektoriale më të përdorshme janë drejtëza reale $\mathbb{R}$ (e pajisur me vlerën absolute), hapësira $\mathbb{R}^n$, ku

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}.$$

Është interesante ndërtimi në një hapësirë vektoriale të normuar i një *topologjie* (një familje bashkësish të hapura që plotësojnë aksiomat

(1)-(3)).

Edhe në hapësirat vektoriale të normuara, si element bazë merret bashkësia, që do të quhet *rruzull* i hapur me qendër elementin a që është $B_r(a) = \{x \in X: \|x - a\| < r\}$. Bashkësia V quhet *fqinjësi* e pikës x , në qoftë se e përmban atë së bashku me një rruzull të hapur. Bashkësia G është *e hapur*, në qoftë se ajo është fqinjësi e çdo pike të saj. Këto bashkësi të hapura, duke përdorur konceptin e rruzullit të hapur, provohen lehtë se plotësojnë kushtet (1)-(3).

Një varg $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ në hapësirën vektoriale të normuar X do të quhet *konvergjent* në një pike $x \in X$, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ do të gjendet $p \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $n > p \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$. Në këtë rast do të shënojmë $x_n \xrightarrow{n} x$. Vargu konvergjent, edhe këtu, ka një limit të vetëm dhe është i kufizuar.

Provohen lehtë pohimet:

(a) Në qoftë se $x_n \xrightarrow{n} x$ dhe $y_n \xrightarrow{n} y$, atëherë $x_n + y_n \xrightarrow{n} x + y$.

(b) Në qoftë se $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_n \rightarrow \lambda$ dhe $x_n \xrightarrow{n} x$, atëherë $\lambda_n x_n \xrightarrow{n} \lambda x$.

Varg Koshi në X do të quhet vargu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i tillë që, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $p \in \mathbb{N}$ që për të gjithë $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > p$ të kemi $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Përkufizimi 1.3.3: Hapësira vektoriale e normuar kur është e plotë, d.m.th. kur vargu Koshi është varg konvergjent edhe konvergjon në një pikë $x \in X$, quhet *hapësirë e Banahut*. Ndër këto hapësira duhet të kujtojmë hapësirën $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$, ku $\|x\| = |x|$, hapësirën e funksioneve të vazhdueshme, ku si normë merret:

$$\|x(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} \{|x(t)|\}$$

Vërtetohet se konvergjencia sipas normës e vargut funksional $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ te një funksion $f(x)$ është konvergjencë uniforme. Me fjalë të tjera, $f_n(x) \xrightarrow{u} f(x)$, në qoftë se për çdo

$\varepsilon > 0$ gjendet numri natyror $p \in \mathbb{N}$ që për $n > p \Rightarrow \|f_n(x) - f(x)\| < \varepsilon$ për $x \in X$.

1.4. Hapësirat topologjike

Përkufizim 4.1. *Hapësirë topologjike* quhet çifti (X, τ) i përbërë nga një bashkësi $X \neq \emptyset$ dhe një familje τ nënbashkësish të X -it, që plotëson kushtet e mëposhtme:

(H1) $\emptyset \in \tau$ dhe $X \in \tau$.

(H2) Në qoftë se $G_1, G_2, \dots \in \tau \Rightarrow \bigcup_{i=1}^n G_i \in \tau$.

(H3) Në qoftë se $G_1, G_2, \dots \in \tau \Rightarrow \bigcap_{i=1}^n G_i \in \tau$.

Bashkësia X quhet hapësirë dhe elementët e X -it quhen pika të hapësirës. Nënbashkësitë e X -it që i përkasin familjes τ quhen të hapurat e X -it. Familja τ quhet *topologji* në X .

Bashkësia $V \subset X$, ku $x \in V$ quhet *fqinjësi* e pikës x , në qoftë se gjendet një $G \in \tau$ e tillë që, $x \in G \subset V$. Provohet lehtë se një bashkësi U e tillë që, $V \subset U$ do të jetë përsëri një fqinjësi e pikës x dhe prerja e dy fqinjësive të pikës x është përsëri fqinjësi e kësaj pike. Si dhe në rastin metrik, një bashkësi H është e hapur në qoftë se ajo është fqinjësi për çdo pikë të saj. Kjo do të thotë se për çdo $x \in H$, gjendet e hapura U_x e tillë që $x \in U_x \subset H$ (ndryshe $H = \bigcup_{x \in H} U_x$), që tregon edhe një herë se H është e hapur në sajë të konditës (H2). Një familje $B \subset \tau$ quhet *bazë* e hapësirës topologjike (X, τ) , në qoftë se çdo bashkësi joboshe e hapur e X -it, mund të paraqitet si bashkim i nënbashkësive të B -së. Apriori, duket se një hapësirë topologjike mund të ketë disa baza.

Një bazë β ka vetitë e mëposhtme:

B1) Për çdo $U_1, U_2 \in \beta$ dhe për çdo pikë $x \in U_1 \cap U_2$, gjendet një $U \in \beta$ e tillë që, $x \in U \subset U_1 \cap U_2$.

B2) Për çdo $x \in X$ gjendet një $U \in \beta$ e tillë që, $x \in U$.

Kjo veti tregon se $X = \bigcup_{x \in X} U_x$, ku $U_x \in \beta$.

Një familje $\wp \subset \tau$ quhet *nënbazë* e hapësirës topologjike (X, τ) , në qoftë se çdo prerje e fundme $V = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_k$, ku $U_i \in \wp$, për $i = 1, 2, \dots, k$, është element i bazës së hapësirës (X, τ) .

Familja $\beta(x)$ e fqinjësive të pikës x quhet *bazë themelore* e fqinjësive të hapësirës topologjike (X, τ) në pikën x ; në qoftë se për çdo fqinjësi V të pikës x , gjendet një nënbashkësi $U \in \beta(x)$, e tillë që $x \in U \subset V$. Le të jetë (X, τ) një hapësirë topologjike, një bashkësi $F \subset X$ quhet bashkësi e mbyllur e hapësirës, në qoftë se plotësi i saj $X \setminus F$ është bashkësi e hapur. Nga ligjet e De Morganit dhe vetitë (H1) – (H3) të bashkësive të hapura, ne konkludojmë se familja $\mathcal{C}$ e bashkësive të mbyllura ka vetitë e mëposhtme duale të (H1) – (H3):

(C1) $X \in \mathcal{C}$ dhe $\emptyset \in \mathcal{C}$.

(C2) Në qoftë se $F_1, F_2, \dots, F_n \in \mathcal{C}$ rrjedh se edhe $\bigcup_{i=1}^n F_i \in \mathcal{C}$.

(C3) Në qoftë se $F_1, F_2, \dots, F_n, \dots \in \mathcal{C}$ rrjedh se edhe $\bigcap_n F_n \in \mathcal{C}$.

Për një bashkësi $A \subset X$ shqyrtojmë familjen $\mathcal{C}_A$ të të gjithë bashkësive të mbyllura, që përmbajnë A -në. Nga kondita (C1) kemi $\mathcal{C}_A \neq \emptyset$ dhe nga (C3) rrjedh se prerja e pafundme $\bar{A} = \bigcap_n F_n, (F_n \in \mathcal{C}_A)$ është e mbyllur. Duket qartë se $\bar{A}$ është bashkësia më e vogël e mbyllur, që përmban A -në. Kjo bashkësi quhet *mbyllje* e A -së. Nga kjo nxjerrim përfundimin që një bashkësi është e mbyllur atëherë dhe vetëm atëherë, kur ajo përputhet me mbylljen e saj. Për dy nënbashkësi A, B të hapësirës X do të kemi: Në qoftë se $A \subset B$ atëherë $\bar{A} \subset \bar{B}$.

Pohim 1.4.2.: Për çdo $A \subset X$ konditat e mëposhtme janë ekuivalente:

(i) Pika x i përket bashkësisë $\bar{A}$.

(ii) Për çdo fqinjësi U të x do të kemi $U \cap A \neq \emptyset$.

(iii) Gjendet një bazë $\beta(x)$ e pikës x e tillë që, për çdo $U \in \beta(x)$ të kemi $U \cap A \neq \emptyset$.

Një nga vetitë më të rëndësishme të bashkësive të mbyllura është listuar në teoremën e mëposhtme.

Teoremë 1.4.3.: Operatori mbyllje ka vetitë e mëposhtme:

$$(C01) \bar{\emptyset} = \emptyset$$

$$(C02) A \subset \bar{A}$$

$$(C03) \overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$$(C04) \overline{(\bar{A})} = \bar{A}.$$

Brendësia e një bashkësie $A \subset X$ është bashkimi i të gjithë të hapurave që përmbahen në A ose ndryshe, bashkësia më e madhe e hapur që përmbahet në A . Kjo bashkësi do të shënohet edhe këtu me A^0 . Duket qartë që një bashkësi është e hapur atëherë dhe vetëm atëherë kur përputhet me brendësinë e saj.

Si dhe në rastin metrik, një pikë x i përket A^0 atëherë dhe vetëm atëherë, kur gjendet një fqinjësi U e X -it e tillë që $U \subset A$.

Teoremë 1.4.4.: Operatori brendësisë ka vetitë e mëposhtme:

$$(I01) X^0 = X$$

$$(I02) A^0 \subset A$$

$$(I03) (A \cap B)^0 = A^0 \cap B^0$$

$$(I04) (A^0)^0 = A^0$$

Shembulli më i parë i topologjive është familja τ e të gjithë nënbashkësive të bashkësisë së dhënë X .

1.5 Metodat e gjenerimit të topologjive.

Le të jetë X një bashkësi çfarëdo, me gjenerim të një topologjie në X , kuptojmë seleksionimin e familjes τ të nënbashkësive të X që plotëson konditat $(H1) - (H3)$. Shpesh është më e dobishme të mos përshkruajmë familjen τ të bashkësive të hapura direkt.

Metodat e tjera konsistojnë në radhë të parë, në përcaktimin e një familje që shërben si bazë e topologjisë, apo të sistemit të fqinjësive, të familjes së bashkësive të mbyllura të operatorit të mbylljes ose operatorit të brendësisë.

Mënyra 1. Supozojmë se është dhënë një bashkësi X dhe familja β e nënbashkësive të X të cilat gëzojnë vetitë $(B1) - (B2)$. Përcaktojmë τ familjen e të gjitha nënbashkësive të X , të cilat janë bashkime të një nënfamiljeje të β , d.m.th. bashkësia $U \in \tau$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur $U = \bigcup \beta_0$ për një nënfamilje β_0 të β . Kemi fituar në këtë mënyrë një familje që plotëson kushtet $(H1) - (H3)$ dhe familja β është bazë për topologjinë (X, τ) . Kjo topologji quhet *topologji e gjeneruar* nga familja β .

Mënyra 2. Supozojmë se është dhënë bashkësia X dhe koleksioni $\{B(x)\}_{x \in X}$ të familjeve të fqinjësive për çdo $x \in X$. Përcaktojmë τ familjen e të gjithë nënbashkësive X , të cilat janë bashkim i nënfamiljeve të trajtës $\bigcup_x B(x)$. Këto bashkësi do të kënaqin kushtet $(H1) - (H3)$ të bashkësive të hapura të hapësirës (X, τ) . Familja $\{B(x)\}_{x \in X}$ do të jetë sistemi i fqinjësive së kësaj topologjie. Topologjia në (X, τ) do të quhet topologji e gjeneruar nga sistemi i fqinjësive $\{B(x)\}_{x \in X}$.

Mënyra 3. Supozojmë se është dhënë një bashkësi X dhe operatori i mbylljes, i cili çdo $A \subset X$ i përcakton një bashkësi $\bar{A} \subset X$ në mënyrë që të plotësojë konditat $(C01) - (C04)$. Familja $\tau = \{X | A: A = \bar{A}\}$ plotëson konditat $(H1) - (H3)$ dhe për çdo $A \subset X$ bashkësia $\bar{A}$ është mbyllje e A -së në hapësirën topologjike (X, τ) . Topologjia τ quhet topologjia e gjeneruar nga operatori mbyllje.

1.6 Disa topologji në X .

Le të jetë (X, τ) një hapësirë topologjike.

Përkufizim 1.6.1. Hapësira topologjike (X, τ) quhet e tipit T_1 ose T_1 -hapësirë, në qoftë se për çdo dy pika $x, y \in X, x \neq y$ gjendet një fqinjësi e pikës x , që nuk përmban y dhe një fqinjësi e pikës y , që nuk përmban pikën x .

Si shembull shërben drejtëza reale $\mathbb{R}$ dhe familja τ përbëhet nga bashkësia $\emptyset$ dhe ato bashkësi $A \subset \mathbb{R}$ që A^c të ketë një numër të fundmë pikash. Kjo është T_1 -hapësirë dhe quhet topologjia kofinale.

Hapësira X quhet T_2 -hapësirë ose *hapësirë e Hausdorfit* (apo e ndarë), në qoftë se për çdo dy pika $x, y \in X$ të tilla që $x \neq y$ të gjenden përkatësisht fqinjësitë V_x dhe V_y që

$$V_x \cap V_y = \emptyset.$$

Si shembull të kësaj lloj hapësire vlen drejtëza reale me intervalet e hapur të saj si bashkësi të hapura.

Në përgjithësi një hapësirë metrike është hapësirë e Hausdorfit, pavarësisht nga largesa e zgjedhur në të.

Përkufizim 1.6.2. Hapësira topologjike (X, τ) quhet T_3 -hapësirë, në qoftë se për çdo bashkësi të mbyllur $A \subset X$ dhe për çdo pikë nga $X \setminus A$, të gjenden dy fqinjësi të hapura joprerëse që i përmbajnë ato.

Topologjia ku $X = \{a, b, c\}$ dhe $\tau = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}\}$ është e tipit T_3 .

Përkufizim 1.6.3. Hapësira që është njëkohësisht T_3 -hapësirë dhe T_1 -hapësirë quhet *e rregullt*. Në qoftë se një hapësirë (X, τ) është e rregullt, ajo është hapësirë e Hausdorfit.

Përkufizim 1.6.4.: a) Familja $\{U_i\}_{i \in I}$ e bashkësive të hapura quhet *mbulim i hapur* i bashkësisë X në qoftë se $X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$.

b) Një hapësirë topologjike (X, τ) quhet *hapësirë kompakte*, në qoftë se nga çdo mbulim i hapur i saj $\{U_i\}_{i \in I}$ nxirret një mbulim i fundmë, dmth. $X \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$.

Si shembull të bashkësive kompakte janë: bashkësia $B = \left\{\frac{1}{n}\right\} \cup \{0\}$, bashkësitë me një numër të fundmë elementësh e të tjerë.

Një rëndësi të veçantë kanë bashkësitë kompakte në hapësirat metrike. Në këtë rast, bashkësia A është kompakte në hapësirën (X, d) , në qoftë se nga një mbulim i numërueshëm mund të nxirret një mbulim i fundmë. Ky pohim është ekuivalent me pohimin: Nga çdo varg (i numërueshëm) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ në bashkësinë A mund të nxirret një nënvarg $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, i cili konvergjon në një pikë $x \in A$.

Një nga rezultatet më të njohura është teorema e Borel-Lebegut, e cila tregon se në hapësirat metrike me dimension të fundmë, një bashkësi është kompakte në qoftë se ajo është e mbyllur dhe e kufizuar.

Si prototip i bashkësive kompakte, në këtë rast, shërbejnë segmenti i mbyllur apo rruzulli i mbyllur. Në punimin tonë do të zenë një vend bashkësitë lokalisht kompakte,

që janë një zgjerim i natyrshëm i bashkësive kompakte. Një bashkësi në hapësirën metrike (X, d) është *lokalisht kompakte*, në qoftë se në çdo pikë të saj gjendet një fqinjësi kompakte. Duket qartë që bashkësitë kompakte janë lokalisht kompakte.

Një koncept i lidhur ngushtë me të është koncepti i *k-hapësirës*. *k-hapësirë* quhet një hapësirë T_2 , që është shëmbëllim i një hapësire lokalisht kompakte me anë të një funksioni faktor. Me fjalë të tjera, *k-hapësira* është një T_2 hapësirë që parqitet si faktor hapësirë e një hapësire lokalisht kompakte.

Përkufizim 1.6.5. Bashkësia A në një hapësirë metrike (X, d) quhet *plotësisht e kufizuar* në X , në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjenden elementet $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ të tillë që,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \varepsilon) .$$

Me fjalë të tjera, një bashkësi plotësisht e kufizuar ka vetinë që për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një bashkësi e fundme $A_\varepsilon \subset A$ e tillë që, çdo pikë nga A të ketë largësinë nga A_ε jo më të madhe se ε .

Provohet se çdo bashkësi kompakte është plotësisht e kufizuar.

1.7 Një konvergjencë në hapësirat topologjike.

Përkufizim 1.7.1. *Prodhim kartezian* i dy bashkësive A dhe B quhet bashkësia e çifteve të renditur (a, b) , ku $a \in A$ dhe $b \in B$. Simbolikisht shënohet $A \times B$. Nëse kemi n -bashkësi $A_1, A_2, \dots, A_n$, prodhim kartezian i tyre quhet bashkësia e n -sheve të renditura $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ dhe shënohet $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \prod_{i=1}^n A_i$.

Relacion $\mathcal{R}$ në një bashkësi të dhënë A quhet një nënbashkësi e prodhimit kartezian $A \times A$. Me fjalë të tjera, $\mathcal{R} \subset A \times A$, në qoftë se $\mathcal{R} = \{(a, b): (a, b) \in A \times A\}$.

Relacion i anasjelltë, nëse ekziston quhet relacioni $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a): (b, a) \in A \times A\}$.

Përkufizime 1.7.2. (1) Relacioni quhet pasqyruar në qoftë se për çdo $a \in A$, $a\mathcal{R}a$.

(2) Relacioni quhet simetrik në qoftë se $a\mathcal{R}b$ sjell $b\mathcal{R}a$ dhe anasjelltas.

(3) Relacioni quhet kalimtar në qoftë se $a\mathcal{R}b$ dhe $b\mathcal{R}c$ rrjedh $a\mathcal{R}c$.

(4) Relacioni quhet antisimetrik në qoftë se për çiftet e mëposhtme të relacionit $\mathcal{R}$ ka vend implikimi $(a, b) \wedge (b, a) \Rightarrow a \equiv b$.

Relacioni, i cili është pasqyruar, kalimtar dhe antisimetrik quhet *relacion renditje të pjesshme* në A dhe shënohet $(A, \preceq)$. Termi pjesërisht i renditur nënkupton që, në bashkësinë A mund të ketë element a dhe b nga të cilët nuk ka vend asnjëri nga

relacionet $a \leq b$ apo $b \leq a$. Elementë të tillë quhen të *pakrahasueshëm*. Një shembull tipik i këtij relacioni është relacioni i përfshirjes, pra " $\leq$ " " $=$ " " $\subset$ " në një familje çfarëdo bashkësish. Në qoftë se çdo dy elemente të një bashkësie janë të *krahasueshëm*, atëherë bashkësia quhet plotësisht e renditur ose me renditje të plotë. Shembuj të këtyre relacioneve janë krahasimet e bashkësive numerike ku relacioni $\leq$ përputhet me shenjën $<$ ose me shenjën $>$.

Një rrjetë në hapësirën topologjike X është një funksion që çon një hapësirë pjesërisht të renditur D te X . Rrjeta shënohet $\{x_\sigma : \sigma \in D\}$ kur x_σ është një pikë e X e përcaktuar nga elementi σ nga D . Nëse D është e numërueshme, do të përdorim simbolin $\{x_i : i \in I\}$ ose $(x_i)_{i \in D}$. Relacioni i renditjes së D do të shënohet $\leq$ për dy element σ_1 dhe σ_2 nga D . Do të shënojmë vazhdimisht që $\sigma_1 \leq \sigma_2$ ku σ_1 është përpara σ_2 . Pika x quhet limit i rrjetës $(x_\sigma)_{\sigma \in D}$, në qoftë se për çdo fqinjësi U të pikës x gjendet një $\sigma_0 \in D$ e tillë që $x_\sigma \in U$ për çdo $\sigma \geq \sigma_0$. Në këtë rast thuhet se rrjeta $(x_\sigma)_{\sigma \in D}$ konvergjon në pikën x . Një rrjetë në dallim nga vargjet konvergjente mund të konvergjojnë në shumë pika. Bashkësia e të gjithë limiteve të rrjetës $(x_\sigma)_{\sigma \in D}$, shënohet $\lim_{\sigma \in D} x_\sigma$.

Pika x quhet *pikë takimi* e rrjetës $(x_\sigma)_{\sigma \in D}$, në qoftë se për çdo fqinjësi U të pikës x dhe për çdo $\sigma_0 \in D$ gjendet $\sigma \geq \sigma_0$ e tillë që, $x_\sigma \in U$.

Pohim 1.7.3. Një pikë x i përket mbylljes $\bar{A}$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur gjendet një rrjetë me elemente në bashkësinë A dhe që konvergjon te pika x .

1.8 Hapësirat funksionale

Duke pasur parasysh se një prodhim kartezian $X \times Y$ të dy hapësirave topologjike do të ketë formën $(X \times Y, \beta_1 \times \beta_2)$, ku β_1 është bazë në X dhe β_2 është bazë në Y . Le ta relativizojmë këtë topologji në një rast të veçantë, kur elementë të kësaj hapësire janë funksione. Le të jetë $f: X \rightarrow Y$, ku si X dhe Y kanë nga një topologji të fiksuar. Do të supozojmë se f është funksion i vazhdueshëm në lidhje me topologjinë në X . Shënojmë simbolikisht Y^X bashkësinë e të gjithë funksioneve të vazhdueshëm, që çojnë X në Y pra, $\{f: X \rightarrow Y\} = Y^X$.

Shënojmë me $\mathcal{F}$ një familje funksionesh, ku secili është i përcaktuar në bashkësinë X me vlera në hapësirën topologjike Y . Kjo do të thotë se $\mathcal{F} \subset Y^X$. Do të shqyrtojmë raste në kapitullin 3, sesi një topologji mund të gjenerohet edhe nga një konvergjencë e dhënë. P.sh. topologjia P e konvergjencës pikësore për $\mathcal{F}$, është një relativizim i topologjisë produkt. Rrjeta $\{f_n: n \in D\}$, ku D është një bashkësi pjesërisht e renditur, konvergjon te funksioni g atëherë dhe vetëm atëherë kur rrjeta $\{f_n(x): n \in D\}$ konvergjon te $g(x)$ për çdo $x \in X$.

Një nënbazë për P është familja e të gjithë nënbashkësive të formës $\{f: f(x) \in U\}$, ku x është një pikë nga X dhe U është bashkësi e hapur në Y . Për çdo pikë x nga X gjendet e_x nga $\mathcal{F}$, i cili quhet vlerësim në x (ose projeksion në hapësirën koordinative të x), që përcaktohet nga barazimi $e_x(f) = f(x)$, për çdo $f \in \mathcal{F}$. Vlerësimi në x është pasqyrim

i vazhdueshëm dhe i hapur në lidhje me $\wp$, ku $\wp$ është topologjia më e varfër për $\mathcal{F}$ i tillë që, çdo vlerësim të jetë i vazhdueshëm.

KREU 2

Konvergjencat lokale uniforme

Në përpjekje të relativizojmë α -konvergjencën e studiuar veç Stoilov dhe Arens edhe nga [16], [17], [12] ne mësuam se ky koncept lidhej ngushtë me familjet e funksioneve ezauruese, gjë që na drejtoi te konvergjencia lokale uniforme. Kjo konvergjencë ishte më e dobët se konvergjencia e njohur uniforme, por kishte një lidhje me komplekse me α -konvergjencën.

Ne përpunam dy konvergjencia shumë të afërta me α -konvergjencën, që i emërtuam δ_a dhe α^* -konvergjencia, të cilat kanë zëvendësuar në shumë pohime konvergjencën e vazhdueshme.

1. Funksionet ezaurues

Prezantojmë një koncept të ri, i cili është afër konceptit të ekuivalencës.

Përkufizimi 1.1 ([18] Gregoriades & Papanastassiou 2008)

Le të jenë (X, d) , (Y, p) dy hapësira metrike, $x \in X$, le të jetë $\mathcal{F}$ një familje e funksioneve nga X në Y dhe $f_n: X \rightarrow Y, n \in \mathbb{N}$.

1) Nëse $\mathcal{F}$ është e pafundme, ne e quajmë familjen $\mathcal{F}$ ezauruese në x nëse për çdo

$\varepsilon > 0$ ekziston $\delta > 0$ dhe A është një nënbashkësi e fundme e $\mathcal{F}$ e tillë që: për çdo $y \in S(x, \delta)$ dhe për çdo $f \in \mathcal{F} \setminus A$ kemi që $p(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

2) Në rast se familja $\mathcal{F}$ është e fundme, ne përcaktojmë që $\mathcal{F}$ të jetë ezauruese në x nëse çdo element i $\mathcal{F}$ është funksion i vazhdueshëm në X .

3) Familja $\mathcal{F}$ është ezauruese nëse $\mathcal{F}$ është ezauruese në çdo pikë x .

4) Vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quhet ezaurues në x , nëse për të gjitha $\varepsilon > 0$, ekzistojnë $\delta > 0$ dhe

$n_0 \in \mathbb{N}$, të tillë që, për të gjithë $y \in S(x, \delta)$ dhe të gjithë $n \geq n_0$, ne kemi $p(f_n(y), f_n(x)) < \varepsilon$.

5) Vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quhet ezaurues, nëse është ezaurues në çdo $x \in X$. Vini re se në rastin më interesant ku $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është një varg funksionesh për të cilat $f_n \neq f_m$ për $n \neq m$, atëherë familja $\mathcal{F} = \{f_n / n \in \mathbb{N}\}$ është ezaurues në disa $x_0 \in X$ nëse dhe vetëm nëse vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në x_0 .

Vërejtje 1.2 (Një familje ekuivalente është një familje ezauruese e tillë që për çdo $\varepsilon > 0$ bashkësia e fundme A në përkufizim 2.1 (1) mund të merret si bashkësi boshe. Pra, ekuivalenca nënkupton ezaurueshmërinë).

Duke thënë se familja $\mathcal{F}$ është ezauruese kjo nuk nënkupton se ekziston një nënbashkësi e fundme e F (e quajmë A) të tillë që $\mathcal{F} \setminus A$ është ekuivalente. (Kjo është për shkak se grupi A në përkufizim varet nga $\varepsilon > 0$). Shihni gjithashtu shembullin 2.4.

Shembull 1.3. [18] Për $n \in \mathbb{N}$ përcaktojmë $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ të tillë që $f_n(x) = \frac{1}{n}$, për $x \leq 0$, $f_n(x) = \frac{1}{2n}$ për $x > 0$. Natyrisht nuk ka funksion f_n të vazhdueshëm në 0. Ne pohojmë që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në 0.

Le të jetë $\varepsilon > 0$, atëherë ekziston një numër i plotë $n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$ të tillë që $\delta = 1$, për të gjitha $y \in (-1, 1)$ dhe për të gjitha $n \geq n_0$ ne kemi që $|f_n(y) - f_n(0)| \leq \frac{1}{2n} < \varepsilon$. Kështu ne marrim vargun ezaurues me funksione jo të vazhdueshme, që konvergjon te një funksion i vazhdueshëm.

Le të studiojmë disa veti të funksioneve ezaurues.

Pohim 1.4: Le të jetë $f_n: X \rightarrow Y$ një varg ezaurues në X , ku X dhe Y janë dy hapësira metrike. Nëse X është një hapësirë kompakte, atëherë vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është i kufizuar në çdo pikë $x \in X$.

Vërtetim. Nga kompaktësia e hapësirës metrike X rrjedh që ajo është plotësisht e kufizuar. Kjo nënkupton që për çdo $\delta > 0$ ne kemi

$$X \subseteq \bigcup_{k=1}^m B(a_k, \delta)$$

Le të jetë x një pikë çfarëdo e X -it. Nga mbulimi i mësipërm i X , ekziston një pikë a_k , për të cilin $x \in B(a_k, \delta)$. Meqë $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në çdo pikë a_k , për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta_1 > 0$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ që për $n \geq n_0$, dhe për çdo $x \in S(a_k, \delta_1)$ kemi $p(f(a_k), f(x)) < \varepsilon$. Ky mosbarazim ka vend madje për $\delta \leq \delta_1$.

Le të jetë $b \notin S(a_k, \delta)$, b është një pikë fikse dhe $b \neq a_k$ për çdo numër natyror k .

$$p(f(x), f(a)) \leq p(f(x), f(a_k)) + p(f(a_k), f(b)) < \varepsilon + p(f(a_k), f(b))$$

Mosbarazimi tregon që $f(x)$ është pjesë e rruzullit të hapur $B(f(x), r_k)$, ku

$r_k = \varepsilon + p(f(a_k), f(b))$. Nëse e përsërisim këtë veprim për çdo $a_k \in X$ ne marrim $f(x) \in B(f(b), r_0)$ ku: $r_0 = \max\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$. ■

Pohimi 1.5: Le të jetë Φ një familje funksionesh $f: (X, d) \rightarrow (U, p)$ ezaurues, ku X dhe U janë hapësira metrike dhe $g: (U, p) \rightarrow (Y, q)$ është një funksion i vazhdueshëm në U . Atëherë bashkësia e funksioneve të përbërë $g(f(x))$ është përsëri një varg ezaurues.

Vërtetim. Le të jetë $g: U \rightarrow Y$ një funksion i vazhdueshëm në $u_0 = f(x_0)$, ku $x_0 \in X$ është një pikë ku bashkësia Φ është ezauruese.

Kështu, për çdo $\delta > 0$ ekziston $n_0 \in \mathbb{N}$ dhe $\gamma > 0$ të tillë për çdo $y \in S(x_0, \gamma)$ ne kemi $p(f(x_0), f(y)) < \delta$.

Meqë g është një funksion i vazhdueshëm në u_0 , atëherë për çdo $\varepsilon > 0$; ekziston

$\delta_1(\varepsilon) > 0$ e tillë që për:

$$p(u, f(x_0)) = p(f(y), f(x_0)) < \delta_1$$

të kemi: $q(g(u), g(u_0)) = q(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$.

Për $0 < \delta < \delta_1$ rrjedh që për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $y \in S(x_0, \delta)$, marrim

$$p(f(y), f(x_0)) = p(u, u_0) < \delta$$

Kështu, kemi si rezultat që $q(f(y), f(x_0)) < \varepsilon$

Gjë që na tregon ne se vargu $g(f(x))$ është një varg ezaures. ■

2. Konvergjenca lokalisht uniforme dhe vargjet ezaures

Përkufizimi 2.1: Le të jenë (X, d) , (Y, p) dy hapësira metrike, $x \in X$ dhe $f_n, f: X \rightarrow Y$. Funkcioni $f(x)$ është një δ -limit i vargut $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ që për çdo $n \geq n_0$, dhe $y \in S(x, \delta)$ ne kemi $p(f_n(y), f(y)) < \varepsilon$.

Kështu ne mund të themi që $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjon lokalisht uniformisht tek $f(x)$ ose shkurt është δ -konvergjent tek $f(x)$.

Kjo konvergjencë është uniforme në një fqinjësi të hapur të çdo pike nga X . Kështu, funksioni $f(x) = x^n$ nëse e shohim vetëm në intervalin $]0, 1[$ është δ -konvergjent në këtë interval.

Pohimi 2.2: Le të jetë $f_n: X \rightarrow Y$ një varg që është konvergjent në mënyrë pikësore tek një funksion $f: X \rightarrow Y$ për çdo $x \in X$. Atëherë vargu f_n do të δ -konvergjojë tek f për çdo $x \in X$.

Vërtetimi është i qartë nga përkufizimi (2.1).

Pohimi i mëposhtëm paraqet disa nga cilësitë kryesore të konvergjencës lokale uniforme që përcakton pozicionin e saj në lidhje me konvergjencën uniforme dhe pikësore.

Pohimi 2.3. Le të jenë (X, d) , (Y, p) dy hapësira metrike, $x \in X$ dhe $f_n, f: X \rightarrow Y$. Vargu $f_n(x)$ është ezaures dhe δ -konvergjent tek funksioni $f(x)$. Atëherë funksioni $f(x)$ është i vazhdueshëm në këtë pikë.

Vërtetim. Sjellim në vëmendje përkufizimin e δ -konvergjencës dhe ezaureshmërisë së vargut të këtyre funksioneve.

Së pari, nga vetia e δ -konvergjencës për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ dhe $x \in X$, ekziston numri natyror $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta_1 > 0$ i tillë që, për $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta_1)$ kemi $p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Gjithashtu, nga vetia e ezaureshmërisë për këtë $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$, ekziston një numër natyror $n_1(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta_2 > 0$ i tillë që, për $n \geq n_1(\varepsilon, x)$ dhe

$y \in S(x, \delta_2)$ rrjedh $p(f_n(y), f_n(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Ne shënojmë $n_2(\varepsilon, x) = \max\{n_0(\varepsilon, x), n_1(\varepsilon, x)\}$ dhe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Atëherë për $n \geq n_2(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ marrim mosbarazimin

$$p(f(x), f(y)) \leq p(f(x), f_n(x)) + p(f_n(x), f_n(y)) + p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

i cili vërteton vazhdueshmërinë e funksionit f në $x \in X$.

Pohim 2.4. Nëse vargu $f_n: X \rightarrow Y$ është δ – konvergjent te funksioni $f(x)$ tek një pikë $x \in X$, dhe X është e plotë atëherë vargu (f_n) është Koshi.

Vërtetim. Nga δ – konvergjencia ne shkruajmë, për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston $\delta_1 > 0$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$, e tillë që për $n \geq n_0$ dhe $y \in S(x, \delta_1)$, ne kemi $p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$, gjithashtu për

$$m \geq n_0 \text{ dhe } \delta_2 > 0, \text{ nëse } y \in S(x, \delta_2) \text{ kemi } p(f_m(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si konkluzion për $m, n \geq n_0$ dhe $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ne marrim

$$p(f_m(y), f_n(y)) \leq p(f_m(y), f(y)) + p(f(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \blacksquare$$

Pohimi 2.5. Le të jenë (X, d) , (Y, p) dy hapësira metrike $x \in X$ dhe $f_n, f: X \rightarrow Y$. Hapësira X është kompakte dhe vargu f_n δ -konvergjon te funksioni f . Atëherë vargu f_n konvergjon uniformisht te ky funksion.

Vërtetim. Nga përkufizimi i δ -konvergjencës për çdo $\varepsilon > 0$ (fiksojmë një) dhe për çdo $x_\omega \in X$ ekziston numri $n_\omega(\varepsilon, x_\omega) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta_\omega > 0$ i tillë që, për $n \geq n_\omega(\varepsilon, x_\omega)$ dhe $y \in S(x_\omega, \delta_\omega)$, ne kemi $p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Le të marrim në konsideratë një mbulim të pafundëm të X sipas rruzujve $\{S(x_\omega, \delta_\omega)\}$. Nga vetia e përkufizimit të hapësirave kompakte në hapësirat metrike, ekziston një mbulim i fundëm.

$$X \subset \bigcup_{k=1}^m S(x_{\omega_k}, \delta_{\omega_k})$$

Nëse ne marrim në konsideratë tani vargun e fundëm të numrave $\{n_{\omega_1}, \dots, n_{\omega_m}\}$ dhe n_0 maksimumin e këtij vargu. Kështu për $n \geq n_0$ dhe $y \in X$, ekziston një rruzull $S(x_{\omega_i}, \delta_{\omega_i})$, i tillë që, nëse $y \in S(x_{\omega_i}, \delta_{\omega_i})$ atëherë $p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Konkluzion 2.5 Vargu konvergjent lokalisht uniformisht është konvergjent lokalisht uniformisht në bashkësitë kompakte.

Nëse hapësira X është lokalisht kompakte e anasjellta është e vërtetë.

Përveç të tjerave, ne kemi gjetur gjithashtu një përkufizim "të tipit ε, δ " për α -konvergjencën me disa kufizime të vogla dhe ne e quajmë atë konvergjent lokalisht uniformisht fortësisht.

3. Lidhja midis δ_a dhe α^* -konvergjencës me α -konvergjencën

Përkufizimi 3.1. Le të jenë (X, d) , (Y, p) dy hapësira metrike, $x \in X$ dhe $f_n, f: X \rightarrow Y$. Ne themi që vargu $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ është konvergjent *lokalisht uniformisht fortësisht* (ose shkurt δ_a -konvergjent) te $f(x)$ nëse për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$, ekziston $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ të tillë që për $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ ne kemi $p(f_n(y), f(x)) < \varepsilon$.

Pohim 3.2. Në qoftë se për funksionet e mësipërme që $f_n, f: X \rightarrow Y$ vargu $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ është δ_a -konvergjent te funksioni $f(x)$, atëherë ai është edhe α -konvergjent te ky funksion.

Vërtetim. Le të marrim vargun (x_n) konvergjent në një pikë $x \in X$, pra $x_n \rightarrow x$. Kjo do të thotë se për çdo numër real pozitiv $\delta > 0$ gjendet një $n_0(\delta)$ që për $n > n_0$ të kemi $x_n \in S(x, \delta)$ por në sajë të δ_a -konvergjencës kjo do të sjell që $p(f_n(x_n), f(x)) < \varepsilon$.

Ne mund të marrim disa veti të α -konvergjencës për δ_a -konvergjencën me vërtetime të tjera.

Pohimi 3.3. Le të jenë $(X, d), (Y, p)$ dy hapësira metrike, $x \in X$ dhe $f_n, f: X \rightarrow Y$ dhe vargu $f_n: X \rightarrow Y$ është δ_a -konvergjent te funksioni $f(x)$. Atëherë:

a) Vargu i funksioneve $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues,

b) $f(x)$ është i vazhdueshëm tek $x \in X$

Vërtetim. a) Nga përkufizimi i δ_a -konvergjencës për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, $x \in X$, ekziston $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ të tillë që për $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ kemi $p(f_n(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Duke u nisur nga plotësimi i kushteve që $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ ne marrim mosbarazimin

$$p(f_n(y), f_n(x)) \leq p(f_n(y), f_n(x)) + p(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) Nëse në mosbarazimin e mësipërm marret $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ në vend të $\varepsilon > 0$ dhe ndonjë $x \in X$, ekziston $n_1(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta_1 > 0$ të tillë që për $n \geq n_1(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ rrjedh se

$p(f_n(y), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Gjithashtu, ekziston $n_2(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta_2 > 0$ të tillë që për $n \geq n_2(\varepsilon, x) \Rightarrow$ edhe $p(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$.

Mosbarazimi i dytë tregon që nga δ_a - konvergjenca rrjedh konvergjenca pikësore. Kështu për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\frac{\varepsilon}{3} > 0$, ekziston $n_2(\varepsilon, y)$ të tillë që për $n \geq n_2(\varepsilon, y)$ marrim

$p(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Për $x, y \in S(x, \delta)$, ku $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ dhe nëse shënojmë një $n_4 = \max(n_1, n_2, n_3)$ për $n \geq n_3(\varepsilon, x)$ përfitojmë mosbarazimin e mëposhtëm:

$$p(f(x), f(y)) \leq p(f(x), f_{n_3}(x)) + p(f_{n_3}(x), f_{n_3}(y)) + p(f_{n_3}(y), f(y)) < \varepsilon.$$

Duket sikur dy konceptet α -konvergjenca dhe δ_a - konvergjenca janë ekuivalente. Realisht, konceptet e α -konvergjencës të përdorur nga Kelley [19] në vargjet në topologji, është treguar që dy konvergjencat $x_n \xrightarrow{\sigma_1} x$ dhe $f_m(x_n) \xrightarrow{\sigma_2} f(x)$ janë shumë të ndryshme. Nëse ne kalojmë në limit të dyja konvergjencat, vetëm në rastin kur dy indekset n dhe m konvergjencës së parë dhe të dytë janë të krahasueshme në $\mathbb{N}$, atëherë fitojmë një konvergjencë më të fortë, që është:

Përkufizim 3.4. Thuhet që vargu (f_n) është α^* -konvergjent në X nëse për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$ ekziston një numër $n_1 \in \mathbb{N}$ të tillë që për $n > n_1$ vargu $x_n \rightarrow x$ dhe ekziston një numër $n_2 \in \mathbb{N}$ të tillë që për $n > n_2$, $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$. Kjo do të lejonte që për $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ të plotësoheshin të dy konvergjencat.

Shembull 3.5. Le të tregojmë një rast që α -konvergjenca nuk sjell α^* -konvergjencën.

Marrim një varg (x_n) që tenton në zero në një mënyrë të

veçantë $n = \frac{(i+k-1)(i+k-2)}{2} + i$ i cili formohet nëse ne shkojmë sipas diagonaleve në tabelën e pafundme të mëposhtme.

Për shembull, diagonalja e tretë është a_{31}, a_{22}, a_{13} shuma e indekseve është 4. Kështu, kemi ndërtuar një renditje σ_1 me çiftin e indekseve në këtë mënyrë: $(i, k) \prec (i', k')$ nëse

$i+k \leq i'+k'$. Nëse si varg (x_n) në X marrim $x_n = \frac{1}{i+k}$ për elementet në një diagonale

të tabelës së mëposhtme, për shembull $i+k=4$ do të kemi që $x_4=(a_{31}) \prec x_5=(a_{22}) \prec x_6=(a_{13})$. Këto terma x_n kanë vlerën $1/4$ për $n=4,5,6$. Është e lehtë të tregojmë që $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow i \rightarrow \infty \vee k \rightarrow \infty$ dhe në rastin kur $n \rightarrow \infty$ kemi $x_n \rightarrow 0$. Le të shënojmë $f_n(x_n) = x_n$ që shkon në zero sipas renditjes σ_1 .

Le të kthehemi te tabela e pafundme:

$$\begin{array}{cccc}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}$$

Tani ne mund të zgjedhim një renditje tjetër σ_2 . Sipas renditjes të elementeve të vargut (x_n) , indeksi n i merr vlerat sipas “rregullit të përcaktorit” dhe për shembull, në këtë rast pjesa e vargut $a_{11} \prec a_{21} \prec a_{22} \prec a_{12} \prec \dots$ i korrespondon vargut $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$ sipas renditjes σ_2 . Është e qartë që dhe në rastin $n \rightarrow \infty \Leftrightarrow i \rightarrow \infty \vee k \rightarrow \infty$ por nëse ne fiksojmë $\varepsilon = \frac{1}{99}$, gjejmë se kur

$n_0=100=k+i=50+50$ i tillë që për $n>100 \mid f_n(x_n) - 0 = x_n = \frac{1}{50+50} < \frac{1}{99}$ por termat nuk zvogëlohen, kështu $x_n = \frac{1}{50+50} \prec x_{n+1} = \frac{1}{49+50}$ dhe $x_n > x_{n+1}$ sepse

$(i,k) \prec (i,k-1) = 50+49 < n_0$ që kundërshton përkufizimin 3.4.

Pohimi 3.6. Le të jenë (X,d) , (Y,p) dy hapësira metrike, $x \in X$ dhe $f_n, f : X \rightarrow Y$.

Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

- 1) Le të jenë $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$, ekziston $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ të tillë që për $n \geq n_0(\varepsilon, x)$ dhe $y \in S(x, \delta)$ ne kemi $p(f_n(y), f(x)) < \varepsilon$,
- 2) Vargu $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ α^* -konvergjon tek $f(x)$.

Vërtetim. (1) $\Rightarrow$ (2). Le të marrim në konsideratë konvergjencën $x_n \rightarrow x$ që për çdo $\delta_1 > 0$ ekziston $n_1(\delta_1) \in \mathbb{N}$ të tillë që për $n > n_1(\delta) \Rightarrow d(x_n, x) < \delta_1$ ose $x_n \in S(x, \delta_1)$. Rrjedh që për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston $\delta < \delta_1$ dhe $n_2 \geq \max(n_0, n_1)$ të tillë që kur $x_n \in S(x, \delta) \Rightarrow d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. Kështu është treguar që f_n α^* -konvergjon te $f(x)$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Le të supozojmë që $f_n(x)$ nuk është konvergjent sipas pohimit të parë. Kështu, ekziston $\varepsilon_0 > 0$ i tillë që për $x \in X$ dhe, $\bar{n}(\varepsilon_0, x) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ i tillë që për $n \geq \bar{n}(\varepsilon_0, x)$ dhe

$$y \in S(x, \delta) \Rightarrow p(f_n(x), f(x)) \geq \varepsilon_0.$$

Nga pohimi i dytë kur $x_n \rightarrow x$ ekziston një $\delta > 0$ i tillë që $n > n_1(\delta) \Rightarrow d(x_n, x) < \delta$ por, $f_n(x)$ nuk konvergjon te $f(x)$ sipas Përkufizimit 2.1. Kjo na kundërshton pikën (2).

4. Teoremat Arzela dhe Aleksandrof.

Vërtetimi i kësaj teoreme është bazuar në konceptin e konvergjencës kuazi-uniforme të një interval kompakt të P . Le të krahasojmë konvergjencën lokalisht uniforme me konvergjencën kuazi-uniforme.

Përkufizim 4.1. [3] Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg funksionesh të vazhdueshme me vlera reale të përcaktuar në një interval kompakt $[a, b]$ dhe f një funksion me vlera reale të përcaktuar në $[a, b]$. Vargu $(f_n)_{n \in \omega}$. Themi se konvergjon te f kuazi-uniformisht sipas segmentëve (a tratti) në $[a, b]$ nëse

(i) Vargu $(f_n)_{n \in \omega}$ konvergjon në mënyrë pikësore tek f ,

(ii) Për çdo $\varepsilon > 0$ dhe çdo n_0 ekziston një numër i fundmë numrash natyrorë $n_1, \dots, n_t \geq n_0$ dhe intervalet e mbyllur $S_{n_1}, \dots, S_{n_t}$ të tillë që bashkimi i brendësive të tyre të mbulojë segmentin $[a, b]$ dhe

$$\forall x \in S_{n_i} \quad |f_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad i = 1, \dots, t$$

Teorema 4.2. (Teorema Arzelà) [3] Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg funksionesh të vazhdueshme me vlera reale të përcaktuara në një interval kompakt $[a, b]$ dhe f një funksion me vlera reale të përcaktuara në $[a, b]$. Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg konvergjent në mënyrë pikësore te f . Atëherë f është i vazhdueshëm në qoftë se dhe vetëm në qoftë se vargu $(f_n)_{n \in \omega}$ është konvergjent kuazi-uniformisht sipas segmenteve tek f .

Pohimi 4.3. Përkufizimet 2.1. dhe 4.1, në rastin e funksioneve të vazhdueshme dhe me vlera reale, janë ekuivalente.

Vërtetim. $(2.1.) \Rightarrow (4.1)$ Nga Pohimi 2.2. ne vërtetuar kushtin (i) të (4.1). Tani, meqë intervali $[a, b]$ është bashkësi kompakte atëherë ekziston mbulimi $\{S_m^0\}$ i tij dhe nga ky nxirret një nënmbulim i fundëm $S_{n_1}^0, \dots, S_{n_k}^0$ i tillë që $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^k S_{n_i}^0$ dhe $S_{n_i} = S_{n_i}^0 \cap [a, b]$. Nga përkufizimi 2.1., për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $x \in S_{n_i}$ ekziston $\delta > 0$ dhe $n_i(\varepsilon, \delta_i) \in \mathbb{N}$ dhe $n > n_i(\varepsilon, \delta_i)$ i tillë që për çdo $y \in S(x, \delta_i)$ ne kemi $|f_{n_i}(y) - f(y)| < \varepsilon$. Në rastin e rruzullit S_{n_i} jemi në kushtet e intervalit të mbyllur $[a, b]$, kështu nëse $\{S(x, \delta_x)\}$ është një mbulim S_{n_i} për çdo $x \in S_{n_i}$, mund të gjejmë një nënmbulim të fundëm $S_{n_i} \subset \bigcup_{j=1}^m S(x_i, \delta_{x_i})$. Për çdo x_i gjejmë një numër $n_i(\varepsilon, \delta_{x_i})$. Le të jetë $n_{0i} = \max\{n_i(\varepsilon, \delta_{x_i})\}$. Nëse ne marrim $i = 1, \dots, k$ atëherë ekziston vargu $n_{01}, \dots, n_{0k} > n_0$ i tillë që për çdo $y \in S_{n_i}$ të kemi $|f_{n_i}(y) - f(y)| < \varepsilon$. Kjo tregon plotësimin e kushtit (ii).

(4.1.) $\Rightarrow$ (2.1.) Nga përkufizimi 4.1, ekziston një numër i fundëm numrash natyrorë $n_1, \dots, n_t \geq n_0$ dhe vargu i bashkësive të mbyllura $S_{n_1}, \dots, S_{n_t}$ i tillë që $[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^t S_{n_i}^0$ dhe për çdo $y \in S_{n_i}$ kemi $|f_{n_i}(y) - f(y)| < \varepsilon$. Le të jetë ε një numër pozitiv dhe çdo x i tillë që $x \in [a, b]$ ekzistojnë $S_{n_j}^0$ të tillë që $x \in S_{n_j}^0$ dhe $|f_{n_j}(x) - f(x)| < \varepsilon$, për çdo $x \in S_{n_j}^0$ dhe $n_j > n_0$. Nëse marrim një numër $\delta > 0$ të tillë që $x \in S(x, \delta) \in S_{n_j}^0$ për çdo $y \in S(x, \delta)$ ekziston $n_j > n_0$ të tillë që $|f_{n_j}(y) - f(y)| < \varepsilon$.

Në këtë mënyrë kemi fituar një formë tjetër të Teoremës Arzelà.

Teorema 4.4. Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg funksionesh të vazhdueshëm me vlera reale të përcaktuar në një interval kompakt $[a, b]$ dhe f një funksion me vlera reale të përcaktuar në $[a, b]$. Atëherë f është i vazhdueshëm në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $(f_n)_{n \in \omega}$ është konvergjent lokalisht uniformisht (shkurt δ -konvergjent) tek f .

Në 1948 Alexandroff [1] bëri përkufizimin e mëposhtëm:

Përkufizimi 4.5. Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg funksionesh që çon një hapësirë topologjike X te një hapësirë metrike (Y, ρ) dhe le të jetë $f : X \rightarrow Y$. Atëherë $(f_n)_{n \in \omega}$ është quajtur Alexandroff konvergjent tek f në X , nëse është konvergjent në mënyrë pikësore tek f dhe për çdo $\varepsilon > 0$ dhe një numër të plotë n_0 ekziston një mbulim i hapur i numërueshëm $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ i X dhe vargu $\{n_k\}$ i numrave pozitivë më të mëdhenj se n_0 i tillë që, për çdo x_k të kemi $\rho(f_{n_k}, f) < \varepsilon$.

Ne mund t'i shtojmë Teoremës së njohur Alexandroff një kusht të tretë ekuivalent dhe marrim pohimin e mëposhtëm.

Teorema 4.6. Le të jetë X një hapësirë topologjike dhe (Y, ρ) një hapësirë metrike. Le të jetë $(f_n)_{n \in \omega}$ një varg funksionesh të vazhdueshme nga X te Y konvergjent në mënyrë pikësore te një funksion f nga X tek Y . Kushtet e mëposhtme janë ekuivalente:

- (i) f është i vazhdueshëm;
- (ii) vargu $(f_n)_{n \in \omega}$ konvergjon Alexandroff te f ;
- (iii) vargu $(f_n)_{n \in \omega}$ është konvergjent lokalisht uniformisht te f .

Vërtetim. Për implikimet e mëposhtme (i) $\Rightarrow$ (ii) and (ii) $\Rightarrow$ (i) ne mund të shohim [1].

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Le të jetë $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$. Nga (ii) për këtë $\varepsilon > 0$ dhe numrin e plotë n_0 , ekziston një mbulim i hapur i numërueshëm $\{\Gamma_1, \Gamma_2, \dots\}$ i X , që është $x \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \Gamma_k$ dhe vargu $\{n_k\}$ i numrave të plotë pozitivë më të mëdhenj se n_0 të tillë që, për çdo $n_k \geq n_0$ ne kemi $\rho(f_{n_k}, f) < \varepsilon$. Nga fakti që $x \in X$ rrjedh që, ekziston një $\delta > 0$ i tillë që $S(x, \delta) \subset \Gamma_{k_j}$. Nga ana tjetër, për çdo $y \in S(x, \delta)$ dhe $n_{k_j} \geq n_0 \Rightarrow \rho(f_{n_{k_j}}(y), f(y)) < \varepsilon$.

Kjo tregon plotësimin e (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (i) Supozojmë që $(f_n)_{n \in \omega}$ është konvergjent lokalisht uniformisht te f . Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$ ekziston një numër $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dhe një fqinjësi V_x të tillë që për çdo $n > n(\varepsilon)$ dhe $y \in V_x$ ne kemi që $\rho(f_n(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ dhe gjithashtu

$\rho(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Meqë funksionet $(f_n)_{n \in \omega}$ janë të vazhdueshëm, për këtë ε ekziston një fqinjësi U_x e pikës x e tillë që për çdo $y \in U_x$ dhe çdo $n \in \mathbb{N}$ marrim $\rho(f_n(y), f_n(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Është e lehtë të shohim që për çdo $y \in V_x \cap U_x$ ne kemi

$$\rho(f(y), f(x)) \leq \rho(f(y), f_n(y)) + \rho(f_n(y), f_n(x)) + \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Në artikullin Bartle [5] në 1955, studiohet vazhdueshmëria e limiteve të vargjeve të funksioneve të vazhdueshëm me vlera reale dhe riformulohen përkufizimet e mësipërme të Arzelàs dhe Alexandroff.

Ne mund t'i zgjerojmë këto përkufizime në rastin e rrjetave të funksioneve me vlera reale në një bashkësi X .

Përkufizime 4.7.

(1) Le të jetë $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ një rrjet funksionesh të vazhdueshëm në një bashkësi arbitrare X dhe $f: X \rightarrow Y$. Atëherë $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ thuhet se konvergjon te f kuazi-uniformisht në X , nëse ai konvergjon në mënyrë pikësore te f dhe për çdo $\varepsilon > 0$ dhe α_0 ekziston një numër i fundmë indeksesh $\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq \alpha_0$ të tillë që për çdo $x \in X$ të paktën një nga mosbarazimet e mëposhtme qëndron:

$$|f_{\alpha_i}(x) - f(x)| < \varepsilon, i = 1, \dots, n$$

(2) Në këto kushte $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ thuhet se konvergjon te f , lokalisht uniformisht te $x \in X$, nëse për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet një $\alpha_0 \in \Lambda$ dhe një fqinjësi V_x e tillë që për $\alpha_i \geq \alpha_0$ dhe $y \in V_x$ ne kemi $\rho(f_{\alpha_i}(y), f(y)) < \varepsilon$.

Në vazhdim të [9] [17] në artikullin e të cilëve ata zgjeruan Teoremën Arzelà për rrjetat e funksioneve me bashkësi përcaktimi k -hapësirën dhe me vlera në një hapësirë metrike. Ne mund të riformulojmë pohimet për teoremat e mësipërme:

Teorema 4.8. Le të jetë X një k -hapësirë dhe (Y, ρ) një hapësirë metrike. Le të jetë $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ një rrjet funksionesh të vazhdueshëm nga X te Y , e cila konvergjon në mënyrë pikësore te funksioni f nga X tek Y . Kushtet e mëposhtme janë ekuivalente:

(i) f është i vazhdueshëm;

(ii) $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ konvergjon te f kuazi-uniformisht në bashkësitë kompakte.

(iii) $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ konvergjon te f lokalisht uniformisht në hapësirat lokalisht kompakte.

Proof. (i) $\Rightarrow$ (ii). Shiko Teoremën 3.4.në [5] dhe (ii) $\Rightarrow$ (i) shiko [9]

(i) $\Rightarrow$ (iii). Le të jetë f një limit i vazhdueshëm i konvergjencës pikësore të $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$. Që do të thotë se për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston α_0 i tillë që, për çdo $\alpha(x) \geq \alpha_0$ të kemi $\rho(f_{\alpha(x)}(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Meqë funksioni f dhe $f_\alpha(y)$ janë të vazhdueshëm për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një fqinjësi $S(x, \delta_1)$ e pikës x të tillë që, për çdo $y \in S(x, \delta_1)$ të rrjedhë që $\rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ dhe $\rho(f_\alpha(y), f_\beta(y)) < \frac{\varepsilon}{3}$ për çdo α dhe β .

Le të jetë $N_x = \{y : \rho(f_{\alpha(x)}(y), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3}\}$. Nga vazhdueshmëria e f dhe $f_\alpha(y)$ rrjedh që N_x është një bashkësi e hapur që përmban x . Le të jetë $S(x, \delta_2)$ një rruzull që $S(x, \delta_2) \subset N_x$.

Meqë hapësira X është lokalisht kompakte, atëherë konvergjenca pikësore e $(f_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ është uniforme dhe ne mund të zgjedhim α' të tillë që për $\alpha, \beta \geq \alpha'$ dhe $y \in S(x, \delta)$, ku

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ marrim:

$$\rho(f_\alpha(y), f(y)) \leq \rho(f_\alpha(y), f_\beta(x)) + \rho(f_\beta(x), f(x)) + \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Implikimi (iii) $\Rightarrow$ (i) është një përsëritje e Teoremës 4.4.

Konvergjenca lokalisht uniforme duket se është më e fortë edhe se sa konvergjenca e sicky topologjisë. Bouleau [7] ka futur konceptin e fqinjësisë elementare në këtë topologji për një funksion $f : [0, \infty] \rightarrow P$ ku $X = \square^+$ e cila është:

$$E_{t_1, \dots, t_k}^\varepsilon(f) = \{g : \exists \eta > 0, \forall t \in \bigcup_{i=1}^k]t_i - \eta, t_i + \eta[\quad |f(t) - g(t)| < \varepsilon\}.$$

Pa vështirësi duket qartë se kjo konvergjencë është më e dobët se konvergjenca lokalisht uniforme.

KREU 3

Disa tipe konvergjencash në topologji dhe në hapësirat e funksioneve.

Studimi i α -konvergjencës në shumë punime është shtrirë në kontekste të ndryshme dhe me mjete të ndryshme. Formulimi nga ana jonë i δ_a dhe α^* -konvergjencave duke theksuar në çdo rast δ -konvergjencën apo konvergjencën lokalisht uniforme, do të sillte në kërkimin e relacioneve ndërmjet tyre në hapësira të ndryshme. Një vend në këtë studim, zë hapësira e funksioneve në topologji, një nga konceptet më delikate ky, si dhe më pak të eksploruara.

Kemi arritur të gjejmë bazat e topologjive të konvergjencave të mësipërme, duke përfshirë dhe atë të α -konvergjencës të cilën, nuk e kemi ndeshur më parë.

1. δ_a -konvergjenca e rrjetave

Pohimi 1.1 Le të jenë X dhe Y dy hapësira metrike dhe gjithashtu $f_n, f: X \rightarrow Y$. Rrjeta (f_n) është δ_a -konvergjente tek f nëse dhe vetëm nëse, $(f_n)_{n \in N}$ është δ_a -konvergjente tek f si varg sipas përkufizimit 1.3.1

Vërtetim: Është evidente se nga δ_a -konvergjenca e rrjetës $(f_i)_{i \in I}$ rrjedh si rast i veçantë δ_a -konvergjenca e vargut $(f_n)_{n \in N}$.

Të shqyrtojmë pohimin e kundërt. Supozojmë se vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_a -konvergon tek f . Le të jetë $y \in S(x, \delta)$ dhe të tregojmë se rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ δ_a -konvergon tek $f(x)$.

Supozojmë të kundërtën se rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ nuk konvergon tek $f(x)$. Kjo do të thotë se ekziston $\varepsilon_0 > 0$ dhe $x \in X$ që, për çdo $0 < \delta < 1$ dhe $n_1 > n_0$ gjendet $y \in S(x, \delta)$ për të cilin $p(f_{n_1}(y), f(x)) \geq \varepsilon_0$

Duke përsëritur të njëjtën procedurë për $\delta < \frac{1}{2}$ dhe $n_2 \geq n_1$ do të gjenden y të tillë që, $y \in S(x, \frac{1}{2})$ të rrjedhë $(f_{n_2}(y), f(x)) \geq \varepsilon_0$, njëloj për $\delta_k \leq \frac{1}{k}$ do të gjenden y të tillë që, $y \in S(x, \frac{1}{k})$ të rrjedhë $(f_{n_k}(y), f(x)) \geq \varepsilon_0$, duke vijuar në këtë mënyrë pambarimisht. Me anë të një rinumërimi të përshtatshëm shënojmë $m = n_k$ kur $k \rightarrow \infty$ dhe $m_0 = \sup\{n_k\}$ atëherë për $m > m_0$ gjendet një δ që për $y \in S(x, \delta)$ sjell $(f_m(y), f(x)) \geq \varepsilon_0$ gjë që hedh poshtë supozimin tonë të δ_a -konvergjencës së vargut $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Në teoremën (3.2.12 [18]), ne mund të zëvendësojmë α -konvergjencën me δ_a konvergjencën dhe me disa modifikime adeqate të vërtetimit marrim të njëjtin përfundim. Ky zëvendësim do të bëhet eedhe në pohimet e mëposhtme (Teoremat 3.2.13, dhe 3.2.14. [18])

Teoremë 1.2. Le të jenë $f: X \rightarrow Y$ dhe rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ të funksioneve që çojnë X tek Y . Dy pohimet e mëposhtëm janë ekuivalente:

- 1) $f_i \xrightarrow{\delta_a} f$;
- 2) $f_i \xrightarrow{pw} f$ dhe rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ është ezauruese.

Rrjedhim 1.3. Në qoftë se rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ është ezauruese dhe f është δ_a -limit atëherë f është funksion i vazhdueshëm.

Vërtetim:

E vetmja çështje, që nuk është e njëjtë në këtë vërtetim në krahasim me atë të bërë te Teorema I, 3.3, është kalimi $(1) \Rightarrow (2)$.

Supozojmë se $f_i \xrightarrow{\delta_a} f$ ndërkaq rrjeta f_i nuk është ezauruese te ndonjë pikë $x_0 \in X$. Atëherë, për ndonjë $\varepsilon > 0$ do të kemi që, për të gjitha fqinjësitë e hapura V të pikës x_0 dhe të gjitha $i \in I$, do të gjendet një $x \in V$, që për ndonjë $k \in I$ të tillë që, $i \leq k$ për të cilën :

$$p(f_k(x), f_k(x_0)) \geq \varepsilon. (*)$$

Shënojmë me ς_{x_0} familjen e të gjitha fqinjësive të hapura të pikës x_0 . Për dy fqinjësi $U_1, U_2 \in \varsigma_{x_0}$ përcaktojmë $U_1 \leq U_2$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, $U_2 \subset U_1$.

Kështu, bashkësia ς_{x_0} është e renditur. Shënojmë $M = \{(k, V) \in I \times \varsigma_{x_0}\}$, ku ekziston $x \in V$ i tillë që, $p(f_k(x), f_k(x_0)) \geq \varepsilon_0$. Bashkësia $I \times \varsigma_{x_0}$ është me renditje të pjesshme. Të tregojmë se bashkësia M është e renditur në lidhje me relacionin $(*)$. Vërtet për $i \in I$ dhe për të gjitha $V \in \varsigma_{x_0}$, gjendet $k \in I$ që $i \leq k$ dhe

$$(k, V) \in M(**).$$

Nga aksioma e zgjedhjes kemi gjetur një rrjetë $(x_{(k,V)})_{(k,V) \in M}$ në X e tillë që, $p(f_k(x_{(k,V)}), f_k(x_0)) \geq \varepsilon_0$ dhe $x_{(k,V)} \in V$ për të gjitha $(k, V) \in M$.

Është e qartë se $x_{(k,V)} \xrightarrow{(k,V) \in M} x_0$ dhe nga hipoteza e δ_a -konvergjencës së rrjetës

$$f_i(x_{(k,V)}) \xrightarrow{(k,V) \in I \times M} f(x_0)$$

Kjo do të thotë se për x_0 gjendet V dhe k_0 , që për $k \leq k_0$ dhe $x_{(k,V)} \in \varsigma_{x_0}$, atëherë

$$p\left(f_k(x_{(k,v)}), f_k(x_0)\right) < \varepsilon.$$

Kjo bie në kundërshtim me supozimin e për rrjedhojë $(f_i)_{i \in I}$ është familje ezauruese.

Teoremë 1.4. Le të jetë X lokalisht kompakte dhe (Y, p) hapësirë metrike dhe funksionet $f_i, f: X \rightarrow Y, i \in I$ ku I është bashkësi e renditur. Dy pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

(1) Rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ është δ_a -konvergjente te funksioni f .

(2) Funksioni f është i vazhdueshëm dhe për çdo bashkësi kompakte $K \subseteq X$ rrjeta $(f_i)_{i \in I}$, konvergjon uniformisht te f në K .

Nga Teorema rrjedh se kur X është hapësirë lokalisht kompakte atëherë δ_a -konvergjencia në $C(X, Y)$ rrjedh nga topologjia e konvergjencës uniforme në bashkësitë kompakte. Gjatë vërtetimit të teoremës ne duhet të përdorim hapësirat e rregullta. Në qoftë se I është e renditur dhe $J \subseteq I$ është kofinale në I , atëherë J është gjithashtu e renditur. Kjo do të thotë se kur $(x_i)_{i \in I}$ është një rrjetë, atëherë çdo J që plotëson kushtet e mësipërme na jep një nënrrjetë $(x_j)_{j \in J}$.

Vërtetim:

(1) $\Rightarrow$ (2) Në sajë të pohimit (Pohimi III, 1.3.), funksioni f është i vazhdueshëm. Le të jetë K një nënbashkësi kompakte e X -it. Nëse rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ nuk do të konvergjonte uniformisht te funksioni f në K , atëherë për ndonjë $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $i \in I$ gjendet një $j \in J$ e tillë që,

$$i \leq j \text{ dhe } x \in K, \text{ të kemi } p\left(f_j(x), f(x)\right) \geq \varepsilon.$$

Shënojmë

$$J = \{j \in I: \text{të cilat gjendet ndonjë } x \in K \text{ e tillë që, } p\left(f_j(x), f(x)\right) \geq \varepsilon\}.$$

Bashkësia J është kofinale në I . Duke u mbështetur tek aksioma e zgjedhjes, gjendet rrjeta $(x_j)_{j \in J}$ në K e tillë që $p\left(f_j(x_j), f(x_j)\right) \geq \varepsilon$ për çdo $j \in J$. (*)

Përderisa K është bashkësi kompakte do të gjendet një nënrrjetë $(x_{j_\mu})_{\mu \in M}$ dhe $x_0 \in K$ e tillë që $x_{j_\mu} \xrightarrow{\mu \in M} x_0$. Siç u përmend mësipër, δ_a – konvergjencia ruhet edhe për nënrrjetat, kështu kemi $f_{j_\mu} \xrightarrow{\delta_a} f$ që nga $f_{j_\mu}(x_{j_\mu}) \xrightarrow{\mu \in M} f(x_0)$. Në sajë të vazhdueshmërisë së funksionit f rrjedh që edhe $f(x_{j_\mu}) \xrightarrow{\mu \in M} f(x_0)$. Kjo sjell që $p(f_{j_\mu}(x_{j_\mu}), f(x_{j_\mu})) \xrightarrow{\mu \in M} 0$ që bien në kundërshtim me (*).

(2) $\Rightarrow$ (1) Marrim në shqyrtim rrjetën $(x_\mu)_{\mu \in M}$ në X e cila konvergjon te pika x_0 . Meqenëse X është hapësirë lokalisht kompakte, gjendet ndonjë fqinjësi e pikës x_0 , të cilën e shënojmë me U_0 , për të cilën mbyllja e saj $\overline{U_0}$ është bashkësi kompakte. Zgjedhim një $\mu_0 \in M$ të tillë që, për të gjitha $\mu \in M$ që $\mu_0 \leq \mu$ të kemi $x_\mu \in M$. Përcaktojmë

$L = \{x_\mu : \mu_0 \leq \mu\}$ dhe $K = \overline{L}$. Atëherë K është nënbashkësi e mbyllur e $\overline{U_0}$ dhe si e tillë është kompakte. Nga hipoteza rrjedh se rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ konvergjon uniformisht në K . Duke patur parasysh se f është funksion i vazhdueshëm,

$$p(f_i(x_\mu), f(x_0)) \leq \varepsilon \text{ për } x_\mu \in U_0 \text{ dhe } \mu_0 \leq \mu \text{ që tregon se } f_i \xrightarrow{\delta_a} f.$$

Ne mund të zëvendësojmë α -konvergjencën me δ_a -konvergjencën edhe në pohimin e mëposhtëm, duke saktësuar disa kalime që i atribohen α -konvergjencës, por që janë të ligjshme vetëm në lidhje me α^* -konvergjencën dhe δ_a -konvergjencën; kjo e parë në vërtetimin e tyre origjinal te [18].

Pohim 1.5. Le të jetë X një hapësirë e rregullt dhe Y një hapësirë metrike me të paktën dy elemente. Pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

(1) X është hapësirë lokalisht kompakte.

(2) Për të gjitha rrjetat $(f_i)_{i \in I}$ që çojnë X te Y dhe për të gjithë funksionet $f: X \rightarrow Y$, rrjeta $(f_i)_{i \in I}$ δ_a -konvergjon te funksioni f atëherë dhe vetëm atëherë, kur f është funksion i vazhdueshëm dhe $(f_i)_{i \in I}$ konvergjon te f uniformisht, në çdo nënbashkësi të X -it.

Vërtetim: Implikimi (1) $\Rightarrow$ (2) rrjedh nga Teorema III, 1.4.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supozojmë që megjithë plotësimin e (2), hapësira X nuk është lokalisht kompakte. Kjo realizohet në qoftë se përcaktojmë një rrjetë funksionesh, e cila konvergjon uniformisht te një funksion i vazhdueshëm f në çdo nënbashkësi të X -it, por nuk është δ_a -konvergjente te funksioni f .

Shënojmë me K familjen e të gjithë nënbashkësive kompakte të X -it. Futim relacionin e renditjes për $K_1, K_2 \in K$, të tillë që, $K_1 \leq K_2$ në qoftë se $K_1 \subseteq K_2$; kështu bashkësia $(K, \leq)$ është bashkësi e renditur. Fiksojmë dy elemente $y_1, y_2 \in Y$, ku $y_1 \neq y_2$. Për çdo $K \in K$ ndërtojmë funksionin $f_K: X \rightarrow Y$ të tillë që, $f_K(x) = y_1$ në qoftë se $x \notin K$. Gjithashtu, shënojmë $f(x) = y_0$ për çdo $x \in X$.

Të provojmë se rrjeta $(f_K)_{K \in K}$ nuk është δ_a -konvergjente te funksioni f . Përderisa në bazë të supozimit X nuk është lokalisht kompakt, atëherë ekziston ndonjë $x_0 \in X$ i tillë që, për çdo bashkësi të mbyllur F ku $x \in F^0$, gjendet një rrjetë $(x_i^F)_{i \in I^F}$ në F , për të cilën nuk ekziston nënrrjeta konvergjente. Duke shënuar I bashkimin e të gjithë

nënbashkësive jo-prerëse I^F , d.m.th. për të gjithë $i \in I$, gjendet një F e vetme që $i \in I^F$. Për $i, j \in I$, përcaktojmë:

$$i \leq j \Leftrightarrow i \in I^F \text{ dhe } j \in I^C \text{ dhe } [ose\ F \equiv C\ ose\ i \leq_F j\ kur\ C \subset F\ por\ C \neq F].$$

Nuk është e vështirë të shihet se renditja $\leq$ është një renditje e pjesshme në I , gjithashtu I është plotësisht e renditur. Le të jetë $i \in I^F, j \in I^C$ shënojmë $L = F \cap C$ atëherë $x_0 \in L^0$. Supozojmë se $F \cap C = C$. Nëse $F \subsetneq C$ atëherë $j \leq i$. Në qoftë se $F \equiv C$ atëherë, meqënëse $(I^F, \leq_F)$ është plotësisht e renditur, gjendet ndonjë $k \in I^F$ e tillë që $i, j \leq k$. Përderisa $k \in I^F$ kjo sjell që $i, j \leq k$.

Le të supozojmë tani që $F \cap C \subsetneq F$. Në qoftë se $F \cap C = C$ atëherë $C \subsetneq F$ kështu $i \leq j$.

Nëse $F \cap C \subsetneq C$ atëherë ndonjë $k \in I^{F \cap C} = I^L$ kënaq relacionin $i, j \leq k$.

Tani për $i \in I$ përcaktojmë $x_i = x_i^F$, ku F është bashkësia e vetme për të cilën $x_0 \in F^0$ dhe $i \in I^F$. Të tregojmë se $x_i \xrightarrow{i \in I} x_0$. Në të vërtetë, në qoftë se U është bashkësi e hapur dhe $x_0 \in U$, duke përdorur faktin se X është hapësirë e rregullt, gjendet bashkësia e mbyllur F për të cilën $x_0 \in F^0 \subseteq F \subseteq U$. Le të jetë $i_0 \in I^F$. Në qoftë se $i \in I$, ku $i_0 \leq i$ dhe $i \in I^C$, atëherë $C \subseteq F$ dhe nga zgjedhja e x_i^C do të kemi $x_i = x_i^C \in C \subseteq F \subseteq U$.

Së fundmi, të provojmë që $f_k(x_i) \rightarrow f(x_0) = y_0$. Le të jetë $K \in K$ dhe $i \in I$ ku $i \in I^F$. Mjafton të gjejmë ndonjë $j \in I$ të tillë që, $i \leq j$ dhe $f_k(x_j) = y_1$, dmth. $x_j \notin K$. Përcaktojmë $\mathcal{J}^F = \{j \in I^F : i \leq j\}$ dhe të vemë në dukje se $\mathcal{J}^F$ është bashkësi plotësisht e renditur. Vihet re se për çdo $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^F$, e cila është kofinale në $\mathcal{J}^F$ është gjithashtu kofinale në I^F . Kjo do të thotë se nënrrjeta $(x_j^F)_{j \in \mathcal{J}^F}$ është gjithashtu nënrrjetë e $(x_i^F)_{i \in I^F}$. Kjo tregon se bashkësia K nuk mund të përmbajë rrjetën $(x_j^F)_{j \in \mathcal{J}^F}$, por nga ana tjetër K si bashkësi kompakte do të ketë një nënrrjetë konvergjente $(x_i^F)_{i \in I^F}$. Kjo bie në kontradiktë me zgjedhjen e bërë të $(x_i^F)_{i \in I^F}$. Ndërkohë kemi gjetur $j \in \mathcal{J}^F$ që $x_j^F \notin K$. Kështu $i \leq j$ sjell $x_j \notin K, x_i = x_j^F \notin K$, gjë që provon pohimin.

2. Konvergjencia e ndarë lokale

Le të studiojmë familjet e funksioneve të dhëna në prodhimin e bashkësive $X \times Y$ dhe të japim përkufizimet e ezaurueshmërisë, α -konvergjencës dhe konvergjencave të tjera lokale të studiuara mësipër, në një nënbashkësi komplemente të një bashkësie kudo të padendur. Le të jenë X, Y, Z hapësira metrike dhe një funksion $f: X \times Y \rightarrow Z$. Për çdo

$y \in Y$ shënojmë me f^y funksionin $(x \rightarrow f(x, y))$ për çdo $x \in X$. Gjithashtu shënojmë f_x funksionin $(y \rightarrow f(x, y))$ për çdo $y \in Y$. Në rastin kur kemi vargun e funksioneve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, vargjet korresponduese do të shënohen f_n^y dhe $f_{n,x}$. Do të na duhet të punojmë me funksione në ndonjë nënbashkësi $G = A \times B$ të prodhimit $X \times Y$. Në këtë rast do të themi e funksioni f^y është funksion i përcaktuar në A për çdo $y \in B$. Njëlloj është situata edhe për f_x .

Përkufizim 2.1 Le të jenë X, Y, Z hapësira metrike dhe funksionet $f_n, f: X \times Y \rightarrow Z$. Thuhet se vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është *ezaurues i ndarë*, në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, për çdo $y \in Y$, vargu $(f_n^y)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues dhe për çdo $x \in X$ vargu $(f_{x,n})_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues.

Gjithashtu, thuhet që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është α -konvergjent i ndarë $(\delta, \delta_a, \alpha^*$ konvergjent i ndarë) në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, f_n^y është α -konvergjent $(\delta, \delta_a, \alpha^* -$ konvergjent) tek f^y dhe gjithashtu $f_{x,n}$ konvergjent tek f_x . Në rastin kur funksionet janë përcaktuar në ndonjë $G \subseteq X \times Y$, ne mbajmë të njëjtat përkufizime si mësipër ku vargjet $(f_n^y)_{n \in \mathbb{N}}$ dhe $(f_{x,n})$ janë përcaktuar në X dhe Y në mënyrë të përshtatshme. Analogjia mes nocioneve të njohura të funksioneve të ndarë (me dy variabla) të vazhdueshëm dhe vargjeve uniformisht konvergjent të ndarë, duket qartë. Siç pritet, ezaurueshmëria e ndarë nuk sjell ezaurueshmërinë e mirëfilltë, ashtu si dhe konvergjencat e ndara të dhëna mësipër nuk sjellin konvergjencat e mirëfillta.

Shembull 2.2 Për çdo $n \in \mathbb{N}$ përcaktojmë funksionet $f_n, f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ të tillë që,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} & \text{në qoftë se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & \text{në qoftë se } x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

Shënojmë $f_n = f + \frac{1}{n}$. Shohim që $f_n \xrightarrow{u} f$ ndërkaq që f nuk është i vazhdueshëm, gjë që sjell që $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nuk është as α -konvergjent, as δ_a, α^* -konvergjent tek f .

Nga Teorema II, 3.3., vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nuk është ezaurues. Ndërkaq vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues i ndarë.

Le të jetë $\bar{x} \in S\left(0, \delta = \frac{1}{n}\right)$ për çdo $y \in \mathbb{R}$ do të kemi $\bar{x}$ mi $f_n^y(\bar{x}) = f_n(\bar{x}, y) = \frac{\bar{x}-y}{\bar{x}+y} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{\bar{x}-y}{\bar{x}-y} = 1$ gjithashtu për $\bar{y} \in S\left(0, \delta = \frac{1}{n}\right)$ dhe për çdo $x \in \mathbb{R}$. $f_{n,x} = \frac{x-\bar{y}}{x+\bar{y}} + \frac{1}{n} \rightarrow \frac{x-\bar{y}}{x+\bar{y}} = -1$ Kështu $f_n^0 = 1$ dhe $f_{n,0} = -1$. Shohim që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_a -konvergjent në mënyrë të ndarë, por nuk δ_a -konvergjent si i tërë. Kjo sjell që vargjet (f_n^y) dhe $f_{x,n}$ janë ezauruesë të ndarë por vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nuk është ezaurues. Tek [18] shembulli 4.1.2 tregohet i njëjti rezultat për α -konvergjencën.

Kujtojmë se bashkësia $A \subseteq X$ quhet kudo e padundur, në qoftë se dhe vetëm në qoftë se $(\bar{A})^0 = \emptyset$. Bashkësia A quhet e varfër, atëherë dhe vetëm atëherë, kur ajo është

bashkim i një vargu bashkësish kudo të padendura. Sipas Berit këto quhen edhe bashkësi të kategorisë së parë. Komplementi i një bashkësie të varfër quhet kudo e dendur nëse $X \setminus A$ është e varfër. Një rezultat i mirënjohur i matematikës klasike të dhënë nga Namioka [23] tregon se, vazhdueshmëria e ndarë, implikon vazhdueshmërinë në ndonjë bashkësi komplemente të një nënbashkësie kudo të padendur (të bashkësisë së përcaktimit $X \times Y$). Ndërkaq, në qoftë se X dhe Y janë hapësira kompakte, kjo nënbashkësi do të jetë në formën $A \times Y$. Një variacion i thjeshtë i vërtetimeve të bëra për rezultatet e mësipërme të realizuara tek [12] mund të realizohet për ezauruesitetin.

Tek [18] formulohet dhe vërtetohet.

Teorema 2.3. Le të jenë $(X, d), (Y, p), (Z, q)$ tre hapësira metrike dhe funksionet $f_n: X \times Y \rightarrow Z$. Supozojmë se për çdo $y \in Y$ çdo funksion $f_n^y: X \rightarrow Z$ është i vazhdueshëm dhe vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues i ndarë. Atëherë gjendet një bashkësi kudo e dendur (komplement i një bashkësie kudo të padendur) $G \subseteq X \times Y$ i tillë që vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në çdo pikë $(x, y) \in G$.

Vërejtje 2.4. Vëmë në dukje se, kur G_0 është një nënbashkësi e $X \times Y$ në trajtën $A \times B$, ne mund të përsërisim të njëjtin vërtetim duke përdorur ngushtimin në G_0 . Megjithatë bashkësia që fitohet $G \subseteq G_0$ do të jetë kudo e padendur në G_0 , që do të thotë se bashkësia $G_0 \setminus G$ do të jetë gjithashtu kudo e dendur. Si pasojë në qoftë se në Teoremën e mësipërme funksioni ynë është i përcaktuar vetëm në bashkësinë $G_0 = A \times B \subseteq X \times Y$, konkluzioni është se gjendet një bashkësi $G \subseteq G_0$ e tillë që, $G_0 \setminus G$ është kudo e padendur dhe vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në çdo pikë $(x, y) \in G$.

Kjo vërejtje na ndihmon në rezultatin që vijon .

Rrjedhim 2.5. Le të jenë X, Y, Z hapësira metrike dhe funksionet $f_n: f: X \times Y \rightarrow Z$. Supozojmë se çdo funksion f_n^y është i vazhdueshëm.

(1) Në qoftë se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjon tek f me anë të δ_α -konvergjencë e ndarë, atëherë gjendet një bashkësi kudo e dendur $G \subseteq X \times Y$ e tillë që, për të gjitha pikat $(x, y) \in G$, $\exists \delta > 0$ dhe $n_0(x, y)$ për $(\bar{x}, \bar{y}) \in S[(x, y), \delta]$ të kemi $p(f_n(\bar{x}, \bar{y}), f(x, y)) < \varepsilon$. Në veçanti vargu $(f_n|_G)_{n \in \mathbb{N}}$ është δ_α -konvergjent tek $f|_G$.

(2) Supozojmë se X dhe Y janë hapësira kompakte. Në qoftë se funksioni f_x është i vazhdueshëm dhe vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjon te funksioni f uniformisht i ndarë, atëherë ekziston një bashkësi kudo e dendur $G \subseteq X \times Y$ e tillë që, për çdo pikë (x, y) gjendet $\delta > 0$ dhe $n_0(x, y)$ e tillë që për $n > n_0$ dhe $(\bar{x}, \bar{y}) \in S[(x, y), \delta]$ të rrjedhë se $p(f_n(\bar{x}, \bar{y}), f(x, y)) < \varepsilon$. D.m.th, vargu $(f_n|_G)_{n \in \mathbb{N}}$ δ_α -konvergjon tek $f|_G$.

Vërtetim: Për (1) vëmë në dukje se, vargu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjon në mënyrë pikësore. Atëherë përdorim tek [18] teoremën 4,1,3 dhe vërejtjen 2.7.

Për të vërtetuar (2) na duhet vërejtja ([18]4.1.4.), që thotë se, në qoftë se G_0 është një nënbashkësi e prodhimit kartezian $X \times Y$ në formën $A \times B$, mund të përsërisim të njëjtin vërtetim duke përdorur ngushtimin e G_0 .

Së pari ,vëmë në dukje se funksioni f është i vazhdueshëm i ndarë përderisa, për çdo $y \in Y$ ne kemi që $f_n^y \xrightarrow{u} f^y$ dhe çdo f_n^y është i vazhdueshëm. Nga rezultati i Namiokës (shiko [12] dhe [11]) gjendet një bashkësi kudo e dendur $G_0 \subseteq X \times Y$ e tillë që, f është funksion i vazhdueshëm në çdo pikë $(x, y) \in G_0$. Përderisa X dhe Y janë kompakte , bashkësia G_0 është e formës $A \times Y_0$. Nga kjo rrjedh se ngushtimi $f|_{G_0}$ është funksion i vazhdueshëm e për rrjedhojë edhe i vazhdueshëm i ndarë. Nga Pohimi [xx]vargu $(f_n|_{G_0})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergjon tek $f|_{G_0}$ δ_a e ndarë. Kjo sjell që vargu $(f_n|_{G_0})_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues i ndarë. Përderisa G_0 ka formën $A \times Y$, nga vërejtja ([18], 4.1.4) gjendet bashkësia $G \subseteq G_0$ e tillë që, $G_0 \setminus G$ të jetë bashkësi e varfër dhe vargu $(f_n|_{G_0})_{n \in \mathbb{N}}$ është ezaurues në çdo pikë $(x, y) \in G$. Duke zbatuar pohimin II, 3.3. për ngushtimin në G_0 , ne kuptojmë që për të gjithë $(x, y) \in G$, gjendet $\delta > 0$ dhe $n_0(x, y)$ që për $n > n_0(x, y)$ dhe $(\bar{x}, \bar{y}) \in S([x, y], \delta)$ të rrjedhë që $p(f_n(\bar{x}, \bar{y}), f(x, y)) < \varepsilon$. Duhet vënë në dukje se $X \times Y|_{G_0} = (X \times Y|_{G_0}) \cup (G|_{G_0})$. Nga del se G është bashkësi kudo e dendur në $X \times Y$.

3. Krahassimi i topologjive uniforme në Y^X .

Le të jenë X dhe Y dy hapësira topologjike që i korrespondojnë prodhimit Y^X të të gjithë funksioneve të vazhdueshëm, që çojnë X te Y . Shënojmë $\mathcal{F}$ një familje funksionesh që përmbahet tek Y^X dhe shtrojmë çështjen, nëse ka topologji në Y^X që i përkasin familjes $\mathcal{F}$. Le të shqyrtojmë mekanizmin e ndërtimit të këtyre topologjive, që lidhen me një familje funksionesh.

Le të jetë $A \subset Y^X$ dhe $f \in Y^X$ ku X, Y janë dy hapësira metrike. Përcaktojmë këto konvergenca:

(1) $f \in \bar{A}$ në qoftë se $f = \lim_i f_i$, ku $f_i \in A$, për $i=1,2,\dots$

Me barazimin $f = \lim_i f_i$ kuptojmë se vargu $\{f_i\}$ është uniformisht konvergjent tek f .

(2) Le të jetë $x \in X$ dhe V një fqinjësi e $f(x)$. Shënojmë $B = f^{-1}(V)$ dhe $C = V^B$, atëherë $f \in \bar{C}$ në qoftë se $f = \lim_i f_i$, ku $f_i \in C$, për $i=1,2,\dots$ dhe me $f = \lim_i f_i$ kuptojmë konvergjencën uniforme tek f për çdo $\bar{x} \in B$.

(3) Le të jetë $x \in X$ dhe $V_{f(x)}$ fqinjësi e $f(x)$. Shënojmë $D = f^{-1}(V_f)$ ku $E = (V_{f(x)})^D$

$f \in \bar{E}$ në qoftë se $\lim_i f_i = f$, $f_i \in E$ dhe me $\lim_i f_i = f$ kuptojmë që, $(f_i(\bar{x}), f(x)) \in V_{f(x)}$ për çdo $\bar{x} \in D$.

(4) Le të jetë $x \in X$ dhe $V_{f(x)}$ fqinjësi e $f(x)$. Shënojmë $F = f^{-1}(V_f)$ ku $G = (V_{f(x)})^F$

$f \in \bar{G}$ në qoftë se $\lim_i f_i = f$, $f_i \in G$ dhe me $\lim_i f_i = f$ kuptojmë që, $(f_i(x_i), f(x)) \in V_{f(x)}$ për çdo $x_i \in F$.

Pohim 3.1. :Operatori mbyllje i përcaktuar në Y^X nga secila nga formulat (1), (2), (3), (4) plotëson kushtet (C1) – (C4) dhe përcakton topologjinë respektive.

Vërtetim: Vërtetimin e bëjmë vetëm për (2) meqenëse ata janë të ngjashëm për operatorët e tjerë (për (1) shih Engelking [15]).

Kondita (C1) duket qartë që plotësohet. Meqë kur $f_i = f$, $i=1, 2..$ rrjedh që $\lim_i f_i = f$ del se kondita (C2) gjithashtu plotësohet.

Nga (2) rrjedh menjëherë se:

(ii) kur $A \subset B$, atëherë $\bar{A} \subset \bar{B}$

që nga, për të vërtetuar konditën (C3), mjafton të tregojmë që:

(iii) $\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cup \bar{B}$.

Marrim $f \in \overline{A \cup B}$ rrjedh që ekziston vargu (f_i) i funksioneve që i përkasin $A \cup B$ dhe që $f = \lim_i f_i$ që do të thotë, për $f \in A$ ose në B dhe çdo $C = V^D$, ku V fqinjësi e f , gjendet $\delta > 0$, që për $x \in D$ dhe $n > n(x, \delta)$, $f_n(x) \in V$ ose që $f_n \in V^D \subset A$. Kjo tregon se (C3) plotësohet.

Nga pohimi (ii) rrjedh se $\bar{A} \subset \overline{(\bar{A})}$.

Me qëllim që të provojmë konditën (C4) është e mjaftueshme të provojmë që:

$$(iv) \quad \overline{(\bar{A})} \subset \bar{A}.$$

Marrim $f \in \overline{(\bar{A})}$ vargu $\{f_i\}$ do t'i përkasë $\bar{A}$ dhe të plotësojë barazimin $f = \lim_i f_i$ që do të thotë se, nëse $f \in C \subset Y^X$ për çdo $V_{f(x)}$, gjendet $\delta > 0$ dhe $i(x, \delta)$ e tillë që, për

$$(v) \quad \bar{x} \in B \text{ dhe } i(k) > i(x, \delta), f_{i(k)}(\bar{x}) \in V_{f(x)},$$

nga rrjedh se $f_{i(k)} \in \bar{C}$. Por për këtë funksion do të gjendet vargu g_i^k i tillë që, $\lim g_j^k(x) = f_{i(k)}(x)$, ku $g_i^k \in C$ dhe $C = V^D$ për $j=1, 2, \dots$ edhe këtu do të gjendet $j(k)$ i tillë që,

$$(vi) \quad g_{j(k)}(x) \in V_{f_{i(k)}} \quad V_{f_{i(k)}} \subset V_{f(x)}, \forall x \in D.$$

Meqenëse funksionet g_j^k i përkasin C për $k=1, 2, 3, \dots$ nga (v) dhe (vi) rrjedh që $f \in \bar{C}$ e cila kompletion vërtetimin.

(I) Duke ndjekur [15], topologjia e gjeneruar nga operatori (i) është quajtur *topologji e konvergjencës uniforme* në Y^X . Mund të verifikohet lehtë se për një $f \in Y^X$, familja $\{U_i(f)\}_{i=1}^\infty$ ku,

$$U_i(f) = \left\{ g \in Y^X : \text{gjendet një } \alpha < \frac{1}{i} \text{ e tillë që, } d(f(x), g(x)) < \alpha \text{ për çdo } x \in X \right\}$$

është bazë në pikën f të hapësirës Y^X me topologjinë e konvergjencës uniforme.

Për topologjitë e futura në këtë punim do të kemi:

II) Topologjia e gjeneruar nga operatori (2) është quajtur topologji e konvergjencës lokalisht uniforme në Y^X . Për çdo $f \in Y^X$ familja $\{V_j(f)\}_{j=1}^\infty$, ku $V_f = B(f, \alpha)$,

$$V_i(f) = \left\{ g \in Y^X : \text{ku për çdo } \alpha < \frac{1}{j} \text{ gjendet } U = f^{-1}(V_f) \text{ që, për } x \in f^{-1}(V_f) \text{ kemi } g(x) \in V_{f(x)} \right\}$$

është bazë në pikën f për hapësirën Y^X të pajisur me topologjinë lokalisht uniforme.

(III) Topologjia e gjeneruar nga operatori (3) është quajtur topologjia e δ_α -konvergjencës në Y^X . Edhe këtu për çdo $f \in Y^X$ familja $\{W_j(f)\}_{j=1}^\infty$, ku

$$W_i(f) = \left\{ g \in Y^X : \text{ku për çdo } V_f = B(f, \alpha), \alpha < \frac{1}{j} \text{ gjendet } U = f^{-1}(V_f) \text{ që, për } \bar{x} \in f^{-1}(V_f) \text{ kemi } g(\bar{x}) \in V_{f(x)} \right\}$$

(IV) Topologjia e gjeneruar nga operatori (4) është quajtur topologjia e α -konvergjencës në Y^X . Edhe këtu për çdo $f \in Y^X$ familja $\{W_j(f)\}_{j=1}^\infty$, ku

$$W_i(f) = \left\{ g \in Y^X : \text{ku për çdo } V_f = B(f, \alpha), \alpha < \frac{1}{j} \text{ gjendet } U = f^{-1}(V_f) \text{ që, për } x_i \in f^{-1}(V_f) \text{ kemi } g(x_i) \in V_{f(x)} \right\}$$

Kjo familje është bazë në pikën f për hapësirën Y^X të pajisur me δ_α -topologjinë. Duke patur parasysh topologjinë në një nënhapësirë, konkludojmë p.sh. që hapësira e konvergjencës uniforme në $\mathbb{R}^X$ indukon topologjinë uniforme të nënhapësirës në I^X , ku $I \subset \mathbb{P}$ është intervali njësi.

Lidhur me këtë nënhapësirë është provuar pohimi:

Pohim 3.2. [15] Për çdo hapësirë topologjike X , bashkësia I^X është e mbyllur në hapësirën me topologjinë e konvergjencës uniforme.

Le të jenë X dhe Y dy hapësira të çfarëdoshme topologjike, për të cilat $A \subset X$ dhe $B \subset Y$. Përcaktojmë:

$$(vii) \quad \mu(A, B) = \{f \in Y^X : f(A) \subset B\}.$$

Shënojmë $\mathcal{F}$ familjen e nënbashkësive të fundme të Y^X dhe shënojmë τ topologjinë në Y . Familja β e të gjithë bashkësive $\bigcap_{i=1}^k M(A_i, U_i)$, ku $A_i \in \mathcal{F}$ dhe $U_i \in \tau$ për $i=1, 2, \dots, k$ gjeneron siç dihet [15],[18] një topologji në Y^X e cila quhet topologji e konvergjencës pikësore në Y^X .

Për shkak të një vërtetimi më poshtë po sjellim në vëmendje së bashku me argumentimin të një pohimi shumë të njohur në topologji duke ndjekur në këtë rast. [15]

Pohimi 3.3.[15] Topologjia e konvergjencës pikësore në Y^X koinçidon me topologjinë e nënhapësirës së prodhimit kartezian $\prod_{x \in X} Y_x$ ku $Y_x = Y$ për çdo $x \in X$.

Vërtetim. Siç dihet, çdo hapësirë e hapur në Y^X , e pajisur me topologjinë e nënhapësirës të prodhimit kartezian $\prod_x Y_x$ është bashkim i bashkësive në formën:

(viii)

$$Y^X \cap p_{x_1}^{-1}(U_1) \cap p_{x_2}^{-1}(U_2) \cap \dots \cap p_{x_k}^{-1}(U_k)$$

Ku, $x_i \in X$ dhe $U_i \in \tau$ për $i=1, 2, \dots, k$.

Por, duke pasur parasysh se:

$$(ix) \quad Y^X \cap p_{x_1}^{-1}(U) = \mu(\{x\}, U)$$

del se bashkësitë e formës (viii) dhe të gjitha bashkësitë që janë të hapura në lidhje me topologjinë e nënhapësirës së prodhimit kartezian, janë të hapura në lidhje me topologjinë e konvergjencës pikësore.

Anasjelltas, nga barazimi (ix) rrjedh se për $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in \mathcal{F}$ dhe $U \in \tau$ do të kemi $\mu(A, U) = Y^X \cap p_{x_1}^{-1}(U) \cap p_{x_2}^{-1}(U) \cap \dots \cap p_{x_k}^{-1}(U)$ që do të thotë, se të gjitha bashkësitë, që janë të hapura në lidhje me topologjinë e konvergjencës pikësore, janë të hapura edhe në lidhje me topologjinë e një nënhapësire të prodhimit kartezian.

Rrjedhim 3.4. Një rrjetë $\{f_\sigma(x), \sigma \in \Sigma\}$ në hapësirën Y^X me topologji të konvergjencës pikësore konvergjon tek $f \in Y^X$ në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, rrjeta $\{f_\sigma(x), \sigma \in \Sigma\}$ konvergjon tek $f(x)$ për çdo $x \in X$.

Një pohim të tillë e kemi provuar direkt (Teorema II.1.1.). Nëse krahasojmë topologjitë e ndërtuara nga përkufizimet (1), (2), (3) dhe (4) nuk është vështirë të vendosim një renditje. Meqënëse për çdo C (të konvergjencave (2) dhe (3)) gjendet një A e tillë që $\bar{A} \subset \bar{C}$, atëherë topologjia e konvergjencës uniforme është më e pasur se topologjia e konvergjencës lokalisht uniforme. Po kështu, meqë për çdo C gjendet një D që $\bar{D} \subset \bar{C}$ del se, topologjia e δ_α -konvergjencës është më e pasur se topologjia e konvergjencës lokalisht uniforme, madje, edhe një lloj $\bar{F} \subset \bar{D}$. E kemi provuar pohimin.

Teoremë 3.5. $\tau_{l,u} \subset \tau_{\delta_\alpha} \subset \tau_\alpha \subset \tau_u$

Ku, $\tau_{l,u}$ është topologjia e konvergjencës lokalisht uniforme; τ_{δ_α} topologjia e δ_α konvergjencës; τ_α topologjia e α -konvergjencës dhe τ_u topologjia e konvergjencës uniforme.

Përfshirjet e mësipërme mund të jepen në hapësirat metrike edhe me anë të rruzujve përkatës:

$$(1) [B, \varepsilon, \delta]^{l,u} = \{(f, g) : \forall \varepsilon, \exists \delta; p(f(y), g(y)) < \varepsilon, y \in S(x, \delta)\}$$

$$(2) [B, \varepsilon, \delta]^{\delta_\alpha} = \{(f, g) : \forall \varepsilon, \exists \delta; p(f(x), g(y)) < \varepsilon, y \in S(x, \delta)\}$$

$$(3) [B, \varepsilon, \delta]^\alpha = \{(f, g) : \forall \varepsilon, \exists \delta; p(f(x), g(x_i)) < \varepsilon, x_i \in S(x, \delta)\}$$

$$(4) [B, \varepsilon]^u = \{(f, g) : p(f(x), g(x)) < \varepsilon, \forall x \in X\}$$

Duke ditur që, topologjia e konvergjencës uniforme është më e pasur nga topologjia e konvergjencës pikësore, shtrohet pyetja: Dy konvergjenat e tjera të paraqitura më sipër, a janë ndërmjet këtyre dy topologjive?

Pohim 3.6. Për çdo hapësirë topologjike X , topologjia e konvergencës lokalisht uniforme në $\mathbb{R}^X$, është më e pasur se topologjia e konvergencës pikësore.

Vërtetim: Ekuivalenca e konditës (i) dhe (v) në pohimin 1.4.1[15] tregohet se mjafton të provojmë që, kur $f \in \mathbb{R}^X$ është në mbylljen e bashkësisë $C \subset \mathbb{R}^X$ në lidhje me topologjinë e konvergencës lokalisht uniforme, atëherë f është në mbylljen e A në lidhje me topologjinë e konvergencës pikësore.

Le të jetë,

$$U = \mathbb{R}^X \cap \bigcap_{i=1}^k p_{x_i}^{-1}(U_i)$$

një fqinjësi e pikës f në topologjinë e konvergencës pikësore të pohimit III. 3.3. Përderisa U_i janë të hapura në $\mathbb{R}$, gjendet një $\varepsilon > 0$, i tillë që, $V =]f(x_i) - \varepsilon; f(x_i) + \varepsilon[\subset U_i$ për $i = 1, 2, \dots, k$. Përderisa f është i vazhdueshëm $f^{-1}(V)$ është e hapur dhe $x_i \in B = f^{-1}(V)$. Meqenësë $f = \lim_i f_i$ rrjedh se, për $x \in B = f^{-1}(V) \Rightarrow |f(x) - f_j(x)| < \varepsilon$ për $j=1, 2, \dots, n$ dhe çdo $\varepsilon > 0$. Kjo tregon se $f_j \in B^V = C$. Nga del se $f \in \bar{C}$.

Në shumë manuale të topologjisë dhe analizës funksionale si [15] [18], lidhur me topologjitë në hapësirën e funksioneve të vazhdueshëm Y^X , ku X dhe Y janë hapësira topologjike; një vend të dukshëm zë studimi i hapësirave topologjike të konvergencës pikësore dhe po ashtu të topologjisë kompakte të hapur. Duke ndjekur (Kelley [18] fq. 221-222) provohet se topologjia kompakte e hapur është më e pasur se topologjia e konvergencës pikësore. Të krahasojmë më poshtë një mënyrë të pavarur se në çfarë relacioni qëndrojnë topologjia e konvergencës lokalisht uniforme me konvergencën kompakte-e hapur. Topologjia kompakte e hapur në Y^X , është topologji e gjeneruar nga baza, që përbëhet nga bashkësitë $\bigcap_{i=1}^k M(K_i, U_i)$, ku K_i është një bashkësi kompakte në X dhe U_i është bashkësi e hapur në Y për $i=1, 2, \dots, k$. Në përgjithësi, topologjia kompakte-e hapur në $\mathbb{R}^X$ ndryshon nga topologjia e konvergencës uniforme, megjithatë në rastin $\mathbb{R}^N$ vihet re se kjo topologji koïncidon me topologjinë e konvergencës pikësore.

Pohim 3.7. Për çdo hapësirë topologjike X , topologjia e konvergencës lokalisht uniforme në $\mathbb{R}^X$ është më e pasur se topologjia kompakte e hapur.

Vërtetim: Edhe këtu mjafton të provojmë që kur $f \in \mathbb{R}^X$ është në mbylljen e bashkësisë C të shqyrtuar te (2), ku $C \subset \mathbb{R}^X$ në lidhje me topologjinë lokalisht uniforme atëherë f është në mbylljen A në lidhje me topologjinë kompakte -e hapur .

Siç vumë në dukje, baza e topologjisë kompakte e hapur ka trajtën:

$$B = \bigcap_{i=1}^k M(K_i, U_i)$$

ku, K_i është bashkësi kompakte në X , kurse U_i bashkësi të hapura në P dhe

$$M(K_i, U_i) = \{f : f(K_i) \subset U_i\},$$

Le të jetë $U = \mathbb{R}^X \cap \bigcap_{i=1}^k M(K_i, U_i)$, një fqinjësi e pikës f në topologjinë kompakte e hapur. $f(x_i) \in U_i$ dhe U_i e hapur në P , atëherë gjendet një $\varepsilon > 0$ i tillë që, $]f(x_i) - \varepsilon; f(x_i) + \varepsilon[\subset U_i$ për $i=1, 2, \dots, k$. Duke patur parasysh përkufizimin e konvergjencës lokalisht uniforme $f(x) = \lim_{j \rightarrow \infty}^{\delta} f_j(x)$ për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për $x \in X$ gjendet δ_x dhe $n(x, \varepsilon)$ të tillë që, për $x_i \in S(x, \delta)$ rrjedh $|f_j(x) - f(x)| < \varepsilon$. Meqenëse $f(x_i) \in U_i$ rrjedh se $x_i \in K_i$. Nga fakti se K_i është bashkësi kompakte nga një mbulim çfarëdo i saj $\{S(x, \delta_x)\}$ do të nxirret një nënmbulim i fundmë $\{S(x_j, \delta_{x_j})\}$ i tillë që, $K_i \subset \bigcup_{j=1}^k S(x_j, \delta_{x_j})$.

Në qoftë se x_i do bëjë pjesë në njërën prej tyre, p.sh. $x_i \in S(x_j, \delta_{x_j})$ atëherë, $|f_j(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon$. Kjo do të thotë se $f_j(x_i) \in U_i$ prej nga rrjedh se $U \cap A \neq \emptyset$.

1. Disa forma të reja të konvergjencës së barabartë

Në këtë studim ne synojmë të vazhdojmë punën e autorëve [12] R. Das, N. Papanastassiou. Ata zhvilluan konceptin e konvergjencës së barabartë uniforme si dhe konvergjencën diskrete dhe konvergjencën e barabartë α -uniforme, në mënyrë që të përfitojmë disa karakterizime të rëndësishme të kompaktësisë në hapësirën metrike. Më poshtë ne mund të bëjmë të njëjtën gjë si për hapësirat kompakte ashtu edhe për hapësirat lokalisht kompakte me mjete të tjera.

Përkufizimi 1.1. Një varg funksionesh (f_n) në Ψ themi se konvergjon në mënyrë *uniformisht lokalisht të barabartë* te një funksion f në Ψ (që shënohet $f_n \xrightarrow{u.l.b.} f$) për çdo $x \in X$ nëse ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ të numrave realë pozitivë konvergjent në zero, një fqinjësi V_x dhe një numër natyror $n_0(x, V)$ të tillë që kardinaliteti i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \varepsilon_n\}$ është të shumtën $n_0(x, V)$, për çdo $y \in V_x$.

Është e qartë që nëse vargu (f_n) është konvergjent në mënyrë uniformisht të barabartë atëherë (Përkufizimi 2.3. Kreu I) ai është konvergjent edhe në mënyrë uniformisht lokalisht të barabartë. Shembulli i mëposhtëm tregon që e anasjellta nuk është e vërtetë.

Shembull 1.2. Le të jetë $f_n = x^n$ një varg funksionesh të përcaktuara në një gjysmë segment $[0, 1[$ dhe të dëshmohet që nga konvergjenca e barabartë lokalisht uniforme nuk rrjedh konvergjenca e barabartë uniforme. Le të jetë $(\frac{1}{n})$ një varg konvergjent në zero dhe $0 \leq x < 1$. Shënojmë $\delta = \min\{|x|, |1-x|\}$ dhe $y \in]x-\delta, x+\delta[$. Të vërtetojmë që kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : y^n \geq \frac{1}{n}\}$ është numër i fundmë. Ne dimë që $ny^n \rightarrow 0$ nëse $|y| < 1$ dhe $n \rightarrow \infty$. Atëherë për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\varepsilon = 1$, ekziston një numër i fundmë n_0 i tillë që për $n > n_0$ kemi $ny^n \leq 1$. Meqë $y^n \geq \frac{1}{n}$ ka vend për të shumtën $n \leq n_0$. Në artikullin ([12] shembulli 4.9.) është vërtetuar që ky varg nuk është uniformisht i barabartë te ky interval.

Pohim 1.3. Në qoftë se vargu i funksioneve të vazhdueshëm $f_n : X \rightarrow Y$, konvergjon lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë te funksioni f në pikën $x \in X$ atëherë f është funksion i vazhdueshëm.

Vërtetim. Vërtet, në sajë të vazhdueshmërisë së funksioneve f_n të vargut, për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $\delta_1 > 0$ që për $y \in S(x, \delta_1)$ të kemi që $|f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Nga e dhëna që vargu në fjalë konvergjon lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë te funksioni f , mund të themi se gjendet një varg ε_n numrash realë pozitivë dhe konvergjent në zero dhe

numri natyror n_0 që për $\delta_2 > 0$ të tillë që, për $y \in S(x, \delta_2)$ kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \varepsilon_n\}$ të jetë të shumtën n_0 . Ky fakt mund të paraqitet në formën e një pohimi komplementar: për çdo varg ε_n numrash realë pozitivë dhe konvergjentë në zero dhe $n > n_0$ për çdo δ edhe për δ_2 , të tillë që, për $y \in S(x, \delta_2)$ të kemi që $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon_n$. Meqë nëse vargu ε_n konvergjon në zero, për çdo $\varepsilon > 0$ edhe për $\frac{\varepsilon}{3}$

gjendet një numër natyror n_1 i tillë që për $n > n_1$ të rrjedh që $\varepsilon_n < \frac{\varepsilon}{3}$. Duke marrë $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ dhe $n \in \mathbb{N}$ të tillë që, $n > \max\{n_0, n_1\}$ do të kemi:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Pohimi 1.4. Në hapësirën metrike kompakte konvergjenca e barabarta uniformisht dhe të barabarta lokalisht uniformisht përputhen.

Vërtetim. (I. 2.3.) $\Rightarrow$ (1.1.) nga përkufizimet.

(1.1.) $\Rightarrow$ (I. 2.3.). Nga përkufizimi (I. 2.3.), ekziston vargu i numrave pozitivë realë konvergjent në zero dhe $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$. Kjo do të thotë se për çdo $x \in X$ ekziston një $\delta_x > 0$ dhe $n(x, \delta_x) \in \mathbb{N}$ i tillë që, për çdo $y \in B(x, \delta_x)$ ne kemi:

$$(1) \quad |\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \varepsilon_n\}| < n(x, \delta_x)$$

Le të jetë bashkësia $\{B(x, \delta_x)\}$ një mbulim i hapur i X dhe ekziston një nënmbulim i tij i tillë që $X \subset \bigcup_{k=1}^m B(x_k, \delta_{x_k})$. Tani, nëse $x \in X$, ekziston një rruzull $B(x, \delta)$ i tillë që, $x \in B(x, \delta) \subset B(x_k, \delta_{x_k})$. Nga mosbarazimi (1) ne marrim:

$$|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \varepsilon_n\}| < n(x_k, \delta_{x_k})$$

Ne shënojmë $n_0 = \max\{n(x_1, \delta_{x_1}), \dots, n(x_m, \delta_{x_m})\}$ dhe për çdo $y \in X$ kardinali i bashkësisë $|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \varepsilon_n\}|$ është të shumtën n_0 .

Ne mund të modifikojmë teoremën 4.12 në [12] dhe përfitojmë një tjetër karakterizim të rëndësishëm të hapësirës kompakte përmes vargjeve konvergjente. Së pari, ne japim përkufizimin e laticës. Le të rikujtojmë që klasa e funksioneve Φ në X është quajtur *laticë* nëse Φ përmban të gjitha funksionet konstante dhe $f, g \in \Phi$ sjell që, $\max(f, g) \in \Phi$ dhe $\min(f, g) \in \Phi$.

Teorema 1.5. Një hapësirë metrike (X, d) është kompakte në qoftë se dhe vetëm në qoftë se, konvergjenca e barabartë lokalisht uniforme e vargut (f_n) të funksioneve realë nga një laticë Φ në X te zero sjell që, konvergjenca e barabartë uniforme e vargut (f_n) konvergjon te funksioni zero.

Vërtetim. Nëse X është hapësirë kompakte shohim pohimin e mësipërm. Për vërtetimin e të anasjelltës, supozojmë që (X, d) nuk është hapësirë metrike kompakte. Meqë X nuk është kompakte, ekziston një varg $\{x_k\}$ pikash të ndryshme të X i tillë që, nuk ekziston asnjë nënvarg konvergjent i vargut $\{x_k\}$. Meqë çdo pikë e bashkësisë $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$ është një pikë e izoluar e kësaj bashkësie, ekziston $\delta_k > 0$ dhe $\delta_k \rightarrow 0$, $k = 1, 2, \dots$ dhe rruzujt e hapur të ndërtuar të tipit:

$$B(x_k, \delta_k) = \{x \in X : d(x, x_k) \leq \delta_k\} \quad k=1, 2, \dots$$

janë dyshe joprerëse. Atëherë $H = \bigcup_{k=1}^{\infty} B(x_k, \delta_k)$ është një bashkësi e hapur. Përcaktojmë një varg $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ funksionesh me vlera reale në X .

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in X \setminus H \\ \frac{n^p}{p!} & \text{if } x \in H \end{cases}$$

Nëse $x \in H$ atëherë ekziston $B(x_k, \delta_k)$ e tillë që, $x \in B(x, \delta) \subset B(x_k, \delta_k)$ dhe për çdo $y \in B(x, \delta)$ ekziston një varg numrash realë me vlera pozitive $\varepsilon_p = \frac{1}{p} \rightarrow 0$, ku $p \rightarrow \infty$ e tillë që, $|\{n \in \mathbb{N} : |f_p(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq p$ për çdo p dhe $x \in X$. Vargu $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$ konvergjon uniformisht lokalisht e barabartë por jo uniformisht e barabartë, sepse bashkësia e $\{p\}$ nuk është bashkësi e kufizuar.

Është evidente që konvergjenca pikësore është konvergjencë e barabartë. Le të krahasojmë këtë përkufizim me përkufizimin e lokalisht të barabartë.

Përkufizim 1.6. [14] Vargu i funksioneve $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ që çon X në $Y \subset \mathbb{R}$ quhet *ezaurues i barabartë* në pikën $x \in X$, në qoftë se gjendet vargu $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i numrave realë pozitivë konvergjent në zero dhe numri natyral n_0 të tillë që, për çdo $\delta > 0$ dhe $y \in S(x, \delta)$ kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| \geq \varepsilon_n\}$ të jetë të shumtën n_0 .

Teoremë 1.7. Në qoftë se vargu i funksioneve të vazhdueshëm $f_n : X \rightarrow Y$, konvergjon lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë te funksioni f në pikën $x \in X$ dhe është ezaurues i barabartë në këtë pike, atëherë ai konvergjon uniformisht në mënyrë të barabartë.

Vërtetim. Meqenëse $f_n \xrightarrow{u.l.b.} f$; gjendet vargu (σ_n) i numrave realë pozitivë konvergjent në zero dhe numri natyror n_1 të tillë që, për çdo $\delta_1 > 0$ dhe $y \in S(x, \delta_1)$ kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(y)| \geq \sigma_n\}$ të jetë të shumtën n_1 .

Në sajë të pohimit [IV. 1.3.] funksioni f është i vazhdueshëm që do të thotë se, për çdo $\varepsilon > 0$ dhe pavarësisht nga bashkësia e elementëve të N , gjendet $\delta_2 > 0$ e tillë që, për $y \in S(x, \delta_2)$ marrim $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Duke patur parasysh përkufizimin e vargut të funksioneve ezaurues të barabartë, gjendet vargu i numrave realë pozitivë (λ_n) dhe konvergjentë në zero si dhe numri

natyror n_2 të tillë që për çdo $\delta_3 > 0$ dhe $y \in S(x, \delta_3)$ kardinali i bashkësisë $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f_n(y)| \geq \lambda_n\}$ nuk është më i madh se n_2 .

Shënojmë $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ dhe për $y \in S(x, \delta)$ shqyrtojmë përfshirjen

$$\{n : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n\} \subset \{n : |f_n(x) - f_n(y)| \geq \lambda_n\} \cup \{n : |f_n(y) - f(y)| \geq \sigma_n\} \cup \\ \cup \{n : |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\}$$

Mund të konstatohet pa vështirësi se, numri natyror n , i cili nuk bën pjesë në anën e djathtë të përfshirjes, nuk mund të bëjë pjesë në anën e majtë, gjë që provon përfshirjen. Duke konsideruar kardinalët e të dy anëve të përfshirjes marrim:

$$\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \sigma_n\} \leq n_1 + n_2 + 0 = n_0.$$

Përkufizim 1.7. Një varg funksionesh (f_n) në Φ themi se konvergjon *lokalisht barabartë te një funksion f në Φ* (që shënohet simbolikisht $f_n \xrightarrow{l.e.} f$) për çdo $x \in X$, nëse ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjent në zero, një fqinjësi V_x dhe një numër natyror $n(x, V_x)$ i tillë që, për çdo $y \in V_x$ ne kemi $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon_n$ për të gjitha $n > n(x, V_x)$.

Shënim 1.8. Nga përkufizimet shohim se konvergjencia e barabartë (Përkufizimi 2.4. Kreu I) është konvergjencë lokalisht e barabartë.

Shembull 1.9. Në shembullin 4.4. nga referenca [12] është dhënë një ide për ta provuar atë. Le ta modifikojmë atë në mënyrë që të provojmë se ekziston vargu (f_n) konvergjent i barabartë, por jo konvergjent lokalisht i barabartë. Përcaktojmë $f_n(x)$ si funksion karakteristik të intervaleve $[n, n + \frac{1}{n}]$, $n \in \mathbb{N}$ dhe zero te të gjitha pikat e bashkësisë $[1, \infty[$. Është e lehtë për të treguar që kur $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është një varg numrash realë pozitivë konvergjent në zero, atëherë $|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq 1$. Rezulton që për $n > 2$ rrjedh që $|f_n(x)| < \varepsilon_n$ për çdo $x \in [1, \infty[$. Kështu vargu (f_n) është konvergjent i barabartë. Nga ana tjetër, për çdo $x \in [n, n + \frac{1}{n}]$, ekziston një n_0 që për $n > n_0$ $f_n(x) = 1 > \varepsilon_n$. Kjo tregon se vargu (f_n) nuk është konvergjent lokalisht i barabartë.

Mund të vërtetohet pa vështirësi pohimi i mëposhtëm që na duhet më tej.

Lemë 1.10. Konvergjencia e barabartë përputhet me konvergjencën uniforme në një rast kur hapësira X është kompakte.

Vërtetim. Është evident fakti që, konvergjencia uniforme sjell konvergjencën e barabartë. Për drejtimin e anasjelltë, është e mjaftueshme të vërtetojmë që, konvergjencia e barabartë rrjedh nga konvergjencia pikësore në X . Nga përkufizimi I. 2.4. ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe një

numër natyror $n(x)$ që plotëson kushtin $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ për çdo $n > n(x)$. Le të jetë ε një numër pozitiv çfarëdo. Ekziston një numër natyror n_1 i tillë që, për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $n > n_1$ ne kemi që $\varepsilon_n < \varepsilon$. Nëse ne shënojmë $n_2(x) = \max\{n(x), n_1\}$, atëherë për $n > n_2(x)$ ne marrim $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $x \in X$. Kjo e vërteton pohimin.

Pohimi 1.11. Le të jetë X një hapësirë lokalisht kompakte dhe vargu (f_n) është konvergjent në mënyrë të barabartë. Atëherë vargu (f_n) është gjithashtu konvergjent lokalisht në mënyrë të barabartë.

Vërtetim. Nga përkufizimi IV. 1.7. për çdo $x \in X$, ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe një numër natyror $n(x)$ që plotëson kushtin $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$ për çdo $n > n(x)$. Le të jetë $S(x, \delta)$ një fqinjësi e pikës x në X . Meqë X është lokalisht kompakte, $\overline{S(x, \delta)}$ është një fqinjësi kompakte e pikës x . Nga pohimi i mësipërm (Tema 1.10) konvergjencia e barabartë në bashkësinë $X \cap \overline{S(x, \delta)}$ sjell konvergjencën uniforme në këtë bashkësi. Prandaj, për çdo $\varepsilon > 0$ dhe për çdo $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ varg numrash realë pozitivë konvergjentë në zero, ekziston $n_0(\delta)$ i tillë që për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $n > n_0(\delta)$ ne kemi $|f_n(y) - f(y)| < \varepsilon_n$ për çdo $y \in S(x, \delta)$. Nga fakti që x dhe δ janë arbitrare, vargu konvergjon lokalisht në mënyrë të barabartë.

Nga pohimi në vazhdim mund të vërtetojmë të gjitha vetitë dhe rezultatet e konvergjencës α -uniformisht të barabartë (Përkufizimi I. 2.3.). Nëse ne marrim parasysh që të gjitha këto kanë të njëjtën ide, atëherë do të kushtëzohemi vetëm me dy nga vetitë.

Përkufizimi 1.12.[14] Le të jetë (X, d) një hapësirë metrike dhe $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Atëherë vargu (f_n) konvergjon α^* -lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë te f (që shënohet $f_n \xrightarrow{\alpha^*-u.l.b} f$) ose lokalisht të barabartë fortësisht uniformisht nëse ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe $\delta > 0$ si dhe një $n_0(x, \delta) \in \mathbb{N}$ i tillë që kardinali

$$|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - f(x)| \geq \varepsilon_n\}| \leq n_0(x, \delta) \text{ për çdo } y \in S(x, \delta).$$

Është e lehtë të shohim që nga përkufizimi i α^* -u.l.b. konvergjencës rrjedhin të dyja α^* -konvergjencia dhe l.b. konvergjencia.

Teorema 1.13. Le të jetë (X, d) një hapësirë metrike dhe $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Nëse vargu (f_n) konvergjon uniformisht te funksioni zero, atëherë vargu (f_n) konvergjon α^* -u.l.b. te funksioni zero.

Vërtetim. Meqë $f_n \xrightarrow{u} f(x) = 0$, ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ i tillë që, $|f_n(y)| < \varepsilon_n$ për çdo $n \geq n_0$ dhe për $y \in X$. Për

α^* -u.l.b. konvergjencën rrjedh që për çdo $y \in S(x, \delta)$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ ne kemi $|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(y) - (f(x) = 0)| \geq \varepsilon_n\}| \leq n_0$. Kështu $f_n \xrightarrow{\alpha^*-u.l.b.} 0$.

Teorema 1.14. Le të jetë (X, d) një hapësirë kompakte dhe $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Atëherë $f_n \xrightarrow{\alpha^*-u.l.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$.

Vërtetim. Kjo rrjedh nga fakti që $f_n \xrightarrow{\alpha^*-u.l.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{u.l.e.} f$ por në këtë hapësirë kompakte $f_n \xrightarrow{u.l.e.} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f$.

2. Konvergjencat në laticë.

Duke ndjekur përkufizimet e trajtuara nga [10] do të kemi:

Përkufizime 2.1.

- Klasa e funksioneve Φ quhet *laticë* në qoftë se, Φ përmban të gjithë funksionet konstante dhe në qoftë se $f, g \in \Phi$, sjell që $\max(f, g) \in \Phi$ dhe $\min(f, g) \in \Phi$.
- Φ quhet *laticë e zhvendosjes* (translacionit) në qoftë se ajo është laticë dhe për $f \in \Phi, c \in \mathbb{R}$, do të kemi që $f + c \in \Phi$.
- Φ quhet *laticë kongruente* në qoftë se ajo është laticë e zhvendosjes dhe kur $f \in \Phi$ kemi $-f \in \Phi$.
- Φ quhet *laticë affine e dobët* në qoftë se ajo është laticë kongruente dhe gjendet një $C \in]0, +\infty[$, e tillë që C nuk është e kufizuar dhe për $f \in \Phi$, dhe $c \in C$ rrjedh që $cf \in \Phi$.
- Φ quhet *laticë affine* në qoftë se ajo është laticë kongruente dhe për $f \in \Phi, c \in \mathbb{R}$, rrjedh që $cf \in \Phi$.
- Φ quhet *laticë difference* në qoftë se ajo është laticë dhe nëse $f, g \in \Phi$, rrjedh se $f - g \in \Phi$.

Disa veti që kanë vend për konvergjencën uniforme të barabartë të funksionit f tek [12] me disa modifikime, mund të provohen për klasën më të gjerë të konvergjencave uniforme të barabarta lokale.

Teoremë 2.2 Le të jenë $f_n, f : X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ atëherë $f_n \xrightarrow{u.l.b.} f$ atëherë dhe vetëm atëherë, kur gjendet një varg i pafundëm $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash të plotë pozitivë të tillë që, $:\rho_n |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{u.l.b.} 0 \forall x \in V_x$.

Vërtetim: Me supozimin që $f_n \xrightarrow{u.l.b.} f$, gjendet një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitive që konvergjon në zero dhe për një fqinjësi V të pikës x , si edhe një numër natyror $n_0(x, V)$ i tillë që $|\{n \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$.

Vemë re se për $\rho_n = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_n}} \right\rfloor$, i cili është një varg i pakufizuar numrash positive, do të kemi $|\{n \in \mathbb{N}: \rho_n |f_n(x) - f(x)| \geq \sqrt{\varepsilon_n}, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$, mosbarazim që tregon se

$$\rho_n |f_n - f| \xrightarrow{u.l.b} 0.$$

Anasjelltas, në qoftë se $\rho_n |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{u.l.b} 0$, për çdo $x \in V$, ku ρ_n është një varg i pakufizuar numrash të plotë pozitivë, atëherë gjendet një varg λ_n numrash realë pozitivë që konvergjojnë në zero dhe $n_0(x, V)$ i tillë që, $|\{n \in \mathbb{N}: \rho_n |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n\}| \leq n_0(x, V)$ për $x \in V$. Duke marrë $\theta_n = \left\lfloor \frac{\lambda_n}{\rho_n} \right\rfloor \rightarrow 0$ do të kemi që kardinali

$|\{n \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \geq \theta_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$ që do të thotë se, $f_n \xrightarrow{u.l.e} f$ me vlerësimin e θ_n .

Vargjet (ε_n) , (λ_n) etj, quhen vlerësues të mosbarazimit.

Teoremë 2.3 Le të jetë ϕ një klasë funksionesh në X . Në qoftë se ϕ është një laticë translacioni, (laticë kongruence, laticë affine e dobët, laticë affine ose laticë difference) atëherë ashtu është edhe $\phi^{u.l.b}$.

Vërtetim. Supozojmë se ϕ është një laticë. Meqënëse ϕ përmban funksionin konstant edhe $\phi^{u.l.b}$ përmban këtë funksion. Nga përkufizimi i konvergjencës uniforme lokale të barabartë, në qoftë se $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ edhe $|f_n| \xrightarrow{u.l.b} |f|$ duke patur parasysh mosbarazimin $||f_n| - |f|| \leq |f_n - f|$. Për më tepër, në bazë të [24] në qoftë se $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ dhe $g_n \xrightarrow{u.l.b} g$ dhe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ atëherë $\alpha f_n + \beta g_n \xrightarrow{u.l.b} \alpha f + \beta g$. Që këtë rrjedh se kur $f, g \in \phi^{u.l.b}$ dhe $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ dhe $g_n \xrightarrow{u.l.b} g$ atëherë $\frac{f_n + g_n}{2} + \frac{|f_n - g_n|}{2} \xrightarrow{u.l.b} \frac{f + g}{2} + \frac{|f - g|}{2} = \max(f, g)$ që këtë del se $\min(f, g) \in \phi^{u.l.b}$, gjë që tregon se $\phi^{u.l.b}$ është laticë.

Si në rastin e konvergjencës uniforme të barabartë edhe këtu provohet se, kur ϕ është laticë zhvendosjeje (translacion), kongruencë affine e dobët, affine apo laticë difference e tillë është edhe $\phi^{u.l.b}$. Pa ndryshime të rëndësishme si te [12] vërtetohet një numër lemesh.

Lemë 2.4 Le të jetë $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Në qoftë se $f_n \xrightarrow{u.l.b} 0$, atëherë $f_n^2 \xrightarrow{u.l.b} 0$.

Vërtetim. Në qoftë se $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është një varg dëshmues për konvergjencën uniformisht lokale e barabartë e vargut f_n që konvergjon në zero, atëherë (λ_n^2) do të jetë varg dëshmues për konvergjencën uniforme lokale të barabartë të vargut f_n^2 në zero.

Lemë 2.5. Le të jenë $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Në qoftë se f është e kufizuar dhe $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ atëherë $f_n \cdot f \xrightarrow{u.l.b} f^2$.

Vërtetim: Le të jetë M një numër real pozitiv i tillë që, $|f(x)| \leq M$ për çdo $x \in X$. Meqënëse $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$, gjendet vargu $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ i numrave realë pozitivë që konvergjojnë në zero, për të cilin për $x \in V$, ku V është fqinjësi e x , gjendet numri $n_0(x, V) \in \mathbb{N}$ i tillë që,

$|\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$. Prej nga kardinali

$|\{n \in \mathbb{N}; |(f_n \cdot f)(x) - f^2(x)| \geq \varepsilon \cdot M, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$ mosbarazim, që tregon se

$f_n \cdot f \xrightarrow{u.l.b} f^2$. Duke përdorur dy lemat e mësipërme do të marrim rezultatin e mëposhtëm:

Teoremë 2.6. Le të jenë $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ dy funksione të kufizuar dhe $f_n, g_n: X \rightarrow \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ të tillë që, $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ dhe $g_n \xrightarrow{u.l.b} g$. Atëherë $f_n \cdot g_n \xrightarrow{u.l.b} f \cdot g$.

Vërtetim: Meqenëse $f_n \xrightarrow{u.l.b} f$ dhe $g_n \xrightarrow{u.l.b} g$ atëherë $f_n + g_n \xrightarrow{u.l.b} f + g$ dhe $f_n - g_n \xrightarrow{u.l.b} f - g$. Duke përdorur lemën [IV. 2.4] dhe [IV. 2.5.] do të kemi

$$f_n \cdot g_n = \frac{(f_n + g_n)^2 - (f_n - g_n)^2}{4} \xrightarrow{u.l.e} \frac{(f + g)^2 - (f - g)^2}{4} = f \cdot g.$$

Tek [12] është formuluar një pohim për konvergjencën α -uniforme të barabartë. Duke riformuluar pohimin për konvergjencën uniforme lokale të barabartë me modifikimet e nevojshme marrim të njëjtin rezultat.

Pohim 2.7.: Le të jetë f_n një varg i funksioneve reale dhe f një funksion me vlera reale në X . Në qoftë se (ε_n) dhe (λ_n) janë dy vargje numrash realë pozitivë që konvergjojnë në zero dhe që $0 \leq \varepsilon_n \leq \lambda_n$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe (ε_n) është dëshmuës i konvergjencës uniforme lokale të barabartë të f_n tek f në X atëherë (λ_n) është gjithashtu dëshmuës i këtij vargu.

Vërtetim: Meqenëse (ε_n) është dëshmuës i konvergjencës uniforme lokale të barabartë të f_n tek f për çdo fqinjësi V të një pike x do të gjendet $n_0(x, V) \in \mathbb{N}$ i tillë që,

$$|\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$$

duke pasur parasysh se:

$$|\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \supseteq |\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n, x \in V\}|$$

rrjedh që:

$$|\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n, x \in V\}| \leq |\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$$
 nga del se:

$$|\{n \in \mathbb{N}; |f_n(x) - f(x)| \geq \lambda_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V),$$

që do të thotë se (λ_n) është dëshmuës e kësaj konvergjence.

Në mënyrë të ngjashme me pohimin e mësipërm vërtetohet pohimi :

Pohim 2.8. Në qoftë se $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$ dhe $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ janë dy seri konvergjente me terma reale pozitive dhe të tilla që, $0 < \varepsilon_n \leq \lambda_n$ për çdo $n \in \mathbb{N}$ dhe $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n$ është dëshmuës për konvergjencën uniforme lokale të barabartë, atëherë edhe seria $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n$ është dëshmuës për këtë konvergjencë.

Pohim 2.9. Në qoftë se $\{f_n\} \xrightarrow{u.l.b} f$ dhe $\{f_{n_k}\}$ është një nënvarg i $\{f_n\}$ atëherë $f_{n_k} \xrightarrow{u.l.b} f$.

Vërtetim: Në bazë të përkufizimit, gjendet vargu (ε_n) i numrave realë pozitivë që konvergjon në zero dhe për një fqinjësi V të pikës x gjendet numri $n_0(x, V) \in \mathbb{N}$ e tillë që, $|\{n \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$. Le të marrim $\{f_{n_k}\}$ një nënvarg të vargut $\{f_n\}$. Nënvargu $\{\varepsilon_{n_k}\}$ i vargut ε_n si nënvarg i një vargu numerik konvergjon në zero dhe

$$|\{n_k \in \mathbb{N}: |f_{n_k}(x) - f(x)| \geq \varepsilon_{n_k}, x \in V\}| \leq |\{n \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_n, x \in V\}| \leq n_0(x, V)$$

gjë që tregon se ε_{n_k} është dëshmuar për vargun $\{f_{n_k}\}$, i cili konvergjon përsëri në f .

3. Lidhja me konvergjencën α - të barabartë

Përkufizim 3.1 [12] Le të jenë $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ funksione të përcaktuara në X . Thuhet që vargu funksional (f_n) konvergjon α -në mënyrë të barabartë te funksioni f (shkruhet $f_n \xrightarrow{\alpha-b.} f$), në qoftë se ekziston një varg $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ numrash realë pozitivë konvergjentë në zero, të tillë që për çdo $x \in X$ dhe një varg (x_n) pikash nga X të tillë që, $x_n \rightarrow x$ gjendet numri natyror $n_0 = n_0(x, x_n)$ që të këtë vend mosbarazimi $|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon_n$ për $n \geq n_0$.

Teoremë 3.2. Le të jenë $f, f_n, n \in \mathbb{N}$ funksione të përcaktuara në X . Në qoftë se vargu (f_n) është ezaurues në mënyrë të barabartë, atëherë pohimet e mëposhtme janë ekuivalente:

(a) Vargu (f_n) konvergjon lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë te funksioni f në pikën $x \in X$.

(b) $f_n \xrightarrow{\alpha-b.} f$.

Vërtetim. (a) $\Rightarrow$ (b). Përdorim pohimet komplementare për ezauruesitetin e barabartë dhe konvergjencën lokalisht uniforme të barabartë.

Së pari, për çdo varg (σ_n) numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe $n_1 \in \mathbb{N}$ të tillë që, për çdo $\delta_1 > 0$ dhe $y \in S(x, \delta_1)$ të kemi:

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \sigma_n \quad (1)$$

dhe së dyti, për çdo një varg (λ_n) numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe $n_2 \in \mathbb{N}$ të tillë që, për çdo $\delta_2 > 0$ dhe $y \in S(x, \delta_2)$ marrim:

$$|f_n(y) - f(y)| < \lambda_n \quad (2).$$

Meqenëse vargjet σ_n dhe λ_n konvergjojnë në zero gjenden përkatësisht numrat natyrorë n_3 dhe n_4 të tillë që për $n > n_3$ përkatësisht $n > n_4$ të kemi $\sigma_n < \varepsilon/2$ dhe $\lambda_n < \varepsilon/2$ për $n > \max\{n_3, n_4\}$. Këto dy mosbarazime kanë vend për të njëjtin numër natyror.

Shënojmë $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ atëherë për $y \in S(x, \delta)$ kanë vend njëkohësisht mosbarazimet (1) dhe (2). Le të jetë $x_n \in S(x, \delta)$, kjo do të thotë se gjendet $n_5 \in \mathbb{N}$ që për $n > n_5$ do të kemi që: $d(x_n, x) < \delta$.

Për $n > \max\{n_3, n_4, n_5\}$ shqyrtojmë mosbarazimin:

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \sigma_n + \lambda_n = \varepsilon_n < \varepsilon.$$

(b) $\Rightarrow$ (a) Të provojmë se vargu (f_n) konvergjon lokalisht uniformisht në mënyrë të barabartë në pikën $x \in X$. Në sajë të përkufizimit të vargut (f_n) që konvergjon α -në mënyrë të barabartë te funksioni f rrjedh se funksioni f është i vazhdueshëm në pikën x (Das [3] Vërejtje 5.2.). Rrjedhimisht për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $\delta_1 > 0$ e tillë që, për $y \in S(x, \delta_1)$ ka vend mosbarazimi:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Në sajë të ezaurueshmërisë së barabartë, gjendet një varg (σ_n) numrash realë pozitivë konvergjentë në zero dhe $n_1 \in \mathbb{N}$ të tillë që, për çdo $\delta_2 > 0$ dhe $y \in S(x, \delta_2)$ të kemi

$$|f_n(x) - f_n(y)| < \sigma_n.$$

α -e barabartë konvergjencia tregon se, kur $x_n \rightarrow x$ kemi numrin natyror $n_2 = n_2(x, x_n)$ që të ketë vend mosbarazimi:

$$|f_n(x_n) - f(x)| < \varepsilon_n \quad (4)$$

për $n \geq n_2$.

Në këto kushte, për çdo $\varepsilon > 0$ edhe për $\varepsilon = \delta_3$ gjendet numri natyror n_3 që, për $n > n_3$ kemi që $x_n \in S(x, \delta_3)$. Duke shënuar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$ dhe $n > \max\{n_1, n_2, n_3\}$ do të plotësohen mosbarazimet (1), (3) dhe (4).

Shqyrtojmë:

$$\begin{aligned} |f_n(y) - f(y)| &\leq |f_n(y) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_n)| + |f_n(x_n) - f(x)| + \\ &+ |f(x) - f(y)| < 2\sigma_n + \varepsilon_n + \varepsilon \leq \lambda_n \end{aligned}$$

Ku $\lambda_n = 2\sigma_n + \varepsilon_n$ është një varg numrash realë pozitivë që shkon në zero, meqenëse ε mund të merret e çfarëdoshme pranë zeros. Kjo e vërteton teoremën.

KREU 5

Zbatime te teoria e masës dhe integrit

Në këtë kapitull janë paraqitur disa zbatime në probleme të ndryshme të teorisë së masës dhe të integrit, duke përdorur konceptin e vargjeve ezaurues dhe konvergjenat lokale. Krahas relativizimit të funksioneve ekui-të integrueshëm [25], janë paraqitur të reja mbi ideal-integralet e tipit Bohner[21],[22] dhe një studim i ri mbi zbatimin e diferencave simetrike; në teorinë e masës dhe funksioneve të vazhdueshme, duke vazhduar rezultatet e [6].

1. Funksionet ideal të matshëm

Përkufizime 1.1.

(a) Le të jetë Y një bashkësi e ndryshme nga bashkësia boshe, $Y \neq \emptyset$. Një familje $\mathfrak{I} \subset \Pi(Y)$ quhet *ideal i bashkësisë* Y atëherë dhe vetëm atëherë kur, për $A, B \in \mathfrak{I}$ rrjedh se, $A \cup B \in \mathfrak{I}$ dhe për çdo $A \in \mathfrak{I}$ dhe $B \subset A$ do të kemi që $B \in \mathfrak{I}$.

(b) Një ideal $\mathfrak{I}$ thuhet se është jo-trivial atëherë dhe vetëm atëherë kur, $\mathfrak{I} \neq \emptyset$ dhe $y \notin \mathfrak{I}$. Një ideal jo-trivial quhet *i pranueshëm* kur ai përmban bashkësitë një pikësore. Le të jetë (T, Σ, μ) një hapësirë me masë probabilitare, ku T është një bashkësi çfarëdo në drejtëz, Σ -algjebra e Borelit dhe μ një masë e kufizuar.

Përkufizim 1.2 Funksioni $f: T \rightarrow X$, ku X është hapësirë vektoriale, quhet *funksion i thjeshtë sipas μ* , në qoftë se për çdo familje bashkësish të matshme $\{E_i\}$ jo prerëse, pra $E_i \subset T$ dhe $E_i \cap E_j = \emptyset$, për $i \neq j$, ku $T = \bigcup_{i=1}^n E_i$ dhe $f(t) = x_i$, për $t \in E_i$, $i=1, 2, \dots, n$.

Siç dihet, funksioni i thjeshtë paraqitet në trajtën $f(t) = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{E_i}$, ku χ_{E_i} është funksioni karakteristik i E_i .

Përkufizim 1.3 Funksioni $f: T \rightarrow X$ quhet $\mathfrak{I}$ -i matshëm në T në qoftë se për çdo $t \in T$, $\varepsilon > 0$ dhe $A \subset \mathfrak{I}$ gjendet një varg funksionesh të thjeshta $f_n: T \rightarrow X$ për të cilët të kemi që $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ për $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Pohim 1.4 Kombinimi linear i funksioneve $\mathfrak{I}$ -të matshëm (ideal të matshëm) është funksion $\mathfrak{I}$ -i matshëm.

Vërtetim: Le të jenë f dhe g dy funksione $\mathfrak{I}$ -të matshme. Për funksionin f do të gjendet një varg funksionesh të thjeshtë $f_n(t)$ që $\mathfrak{I}$ -konvergjojnë te funksioni f .

Kjo do të thotë se për çdo $\varepsilon > 0$, edhe për $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ dhe një bashkësi $A_1 \in \mathfrak{I}$ e tillë që, $|f_n(t) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{2|\alpha|}$ për $n \in \mathbb{N} \setminus A_1$ dhe $t \in T$.

Në mënyrë të ngjashme, për funksionin $\mathfrak{I}$ -të matshëm $g(x)$, gjendet vargu i funksioneve të thjeshtë $g_n(t)$ që $\mathfrak{I}$ -konvergjon te $g(x)$, pra për çdo $\varepsilon > 0$ edhe për $\frac{\varepsilon}{2|\beta|} > 0$ gjendet $A_2 \in \mathfrak{I}$ që për $n \in \mathbb{N} \setminus A_2$ të kemi $|g_n(t) - g(t)| < \frac{\varepsilon}{2|\beta|}$. Meqënëse $\mathbb{N} \setminus A_1 \cup \mathbb{N} \setminus A_2 \subset \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$ për

$n \in \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$ dhe $t \in T$ do të kemi:

$$\begin{aligned} |(\alpha f_n(x) + \beta g_n(x)) - (\alpha f + \beta g)| &\leq |\alpha| |f_n(x) - f(x)| + |\beta| |g_n(x) - g(x)| < \\ \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Përkufizim 1.5. Nënvargu $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ i vargut $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathfrak{I}} f$ quhet *themelor* në qoftë se, për

$A' = \{n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots\}$ $f_{n_k} \xrightarrow{\mathfrak{I}} f$ për $n \in \mathbb{N} \setminus A'$ ku $A' \subset A$.

Përkufizim 1.6. Le të jetë (I, Σ, μ) një hapësirë e matshme me masë jonegative të plotë. Vargu i funksioneve të matshme $(f_n)_n$ në I është $\mathfrak{S}$ -konvergjent sipas masës μ te funksioni f , në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\sigma > 0$ gjendet një nënvarg themelor $(f_{n_k})_k$ i vargut $(f_n)_n$ i tillë që: $\mu\{t: |f_{n_k}(t) - f(t)| \geq \sigma\} < \varepsilon$ për $n_k \in \mathbb{N} \setminus A'$ dhe $t \in I$. E shënojmë $f_n(t) \xrightarrow{\mathfrak{S}-\mu} f(t)$.

Përkufizim 1.7. Vargu i funksioneve të matshme $(f_n)_n$ me vlera në $\mathbb{R}$ quhet $\mathfrak{S}$ -themelor sipas masës në $S \subset \mathfrak{S}$, në qoftë se gjendet një numër natyror $N(\sigma, S) \subset \mathbb{N} \setminus A$ dhe një nënvarg themelor që $\forall \varepsilon > 0$ dhe $\sigma > 0$, $\mu\{t: |f_{n_k}(t) - f(t)| \geq \sigma\} < \varepsilon$.

Pohim 1.8. Në qoftë se vargu $(f_n)_n$ është $\mathfrak{S}$ -konvergjent tek f në $\mathfrak{S}$ ai është $\mathfrak{S}$ -themelor.

Vërtet të jetë $(f_{n_k}(t))_k$ një nënvarg themelor i vargut $(f_n(t))$? Zgjedhim një numër

$N \in \mathbb{N}$, $N \in \mathbb{N} \setminus A$ dhe shqyrtojmë mosbarazimin:

$|f_{n_k}(t) - f_N(t)| \leq |f_{n_k}(t) - f(t)| + |f(t) - f_N(t)|$; që këtij mund të shkruajmë:

$$\{t: |f_{n_k}(t) - f_N(t)| \geq \sigma\} \subset \{t: |f_{n_k}(t) - f(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\} \cup \{t: |f(t) - f_N(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

Që nga marrim se për $n_k \in \mathbb{N} \setminus A'$, $A' \subset A$.

$$\mu\{t: |f_{n_k}(t) - f_N(t)| \geq \sigma\} \leq \mu\{t: |f_{n_k}(t) - f(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\} + \mu\{t: |f(t) - f_N(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

Pohim 1.9. $\mathfrak{S}$ -limiti i vargut $(f_n(t))_n$ sipas masës μ është i vetëm me afërsinë e ekuivalencës.

Vërtetim : Le të supozojmë se pohimi nuk është i vërtetë. Kjo do të thotë se vargu $(f_n)_n$ $\mathfrak{S}$ -konvergjon në dy limite të ndryshme $f_1(t)$ dhe $f_2(t)$. Për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $\sigma > 0$ gjendet nënvargu themelor i tillë që,

$$\mu\left\{t: |f_{n_k}(t) - f_1(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ për } n_k \in \mathbb{N} \setminus A'_1 \text{ kur } A'_1 \subset A \text{ dhe } \mu\left\{t: |f_{n_k}(t) - f_2(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ për } n_k \in \mathbb{N} \setminus A'_2 \text{ kur } A'_2 \subset A \text{ dhe } t \in T, \text{ ku ka vend përfshirja:}$$

$$\{t: |f_1(t) - f_2(t)| \geq \sigma\} \subset \{t: |f_{n_k}(t) - f_1(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\} \cup \{t: |f_{n_k}(t) - f_2(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\}$$

për $n_k \in \mathbb{N} \setminus (A'_1 \cup A'_2)$ kur $A'_1 \cup A'_2 \subset A$, ose duke marrë masat e të dyja anëve;

$$\mu\{t: |f_1(t) - f_2(t)| \geq \sigma\} \leq \mu\left\{t: |f_1(t) - f_{n_k}(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} + \mu\left\{t: |f_{n_k}(t) - f_2(t)| \geq \frac{\sigma}{2}\right\} < \varepsilon$$

Mosbarazimi i mësipërm tregon se, $f_1(t)$ dhe $f_2(t)$ mund të jenë të ndryshëm vetëm në një bashkësi me masë zero.

Pohim 1.10. Në qoftë se vargu $(f_n)_n$ është varg $\mathfrak{S}$ -themelor në $T \subset \mathbb{R}$, atëherë ekziston

$$\mathfrak{S} - \lim_k \int_T f_k(t) d\mu.$$

Vërtetim: Meqënëse $(f_n)_n$ është varg $\mathfrak{S}$ -themelor për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet $k \in \mathbb{N} \setminus A$ dhe N e fiksuar natyrore që $|f_k(t) - f_N(t)| < \frac{\varepsilon}{\mu(T)}$ pothuajse për të gjitha $k \in \mathbb{N} \setminus A$.

$$\text{Do të kemi: } \left| \int_T f_k(t) d\mu - \int_T f_N(t) d\mu \right| \leq \int_T |f_k(t) - f_N(t)| d\mu \leq |f_k(t) - f_N(t)| \mu(T) < \varepsilon$$

Kjo tregon se vargu $(\int f_n(t) d\mu)_n$ është varg themelor në $\mathbb{R}$ dhe si i tillë është konvergjent.

Përkufizim 1.11. Funksioni $f: T \rightarrow X$ quhet $\mathfrak{S}$ -i integrueshëm Bchner, në qoftë se gjendet një varg themelor funksionesh të thjeshtë $(f_k)_k$ të tillë që,

- a) $(f_k)_k$ të jetë $\mathfrak{S}$ -i integrueshëm te f .
b) $\mathfrak{S} - \lim_k \int |f_k(t) - f_N(t)| d\mu = 0$ pothuajse kudo ky limit shënohet $\mathfrak{S} - B - \int f(t) d\mu$ dhe quhet $\mathfrak{S}$ -integral i Bohnnerit.

Vargu f_n i funksioneve të thjeshtë quhet *varg përcaktues* i funksionit f .

Provohet lehtë pohimi:

Në qoftë se (f_n) dhe (g_n) janë vargje përcaktuese dhe themelore te i njëjti funksion, atëherë

$$\mathfrak{S} - \lim f_n(t) d\mu = \mathfrak{S} - \lim g_n(t) d\mu$$

Kjo tregon se pohimi i mësipërm është i saktë.

2. Zbatime të diferencës simetrike në teorinë e masës.

Le të jetë X një bashkësi e pafundme dhe $\Sigma \subset \Pi(X)$ një σ – algjebër. Do të shënohen me $ba(\Sigma)$ bashkësia e të gjithë masave mbledhore të fundme me vlera reale në Σ ; dhe me $Ca(\Sigma)$ nënhapsirën lineare të $ba(\Sigma)$, që përbëhet nga të gjitha masat σ -mbledhore në Σ .

Më poshtë po japim kuptimet e idealeve ezaurues dhe të idealeve të konvergjencave të tjera në kuadrin e teorisë së masave.

Përkufizime 2.1.

- (a) Për një masë pozitive $\lambda \in ba(\Sigma)$ dhe $A, B \in \Sigma$ (pseudo) – λ - distanca ndërmjet A dhe B përcaktohet nga barazimi: $d_\lambda(A, B) = \lambda(A \Delta B)$ ku Δ tregon diferencën simetrike.
(b) Një masë $\mu \in ba(\Sigma)$ është λ - $\mathfrak{S}$ e vazhdueshme, në bashkësinë $E \in \Sigma$, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $\delta > 0$ dhe $A \in \mathfrak{S}$ e tillë që, për çdo $F \in \Sigma$ që $d_\lambda(F, E) = \lambda(F \Delta E) < \delta$ të kemi $|\mu(F) - \mu(E)| < \varepsilon$ për $n \in \mathbb{N} \setminus A$.
(c) Do të thuhet se μ është λ - $\mathfrak{S}$ e vazhdueshme në Σ , në qoftë se μ është λ - $\mathfrak{S}$ e vazhdueshme në çdo $E \in \Sigma$.

Vemë në dukje se, siç është përcaktuar në teorinë e masës, μ është λ -absolutisht e vazhdueshme në qoftë se μ është λ -e vazhdueshme në $\emptyset$. Me marrëveshje, kur $F \subset E$ do të themi se E është λ - e vazhdueshme kur për çdo $\varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ e tillë që kur $d_\lambda(F, E) = \lambda(E \setminus F) < \delta$ do të kemi $|\mu(F) - \mu(E)| = |\mu(E \setminus F)| < \varepsilon$.

Në mënyrë analoge, kur $E \subset F$ atëherë $d_\lambda(F, E) = \lambda(F \setminus E) < \delta$ do të kemi për $n \in \mathbb{N} \setminus A, \mu(F \setminus E) < \varepsilon$, kur $E = F, d_\lambda(E, F) = 0$.

Pohim 2.2. (a) Nqs $F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_n \subset$ ku, $F_n \in \Sigma, F_n \in ba(\Sigma)$ dhe $F = \bigcup_n F_n, \mu \in ba(\Sigma)$, ose

(b) për vargun $E_1 \supset E_2 \supset \dots \supset E_n \supset \dots$ kur $E_n \in ba(\Sigma), E_n \in \Sigma$ dhe $E = \bigcap_n E_n$

Masa μ është e vazhdueshme dhe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F \Delta F_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n \Delta E) = 0$$

që nga rrjedh se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F) \text{ dhe } \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(E_n) = \mu(E)$$

Vërtetim: Vërtetimi bëhet si në teorinë e masës. Shohim që $F = \bigcup_n F_n = F_1 \cup F_2 \setminus F_1 \cup \dots \cup F_n \setminus F_{n-1} \cup \dots$ rrjedhimisht

$$\mu(EF) = \mu(F_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(F_n \setminus F_{n-1})$$

Meqenëse seria $\sum_{n=2}^{\infty} \mu(F_n \setminus F_{n-1})$ është konvergjente me terma pozitive $\mu(F_n \setminus F_{n-1}) \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$. Për rrjedhojë $d_\lambda(F_n, F_{n-1}) = \lambda(F_n \setminus F_{n-1}) \rightarrow 0$ kur $n \rightarrow \infty$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \mu(F_1) + \sum_{k=2}^n \mu(F_k \setminus F_{k-1}) \} = \mu(F)$$

Ose

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(F_n) = \mu(F) \Leftrightarrow \mu(F \setminus F_n) < \varepsilon \Leftrightarrow \mu(F \Delta F_n) < \varepsilon \Leftrightarrow |\mu(F) - \mu(F_n)| < \varepsilon,$$

Njëlloj provohet edhe pohimi (b).

Përkufizime 2.3.

(a) Le të jetë $\mathfrak{I}$ -një ideal i pranueshëm në $\mathbb{N}$. Vargu i masave $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nga $ba(\Sigma)$ është $\mathfrak{I}$ -ezaurues në $E \in \Sigma$, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet $\delta > 0$ dhe bashkësia $A \in \mathfrak{I}$ e tillë që, $|\mu_n(E) - \mu(F)| < \varepsilon$ për çdo $F \in \Sigma$ që $d_\lambda(E, F) < \delta$ dhe për çdo $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Thuhet se vargu $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është $\mathfrak{I}$ -ezaurues në Σ , në qoftë se vargu është $\mathfrak{I}$ -ezaurues për çdo $E \in \Sigma$.

(b) Thuhet se $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është $\mathfrak{I}_\alpha$ -konvergjent tek μ në bashkësinë $E \in \Sigma$, në qoftë se për çdo varg $(E_n)_n$ në Σ , për të cilat $\mathfrak{I}$ -limit $d_\lambda(E_n, E) = 0$ ne marrim $\mathfrak{I} - \lim_n \mu_n(E_n) = \mu(E)$.

Vargu $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ është $\mathfrak{I}_\alpha$ -konvergjent tek μ në Σ , në qoftë se ai është $\mathfrak{I}_\alpha$ -konvergjent tek μ në çdo $E \in \Sigma$.

(c) Thuhet se $(\mu_n)_n$ është $\mathfrak{I}_\delta$ -konvergjent tek μ në bashkësinë $E \in \Sigma$, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$, gjendet $\delta > 0$ e tillë që, për çdo $F \in \Sigma$ dhe $d_\lambda(F, E) < \delta$ të kemi $|\mu_n(F) - \mu(E)| < \varepsilon$ për $n \in \mathbb{N} \setminus A$.

Bashkësinë e të gjithë nënbashkësive $F \in \Sigma$, për të cilat $d_\lambda(F, E) < \delta$ për δ të fiksuar do ta shënojmë V_δ^E dhe do ta quajmë fqinjësi të E -së. Duket qartë se $d_\lambda(E, E) = 0$ rrjedhimisht $E \in V_\delta^E$.

Shënim 2.4. Bashkësitë $\{V_\delta^E\}$ shërbejnë si nënbazë e një topologjie, ku të hapurat janë $G = \{\text{bashkim bashkësish nga } \Sigma\}$ të cilat kanë fqinjësi për çdo element të tyre.

Provohet lehtë se:

(1) Bashkimi i G_n është i hapur.

(2) Prerja e një numri të fundmë të hapurash është bashkësi e hapur.

Këtë topologji po e emërtojmë topologjia e fqinjësive të bashkësive. Cdo $\varepsilon > 0$,

gjendet $\delta > 0$ e tillë që, për çdo $F \in V_\delta^E$ do të kemi:

$$|\mu_n(F) - \mu(E)| < \varepsilon.$$

Pohim 2.5. Nga përkufizimet e mësipërme del qartë se, kur vargu $(\mu_n)_n$ është $\mathfrak{I}_{\delta_a}$ -konvergjent, ai është edhe $\mathfrak{I}_\delta$ -konvergjent. Të tregojmë se kur vargu $(\mu_n)_n$ është $\mathfrak{I}_\alpha$ -konvergjent, ai është edhe $\mathfrak{I}_{\delta_a}$ -konvergjent.

Le të jetë $(E_n)_n$ varg bashkësish në Σ , për të cilin $\mathfrak{I} - \lim_n d_\lambda(E_n, E) = 0$ për

$n \in \mathbb{N} \setminus A_1$, $A_1 \in \mathfrak{I}$. Kjo do të thotë se ekzistojnë $n \in \mathbb{N} \setminus A_1'$ që $d_\lambda(E_n, E) < \delta$ ku $A_1' \subset A_1$.

Domethënë se, për $n \in \mathbb{N} \setminus A_1'$, $E_n \in V_\delta^E$. Meqë ka vend $\mathfrak{I}_{\delta_a}$ -konvergjencia, gjendet për çdo $\varepsilon > 0$, bashkësia A_2 që për $n \in \mathbb{N} \setminus (A_2 \cup A_1')$

$$|\mu_n(E_n) - \mu(E)| < \varepsilon.$$

Pohim 2.6. Në qoftë se në kushtet e mësipërme vargu i masave $(\mu_n)_n$ - $\mathfrak{I}_\delta$ -konvergjent tek μ , kur $\mu_n \in ba(\Sigma)$ është $\mathfrak{I}_\delta$ -konvergjent dhe $\mathfrak{I}$ -ezaurues në Σ , atëherë masa μ është e vazhdueshme në Σ .

Vërtetim: Meqënëse vargu $(\mu_n)_n$ është $\mathfrak{I}_\delta$ -konvergjent tek μ në një bashkësi E në Σ , për çdo $\varepsilon > 0$ edhe për $\frac{\varepsilon}{3}$, gjendet $\delta_1 > 0$ e tillë që, për çdo $F \in V_{\delta_1}^E$ dhe $n \in \mathbb{N} \setminus A_1$ të kemi:

$$|\mu_n(F) - \mu(F)| < \frac{\varepsilon}{3} (*)$$

Gjithashtu, meqë vargu $(\mu_n)_n$ është $\mathfrak{I}$ -ezaurues, për çdo $\varepsilon > 0$, edhe për $\frac{\varepsilon}{3}$ do të gjendet $\delta_2 > 0$ e tillë që, për $F \in V_{\delta_2}^E$ të kemi:

$$|\mu_n(F) - \mu_n(E)| < \frac{\varepsilon}{3} (**) \text{ për } n \in \mathbb{N} \setminus A_2.$$

Shënojmë $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ atëherë $V_{\delta_1}^E \cap V_{\delta_2}^E = V_\delta^E$ për $F \in V_\delta^E$ dhe $n \in \mathbb{N} \setminus (A_1 \cup A_2)$.

Shqyrtojmë mosbarazimet:

$$\begin{aligned} |\mu(E) - \mu(F)| &\leq |\mu(E) - \mu_n(E)| + |\mu_n(E) - \mu_n(F)| + |\mu_n(F) - \mu(F)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Në sajë të mosbarazimeve (*) dhe (**).

Pohim 2.7. Le të jetë $\mathfrak{I}$ një ideal në $\mathbb{N}$ dhe E çfarëdo nga Σ . Në qoftë se vargu $(\mu_n)_n$, ku $\mu_n \in ba(\Sigma)$ është $\mathfrak{I}_{\delta_a}$ -konvergjent tek μ në E atëherë :

(1) Vargu $(\mu_n)_n$ është ezaurues.

(2) Masa μ është λ - e vazhdueshme .

Vërtetim : (a) Nisemi nga përkufizimi i $\mathfrak{I}_{\delta_a}$ -konvergjencës në bashkësinë E . Për çdo $\varepsilon > 0$ edhe për $\frac{\varepsilon}{2}$, gjendet $\delta > 0$ dhe $A_1 \in \mathfrak{I}$ e tillë që, për $n \in \mathbb{N} \setminus A_1$ dhe $F \in V_\delta^E$ të kemi:

$$|\mu_n(F) - \mu(E)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Për këto n dhe $\delta > 0$ shqyrtojmë mosbarazimin:

$$|\mu_n(E) - \mu_n(F)| \leq |\mu_n(E) - \mu(F)| + |\mu(F) - \mu_n(F)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Këtu u shfrytëzua fakti se, kur $F \in V_\delta^E$ do të thotë se $d_\lambda(F, E) = \lambda(F \Delta E) = \lambda(E \Delta F)$. Mosbarazimi i mësipërm provon pikën (a).

(b) Nga pika (a) kemi që $(\mu_n)_n$ është varg ezaurues. Në sajë të përkufizimit për çdo $\frac{\varepsilon}{3}$, $\exists \delta_2 > 0$, që për $F \in V_{\delta_2}^E$ do të

Kemi:

$$|\mu_n(F) - \mu_n(E)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ për } n \in \mathbb{N} \setminus A_1.$$

Për $F \in V_\delta^E \cap V_{\delta_2}^E = V_{\delta_1}^E$ dhe $n \in \mathbb{N} \setminus (A \cup A_1)$.

Shqyrtojmë mosbarazimin:

$$|\mu(E) - \mu(F)| \leq |\mu(E) - \mu_n(E)| + |\mu_n(E) - \mu_n(F)| + |\mu_n(F) - \mu(F)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Mosbarazim që provon pohimin (b).

3. Δ -Vazhdueshmëria

Le të jenë dhënë dy hapësirat e matshme (X, Σ, λ) dhe (Y, Σ', μ) dhe bashkësitë $\Pi(X)$ dhe $\Pi(Y)$ të tyre.

Përkufizim 3.1. Funkzioni bashkësior $f : X \rightarrow Y$ quhet Δ -i vazhdueshëm në nënbashkësinë A , në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet $\delta(\varepsilon) > 0$ e tillë që, për çdo bashkësi $G \in \Pi(X) \cap \Sigma$ që $\lambda(G \Delta A) < \delta$ të kemi $\mu(f(G) \Delta f(A)) < \varepsilon$.

Duke shënuar $B(A, \delta) = \{ G \in \Pi(X) \cap \Sigma : \lambda(G \Delta A) < \delta \}$ që është rruzulli e hapur me mbështetje në A dhe $B(f(A), \varepsilon)$ rruzullin e hapur me mbështetje në $f(A)$, përkufizimi i mësipërm mund të gjeometrizohet:

Funksioni bashkësior f është i vazhdueshëm në nënbashkësinë A të X në qoftë se për çdo rruzull të hapur $B(f(A), \varepsilon)$ nga $\Pi(Y)$ gjendet rruzulli i hapur $B(A, \delta)$ nga $\Pi(X)$ e i tillë që, për çdo $G \in B(A, \delta)$ rrjedh se $f(G) \in B(f(A), \varepsilon)$ (ose $f(B(A, \delta)) \subset B(f(A), \varepsilon)$).

Përkufizime 3.2.

(a) Thuhet se vargu (f_n) Δ -konvergjon në mënyrë diskrete te një element çfarëdo $G \in \Gamma$, ku Γ një koleksion bashkësish, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $n_0(\varepsilon, G) \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $n > n_0(\varepsilon, G)$ të kemi $\mu(f_n(G) \Delta f(G)) < \varepsilon$.

(b) Thuhet se vargu (f_n) Δ -konvergjon në mënyrë uniforme në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ dhe çfarëdo $G \in \Gamma$, gjendet një $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $n > n_0(\varepsilon)$ të kemi $\mu(f_n(G) \Delta f(G)) < \varepsilon$.

(f) Thuhet se vargu (f_n) është Δ -ezaurues në nënbashkësinë $G \in \Gamma$ ku Γ është një koleksion bashkësish, në qoftë se për çdo $\varepsilon > 0$ gjendet një $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ dhe $\delta > 0$ e tillë që, për $n > n_0(\varepsilon)$ dhe çdo bashkësi $H \subset B(G, \delta)$ të kemi $\mu(f_n(H) \Delta f_n(G)) < \varepsilon$.

Pohim 3.3. Le të jenë dhënë funksionet $f_n, f : X \rightarrow \Pi(Y)$. Në qoftë se vargu (f_n) është Δ -konvergjent në mënyrë uniforme dhe me terma Δ - të vazhdueshëm, atëherë ai konvergon te një funksion f Δ - i vazhdueshëm.

Vërtetim: Funksionet f_n janë Δ -të vazhdueshëm në nënbashkësinë $G \in \Pi(X)$ si rrjedhojë, për çdo $\varepsilon/3 > 0$ gjendet $\delta_1 > 0$ e tillë që, për çdo $A \in \Pi(X)$ që $\lambda(A \Delta G) < \delta_1$ të kemi që:

$$\mu(f_n(A) \Delta f_n(G)) < \varepsilon/3.$$

Në sajë të Δ -konvergjencës uniforme të vargut për $\varepsilon/3 > 0$ gjendet një $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $n > n_0$ dhe çdo $G \in \Pi(X)$ të kemi $\mu(f_n(G) \Delta f(G)) < \varepsilon/3$. Për $n > n_0$ dhe $\delta_1 > 0$ shqyrtojmë përfshirjen

$$f(G) \Delta f(A) \subset f(G) \Delta f_n(G) \cup f_n(G) \Delta f_n(A) \cup f_n(A) \Delta f(A)$$

duke krahasuar masat μ të dy anëve dhe vetinë gjysmëmbledhore, marrim $\mu(f(G) \Delta f(A)) < \varepsilon$.

Pohim 3.4. Në qoftë se vargu (f_n) Δ -konvergjon në mënyrë uniforme në $\Pi(X)$ te një funksion f , atëherë ai është Δ -ezaurues në çdo $G \in \Pi(X)$.

Vërtetim. Nga pohimi i mësipërm 4.2. del se funksioni f është Δ -i vazhdueshëm në nënbashkësinë $G \in \Gamma \in \Pi(X)$, pra për çdo $\varepsilon/3 > 0$ gjendet δ e tillë që, kur për $A \in \Gamma$ që $\lambda(A \Delta G) < \delta$ kemi që $\mu(f(G) \Delta f(A)) < \varepsilon/3$.

Duke shfrytëzuar Δ -konvergjencën uniforme të vargut (f_n) , për çdo $\varepsilon/3 > 0$ dhe çdo $G \in \Gamma$ gjendet një $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $n > n_0$ të kemi $\mu(f_n(G) \Delta f(G)) < \varepsilon/3$. Për $n > n_0$ dhe δ e dhënë shqyrtojmë përfshirjen

$$f_n(G) \Delta f_n(A) \subset f_n(G) \Delta f(G) \cup f(G) \Delta f(A) \cup f(A) \Delta f_n(A)$$

duke marrë masën μ të dy anëve, do të kemi për $n > n_0$ $\mu(f_n(G) \Delta f_n(A)) < \varepsilon$.

Në dhe $\delta > 0$ e tillë që për $n > n_0(\varepsilon)$ dhe çdo bashkësi $H \subset B(G, \delta)$ të kemi $\mu(f_n(H) \Delta f_n(G)) < \varepsilon$.

4. Aplikimet në integralin Henstock-Kurzweil

Përkufizimet e dhëna në hapësirën metrike mund të riformulohen edhe në rastin e hapësirave të normuara ose në hapësirën Banach.

Përkufizimi 4.1 a) Le të jetë $f_n : S \rightarrow X$ ku, S dhe X janë hapësira të normuara, atëherë vargu (f_n) është quajtur varg *ezaurues* tek $s \in S$, nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një numër $\delta > 0$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ e tillë që, për çdo $y \in B(s, \delta)$ ne marrim $\|f_n(y) - f(y)\| < \varepsilon$.

b) Vargu $(f_n(s))$ ka δ -limit funksionin $f(s)$ për çdo $s \in S$ nëse dhe vetëm nëse, për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një numër $\delta > 0$ dhe $n_0 \in \mathbb{N}$ e tillë që, për çdo $y \in B(s, \delta)$ ne kemi $\|f_n(y) - f(y)\| < \varepsilon$.

Le të jetë $S \subset \mathbb{R}^m$ një interval kompakt dhe $m \geq 1$.

Rikujtojmë që për përkufizimin e integralit Henstock-Kurzweil ne kemi nevojë për K-coptimin [25]. Çifti (r, S) ku $r \in \mathbb{R}^m$ dhe S është një interval kompakt nga $\mathbb{R}^m$ është quajtur një interval i etiketuar i tillë që r është një etiketë e S – së.

K-sistemi $\{(r_j, I_j) : j = 1, 2, \dots, p\}$ është një koleksion intervalesh të fundëm të etiketuar jo të mbivendosur ku $r_j \in I_j$ dhe

$$S = \bigcup_{j=1}^p I_j$$

K-sistemi është quajtur *K-coptim i intervalit* S , nëse është i vërtetë mosbarazimi i mëparshëm.

Le të jetë $\delta : S \rightarrow]0, +\infty[$ një funksion, që është quajtur matës në S . Intervali i etiketuar (τ, S) është quajtur δ – i imët, nëse ne kemi

$$S \subset B(\tau, \delta(\tau))$$

ku $B(\tau, \delta(\tau))$ është një rruzull në $\mathbb{R}^m$ me qendër në τ dhe rreze $\delta(\tau)$.

K-sistemi ose K-coptimi janë δ – të imët, nëse të gjithë intervalet e rafinuar (τ_j, I_j) , $j=1, 2, \dots, p$ janë δ – të imët në lidhje me matësin δ .

Tani, nëse S është një bashkësi e matshme me algjibrën Σ dhe masë probabilitare μ , ne shkruajmë $\{S, \Sigma, \mu\}$.

Përkufizim 4.2 Funksioni $f : S \rightarrow X$ është *Henstock-Kurzweil integrueshëm* dhe $I \in X$ është integrali Henstock-Kurzweil, nëse për çdo $\varepsilon > 0$ ekziston një matës $\delta : S \rightarrow]0, +\infty[$ i tillë që, për çdo δ – i imët, K-coptimi (t_i, I_i) , $i=1, 2, \dots, p$ i S zë vend mosbarazimi :

$$\left\| \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) - I \right\| < \varepsilon$$

Integrali Henstock-Kurzweil ne shënojmë me simbolin $I = (HK) \int f_S$

Përkufizimi 4.3 Funksioni $f : S \rightarrow X$ ka vetinë S^*HK nëse për çdo $\varepsilon > 0$, ekziston një matës δ në S të tillë që marrim (1)

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^l \|f(t_i) - f(s_i)\|_X \mu(I_{i_n}, I_i) < \varepsilon$$

Për çdo K -coptim δ – të imët $\{(t_i, I_i), i = 1, 2, \dots, k\}$ dhe $\{(s_j, I_j), j = 1, 2, \dots, l\}$ në S .

Pohimi 4.4 Nëse ne kemi $\Phi = \{f: S \rightarrow X\}$ një bashkësi funksionesh ezaures, atëherë këto janë S^*HK integrueshëm.

Vërtetim. Duke zgjedhur vlerën δ që të dyja ndarjet të jenë δ – të imët, për çdo $\frac{\varepsilon}{\mu(S)} > 0$, ekziston $\delta_1 < \delta$, që për $t_i \in S(s_i, \delta_1)$ do të kemi $i=1, 2, \dots, p$.

$$\|f(t_i) - f(s_i)\| < \frac{\varepsilon}{\mu(S)}$$

Nga i cili ne vërtetojmë mosbarazimin (1).

Përkufizimi 4.5 Një koleksion $\mathcal{M}$ funksionesh $f: S \rightarrow X$, S në një interval kompakt në $\mathbb{R}$ është quajtur HK -ekui-integrueshëm, nëse çdo $f \in \mathcal{M}$ është Henstock-Kurzweil integrueshëm dhe për ndonjë $\varepsilon > 0$ ekziston një matës Δ i tillë që për ndonjë $f \in \mathcal{M}$ mosbarazimi

$$\left\| \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) - (HK) \int_S f \right\| < \varepsilon$$

ka vend meqë $\{(t_i, I_i), i = 1, 2, \dots, p\}$ është një K -ndarje e Δ - e imët e S -së.

Pohimi 4.6 Le të jetë $\mathcal{M} = \{f_k: S \rightarrow X, k \in \mathbb{N}\}$ një koleksion funksionesh ezaures H - K të integrueshëm dhe që :

$$\delta - \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t) = f(t), t \in S$$

Atëherë funksioni $f: S \rightarrow X$ është H - K integrueshëm dhe është i lejuar kalimi në limit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (HK) \int f_k = (HK) \int f$$

Vërtetim. Ne mund të zgjedhim një matës Δ të S i tillë që për çdo $t \in S$ dhe një ndarje Δ - të imët

$$t_i: [U_i, U_i]$$

$$\|f_k(t) - f(t)\| < \varepsilon \text{ for } t \in B(t_i, D_x)$$

Për një zgjedhje të dhënë të Δ , në lidhje me ekui-integrueshmërisë të vargut (f_k) , për çdo $\varepsilon > 0$ dhe $k \in \mathbb{N}$ kemi:

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_k(t_i) \mu(I_i) - (HK) \int_S f_k \right\|_X < \varepsilon$$

Pohimi 4.7 Le të jenë funksionet f_n të koleksionit Φ të funksionit $f_n: S \rightarrow X$, HK -integrueshëm δ –konvergjent te f dhe ezaures. Atëherë ata janë HK -ekui-integrueshëm.

Vërtetim: Le të kemi $\{(t_i, I_i), i = 1, 2, \dots, p\}$ është coptim i Δ - i imët i S -së për ndonjë $n \in \mathbb{N}$, ne shënojmë

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_n(t_i) \mu(I_i) - \int_S f \right\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$$

Nga ezaureshmëria e vargut f_n , për t_i dhe $s_i \in I_i$ ne kemi:

$$\|f_n(t_i) - f_n(s_i)\| < \frac{\varepsilon}{2\mu(I)}$$

ose

$$\left\| \sum_{i=1}^p [f_n(t_i) - f_n(s_i)] \mu(I_i) \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Prandaj,

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_m(t_i) \mu(I_i) - \int_S f \right\|_X \leq \left\| \sum_{i=1}^p [f_m(t_i) - f_n(t_i)] \mu(I_i) \right\|_X + \left\| \sum_{i=1}^p f_n(t_i) \mu(I_i) - \int_S f \right\|_X$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Nëse coptimi $\{(t_i, I_i); I_i = [u_i, v]; i = 1, 2, \dots, p\}$ është i fiksuar, atëherë nga δ -konvergjencia e vargut (f_k) ecën barazimi:

$$\delta - \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(t_i) \mu(I_i) = \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i)$$

Zgjedh $k_0 \in \mathbb{N}$ e tillë që, për $k > k_0$, mosbarazimi ecën.

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_k(t_i) \mu(I_i) - \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) \right\|_X < \varepsilon$$

Atëherë ne kemi,

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_k(t_i) \mu(I_i) - (\text{HK}) \int_S f_k \right\|_X < \varepsilon$$

$$\leq \left\| \sum_{i=1}^p [f(t_i) - f_k(t_i)] \mu(I_i) \right\|_X + \left\| \sum_{i=1}^p f_k(t_i) \mu(I_i) - (\text{HK}) \int_S f_k \right\|_X \leq 2\varepsilon$$

Për $k > k_0$.

Kjo është e dhënë për $k, l > k_0$ mosbarazimi:

$$\left\| (\text{HK}) \int_S f_k - (\text{HK}) \int_S f_l \right\|_X \leq 4\varepsilon$$

i cili tregon, vargun $(\text{HK}) \int_S f_k, k \in \mathbb{N}$ të elementeve të X në Koshi dhe prandaj

$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{HK}) \int_S f_k = J \in X$ ekziston.

Le të jetë $\varepsilon > 0$. Nga matësi Δ që është zgjedhur më sipër, ne mund të marrim një $n_0 \in \mathbb{N}$, të tillë që:

$$\left\| (\text{HK}) \int_S f_k - J \right\|_X < \varepsilon$$

Për të gjitha $k \geq n_0$. Nga δ -konvergjencia e vargut (f_k) tek f , ekziston $k_1 \geq n_0$ i tillë që,

$$\left\| \sum_{i=1}^p f_{k_1}(t_i) \mu(I_i) - \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) \right\|_X < \varepsilon$$

Prandaj,

$$\begin{aligned}
& \left\| \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) - J \right\|_X \\
& \leq \left\| \sum_{i=1}^p f(t_i) \mu(I_i) - \sum_{i=1}^p f_{k_1}(t_i) \mu(I_i) \right\|_X \\
& \quad + \left\| \sum_{i=1}^p f_{k_1}(t_i) \mu(I_i) - (\text{HK}) \int_S f_{k_1} \right\|_X + \left\| (\text{HK}) \int_S f_{k_1} - J \right\|_X \leq 3\varepsilon
\end{aligned}$$

Dhe rrjedh që f është Henstock-Kurzweil integrueshëm në S dhe

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (\text{HK}) \int_S f_k = J = (\text{HK}) \int_S f \quad \blacksquare$$

Konkluzione dhe fusha të hapura

- Në studimin e konvergencave klasike ka akoma fusha studimi të paeksploruara.
- α -konvergjencia është koncept i ri me shumë perspektiva studimi si në laticat dhe hapësira pjesërisht të renditura.
- Funksionet ezaurues duke zëvendësuar familjet ekuivalente mund të aplikohet në teorinë e integrit.

BIBLIOGRAFIA

- 1) Alexandroff, P.S., Einführung in die Mengenlehre und die Theorie der reellen Funktionen, Deutsch Verlag Wissenschaft, 1956, translated from the 1948 Russian edition.
- 2) Arens R.F., A topology for spaces of transformations, Ann. of Math. (2) 47 (3) (1946) 480–495.
- 3) Arzelà, C., Intorno alla continuità della somma di infinità di funzioni continue, Rend. R. Accad. Sci. Istit. Bologna (1883/1884) 79–84
- 4) Balcerzak, M., Dems, K. and Komisarski, A., Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions, J. Math. Anal. Appl. 328(1) (2007), 715–72
- 5) Bartle, R.G., On compactness in functional analysis, Trans. Amer. Math. Soc. 79 (1955), 35–57
- 6) Boccuto, A., Das P., Dimitriou, X., Papanastassiou, N., Ideal Exhaustiveness, weak convergence and weak compactness in Banach space, Real analysis Exchange, Vol. 37(2), 2011/2012 pp. 389–410
- 7) Bouleau, N., On the coarsest topology preserving continuity, arXiv.org/abs/math/061037, (2006).
- 8) Carathéodory, C, Stetige konvergenz und normale Familien von Funktionen, Math. Ann. 101 (1929) 515–533.
- 9) Caserta, A., Di Maio, G., Holá, L., Arzelà's Theorem and strong uniform convergence on bornologies, J. Math. Anal. Appl. 371 (2010) 384–392.
- 10) Császár, A., and Laczkovich, M., Discrete and equal convergence, Studia Sci. Math. Hungar., 10 (1975), 463–472
- 11) Das R., Das T., On convergence of sequences of real valued Functions, Int. Journal of Math. analysis, Vol. 6. 2012, nr.16, 783–792.
- 12) Das R, Papanastassiou N., Some types of convergence of sequences of real valued functions, Real Anal. Exchange 28 (2) (2002/2003) 1–16.
- 13) Doda, D., Tato, A., Some local uniform convergences and its applications on Integral theory, International Journal of Mathematical Analysis Vol. 12, 2018, no. 12, 631 – 645
Doda, D., Tato, A., Applications of the ideals in the Bohnert-type integrals, (Ně proces botimi Proceedings book)
Doda, D. Uniform local convergences, (Ně proces botimi Proceedings book)
- 14) Doda, D., Tato, A., Some local forms of known convergences of sequence of real valued functions, Journal of Advances in Mathematics Vol 15 (2018) pp.8115-8198

Doda,D.,Tato,A.,Applications of the ideals in the Bohner -type integrals,(Në proces botimi Proceedings book)

Doda,D.Uniform local convergences, ,(Në proces botimi Proceedings book)

15)Engelking, R., General topology, berlin, Helderman, 1989

16) Hahn H, Reelle Funktionen, Chelsea, New York, 1948, p. 222.

17) Holá L, Šalát T, Graph convergence, uniform, quasi-uniform and continuous convergence and some characterizations of compactness, Acta Math. Univ. Comenian. 54–55 (1998) 121–132

18) Gregoriades V, Papanastassiou N, “The notion of exhaustiveness and Ascoli-type theorems”.Topology and its applications,155 (2008) 1111-1128

19) Kelley, J., General topology, Springer- Verlag, 1975

20) Kolmogorov, A. N., Fomin, C. V., Elementi teorii funkccij i funkcional'nogo analiza, Nauka, Moskva 1972.

21) Komisariski, A., Pointwise I-convergence and I-convergence in measure of sequences of functions, J. Math. Anal. Appl. 340 (2008), 770–779.

22) Kostyrko, P., Šalát T. and Wilczyński, W. $\sim$ I-convergence, Real Anal. Exchange 26 (2000–01), 669–685.

23) Namioka I., Separate continuity and joint continuity, Pacific J. Math. 51 (1974) 515-531

24) N. Papanastassiou, N., On a new- type of convergence of sequences of functions, Atti. Sem. Mat.Fis.Univ. Modena, 50 (2002) 493-506

25) Schwabik S, Guoju. Y., Topics in Banach space integration, World Scientific, Singapore. 2005

26) Stojilov S., Continuous convergence, Rev. Math. Pures Appl. 4 (1959) 341–344.