



REPUBLIKA E SHQIPERISË



UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MEKANIKE

STUDIMET E DOKTORATËS
NË FAKULTETIN E INXHINIERISË MEKANIKE
2022-2025

Optimizimi i konstruksioneve mekanike me metodat e avancuara
energjetike dhe numerike

DISERTANTI

MSc. Anis SULEJMANI

UDHËHEQËSI SHKENCOR

Prof. Dr. Odhisea KOÇA

Tiranë, 2025



REPUBLIKA E SHQIPERISË

UNIVERSITETI POLITEKNIK I TIRANËS
FAKULTETI I INXHINIERISË MEKANIKE

STUDIMET E DOKTORATËS
NË FAKULTETIN E INXHINIERISË MEKANIKE
2022-2025

**Optimizimi i konstruksioneve mekanike me metodat e avancuara
energjetike dhe numerike**

MSc. Anis SULEJMANI

Disertacion i paraqitur në përmbushje të pjesshme të kërkesave për gradën Doktor **në fushën e
konstruksione mekanike dhe vlerësimi i integritetit strukturor** në

Universitetin Politeknik të Tiranës

Udhëheqësi shkencor : Prof. Dr. Odhisea KOÇA

JURIA E DOKTORATËS:

Prof. Dr. Genti GUXHO	(kryetar)
Prof. Dr. Altin DORRI	(anëtar)
Prof. Asoc. Klodian DHOSKA	(oponent i brendshëm)
Prof. Dr. Andonaq LAMANI (LONDO)	(anëtar)
Prof. Asoc. Drakuli LUMI	(oponent i jashtëm)

Tiranë, 2025

ABSTRAKT

Metodat kërkuese gjithmonë e më shumë po zhvillohen në ditët e sotme të cilat po ecin paralelisht me zhvillimin e teknologjisë duke sjellë për kërkuesit dhe inxhinierët mekanikë një llojshmëri të madhe të tyre. Për rrjedhojë shumë objekte studimore nga më komplekset që fillimisht kërkohnin kohë për gjetjen e zgjidhjeve dhe zgjedhjeve të tyre, u realizuan dhe më pas u optimizuan me këto metoda duke përmbytur qëllimin dhe objektivat e vendosura në fillim. Në këtë kuadër, bazuar në studimet dhe kërkimet tona, jemi fokusuar në këtë fushë kërkimore, për të zhvilluar një metodë të re kërkuese për zgjidhjen e gjendjes së sforcuar plane dhe më gjerë, si edhe për ta përdorur atë si metodë optimizuese në kërkimin ciklik. Baza teorike e kësaj metode është ajo e teorisë së elasticitetit plan dhe analiza e thelluar e shpërndarjes së ngarkesave të përqendruara ose të shpërndara. Meqenëse shpërndarja e ngarkesave dhe plotësimi i kushteve statike në kontur, janë konsideruar si shpërndarja e valëve, atëherë kjo metodë është quajtur Metoda e Valës (MV). Duke e krahasuar me valët në vibrime apo në fluide, në këtë studim parametrin kohë e kemi marrë të “ngrirë”, si fazë e parë e kërkimit dhe për tu zhvilluar më tej në hapat e mëvonshëm. Shpërndarja e tyre do të bëhet sipas sforcimeve të pastra radiale për ngarkesat e përqendruara kur këto janë në kontur ose në brendësi dhe me kthimin e kundërvalëve, tashmë të korrigjuara me faktorin gjeometrik korrigjues, duke mundësuar zgjidhje të saktë të shpërndarjes së sforcimeve normale dhe tangjenciale në një objekt të çfarëdoshëm. Vetëm pasi kemi arritur zgjidhjen e problemit me këtë metodë për një variant, mund ta përdorim në një algoritëm ciklik për gjetjen e parametrave të zgjidhjes optimale, që mund të jenë përmasa, sipërfaqe, peshë, material, etj, të cilat për rrjedhojë të çojnë në uljen e kostove.

Fjalë kyçe: Metoda e Valës, kundërvalë, sforcime radiale, optimizim.

ABSTRACT

Research methods are increasingly developing nowadays, moving in parallel with the development of technology, bringing a large variety of them to researchers and mechanical engineers. Consequently, many of the most complex study objects that initially required time to find solutions and their choices were realized and then optimized with these methods, fulfilling the goal and objectives set at the beginning. In this context, based on our studies and research, we have focused on this research area, to develop a new research method for solving the stressed state planes and beyond, as well as to use it as an optimization method in cyclical research. The theoretical basis of this method is the field of two-dimensional theory of elasticity and in-depth analysis of concentrated or distributed load distribution. Since the distribution of loads and the fulfillment of static conditions in the contour have been considered as wave distribution, then this method has been called the Wave Method (WM). Comparing it with waves in vibrations or fluids, in this study we have taken the time parameter "frozen", as the first phase of the research and to be further developed in the later steps. Their distribution will be made according to the pure radial stresses for the concentrated loads when these are in the contour or inside and with the return of the counterwaves, already corrected with the geometric correction factor, enabling precise solutions of the distribution of normal and tangential stresses in any object. Only after we have achieved the solution of the problem with this method for a variant can we use it in a cyclic algorithm for finding the parameters of the optimal solution which can be, size, surface, weight, material, etc., which consequently lead to cost reduction.

Keyword: The Wave Method, counterwave, radial stress, optimization.

Copyright

I

Anis Sulejmani

2025

“Udhëheqësi i Anis Sulejmani vërteton se ky është versioni i miratuar i disertacionit të mëposhtëm.”

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

Udhëheqës shkencor

Prof. Dr. Odhisea KOÇA

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

Përgatitur nga MSc. Anis Sulejmani

Disertacion i paraqitur në

Fakulteti i Inxhinierisë Mekanike

Universiteti Politeknik i Tiranës,

Në përputhje të plotë

Me kërkesat

Për gradën Doktor

Universiteti Politeknik i Tiranës, 2025

Dedikim

In memoriam

EN
JR
EN

Mirënjohje

Ky disertacion është finalizimi i një punë disa vjeçare në rrugëtimin tim akademik në Fakultetin e Inxhinierisë Mekanike, ndaj me mirënjohje të thellë dhe përzemërsisht dua të falënderoj të gjitha ata që më kanë mbështetur dhe motivuar.

Së pari, dua të falënderoj udhëheqësin tim shkencor, Prof. Dr. Odhisea Koça, i cili nuk ka qenë vetëm udhëheqës shkencor i disertacionit por një mentor i një shkolle të gjatë akademike, që nis, që në hapat e para të mëja në këtë fakultet. Pa drejtimin, përkushtimin, besim dhe mbështetjen e tij të pakufizuar ky punim nuk do të ishte i mundur.

Gjithashtu jam mirënjohës për stafin akademik duke filluar nga kolegët e Departamentit të Mekanikës, dhe po ashtu dekanin e FIM, Prof. Dr. Gentë Guxho dhe Rektorin e Universitetit Prof. Dr. Aklë Fundo të cilët më kanë mbështetur dhe dhënë kurajë për të vazhduar në këtë rrugëtim.

Një falënderim i veçantë për miqtë dhe kolegët e mi të afërt, për bashkëpunimet të një niveli të lartë profesional dhe dhe inkurajimet gjatë gjithë punës kërkimore shkencore. Profesorët dhe miqtë, Drakuli Lumi, Klodian Dhoska, Parid Milo, Mentor Çejku, Redon Bytyçi secili prej tyre ka një vend të veçantë në këtë pjesë të karrierës sime.

Dhe mbi të gjitha, familjen time, Irea, Elva dhe Engjëll, pa dashurinë dhe sakrificën e tyre ky moment nuk do të ishte arritur.

Faleminderit të gjithëve!

Deklaratë mbi origjinalitetin

Anis Sulejmani

Deklaroj se kjo tezë përfaqëson punën time origjinale dhe nuk kam përdorur burime të tjera, përveç atyre të evidentuara nëpërmjet citimeve.

Të gjitha të dhënat, tabelat, figurat dhe citimet në tekst, të cilat janë riprodhuar prej ndonjë burimi tjetër, duke përfshirë dhe internetin, janë pranuar në mënyrë eksplicite si të tilla.

Jam i vetëdijshëm se në rast të mospërputhjeve, Senati i UPT-së është i ngarkuar të më revokojë gradën “Doktor”, që më është dhënë mbi bazën e kësaj teze, në përputhje me

“Rregulloren e Programeve të Ciklit të tretë (Doktoratë) në UPT”

Tiranë, 2025

PËRMBAJTJA

ABSTRAKT	II
ABSTRACT	III
LISTA E TABELAVE	XII
LISTA E FIGURAVE.....	XIII
PARATHËNIE.....	1
1 MOTIVIMI.....	3
1.1 Fusha e kërkimit	4
1.2 Optimizimi.....	6
1.2.1 Historiku	6
1.3 Metodat novatore optimizuese.....	9
1.4 Optimizimi në inxhinieri mekanike.....	10
1.5 Optimizimi në kohët moderne, Metoda e Valës	12
2 PROBLEMET PLAN NË AMBIENTIN ELASTIK.....	13
2.1 Funksioni i Airy-it	13
2.2 Fusha e zgjidhjeve të funksionit të Airy-it.....	18
2.3 Problemi plan në koordinata polare.....	19
2.4 Gjendja e sforcuar plane radiale e pastër.....	23
2.5 Pyka me gjysmëkëndin α me një forcë normale.....	25
2.5.1 Shpërndarja e sforcimeve në raste të veçanta në koordinata karteziane me funksionin e Airy-it për forcën normale.....	28
2.6 Pyka me gjysmëkëndin α me një forcë tangjenciale	29
2.6.1 Shpërndarja e sforcimeve në raste të veçanta në koordinata karteziane me funksionin e Airy-it për forcën tangjenciale.....	30
2.7 Analiza e pykës me gjysmëkëndin α me një moment përkulës.....	32
2.8 Rasti i veprimt të një force të çfarëdoshme në kontur	33
2.9 Zgjidhja analitike e diskut nën veprimin e dy forcave drejtë të kundërta.....	35
2.10 Gama e ekuacioneve biharmonike për kundërvalët.....	38
2.10.1 Funksionet sinusoidale dhe kosinusoidale të kundërvalës	38
3 BAZA TEORIKE E METODËS KËRKUESE.....	40

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

3.1	Metoda kërkuese numerike dhe energjetike	41
3.1.1	Objekti i studimit i metodës	41
3.1.2	Raste skemash ngarkimi të objektit studimor	42
3.2	Zgjidhja analitike e diskut nën veprimin e dy forcave drejtë të kundërta, rasti i përgjithshëm	43
3.2.1	Shpërndarja e valëve primare në kontur nga ngarkesat e jashtme	47
3.3	Forca të çfarëdoshme në kontur dhe zgjidhja e gjendjes së sforcuar.....	61
3.4	Skema të tjera llogaritjeje dhe krahasimi MEF	64
4	SHPËRNDARJE JO-KONSTANTE E PRESIONEVE NË KONTUR.	66
4.1	Metoda analitike për funksionin e kundërvalës	69
4.2	Metoda e Valës në rastin e kundërvalëve të çfarëdoshme	75
4.2.1	Metoda analitike e kundërvalës për presion uniformisht të shpërndarë.....	75
4.2.2	Metoda analitike e kundërvalës për presion jo-uniformisht të shpërndarë	77
4.2.3	Metoda numerike e kundërvalës për presion jo-uniformisht të shpërndarë	78
4.3	Rasti i një sistemi ekuivalent me zero prej tre forcave, një forcë qendrore dy konturore	84
5	PËRDORIMI I METODËS SË VALËS NË TRAUN ME SEKSION TËRTHOR DREJTKËNDËSH	90
5.1	Metoda e valës në tra në koordinata polare	90
5.1.1	Vala primare nga ngarkesat e jashtme	91
5.1.2	Kundërvalët dhe sforcimet normale në drejtimin e x	101
5.1.3	Sforcimet nga vala primare	101
5.1.4	Sforcimet nga kundërvala	103
5.2	Koeficienti i ndikimit gjeometrik në shpërndarjen e sforcimeve.....	106
5.3	Krahasimi i MV me metodat e tjera	107
5.4	Gjetja optimale nëpërmjet procesit të optimizimit	111
6	KONKLUSIONE DHE REKOMANDIME	113
7	REFERENCA.....	114

Lista e tabelave

Tabela 1.1 Rrugëtimi i një produkti nga konceptimi deri në fazën e prodhimit.....	4
Tabela 1.2 Kërkesat teknike për produktet	5
Tabela 2.1 Rastet e veçanta të studimit të pykës nën veprimin e forcës P	26
Tabela 2.2 Funkcionet biharmonike dhe shpërndarja e sforcimeve për kundërvalët...	38
Tabela 3.1 Karakteristikat e përmasave dhe të materialit të objektit në studim	41
Tabela 3.2 Pikat e studimit në disk	42
Tabela 3.3 Krahasimi i rezultateve me të dy metodat.....	60
Tabela 3.4 Përmbledhje e skemave për analizën e diskut.....	64
Tabela 4.1 Valët dhe kundërvalët në përcaktimin e sforcimeve	75
Tabela 5.1 Shpërndarja e presioneve në konturin A	92
Tabela 5.2 Shpërndarja e presioneve në konturin B	94
Tabela 5.3 Shpërndarja e presioneve në konturin C	96
Tabela 5.4 Shpërndarja e presioneve në konturin D	99
Tabela 5.5 Krahasimi i rezultateve me metoda të ndryshme, zgjidhja teorike e rezistencës materiale, Metoda e Elementëve të Fundëm (MEF), Metoda e Valës (MV)	110

Lista e figurave

Figura 1.1 Bllok-skema për fazat e projektimit të një produkti	3
Figura 1.2 Zgjidhja grafike e sipërfaqes maksimale në problemin e Euklid-it.....	8
Figura 1.3 Zgjidhja e problemit të optimizimit të bucelës së verës nga Kepler.	9
Figura 1.4 Hapat e problemit të optimizimit në inxhinieri.	11
Figura 2.1 Objekti në problemet e teorisë së MV	14
Figura 2.2 Objekti i studimit në koordinata polare	19
Figura 2.3 Pikat në sistemin koordinativ polar	21
Figura 2.4 Elementi me sforcimet e gjendjes radiale të pastër	23
Figura 2.5 Pyka e pafund	25
Figura 2.6 Skema të ndryshme llogaritëse të forcës së përqendruar.....	27
Figura 2.7 Skema e ngarkimit për forcën normale dhe skema ekuivalente	28
Figura 2.8 Skema për përcaktimin e sforcimeve dhe zhvendosjeve nga forca tangjenciale	30
Figura 2.9 Skema e një force në gjysmëplan	33
Figura 2.10 Skema llogaritëse për një forcë të pjerrët	34
Figura 2.11 Skema llogaritëse e shpërndarjes së sforcimeve në kontur për rastin e parë të studimit (njëlloj si tek rasti i studimit tek Problemi i Flamant-it apo Disku i Brazilit)	35
Figura 2.12 Skema llogaritëse e shpërndarjes së sforcimeve në kontur për rastin e parë	37
Figura 3.1 Skema të ndryshme të gjendjes të sforcuar në objekte studimi.....	40
Figura 3.2 Disku rrethor si objekt studimi i metodës.....	42
Figura 3.3 Skema e forcave ekuivalente me zero që veprojnë sipas kordës DE	43
Figura 3.4 Paraqitja grafike e zonës së Sant-Venant-it.....	47
Figura 3.5 Presioni në kontur pas veprimit të forcës së parë dhe të dytë, respektivisht vala e parë dhe vala e dytë.	48

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

Figura 3.6 Shpërndarja e presionit në kontur.....	49
Figura 3.7 Paraqitja valore e presionit në kontur.....	50
Figura 3.8 Valët shumare.....	51
Figura 3.9 Shpërndarja e sforcimeve normale dhe tangjenciale në brendësi të diskut	55
Figura 3.10 Struktura e zgjidhjes së problemit të diskut me Ansys Workbench, moduli “Static Structural”	56
Figura 3.11 Disku në ambientin e MEF.....	56
Figura 3.12 Pozicionet e forcave dhe lidhjeve në disk për rastin e studimit të kordës	57
Figura 3.13 Shpërndarja e sforcimeve normale dhe tangjenciale	57
Figura 3.14 Sforcimet normale dhe tangjenciale me MEF	59
Figura 3.15 Krahasimi i sforcimeve me MV dhe MEF	61
Figura 3.16 Skema llogaritëse për rastin e sistemit me nga dy forca drejtë të kundërta në kontur	61
Figura 3.17 Shumëkëndëshi i spangos për zgjidhjen e gjendjes së sforcuar të diskut me forca të çfarëdoshme konturore	62
Figura 3.18 Zgjedhja e forcave në pikat A, B, C dhe D	62
Figura 3.19 Ndarja e forcave sipas degëve	62
Figura 3.20 Ndarja e forcave sipas degëve të secilës kordë	63
Figura 3.21 Skema të ndryshme llogaritëse për forca konturore	65
Figura 4.1 Skema llogaritëse për “Metodën e Valës” forca qendrore – konturore.....	66
Figura 4.2 Skema llogaritëse për “Metodën e Valës” rasti i forcave drejtë të kundërta qendrore-konturore	67
Figura 4.3 Shpërndarja e presionit në kontur.....	69
Figura 4.4 Shpërndarja e valëve të hapura në kontur.....	71
Figura 4.5 Shpërndarja e presioneve shumar normal dhe tangjencial	72
Figura 4.6 Valët në kontur në "goditje" hap pas hapi	73

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

Figura 4.7 Shpërndarja e sforcimeve në forcat qëndrore – konturore	74
Figura 4.8 Metoda e kundërvalës për presionin normal uniformisht të shpërndarë	76
Figura 4.9 Metoda e kundërvalës për presionin tangjencial uniformisht të shpërndarë	77
Figura 4.10 Kundërvala dhe ngarkesa elementare	79
Figura 4.11 Forca elementare e kundërt si pjesë e kundërvalës	80
Figura 4.12 Analiza gjeometrike e pikave në disk për një force elementare në kontur	81
Figura 4.13 Sforcimi në një pikë nga vala primare dhe nga kundërvalët	81
Figura 4.14 Zgjidhja me MEF dhe krahasimi i metodave	83
Figura 4.15 Shpërndarja e sforcimeve me Metodën e Valës në planin vertikal	84
Figura 4.16 Skema llogaritëse për “Metodën e Valës” rasti i tre forcave qëndrore-konturore	85
Figura 4.17 Shpërndarja e presionit në kontur	87
Figura 4.18 Shpërndarja e presionit në konturin i hapur	88
Figura 4.19 Shpërndarja e presionit tangjencial në konturin e hapur	89
Figura 5.1 Përmasat e traut dhe skemat e ngarkesave	90
Figura 5.2 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin A	91
Figura 5.3 Shpërndarja e presionit në konturin A	93
Figura 5.4 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin B	94
Figura 5.5 Shpërndarja e presionit në konturin B	95
Figura 5.6 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin C	96
Figura 5.7 Shpërndarja e presionit në konturin C	98
Figura 5.8 Shpërndarja e sforcimeve radiale në konturin D	98
Figura 5.9 Shpërndarja e presionit në konturin D	100

Figura 5.10 Skema për përcaktimet e sforcimeve normale nga valët primare dhe kundërvalët.....	101
Figura 5.11 Sforcimet normale sipas aksit x nga vala primare VP	102
Figura 5.12 Koeficienti i ndikimit gjeometrik	106
Figura 5.13 Sforcimet normale nga kundërvalët.....	107
Figura 5.14 Zgjidhja e traut me metodën e valës.....	108
Figura 5.15 Rezultatet e traut drejtkëndor me MEF	109
Figura 5.16 Shpërndarja e sforcimeve normale sipas x në mesin e traut.....	109
Figura 5.17 Krahasimi i rezultateve Teorike, MEF dhe MV	110
Figura 5.18 Bllok-skema për gjetjen optimale.....	111

PARATHËNIE

Qëllimi kryesor i këtij studimi është aplikimi i një metode të re kërkuese për përcaktimet e gjendjes së sforcuar të objekteve të ndryshme, njohja e të cilave na mundëson të bëjmë llogaritje në soliditet, ngurtësi, qëndrueshmëri, lodhje, thyerje, konsum, etj., dhe përcaktimin e konstruksionit më optimal sipas kritereve të ndryshme.

Për të mundësuar këtë gjë, në kapitullin e parë kemi kryer një studim bibliografik të gjithë literaturës, që flet për optimizimin dhe për mundësinë e gjetjes dhe krijimit të kësaj metode të re optimizuese.

Në kapitullin 2, kemi trajtuar problemet e teorisë së elasticitetit plan, që formon bazën e kësaj metode, e cila merret me ligjësitë e shpërndarjes së sforcimeve në problemet e gjendjes së sforcuar dhe të deformuar plane, të skemave të ngarkuara me forca të përqendruara dhe të shpërndara kudo në konstruksion. Thellimi teorik i tyre, na mundësoi idenë për krijimin e Metodës së Valës (MV), të cilën e kemi zhvilluar hap pas hapi në kapitujt e tjerë pasardhës. Nga ana tjetër kjo metodë na jep mundësi në të ardhmen, të marrim parasysh kohën, shpejtësinë dhe nxitimin e përhapjes së sforcimit, dhe jo duke përdorur parimin e ngjashmërisë në formë midis zhvendosjes, shpejtësisë dhe nxitimit siç bëhet deri tani në lëndën e rezistencës dinamike. Për sa i përket trajtimit teorik të MV, kjo nis me rastin e shpërndarjes së sforcimeve nga një forcë, që vepron në një pykë, duke marrë vlera të ndryshme të gjysmëkëndit α të pykës. Kemi analizuar katër raste të ndryshme të kësaj skeme a) rasti i shufrës në tërheqje (rezistenca e materialeve), b) rasti i gjysmëplanit (llogaritja e themeleve), c) rasti i përhapjes së krisjes (mekanikë thyerje) dhe d) rasti i forcave në brendësi të trupit (marrja parasysh e forcave vetjake dhe forcave të brendshme).

Në kapitullin 3, si objekti i studimit është marrë disku rrethor, i cili ngarkohet me një sistem forcash ekuivalent me zero në kontur. Gjithë baza teorike është aplikuar në këtë objekt, nga ku janë marrë edhe zgjidhje të sakta analitike me funksionet biharmonike, e cila është bazë e metodës së valë – analitike.

Në kapitullin 4, kemi zgjeruar aplikimin e kësaj metode, duke futur edhe forcat në brendësi të diskut rrethor, ku marrja parasysh e këtyre forcave u bë sipas rastit të katërt të analizuar në kapitullin e 2 dhe na bëri më fleksibël për ndikimin e gjeometrisë dhe pozicionit të forcave. Ngarkesat në kontur nga vala primare në këtë rast rezultojnë një ngarkesë e shpërndare jo-uniforme normale dhe tangjenciale. Zgjidhja në këtë rast me metodën valë-analitike, trajtuar në kapitullin 3, vështirësohet sepse kërkohen funksione të tjerë biharmonike. Ndaj e zhvilluam metodën e valës me kundërvalë me shpërndarje të njëjtë si valët primare duke plotësuar kushtet statike në kontur dhe “shuarjen” e tyre si tek vibrimet, fluidet etj.

Metoda e valës është një metodë që mund të aplikohet kudo, pasi ndjek një ligjësi të shpërndarjes së sforcimeve që afrohet tek realiteti dhe rezultatet e të cilave u krahasuan dhe janë shumë afër apo njëjloj me metodat e tjera, në këtë rast MEF. Objekte të tjera të cilat mund të përmendim nga realiteti mund të jenë dhëmbët e transmisioneve të rrotave me dhëmbë, lidhjet me kiavetë me presionin e shpërndarë në gjatësinë e kiavetës, tubacione të ndryshme në magazinim, elemente kokrrizorë që janë

të shpërndara në mënyrë të çfarëdoshme me njëra tjetrën, granat, elemente të trarëve apo strukturave etj.

Në kapitullin 5, kemi analizuar me Metodën e Valës (MV) dhe krahasuar me metodat të tjera numerike (MEF) dhe teorike (Rezistenca e Materialeve) të traut me seksion tërthor drejtkëndor i cili punon në përkulje. Shpërndarja e valëve primare dhe kthimi i tyre, kundërvallëve, bëhet me algoritmin e ndërtuar për këtë metodë.

Ndikimi i gjeometrisë dhe pozicionit të forcave ka shumë rëndësi në saktësinë e metodës dhe vërtetësinë e saj. Për rastin e traut në përkulje është zbuluar faktori gjeometrik, që merr parasysh lartësinë dhe gjatësinë e traut i cili është një faktor pa përmasa. Futja e këtij faktori mundëson që vlerat e sforcimeve të afrohen realitetit të krahasuara me metodat e tjera. Vetëm pasi përcaktohet saktë shpërndarja e sforcimeve me këtë metode, më pas mund të realizojmë optimizimin e parametrave të tjerë si peshë, seksion, material dhe formë etj.

Rezultatet e këtij punimi janë paraqitur në dy referime të realizuar në Departamentin e Mekanikës dhe në artikuj në revista shkencore si edhe referime në konferenca shkencore ndërkombëtare.

KAPITULLI 1

OPTIMIZIMI NË INXHINIERI MEKANIKE

1 MOTIVIMI

Produktet e industrisë mekanike në përgjithësi kalojnë në disa faza të rëndësishme gjatë ciklit të jetës së tyre, ku secila fazë ka rëndësinë e vet në këtë proces. Fazat e ciklit të jetës së një produkti (Stark, 2023), qoftë ky edhe një element i thjeshtë i një konstruksioni metalik, tregohen në bllok-skemën e paraqitur në figurën 1.1, në të cilën jepet në mënyrë të thjeshtuar përshkrimi i tyre.

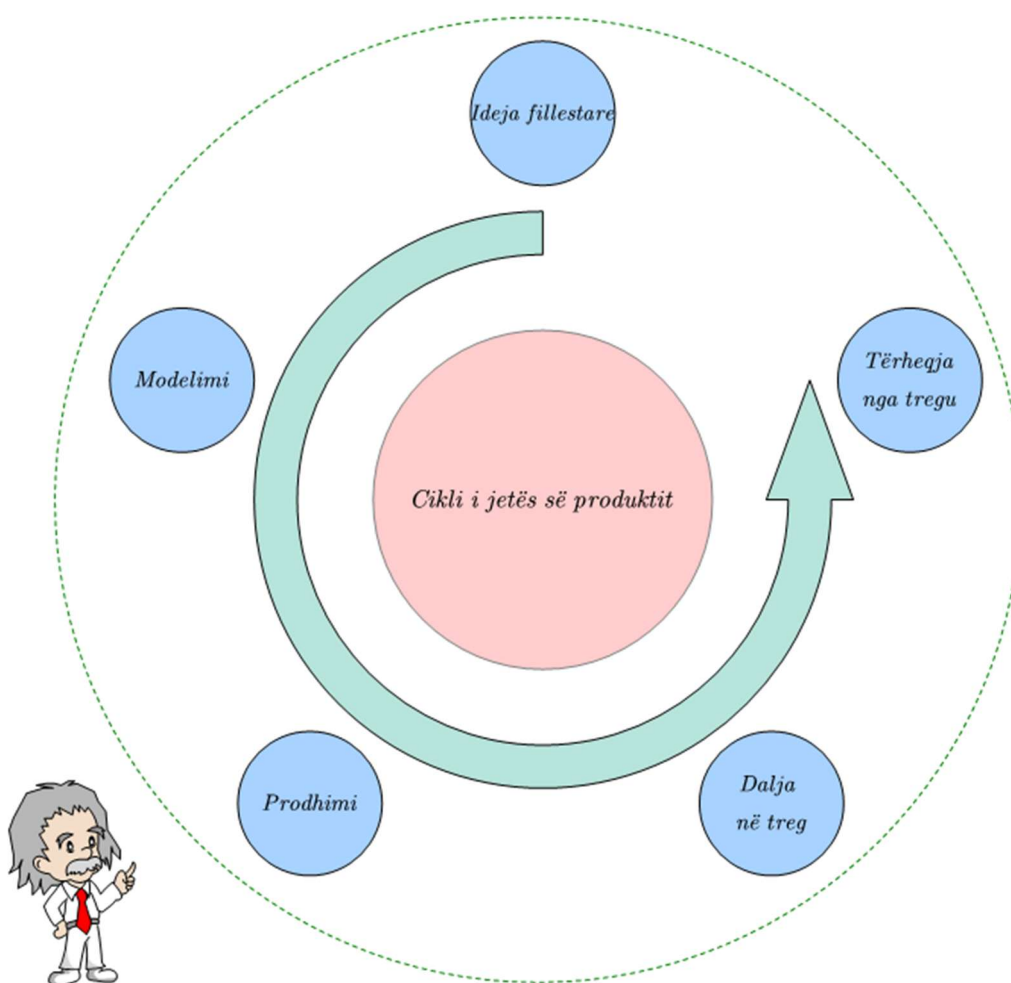


Figura 1.1 Bllok-skema për fazat e projektimit të një produkti

Autorë të ndryshëm (Thiebat, 2019), (Iuga et al., 2017) dhe (Stark, 2024), japin faza të ndryshme të menaxhimit të ciklit të jetës së një produkti (Abramovic et al., 1997), që sipas këtij të fundit jepet që nga faza e konceptimit deri tek tërheqja e këtij produkti nga tregu. Por e përbashkëta e pothuajse të gjithë këtyre autorëve (Udokporo, 2021), (Abramovic et al., 1998) dhe (Fiksel, 2009), të cilët janë marrë me studimet e ciklit të jetës së një produkti, qëndrueshmërisë dhe menaxhimit të tij, është se cikli i jetës së produktit ndahet në këto faza (Niemann et al., 2009):

- Faza e projektimit
- Faza e prodhimit
- Faza e tregimit
- Faza e përdorimit
- Faza e shërbimit
- Faza e daljes nga tregu
- Faza e riciklimit

Megjithëse janë disa faza, objektivi kryesor i produktit është plotësimi i nevojave të tregut dhe të konsumatorit. Në tabelën 1.1, jepen të detajuara fazat kryesore të listuar në figurë 1.1, si edhe të përshkruara me më shumë detaje në paragrafin në vijim.

Tabela 1.1 Rrugëtimi i një produkti nga konceptimi deri në fazën e prodhimit

Emërtimi i fazës	Përshkrimi
Konceptimi	Faza e konceptimit të produktit, ku përfshin edhe analizën e tregut.
Modelim	Modelimi fillestar, përzgjedhja e variantit më të mirë me metodën e vlerësimit (Wittel, 2015), testimi i modelit dhe vendosja përfundimtare për produktin që do të prodhohet.
Prodhim	Prodhim i produktit në fazat e ndryshme operacionale të prodhimit.
Dalja në treg	Dalja e këtij produkti në treg për plotësimin e nevojave të tregut dhe klientëve.
Tërheqja nga tregu	Tërheqja nga tregu i produktit, pasi mbyllet cikli i jetës së tij, ose zëvendësimi me produkt tjetër alternativ.

1.1 FUSHA E KËRKIMIT

Në tabelën 1.1 janë listuar 5 fazat kryesore, ku autorë të ndryshëm mund t'i kenë edhe më të detajuara ose me faza të tjera ndërmjetëse, por në përgjithësi këto fillojnë që nga periudha konceptuale e produktit. Inxhinieri projektues patjetër duhet të ketë ide novatore e koncepte të reja, për të krijuar e prodhuar produkte cilësore e me kosto sa më të ulët, në përputhje me kërkesat e konsumatorit. Kjo përbën **fazën e parë** që produkti fillon rrugëtimin e tij deri në daljen e tij nga tregu.

Faza e dytë ka të bëjë me modelimet e produktit, ku edhe këtu me zhvillimin e teknologjisë, mund ta ndajmë në dy rrugë të ndryshme. Nga njëra anë mund të prodhohet produkti me modelet reale, të cilat i kalojnë testimeve të ndryshme për të plotësuar kërkesat thelbësore, pasuar nga rrugë tjetër alternative, që do të ishin modelet virtuale, të cilat gjithmonë e më shumë po zëvendësojnë testimet e shumta dhe të kushtueshme të modeleve reale që krijoheshin. Nëpërmjet këtyre modeleve të kompjuterizuara arrihen me saktësi të kënaqshme, kërkesat e duhurat teknike. Gjithashtu krijohen modele komplekse të cilat do donin kohë në rastin e parë. Po kështu, kjo fushë e re është zgjeruar edhe me testimet e këtyre modeleve nëpërmjet programeve kompjuterike me saktësi shumë të madhe dhe, shpesh, si metodë nuk ka nevojë për testime reale. Gjatë fazës së konceptimit dhe modelimit virtual, si edhe analizave të

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

thelluara llogaritëse, produkteve ju bëhen kontrole të shumta për të plotësuar kërkesat specifike. Shpesh ndodh që në këtë proces kontrollues, në dukje rutinë, duke u futur në një cikël zgjidhjesh algoritmike, gjenden edhe zgjidhjet më optimale që patjetër plotësojnë kushtet dhe kërkesat e vendosura. Për sa i përket zgjidhjes optimale dhe optimizimit, (Arora, 2004) dhe (Parkinson et al., 2013), si një procedurë e cila është në këtë fazë, del prej saj dhe zgjerohet shumë duke u futur edhe në fazat e tjera, përbën detyrën tonë të këtij punimi, që do të thellohem në kapitujt e radhës më gjerë. Çdo produkt, edhe sidomos ata në fushën e prodhimeve mekanike, kanë kërkesa specifike, ku në tabelën 1.2 janë dhënë këto kërkesa me përshkrimet e tyre.

Tabela 1.2 Kërkesat teknike për produktet

Kërkesa	Përshkrimi
Kërkesa e funksionimit	Kjo është kërkesa kryesore për një produkt në industrinë mekanike. Plotësimi i funksionimit është një kërkesë nga e cila kërkesat e tjera janë dytësore.
Kërkesa e soliditetit dhe ngarkimit	Kjo kërkesë ka të bëjë me ngarkesat të cilat mund të jenë forca dhe momente. Detyra e një konstruktori është që këto ngarkesa “të shkojnë” sa më shpejtë në bazament, në rrugën më të shkurtër. Nga ana tjetër sforcimet që shfaqen duhet të jenë sa më uniforme, të mos ketë përqendrime të sforcimeve nga koncentratorët që mund të jenë të formave të ndryshme. Po ashtu preferohet që elementët (në rastin e shufrave në strukturat mekanike) të punojnë në tërheqje përkundrejt shtypjes.
Kërkesa e materialit	Materialet duhet të plotësojnë disa kërkesa që në përgjithësi në strukturat mekanike kanë të bëjnë me soliditetin, elasticitetin, fortësinë sipërfaqësore, përpunueshmërinë, rezistencën ndaj korrozionit, ndryshimet termike, saldueshmërinë etj. Zgjedhja sa më e mirë e tyre në raport me dy kërkesat e mësipërme, shpesh shkon në një marrëdhënie të zhdrejtë.
Kërkesa e prodhimit	Është një nga kërkesat që lidhet me inxhinierin konstruktiv dhe atë të prodhimit. Produkti i zgjedhur duhet të prodhohet nëpërmjet metodave operacionale të ndryshme, të cilat jepen nga kartat teknologjike të prodhimit.
Kërkesa e montimit	Janë kërkesa për montim dhe çmontim të produktit në tërësi, i cili përbëhet nga komponente apo pjesë të ndryshme. Tentohen të bëhen sa më të thjeshta për montim dhe çmontim.
Kërkesa e mirëmbajtjes	Çdo element apo konstrukcion në një produkt teknik ka afate të shërbimeve të tyre. Këto shërbime janë periodike duke filluar nga shërbimet më të thjeshta (p.sh ndërrim vaji, grasatim) deri tek “riparime kapitale” në zëvendësim të komponentëve të ndryshëm. Edhe në këtë rast tentohet të kemi të njëjtin afat shërbimi për të gjithë komponentët përbërës.
Kërkesa e mbrojtës së mjedisit	Kërkohet që materialet të jenë miqësore me mjedisin, sidomos kur flasim për materialet plastike, si dhe në rastet e prodhimit të këtyre materialeve në uzinat e prodhimit të tyre, të kenë impakt sa më të vogël në mjedis.
Kërkesa e formës	Qëllimi kryesor i ndërtimit të produktit është se duhet të kënaqë konsumatorin, për sa i përket kërkesave të formave të produktit.

Faza e tretë ka të bëjë me prodhimin e produktit, i cili nga ana e vet duhet të plotësojë së pari kërkesat funksionale të produktit të përmendura më sipër dhe, më pas, të gjitha të tjerat sipas rëndësisë së tyre.

Faza e katërt është dalja e këtij produkti në treg ku ai “ballafaqohet” me tregun dhe konsumatorin, nga ku varet edhe jetëgjatësia e tij në treg.

Dhe si **fazë e fundit** është dalja e këtij produkti nga tregu, pasi ai ka kryer të gjithë ciklin e jetës së tij në treg. Arsyet mund të jenë nga më të ndryshmet, por mund të themi apo listojmë disa nga këto, që mund të jenë, se ai nuk është më i nevojshëm në treg, apo se ka dalë një produkt tjetër alternativ, etj.

1.2 OPTIMIZIMI

Nga fazat që përmendëm, nëse ndalemi edhe një herë tek faza e dytë, ajo që përmendëm aty ishte krijimi konkret i konceptit të produktit. Çdo produkt i ri që do të projektohet do të ketë një numër variantesh të caktuar (Arora, 2017), që varet nga kërkesat që kemi për të, si dhe nga mundësitë e krijimit të tij. Ky numër shpesh mund të jetë i kufizuar dhe në këtë rast do të jetë e lehtë për t’u zgjedhur nga inxhinierët konstruktorë, por në raste të tjera fusha e zgjedhjeve të variablave për të përcaktuar variantet më të mirë është e gjerë dhe për inxhinierin konstruktor do të duhej “të mendohej” për zgjedhjen e variantit më të përshtatshëm.

Procedura apo rruga për të gjetur dhe vendosur se cila nga këto zgjidhje do të ishte më e mira, do të quhet **OPTIMIZIM** (Parkinson et al., 2013).

Gjithashtu, nuk mund ta kryejmë këtë proces kaq të rëndësishëm, nëse **nuk** do të njohim gjendjen reale të një sistemi, e në këtë rast gjendjen e tij të sforcuar nga veprimi i ngarkesave të jashtme. Thënë ndryshe në gjuhën e matematikës dhe inxhinierisë $\sigma \leq [\sigma]$. Për këtë gjendje duhet që sforcimi aktual të mos jetë më i madh se ai i lejuar, dhe optimizim i kësaj do të thotë që ky sforcim aktual duhet të jetë afërsisht sa ai i lejuar, që të kemi shfrytëzim të mirë të materialit, kursim në peshë, dhe ulje të kostos. Pra, një nga **objektivat** e këtij punimi që është vendosur, është gjetja dhe zhvillimi i një metode kërkuese të re për gjendjen e sforcuar.

“OPTIMIZIMI – KËRKIMI ALTERNATIV I GJENDJES SË SFORCUAR REALE TË OBJEKTIT, DERI NË KUFIJTË MAKSIMALË TË NGARKIMIT TË TIJ”.

1.2.1 Historiku

Historia e optimizimit ka nisur qysh herët me zhvillimin e matematikës dhe është zhvilluar në ditët e sotme me një hov të madh. Tre mund të konsiderojmë periudhat apo gurët kilometrik të zhvillimit të optimizimit në teknikë:

- Periudha para viteve **1600**
- Periudha gjatë viteve **1600 – 1990**
- Periudha pas viteve **1990**

Autori (**Du et al., 2018**) sjell një përmbledhje të detajuar të pothuajse të gjithë metodave optimizuese, të përmbledhura në botimin e tij “Enciklopedia e Optimizimit”. Për futjen më thellë në këtë botë të metodave optimizuese, le t’i shohim pak me detaje këto periudha si në vijim.

1.2.1.1 Periudha para viteve 1600

Periudha e para viteve 1600 mund të quhet edhe periudha e antikitetit, pasi rreth viteve 300 – 100 p.k. kemi probleme optimizuese nga matematicianë të ndryshëm. Euklidi (**History of Optimization**) ka folur mbi dy çështje për sa i përket optimizimit, së pari përcakton distancën minimale midis një pikë dhe një vijë dhe vërteton që katrori ka sipërfaqen më të madhe nga katërkëndëshat (**Ahmad, 2018**).

Nëse do ta shkruanim këtë problem në gjuhën e optimizimit për një katërkëndësh me perimetër të përcaktuar do të kishim, ekuacioni 1.1:

$$P = 2 \cdot (a + b) \quad (1.1)$$

Ku a dhe b janë brinjët e katërkëndëshit. Për një perimetër të dhënë, pra të pandryshueshëm kërkohet të gjenden brinjët që sipërfaqja e këtij katërkëndëshi të jetë maksimale, ekuacioni 1.2:

$$S = a \cdot b \quad (1.2)$$

Duke zëvendësuar njërin nga brinjët nga ekuacioni 1.1, do të kemi shprehjen e re të sipërfaqes.

$$S = a \cdot \left(\frac{P}{2} - a \right) = \frac{a \cdot P}{2} - a^2 \quad (1.3)$$

Duke e derivuar ekuacionin 1.3 në lidhje me brinjën a dhe barazuar me zero, ekuacioni 1.4, gjejmë ekstremumin, në këtë rast sipërfaqen maksimale pra optimizimin e një problemi.

$$\frac{dP}{da} = \frac{d\left(\frac{a \cdot P}{2} - a^2\right)}{da} = \frac{P}{2} - 2 \cdot a = 0 \quad (1.4)$$

Nga ekuacioni 1.4, shohim se brinja e këtij katërkëndëshi duhet të jetë sa $\frac{1}{4}$ e perimetrit për të patur sipërfaqe maksimale. Zëvendësimi tek ekuacioni 1.1, na sjell që $a = b$, pra ky katërkëndësh duhet të jetë katror. Gjithashtu një zgjidhje grafike është paraqitur edhe në figurën 1.2, ku rezultati është i njëjtë. Në ditë tona kjo duket një gjë e thjeshtë, por

që këtu ka zanafillën ideja për të gjetur optimalen, qofte kjo **përmasë, seksion, formë gjeometrike, vëllim, peshë, material, ngarkesë, mënyrë e lidhjeve**, etj.

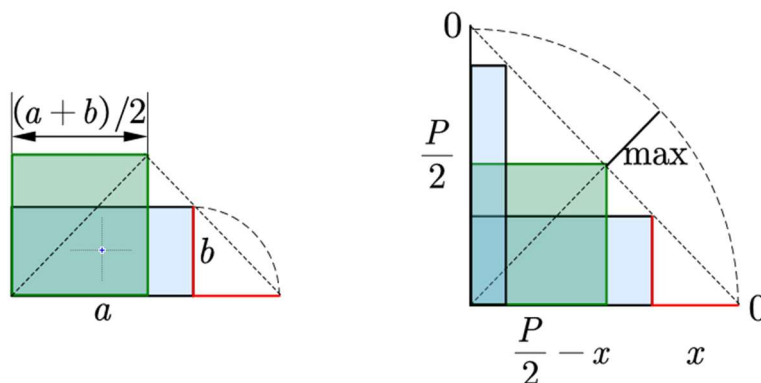


Figura 1.2 Zgjidhja grafike e sipërfaqes maksimale në problemin e Euklid-it

Mund të përmendim, sërish autorë të tjerë në periudhën e viteve 200 – 100 p.k.. Zenodorusi dhe Heroni kanë trajtuar problematika siç janë “*Problemat e Didos*” dhe “*Catoprica*”, ku tek kjo e fundit tregohet që drita udhëton ndërmjet dy pikave përgjatë rrugës më të shkurtër kur pasqyrohet nga një pasqyrë.

Për sa i përket periudhës deri në vitet 1600 ka pasur trajtime, për çështje optimizuese të ndryshme por që hovin e tyre e morën pas viteve 1600.

1.2.1.2 Periudha gjatë viteve 1600 - 1990

Edhe në këtë periudhë të viteve 1600 – 1900, matematicienë të shquar kanë trajtuar gjerësisht probleme të caktuara të optimizimit ku mund të përmendim **Kepler** (1615), **Galileo** (1638), **Fermant** (1636).

Le të ndalemi tek problemi i Kepler-it për të maksimizuar vëllimin e një bucele (**Cardil, 2012**). Në figurën 1.3, kemi zgjidhjen e dhënë nga Kepler për këtë problem. Shohim se ai pasi ka trajtuar problemin matematikisht ka gjetur me tentativa (sipas tabelës) se për çfarë vlere të parametrave gjeometrikë arrihet kjo. Më vonë, në periudhën kur analiza matematikore u zhvillua më shumë, u arrit në zgjidhje më të shpejtë, duke bërë që përveç gjetjes optimale të ulin dhe kohën e llogaritjes së tyre.

Gjithashtu gjatë këtyre viteve mund të përmendim **Newton** (rreth viteve 1660) dhe **Leibniz** (1670). Këta dy matematicienë dhe fizikantë të shquar hodhën themelet e analizës matematikore, që më vonë u formua baza për llogaritjet e variacionit (**CoV**) (**Todhunter, 2005**). Ajo që mund të përmendet rreth këtyre viteve është algoritmi i parë i prezantuar nga grup autorësh **Weierstrass, Stainer, Hamilton** dhe **Jacobi**.

1.2.1.3 Periudha pas viteve 1990

Deri në fillim të viteve 1900 ka pasur një numër të madh autorësh të cilët kanë zhvilluar teknika apo kanë studiuar problematika rreth optimizimit. Por me zhvillimin e analizës komplekse, rreth viteve 1960 dhe 1970, ka pasur një hov tjetër edhe në fushën dhe metodat e optimizimit (**Luenberger., 1984**). Tek botimi i **Richter et al. (2013)**

jepen të detajuara rrugëtimi i metodave përafruese dhe kërkuese nga ato klasike deri tek metodat e reja moderne. Gjithashtu këtu mund të përmendim që zhvillimi i shkencës kompjuterike rreth viteve 1980 bëri që algoritmat heuristike dhe stokastike (Kurt, 2015) për optimizimin global dhe problemeve me shkallë të madhe filluan të marrin popullaritet të madh, ku rreth viteve 1990 përdorimi i metodës së pikës së brendshme zgjeroi teknikën optimizuese të gjysmë-përcaktuar.

	Basis dia- meter	Erit corpus columnæ
1	20	309
2	20	794
3	20	1373
4	20	1976
5	19	1875
6	19	2184
7	19	2417
8	18	2088
9	18	2871
10	17	3000
11	17	3069
Sub se- quencia	16	3080
12	16	3072
13	15	3005
14	14	2816
15	13	2528
16	12	2031
17	11	1887
18	10	1598
19	9	1241
20	8	800

Figura 1.3 Zgjidhja e problemit të optimizimit të bucelës së verës nga Kepler.

1.3 METODAT NOVATORE OPTIMIZUESE

Zhvillimi kompjuterik, solli edhe në fushën e inxhinierisë një shpejtësi dhe saktësi llogaritje. Tashmë problemet e shumta të inxhinierisë u kthyen në probleme të gjetjes optimale të tyre. Objektivat e inxhinierëve dhe studiuesve përveç atyre për realizimin e objektit të studimit, u morën edhe me objektiva të optimizimit të peshës, ngarkesës, formës, kostove etj.

Gjithashtu në raste të caktuara këto objektiva mund të jenë njëkohësisht për t'u optimizuar, kështu që gama e kërkimit të këtyre metodave arrihet nëpërmjet kërkimeve me shumë objektiva. Metodatat optimizuese për rastin e studimeve inxhinierike mund ti grupojmë në:

- Metodatat numerike (Dutta et al., 2019)
- Metodatat e elementëve të fundëm
- Metodatat heuristike, metoda e gjetjes të një zgjidhje të problemit. Nga greqishtja, *eurisko-të kërkosh*. (Sörensen et al., 2017)

Në ditët e sotme, numri i këtyre metodave heuristike është zhvilluar shumë, por fillimet dhe hovin e parë e patën rreth viteve 1990, kur edhe shkenca kompjuterike filloi zhvillimin e saj. Si fillim i metodave heuristike mund të përmendim metodën e

Algoritmit Gjenetik (**Holland, 1975**), e cila do të ishte baza për kërkimet heuristike të këtyre metodave (**Goldberg, 1989**). “Kopjimi” i mënyrave optimizuese natyrore dhe krijimi i tyre në algoritma kompjuterike ishte sfida dhe trendi i kohës (**Dorigo, 1992**), që e rriti më tej këtë kërkim. Më vonë autorë të tjerë, zhvilluan metoda si Ant Colony Optimization (**Dorigo et al. 2004**), Differential Evolution (**Storm et al. 1997**), Harmony Search (**Geem et al. 2001**), Bat algorithm dhe Spiral Optimization (**Xin-She Yang, 2010**), Krill Herd Algorithm (**Gandomi et al. 2013**), Particle Swarm Optimization (**Wu et al., 2024**) etj. Ajo që mund të përmendim këtu është se këto metoda janë kryesisht metoda me shumë objektiva (multi-objectiv), duke e bërë fushën e kërkimit më të gjerë dhe optimizuar njëkohësisht disa objektiva, çka e lehtëson punën e një inxhinieri apo konstruktori (**Steven, 2002**).

Fusha e përdorimit të tyre është e gjerë, ku kanë punuar një grup i madh autorësh, të cilët e kanë zhvilluar së tepërmi si, optimizimi me shumë objektiva duke përdorur algoritma evolucionar (**Deb, 2001**), algoritma të cilat mund të gjejnë zbatim edhe në inxhinieri dhe sidomos në inxhinieri mekanike, për rastet e llogaritjeve konstruktive të ndryshme. Në vijim do të japim disa aplikime të këtyre metodave në inxhinieri mekanike.

1.4 OPTIMIZIMI NË INXHINIERI MEKANIKE.

Në fushën e inxhinierisë mekanike janë zhvilluar disa teknika për çështje të ndryshme, ku këtu mund të përmendim një sërë studime të trajtuar së fundmi, si p.sh teknikat e optimizimit në inxhinieri (**Tartibu, 2025**). Ne do të trajtojmë ato problema që janë në fushën dhe objekt studimi të temës tonë dhe, me mundësinë dhe hapësirat për dhënien e metodës së re optimizuese, sidomos metodat numerike dhe hibride-heuristike. Hapat për shtrimin e problemit dhe zgjidhjen e tij nëpërmjet një metode optimizuese (**Arora, 2017**) janë me **përshtatshmin e problemit, mbledhja e të dhënave, përcaktimi i variablave ose variablave që do të optimizohen, kriteret e optimizimit, kushtet kufitare dhe zgjidhja e tyre.**

Në figurën 1.4, jepet një skemë e rrugës që ndiqet për optimizimin në inxhinieri mekanike. Secili prej këtyre hapave ka rëndësinë e vet, pasi përshtatshmi i problemit është si hap fillestar, se për çfarë do ndërtohet ky algoritëm optimizues. Për sa i përket të dhënave, do të duhet të përcaktohen qartë, sepse të lidhura me variablat optimizues ato futen në fushën e kërkimit të metodës se re që do të zhvillohet. Në varësi të numrit të variablave, ndahet nëse kemi të bëjmë me metodë me një-variabël apo me shumë-variabla dhe, sidomos më pas, me kriteret që duhet për to. Nga ana tjetër, që një metodë optimizuese të konvergojë apo të gjenden zgjidhje në fushën e saj të kërkimit, do të duhen të vendosen kufizimet e nevojshme që zgjidhja në një farë mënyre “**të drejtohet**” drejtë optimalet.

Meqenëse në problemet inxhinierike, variablat që mund apo duhet të optimizohen janë të shumtë, atëherë metodat heuristike kanë gjetur një përshtatshmëri të madhe, pasi kërkojnë në fushën e zgjidhjeve në mënyrë “kaotike” por që rregulli “vendoset” në kufizimet që i jepen. Ndaj dhe në vijim do të fokusohemi në një rishikim të këtyre metodave dhe dhënien më pas të bazës për “**metodën e valës**” si një metodë novatore, në zgjidhje të disa probleme specifike të gjendjes së sforcuar plane por edhe më gjerë.

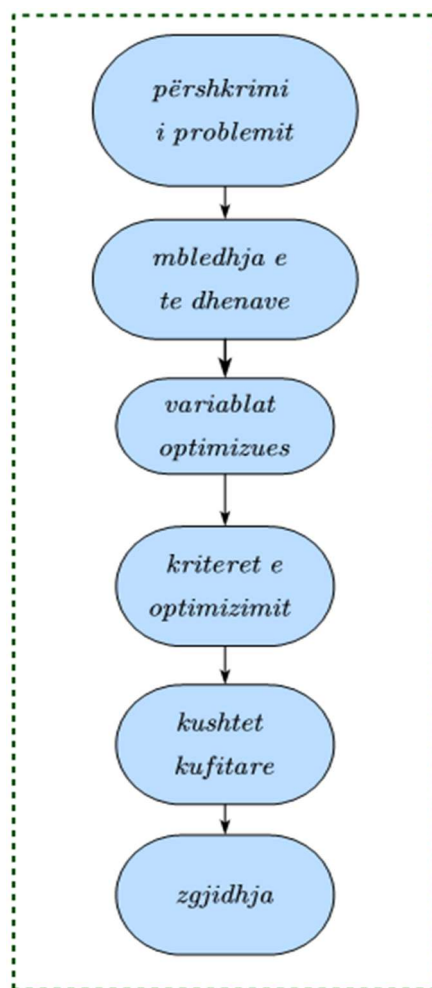


Figura 1.4 Hapat e problemit të optimizimit në inxhinieri.

Metoda e optimizimit të algoritmit gjenetik është një ndër metodat e para kërkuese, e cila gjen shumë zgjidhje në fushën e inxhinierisë mekanike, ku kjo është një metodë kërkuese e frymëzuar nga natyra. Fuqia e kësaj metode është që ajo gjen gjithmonë një zgjidhje nga tërësia e zgjidhjeve, por duhet të kemi kujdes në kushtet e vendosura. Kjo metodë gjen aplikim në shumë probleme të inxhinierisë, ku mund të përmendim optimizimin e një transmissioni me dhëmbë (Bode et al., 2015), trarët në një konstruksion, peshën e konstruksionit, strukturën e tij, sforcimet maksimale dhe detyrimisht shfrytëzimin e materialit etj. Në të gjitha këto raste mund të ndodhë që elementi kosto të jetë i përfshirë dhe, pothuajse të gjithë problemet, janë me dy ose më shumë objektiva për t'u optimizuar.

Metoda të tjera heuristike përdorin pothuajse të njëjtën logjikë të kërkimit, por duke u frymëzuar nga fenomene të tjera natyrore, të cilat bëjnë të mundur gjetjen e zgjidhjes optimale. ACO simulon kërkim e rrugëve më të shkurtra të një kolonie milingonash, metodë e cila përdoret gjerësisht në optimizimin topologjik në konstruksionet mekanike (Dorigo et al., 2004). Gjithashtu (Ahmed et al., 2024) kanë trajtuar problema të gjetjes së zgjidhjes optimale në transmisionet. Të tjerë (Kanna et al., 2018) kanë përcaktuar parametrat optimale të një transmissioni me burmë – rrotë shoqe. Për sa i përket strukturave dhe konstruksioneve në inxhinieri mekanike, gjithashtu këto metoda kanë pasur një qasje duke i dhënë shtysë të madhe optimizimit të formave gjeometrike elementeve të tyre, mënyrës së shpërndarjes së ngarkesës apo

edhe të vetë peshës së konstruksionit. Mund të përmendim optimizimin e trarëve të një konstruksioni (**Dzierżanowski et al., 2023**), apo strukturën e tij (**Papadhakakis et al. 1998**) dhe (**Storn et al., 1997**), nëpërmjet metodave optimizuese dhe kërkuese moderne. Po ashtu struktura të ndryshme të konstruksioneve të aeronautikës dhe më gjerë, janë llogaritur dhe optimizuar në soliditet dhe qëndrueshmëri nga grupe autorësh të ndryshëm, (**Kale et al., 2023**), (**Park, 2023**), (**Baker et al., 2015**) dhe (**Bochenek et al., 2006**). Duket qartë që moria e problemave dhe algoritmave që përdoren është e madhe, ndaj dhe nuk po ndalemi në të gjitha.

1.5 OPTIMIZIMI NË KOHËT MODERNE, METODA E VALËS

Tendenca në kohët e sotme e pothuajse të gjitha algoritmave, duke qenë se çdo problem kërkon që të ketë zgjidhjen sa më optimale, është se këto algoritma po përshtaten nga algoritmi fillestar, por duke modifikuar elemente të ndryshëm (**Elaziz et al., 2022**), p.sh. nga **AG** fillestar, i cili nisi me një objektiv, në rastin e shumë objektivave është modifikuar me futjen e vektorit të bazës së të dhënave. Nga ana tjetër edhe në studime të kryera nga vetë ne, nëse në **AG** fillestare duhet të kthehej çdo numër në 0 dhe 1, sistem binar, në rastin tonë kemi mbajtur të pandryshuar formën e të dhënës fillestare dhe kemi marrë rezultatet përfundimtare në madhësi dhe njësinë e dëshiruar (**Bode et al. 2015**). Edhe metodat e tjera e kanë ndjekur këtë tendencë dhe duke e pasuruar bibliotekën e algoritmave optimizues në qindra, kjo edhe në Enciklopedinë e Algoritmave, (**Panos M. Pardalos, 2009**) në pothuajse 711 artikuj për metoda të ndryshme. E nëse do të shohim përsëri tendencën në po këtë enciklopedi të vitit 2025, shohim se ajo gjithnjë ka tendenca të reja për metoda të reja dhe **hibride** (**Chen et al., 2023**). Nga ana tjetër nuk mund të rrimë pa përmendur edhe Inteligjencën Artificiale, e cila e ndryshon shumë qëndrimin përballë të panjohurës, duke sjellë tek kërkuesit në kohë reale, algoritma dhe kode në gjuhë programimi të ndryshme.

Sfidat e së ardhmes janë problemet komplekse, ku mënyra e futjes së variablave është e vështirë apo dhe dhënia e kushteve kufitare të problemit, që në problemet komplekse janë shpesh të vështira. Një pengesë tjetër është edhe koha e procesimit nëse do të duhet që një problem të zgjidhet në kohë reale, dhe në këtë rast kërkohet marrja e informacionit, të dhënave nga “**database**” dhe përpunimi sa më shpejt, sidomos në rastet kur problemi inxhinierik do të kërkojë programe apo llogaritje matematikore. Megjithatë teknologjia është zhvilluar shumë, duke e bërë më të lehtë për një inxhinier apo kërkues që të zgjidhë problemet në kohë reale dhe efikase.

Në rastin e studimit të temës sonë, jemi frymëzuar nga probleme të teorisë së elasticitetit plan dhe “**përhapjes së valës**”, në këtë rast përhapjes së sforcimeve në elementin apo konstruksionin mekanik dhe, duke tentuar ta “**shuajmë**” atë me **kundërvalë** për të imituar shuarjen e valëve në një mjedis (**humbjen e energjisë**), do bëjmë të mundur përcaktimet e gjendjes së sforcuar në elementin tonë dhe, më pas, duke e patur këtë si objektiv për ta optimizuar (*në rastin tonë ta mbajmë atë në vlerën maksimale të mundshme*), duke plotësuar edhe kushtet e tjera të soliditetit, qëndrueshmërisë apo ngurtësisë. Kështu që kjo metodë do të nisi, duke dhënë problemin teorik të gjendjes së sforcuar plane dhe, më pas, me hapat e krijimit të “**Metodës së Valës**”. Metoda numerike dhe kërkuese do të ndërtohet në algoritmë, për të përcaktuar këtë gjendje, me valë dhe kundërvalë. Këto sforcime të përcaktuara tashmë nëpërmjet kësaj metode, do të përdoren në metodat e tjera kërkuese (**Sulejmani et al., 2021**) dhe (**Bode et al., 2015**), metoda kërkuese optimizuese heuristike etj.

KAPITULLI 2

TEORIA E ELASTICITETIT PLAN

2 PROBLEMET PLAN NË AMBIENTIN ELASTIK

“Njohja e saktë gjendjes reale të sforcuar dhe deformuar si një shteg i ri për zgjidhje optimale”, është në vija të përgjithshme konkluzioni i problemeve të optimizimit në inxhinieri të trajtuar në kapitullin e parë, si dhe përfaqëson mundësitë e krijimit të metodës së re kërkuese, e cila do të hapte rrugët për gjetjen optimale të një apo disa parametrave llogaritës. Që të përparojmë në krijimin e metodës kërkuese, fillimisht trajtojmë bazën teorike mbi të cilën do të ngrihen hipotezat e kësaj metode dhe, më pas, programimin numerik për aplikim në elemente dhe konstruksione të ndryshme.

Baza teorike mbështet në problemet e **Teorisë së Elasticitetit** dhe, më konkretisht, problemet plane do të trajtohen për t'u futur në fushën e sforcimeve të strukturave dhe elementeve mekanike. Këto probleme, janë trajtuar nga **Timoshenko et al. (1951)** dhe **Sadd (2020)**, ku baza matematikore e trajtimit të tyre përbëhet nga zgjidhja e tetë ekuacioneve diferenciale (**Parton et al., 1984**) dhe (**Abramowitz et al., 1964**), dhe kanë trajtuar fillimisht skema elementare dhe më pas është zgjeruar në skema të ndryshme reale aplikimi. Do të fokusohemi në këto skema, që do ti trajtojmë për rastet e përgjithshme, duke derivuar nga këto skema për aplikime tek metoda e re dhe për zbatime në elemente konstruktive të ndryshëm.

Si çdo teori e ndërtuar për metoda të ndryshme, edhe në rastin e **Metodës së Valës**, duke qenë se ajo mbështet mbi teorinë e elasticitetit, përpara se të fillojmë me ndërtimin e metodës, kemi marrë në konsideratë disa abstrakte teorike. Së pari, meqenëse vetë teoria e elasticitetit ndahet në atë lineare dhe jo-lineare (**Lurie, 2012**), më qëllim lehtësimin e punës së krijimit të metodës optimizuese dhe fushës së kërkimit në këtë rast, kemi pranuar hipotezën që jemi në një ambient **elastik linear**. Tjetër hipotezë e pranuar për sa i përket materialit do të jetë nëse ai është izotrop ose ortotropik, fusha e studimit në këtë punim është për materiale **izotropike**, duke u thelluar në teorinë e elasticitetit në këto lloj materialesh (**Bhaskar et al., 2022**).

2.1 FUNKSIONI I AIRY-IT

Metoda e Valës, në vijim me shkurtimin **MV**, është një metode e cila do të thellohet akoma edhe më tej në fushën e mekanikës së aplikuar dhe teorisë së avancuar të elasticitetit (**Armenakas, 2016**), duke kombinuar me metoda optimizuese numerike dhe heuristike kërkuese. Baza teorike e saj, ku do të ngrihet edhe vetë metoda, konsiston në trajtimin e problemeve në dy sisteme koordinatash, karteziene dhe polare, në varësi të skemës dhe thjeshtësisë së zgjidhjes së tyre (**Timoshenko et al. 1951**). Për të zgjidhur këto probleme po e rishikojmë edhe njëherë funksionin e sforcimit të Airy-it¹

¹George Airy, 1862

(Altebach, 2020). Ky funksion $\Phi(x, y)$, është biharmonik, i cili plotëson kushtin e të qenit biharmonik (Lapaine, 2016), sipas ekuacionit 2.1:

$$\nabla^4 \Phi(x, y) = \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi(x, y)}{\partial y^4} = 0 \quad (2.1)$$

Gjithashtu shërben për të gjitha gjendjet plane, të cilat mund t'i ndajmë në dy grupe të veçanta [Sadd, 2020] të tilla si:

- gjendja e deformuar plane
- gjendja e sforcuar plane

Dallimi midis këtyre gjendjeve ka të bëjë me dy raste, rasti i parë kur deformimet janë në një plan dhe rasti i dytë kur sforcimet janë në një plan dhe këtu, për përcaktimin e gjendjes përkatëse plane, luan rol trashësia e objektit në studim. Në vijim, në figurën 2.1, tregohen ndryshimet ndërmjet objektit të këtyre dy gjendjeve plane. Në rastin gjendjes së deformuar plane, përmasa gjatësore është shumë e madhe krahasuar me dy të tjerat, figura 2.1 (a), dhe teoria e gjendjes së deformuar plane është më afër realitetit. Ndërsa në rastin e dytë, figura 2.1 (b), siç janë rastet e pllakave të holla, trashësia e të cilave është shumë e vogël krahasuar me dy përmasat e tjera, teoria e gjendjes së sforcuar plane është më afër realitet.

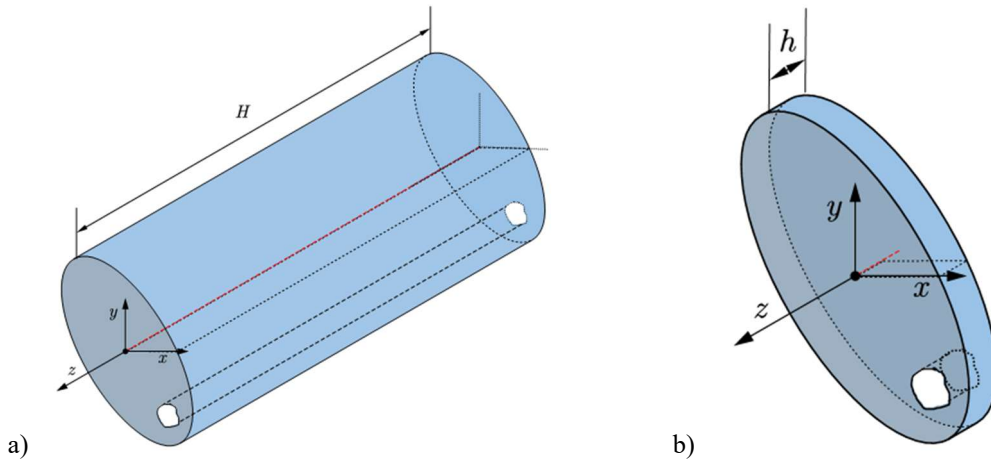


Figura 2.1 Objekti në problemet e teorisë së **MV**
a) gjendje e deformuar plane, b) gjendje e sforcuar plane

Në gjendjen e deformuar plane, tenzorët e deformimeve dhe sforcimeve marrin formën sipas ekuacioneve 2.2 dhe 2.3.

$$T_{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Kurse në gjendjen e sforcuar plane, këta dy tenzorë marrin formën siç tregohen në ekuacionet 2.4 dhe 2.5 në vijim:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & 0 \\ \frac{\gamma_{yx}}{2} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & 0 \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

ku σ_{xx} , σ_{yy} dhe σ_{zz} janë sforcimet normale, ndërsa σ_{xy} (σ_{yx}) janë sforcimet tangjenciale, dhe me ε_{xx} , ε_{yy} dhe ε_{zz} deformimet relative lineare, ndërsa me γ_{xy} kemi deformimin relativ këndor. Gjithashtu kemi edhe ekuacionet diferenciale të ekuilibrit, që reduktohen vetëm në dy ekuacione diferenciale, 2.6 dhe 2.7 përkatësisht

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \rho_x = 0 \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \rho_y = 0 \quad (2.7)$$

ku: ρ_x, ρ_y , janë forcat volumore që veprojnë në vëllimin elementar. Nga lidhja gjeometrike do të kemi relacionet për gjendjen plane për sa i përket deformimeve dhe zhvendosjeve në drejtimet përkatëse, sipas ekuacionit 2.8.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.8)$$

ku me u , v dhe w kemi shënuar zhvendosjet sipas drejtimeve x , y dhe z . Nga ligji i përgjithësuar i Hooke²-ut mund të shkruajmë për gjendjen e sforcuar plane grup-ekuacionet, të shprehura si në vijim në ekuacionet 2.9.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{yy}}{E} = f_1(x, y) \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} = f_2(x, y) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu) \sigma_{xy}}{E} = f_3(x, y) \\ \varepsilon_{zz} &= -\frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{yy}}{E} = f_4(x, y)\end{aligned}\tag{2.9}$$

Po nga ligji i përgjithësuar i Hooke-ut, kemi gjithashtu relacionet për gjendjen e deformuar plane, sipas ekuacioneve 2.10.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{yy}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{zz}}{E} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{zz}}{E} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu) \cdot \sigma_{xy}}{E} \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{xx}}{E} - \frac{\mu \cdot \sigma_{yy}}{E} = 0\end{aligned}\tag{2.10}$$

d.m.th $\sigma_{zz} = \mu \cdot (\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$ dhe pas zëvendësimit dhe transformimit të relacionit të parë, fitojmë shprehjen sipas ekuacionit 2.11.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1 - \mu^2}{E} \cdot \left(\sigma_{xx} - \frac{\mu}{1 - \mu} \cdot \sigma_{yy} \right)\tag{2.11}$$

Duke futur dy parametra të reja elastike si $E_1 = \frac{E}{1 - \mu^2}$ dhe $\mu_1 = \frac{\mu}{1 - \mu}$ dhe zëvendësuar në ekuacionet 2.10, fitojmë një formë tjetër të ligjit të Hooke-ut por të ngjashme me atë të gjendjes së sforcuar plane, e shprehur kjo në ekuacionin 2.12.

²Robert Hooke (1635–1703)

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\sigma_{xx}}{E_1} - \frac{\mu_1 \cdot \sigma_{yy}}{E_1} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\sigma_{yy}}{E_1} - \frac{\mu_1 \cdot \sigma_{xx}}{E_1} \\ \gamma_{xy} &= \frac{2 \cdot (1 + \mu_1) \cdot \sigma_{xy}}{E_1}\end{aligned}\tag{2.12}$$

Përveç këtyre ekuacioneve, kemi edhe ekuacionin e vazhdueshmërisë, i cili nga ana e vet nuk paraqet ndonjë ekuacion të ri, por vetëm transformimin e lidhjeve gjeometrike, e shprehur kjo me barazimin sipas ekuacionit 2.13.

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}\tag{2.13}$$

Duke zëvendësuar në ekuacionin e vazhdueshmërisë dhe deformimet nga ligji i përgjithësuar i Hooke-ut, përkatësisht sipas 2.13 dhe 2.12, gjithashtu duke pasur parasysh edhe ekuacionet diferenciale të ekuilibrit të shprehura sipas 2.6 dhe 2.7, kemi një ekuacion të transformuar (**Selvadurai, 2000**) bazë për zgjidhjen në sforcime:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yy}}{\partial y^2} = \nabla^2 (\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 0\tag{2.14}$$

ku me ∇^2 kemi operatorin e Laplace³-it (**Davison et al. 1982**) dhe (**Selvadurai, 2000**), i cili ka këtë formë, $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \nabla^2$. Analizojmë një funksion të ri të dy variablave x dhe y dhe konkretisht funksionin $\Phi(x, y)$, të tillë, që sforcimet të përcaktohen thjesht në bazë të derivateve të rendit të dytë, shprehur nga ekuacionet 2.15.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \\ \sigma_{xy} &= -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y}\end{aligned}\tag{2.15}$$

³Pierre-Simon Laplace (1749 –1827)

Sforcimet e trupit elastik kënaqin ekuacionet diferenciale për problemin plan dhe, tek ekuacioni i fundit i vazhdueshmërisë në sforcime, marrim kushtin që duhet të plotësojë ky funksion:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nabla^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} \right) = \nabla^4 \Phi(x, y) = 0 \quad (2.16)$$

Ky funksion $\Phi(x, y)$ është atëherë biharmonik, sepse plotëson kushtin $\nabla^4 \Phi(x, y) = 0$ dhe quhet funksioni i Airy⁴-it ose **funksioni i sforcimeve**.

2.2 FUSHA E ZGJIDHJEVE TË FUNKSIONIT TË AIRY-IT

Sa më sipër, në paragrafin 2.1, pamë në analizën matematikore gjendjen e sforcuar dhe deformuar plane, dhe përcaktuam funksionin e Airy-it i cili duhet të plotësojë disa kushte. *Por nga do të zgjidhet ky funksion? Fushat e zgjidhjeve të tij?* Funksioni i Airy-it ose funksioni i sforcimeve siç u përcaktua në ekuacionin 2.16, mund të jetë në seri polinomiale ose në seri trigonometrike (**Timoshenko et al., 1951**) të cilat po i japim më poshtë:

- Seria polinomiale ku ndryshoret x dhe y janë në fuqi tek:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} \left[(-1)^k \cdot \frac{n-2 \cdot k-2}{n \cdot (n-2)} \right] \cdot C_n^{2 \cdot k+1} (A_n \cdot x^{n-2 \cdot k-1} \cdot y^{2 \cdot k+1} + B_n \cdot x^{2 \cdot k+1} \cdot y^{n-2 \cdot k-1}) \quad (2.17)$$

- Seria polinomiale ku ndryshoret x dhe y janë në fuqi çift:

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \left[(-1)^k \cdot \frac{n-2 \cdot k}{n} \right] \cdot C_n^{2 \cdot k} (A_n \cdot x^{n-2 \cdot k} \cdot y^{2 \cdot k} + B_n \cdot x^{2 \cdot k} \cdot y^{n-2 \cdot k}) \quad (2.18)$$

- Seria polinomiale ku ndryshorja x është në fuqi tek dhe y në fuqi çift

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[(-1)^k \cdot \frac{n-2 \cdot k-1}{n-1} \right] \cdot \left(A_n \cdot C_n^{n-2 \cdot k} \cdot x^{n-2 \cdot k} \cdot y^{2 \cdot k} + \frac{B_n}{n} \cdot C_n^{n-2 \cdot k-1} x^{2 \cdot k+1} \cdot y^{n-2 \cdot k-1} \right) \quad (2.19)$$

- Seria polinomiale ku ndryshorja y është në fuqi tek dhe x në fuqi çift:

⁴George Biddell Airy (1801 –1892)

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}} \left[(-1)^k \cdot \frac{n-2 \cdot k-1}{n-1} \right] \cdot \left(A_n \cdot C_n^{n-2 \cdot k} \cdot y^{n-2 \cdot k} \cdot x^{2 \cdot k} + \frac{B_n}{n} \cdot C_n^{n-2 \cdot k-1} y^{2 \cdot k+1} \cdot x^{n-2 \cdot k-1} \right) \quad (2.20)$$

- Familjen funksioneve biharmonik të seri trigonometrike në formën $\Phi(x, y) = f(y) \cdot \sin(\alpha_n \cdot x)$ del:

$$f(y) = C_1 \cdot \cosh(\alpha_n \cdot y) + C_2 \cdot \sinh(\alpha_n \cdot y) + C_3 \cdot y \cdot \cosh(\alpha_n \cdot y) + C_4 \cdot y \cdot \sinh(\alpha_n \cdot y) \quad (2.21)$$

Gjithashtu në fushën e funksioneve biharmonike të cilat gjejnë aplikimin në **MV**, janë edhe grup funksionet sinusoidale dhe kosinusoidale, të cilat janë trajtuar në paragrafët e mëposhtme, sidomos për shpërndarjen e sforcimeve radiale të valëve dhe kundërvallëve të kësaj metode.

2.3 PROBLEMI PLAN NË KOORDINATA POLARE

Në dy paragrafët e mësipërm u trajtua teoria e funksionit biharmonik për gjendjen e sforcuar apo të deformuar plane, deri tek nxjerrja e këtyre funksioneve biharmonike dhe lidhjet që ekzistojnë midis sforcimeve, deformimeve dhe zhvendosjeve, duke ndërthur ligjet e shkencës së materialeve (**Koça et al., 2018**).

Në vijim, do të trajtojmë problemin plan por në koordinata polare, pasi edhe baza teorike e **MV** do të jetë në shpërndarjen e sforcimeve sipas këtyre koordinatave. Le të konsiderojmë një pikë në një sistem koordinativ kartezyan, e cila në koordinata polare përcaktohet me anën e një rreze-vektorit $\vec{r}$ dhe këndit φ , figura 2.2 (a), të matur në sensin antiorar prej aksit horizontal p.sh. Ox deri tek rreze-vektori $\vec{r}$. Një sipërfaqe elementare në këto koordinata do të fitohet duke ndryshuar rrezen me shtesën dr dhe këndin me shtesën $d\varphi$. Duke qenë se kjo sipërfaqe elementare është në ekuilibër, atëherë duke vendosur në të katër faqet e prera të saj sforcimet e këtyre faqeve, siç tregohet në figurën 2.2 (b), do të shikojmë plotësimin e ekuacioneve të ekuilibrit.

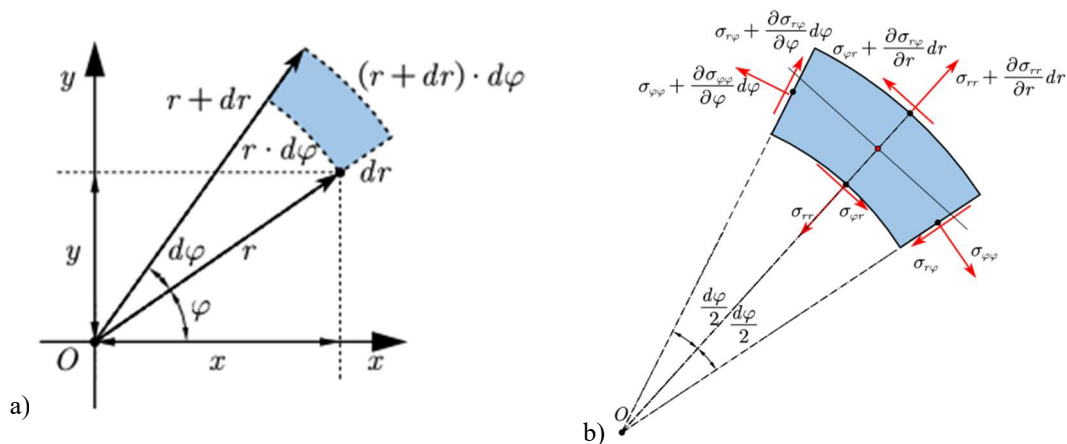


Figura 2.2 Objekti i studimit në koordinata polare
a) Sipërfaqja në koordinata polare, b) Gjendja plane në koordinata polare

Akset e projektimit do ti marrim në qendër të elementit, njëri sipas rrezes, në mes të këndit $d\varphi$, kurse tjetri përpindikular me të. Shkruajmë ekuacionet e ekuilibrit të elementit sipas rrezes, ekuacioni 2.22.

$$\begin{aligned} \sum F_r = & [-\sigma_{rr} \cdot r \cdot d\varphi] + \left[-\sigma_{r\varphi} \cdot dr \cdot \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - \sigma_{\varphi\varphi} \cdot dr \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \right] + \\ & \left[\left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} \cdot dr \right) \cdot (r + dr) \cdot d\varphi \right] + \left[\left(\sigma_{r\varphi} + \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \cdot dr \cdot \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - \right. \\ & \left. \left(\sigma_{\varphi\varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \cdot dr \cdot \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Nga ku mund të nxjerrim barazimin sipas ekuacionit 2.23, si në vijim:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \quad (2.23)$$

Të njëjtën arsyetim edhe për drejtimin përpindikular me rrezën, nga ekuacioni i ekuilibrit sipas drejtimit φ fitojmë ekuacionin 2.24 të tillë:

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2 \cdot \sigma_{\varphi r}}{r} = 0 \quad (2.24)$$

Ligji i përgjithësuar i Hooke-ut, ekuacioni 2.12, nuk pëson ndryshime sepse akset në koordinata polare $\vec{r}$ dhe $\vec{\varphi}$ janë përsëri **reciprokisht** përpindikulare d.m.th. do të transformohej në trajtën :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_{rr}}{E_1} + \frac{-\mu_1 \cdot \sigma_{\varphi\varphi}}{E_1} & \frac{2 \cdot (1 + \mu_1) \cdot \sigma_{r\varphi}}{E_1} \\ \frac{2 \cdot (1 + \mu_1) \cdot \sigma_{r\varphi}}{E_1} & \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{E_1} + \frac{-\mu_1 \cdot \sigma_{rr}}{E_1} \end{pmatrix}$$

Për sa i përket deformimeve ε_{rr} , $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ dhe $\gamma_{r\varphi}$, si edhe zhvendosjeve u dhe v në drejtim të rrezes dhe normal me të, na duhet të nxjerrim lidhjen që ekziston midis tyre në këtë sistem koordinativ. Për këtë arsye marrim në koordinata polare dy pika M dhe N të ndodhura p.m.v afër, duke pasur kujdes se edhe drejtimi i vektorëve njësi ndryshon nga pika në pikë.

Prandaj do ta paraqesim në fillim në formë vektorësh si në figurën 2.3 (a). Në rastin kur kemi ndryshim vetëm në drejtimin radial forma do të jetë sipas figurës 2.3 (b) dhe nëse do të kemi ndryshimin sipas këndit, forma vektoriale do të jepet sipas figurës 2.3 (c).

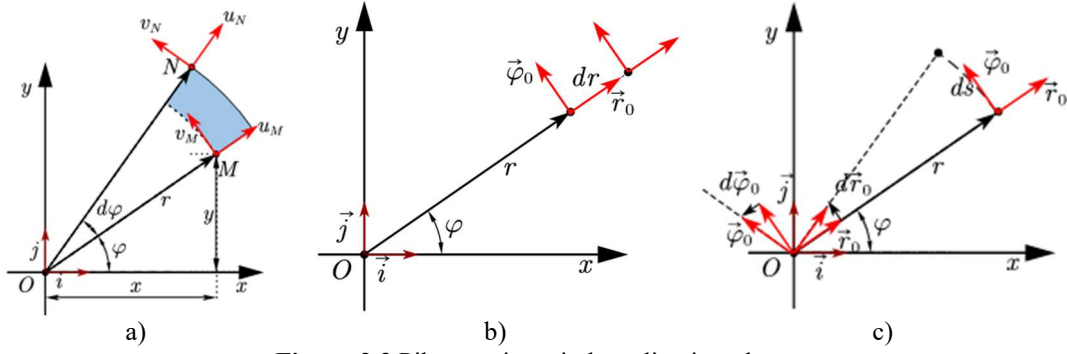


Figura 2.3 Pikat në sistemin koordinativ polar

a) Zhvendosje u dhe v te pikave M dhe N, b) Ndryshimi vetëm në drejtimin radial, c) Ndryshimi vetëm sipas këndit

Duke ditur se kemi vektorë njësi kur ndryshon rezja duket qartë se marrim $\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial r} = \frac{\partial \vec{\varphi}_0}{\partial r} = 0$ dhe kur ndryshon këndi kemi $\frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \varphi} = \vec{\varphi}_0$ dhe $\frac{\partial \vec{\varphi}_0}{\partial \varphi} = -\vec{r}_0$. Nga zbërthimi në seri Taylor⁵ (Abramowitz, 1964) të vektorëve të zhvendosjeve për dy pika M dhe N pambarimisht afër do të kemi vektorët $\vec{d}_M = \vec{u}_M + \vec{v}_M$ dhe $\vec{d}_N = \vec{u}_N + \vec{v}_N$ dhe pasi i grupojmë termat sipas akseve polare, fitojmë shprehjen sipas ekuacionit 2.25:

$$\vec{d}_N = (\vec{u}_M + \vec{v}_M) + \frac{\partial(\vec{u}_M + \vec{v}_M)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(\vec{u}_M + \vec{v}_M)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \quad (2.25)$$

Për zhvendosjet e pikës M kemi $\vec{u}_M = u \cdot \vec{r}_0$, atëherë realizojmë hap pas hapi veprimet matematikore dhe marrim shprehjen sipas ekuacionit 2.26.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{u}_M)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(\vec{u}_M)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi &= \frac{\partial(u \cdot \vec{r}_0)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(u \cdot \vec{r}_0)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ &= \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) + u \cdot d\varphi \cdot \vec{\varphi}_0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Po kështu, për pikën M, në drejtimin perpendikular kemi shprehjen $\vec{v}_M = v \cdot \vec{\varphi}_0$, atëherë do të kemi shprehjen sipas ekuacionit 2.27.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{v}_M)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(\vec{v}_M)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi &= \frac{\partial(v \cdot \vec{\varphi}_0)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(v \cdot \vec{\varphi}_0)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \\ &= \vec{r}_0 \cdot (-v \cdot d\varphi) + \vec{\varphi}_0 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nga zëvendësimi i ekuacioneve 2.26 dhe 2.27 tek ekuacioni 2.25 do të kemi:

⁵Brook Taylor (1685 –1731)

$$\vec{d}_N = (\vec{u}_M + \vec{v}_M) + \frac{\partial(\vec{u}_M + \vec{v}_M)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(\vec{u}_M + \vec{v}_M)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = \vec{d}_M + \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) + u \cdot d\varphi \cdot \vec{\varphi}_0 + \vec{r}_0 \cdot (-v \cdot d\varphi) + \vec{\varphi}_0 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \right) \quad (2.28)$$

Duke grupuar shprehjen sipas vektorëve njësi të akseve $\vec{r}_0$ dhe $\vec{\varphi}_0$ do të marrim:

$$\vec{d}_N = \vec{d}_M + \vec{r}_0 \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \cdot d\varphi - v \cdot d\varphi \right) + \vec{\varphi}_0 \cdot \left(\frac{\partial v}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \cdot d\varphi + u \cdot d\varphi \right) \quad (2.29)$$

Dhe në formën matricore zhvendosjet e pikës N nga pika M janë si në vijim:

$$\begin{pmatrix} u_N \\ v_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_M \\ v_M \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{r \cdot \partial \varphi} - \frac{v}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{u}{r} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dr \\ r \cdot d\varphi \end{pmatrix} \quad (2.30)$$

Matrica T_p e cila është e përmasave 2x2 paraqet tenzorin e plotë të zhvendosjeve:

$$T_p = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{\partial u}{r \cdot \partial \varphi} - \frac{v}{r} \\ \frac{\partial v}{\partial r} & \frac{\partial v}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{u}{r} \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Ndërsa tenzori i deformimeve do të jetë me shprehjen sipas ekuacionit 2.32:

$$\begin{aligned} T_\varepsilon = \frac{T_p + T_p^T}{2} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \cdot \partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \cdot \partial \varphi} - \frac{v}{r} \right) & \frac{\partial v}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{u}{r} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} & \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} \\ \frac{\gamma_{r\varphi}}{2} & \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.32)$$

Ekuacioni i vazhdueshmërisë nxirret nga forma e përpunuar e tij sepse shuma e sforcimeve normale përfaqëson invariantin e parë të tenzorit të sforcimeve. E shprehur kjo me operatorin e Laplace-it do të kishim sipas ekuacioni 2.33, shprehjen:

$$\nabla^2(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = \nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi}) = 0 \quad (2.33)$$

Ndërsa, sforcimet në koordinata polare sipas Airy-it do të jetë sipas formës vektoriale të paraqitur në 2.34:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

2.4 GJENDJA E SFORCUAR PLANE RADIALE E PASTËR

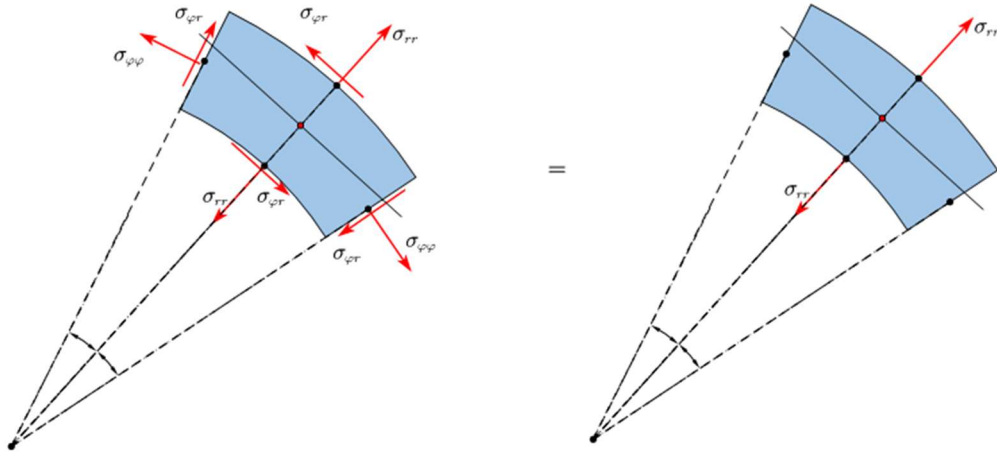


Figura 2.4 Elementi me sforcimet e gjendjes radiale të pastër

Një gjendje e sforcuar plane në koordinata polare, figura 2.4, në të cilën për çdo pikë të planit plotësohen kushtet $\sigma_{rr} \neq 0$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ dhe $\sigma_{r\varphi} = 0$, quhet gjendje e sforcuar plane radiale e pastër. Në qoftë se ekziston një gjendje e tillë, do të kishim këto ekuacione në koordinata polare pra **grup-ekuacionet** e teorisë në koordinata polare do të jenë:

- Ekuacionet e ekuilibrit

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot 0 + \frac{\sigma_{rr} - 0}{r} = \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{\varphi r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2 \cdot \sigma_{\varphi r}}{r} = 0 + \frac{1}{r} \cdot 0 + \frac{2 \cdot 0}{r} \equiv 0$$

- Ekuacionet e deformimit

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\sigma_{rr}}{E_1} + \frac{-\mu_1 \cdot \sigma_{\varphi \varphi}}{E_1} = \frac{\sigma_{rr}}{E_1} = \frac{\partial u}{\partial r}$$

$$\varepsilon_{\varphi \varphi} = \frac{\sigma_{\varphi \varphi}}{E_1} + \frac{-\mu_1 \cdot \sigma_{rr}}{E_1} = \frac{\partial v}{r \cdot \partial \varphi} + \frac{u}{r} = 0$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{2 \cdot (1 + \mu_1) \cdot \sigma_{r\varphi}}{E_1} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial u}{r \cdot \partial \varphi} - \frac{v}{r} = 0$$

- Operatori i Laplace-it $\nabla^2(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi \varphi}) = \nabla^2(\sigma_{rr}) = 0$ nga ku rrjedh që:

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

$$\sigma_{\varphi \varphi} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = 0$$

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 0$$

Analizojmë ekuacionin diferencial të ekuilibrit që ngel në këtë rast $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr}}{r} = 0$. Duke e parë këtë si një ekuacion diferencial me variabla të ndashëm marrim zgjidhjen $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = -\frac{\sigma_{rr}}{r}$. Duke transformuar do të kemi $\frac{\partial \sigma_{rr}}{\sigma_{rr}} = -\frac{\partial r}{r}$. Zgjidhja e këtij ekuacioni diferencial do të jetë: $\ln \sigma_{rr} = -\ln r + \ln A(\varphi) = \ln \frac{A(\varphi)}{r}$. Pra përfundimisht do të kemi këtë zgjidhje të përgjithshme për këtë rast sipas ekuacionit 2.35:

$$\sigma_{rr} = \frac{A(\varphi)}{r} \tag{2.35}$$

ku $A(\varphi)$ është një funksion i çfarëdoshëm i variablit që mungon φ . Ekuacioni i vazhdueshmërisë që përbën zgjidhjen në sforcime merr pamjen sipas ekuacionit 2.36

$$\nabla^2(\sigma_{rr}) = \nabla^2 \left(\frac{A(\varphi)}{r} \right) = 2 \cdot \frac{A(\varphi)}{r^3} - \frac{A(\varphi)}{r^3} + \frac{A''(\varphi)}{r^3} = 0 \tag{2.36}$$

d.m.th. kemi kushtin për përcaktimin e funksionit $A(\varphi)$, ekuacionin përkatës diferencial me zgjidhjen e tij:

$$A(\varphi) + A''(\varphi) = 0 \rightarrow A(\varphi) = C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi \quad (2.37)$$

dhe shprehja përfundimtare e sforcimit me:

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1 \cdot \cos \varphi + C_2 \cdot \sin \varphi}{r}; \sigma_{\varphi\varphi} = \sigma_{r\varphi} = 0 \quad (2.38)$$

Pra, sa më sipër, nga analiza teorike gjetëm shpërndarjen e funksionit të Airy-it i cili plotëson kushtin që ka vetëm sforcime sipas drejtimit radial dhe dy komponentët e tjera mungojnë, dhënë kjo sipas ekuacionit 2.38. Këtë hipotezë të shpërndarjes së sforcimeve do ta konsiderojmë edhe ne, në problemat e përhapjes së valës nga ngarkesat e jashtme. Detyra tjetër është për përcaktimin e konstanteve C_1 dhe C_2 që gjenden nga kushtet e ekuilibrit, të cilat trajtohen në problemet e pykës si në paragrafët në vijim.

Në vijim, do të trajtojmë raste të veçanta të gjendjes së sforcuar në koordinata polare, duke ngritur themelet e metodës së valës për përcaktimin e sforcimeve të çdo pike të elementeve apo konstruksioneve. Rastet e gjendjes së sforcuar të pykës, figura 2.5 (Timoshenko, 1951) dhe (Sadd 2020), mund ta pranojmë gjendje të sforcuar radiale të pastër sepse tek të tre rastet, kushtet statike plotësohen menjëherë dhe konkretisht kemi: $\sigma_{rr} = \frac{C_1 \cdot \cos \varphi}{r}$, $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ dhe $\sigma_{r\varphi} = 0$.

Kushtet në kontur që plotësohen menjëherë janë këto:

- Pika M_1 me koordinata polare $r = r$ dhe $\varphi = -\alpha$ dhe $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ dhe $\sigma_{r\varphi} = 0$.
- Pika M_2 me koordinata polare $r = r$ dhe $\varphi = \alpha$ dhe $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ dhe $\sigma_{r\varphi} = 0$.

2.5 PYKA ME GJYSMËKËNDIN α ME NJË FORCË NORMALE

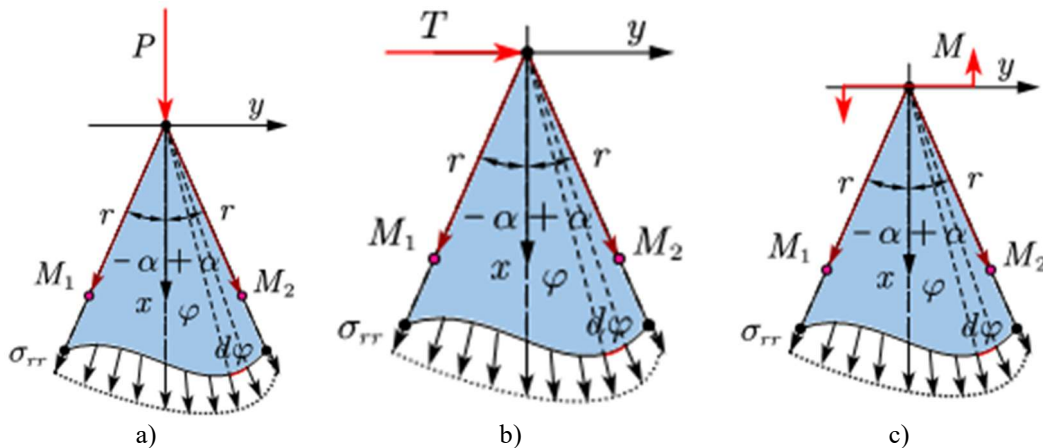


Figura 2.5 Pyka e pafund

a) me gjysmëkënd α dhe forcë shtypëse P, b) me gjysmëkënd α dhe forcë tangjenciale (përkulëse) T, c) me gjysmëkënd α dhe moment përkulës

Ekulibri i copës së vogël me deformime elastike i marrë rreth majës së pykës, ku vepron forca P , figura 2.5 (a), do të shkruhet:

$$\sum F_V = -P - \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{rr} \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi = 0 \quad (2.39)$$

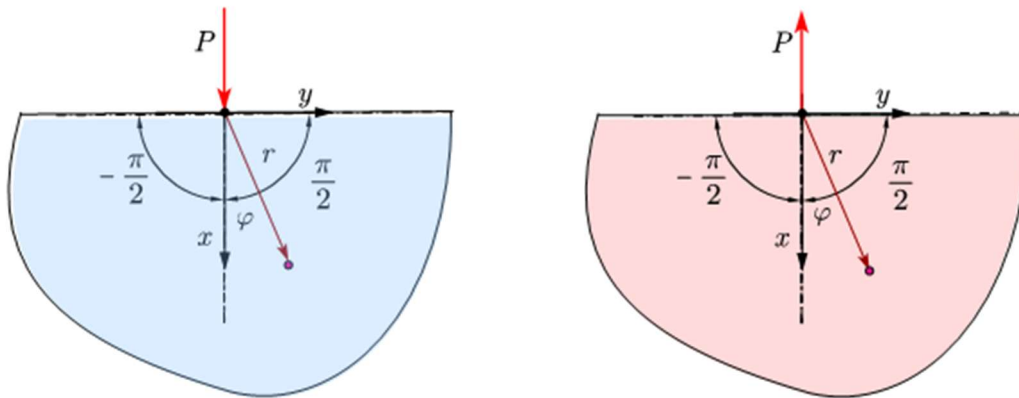
Në këtë mënyrë nxjerrim vlerën e konstantes C_1 e cila në këtë rast është:

$$C_1 = \frac{-P}{\int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos \varphi)^2 \cdot d\varphi} = \frac{-P}{\alpha + \frac{\sin(2 \cdot \alpha)}{2}} = \frac{-2 \cdot P}{2 \cdot \alpha + \sin(2 \cdot \alpha)} \quad (2.40)$$

Zëvendësimi i këndit α në ekuacionin 2.40, sjell edhe rastet e veçanta të shpërndarje së sforcimeve dhënë në tabelën 2.1. Përveç rastit të parë, i trajtuar nga shumë autorë në përhapjen e sforcimeve në gjysmëplan, në këtë punim janë trajtuar gjerësisht edhe tre rastet e tjera të veçanta si rrjedhim i zëvendësimit të këndit α tek ekuacioni 2.40.

Tabela 2.1 Rastet e veçanta të studimit të pykës nën veprimin e forcës P

Rastet	Këndi dhe Forca	Konstantja C_1
1	$\alpha = 90^\circ$ (figura 2.12)	$\frac{\mp 2 \cdot P}{\pi}$
2	$\alpha \cong 0^\circ$ dhe forca P në tërheqje (figura 2.13)	$\frac{P}{2 \cdot \alpha}$
3	$\alpha \approx 180^\circ - pmv$ (figura 2.14)	$\approx \frac{\mp \cdot P}{\pi}$
4	$\alpha = 180^\circ$ (figura 2.15)	$\frac{P}{\pi}$ dhe $-\frac{P}{\pi}$



a)

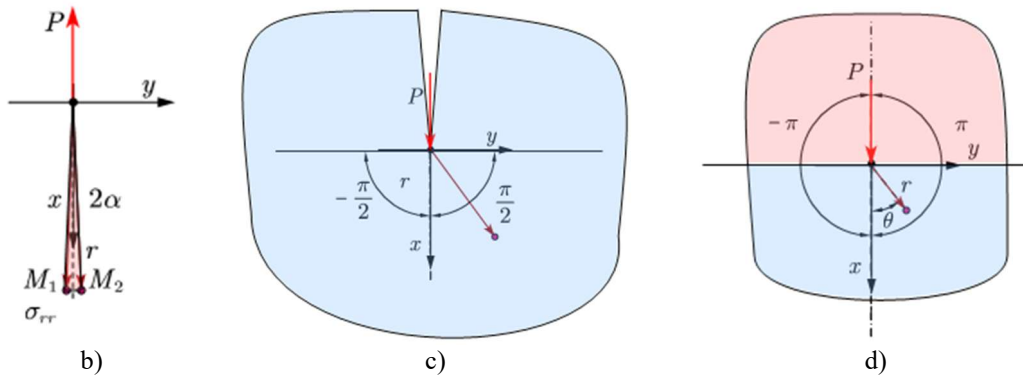


Figura 2.6 Skema të ndryshme llogaritëse të forcës së përqendruar

- a) Skema e llogaritjes për rastin kur $\alpha = 90^\circ$, b) Rasti i dytë, kur konsiderohet si shufër në tërheqje, c) Skema e llogaritjes për rastin kur $\alpha \approx 180^\circ$ – **p.m.v.**, d) Veprimi i forcës në brendësi

- Shohim se kur këndi është i barabartë me $\alpha = 90^\circ$, pavarësisht drejtimit të forcës në shtypje apo në ngjeshje, ky problem kthehet si problemi i Flamant-it, figura 2.6 (a) (**Koça, 1993**) dhe (**Guidugli et al, 2014**), problem i cili zgjidhet në koordinata polare, të trajtuara më sipërm, pra jemi në problemin e Flamant-it për shpërndarjen e sforcimeve në gjysmëplan.
- Për sa i përket formulës së sforcimeve tek rasti i 2, figura 2.6 (b), jemi në rastin kur konsiderohet si një shufër në tërheqje, zëvendësimi i konstantes tek ekuacioni 2.38 do të sjell:

$$\sigma_{rr} = \frac{C_1 \cdot \cos \varphi}{r} = \frac{P}{2 \cdot \alpha} \frac{\cos \varphi}{r} = \frac{P}{2 \cdot \alpha} \frac{1}{r} = \frac{P}{A}$$

Pra si rasti i shufrës në tërheqje për llogaritjen e sforcimeve.

- Në rastin e tretë, figura 2.6 (c), jemi në problemin tipik të përhapjes së të çarës apo mikro-krisjeve që ndodhen në strukturën plane. Ky problem trajtohet gjerësisht në problemin plan të “Teorisë së Elasticitetit Statik dhe Dinamik” (**Murakami, 2016**).
- Në rastin e katërt, kur këndi përfshin $\alpha = 180^\circ$, atëherë do të jemi në rastin e aplikimit të forcës në brendësi të objektit, figura 2.15. Ky rast, është aplikuar dhe ka gjetur zbatim në metodën e valës dhe vlera e konstantes $\frac{P}{\pi}$ (për zonën në tërheqje) dhe $\frac{-P}{\pi}$ (për zonën në shtypje) është konstante që “rregullon” gjendjen e sforcuar të objektit dhe rezultat e tyre janë afuar me realitet (aplikimi i tyre do të shikohet në kapitujt në vijim). Pra siç, shikohet në figurën 2.6 (d), në zonën e kuqe kemi tërheqje nga forca P dhe në zonën blu shtypje.

Këto raste do të jenë bazat për shpërndarjen e sforcimeve (**Koça, et al., 2021**) dhe nga faktori C_1 është përcaktuar madhësia e forcës që do të shpërndahet sidomos në rastet e gjysmëplanit dhe të “masivit”, me dy rastet e veçanta më tipike, në të cilat kemi $C_1 = \frac{2 \cdot P}{\pi}$ dhe $C_1 = \frac{P}{\pi}$ respektivisht.

2.5.1 Shpërndarja e sforcimeve në raste të veçanta në koordinata karteziene me funksionin e Airy-it për forcën normale

Forcën normale, që është një abstraksion, e pranojmë të shpërndarë në një zonë pmv uniformisht siç tregohet në figurën 2.7. Rreth kësaj zone veprimi nëse do të shihet nga afër do të kemi skemën e ngarkimit, si në figurë, e cila do të jetë ekuivalente për llogaritje si tek skema e paraqitur në të djathtë.

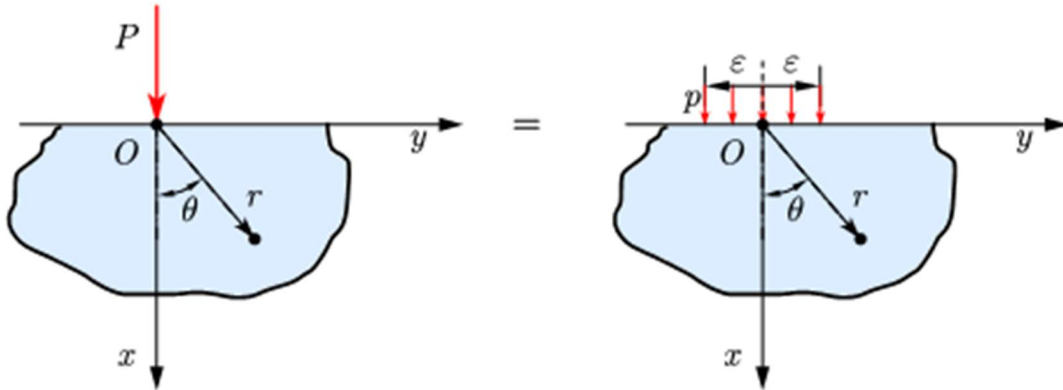


Figura 2.7 Skema e ngarkimit për forcën normale dhe skema ekuivalente

Për këtë zonë do të pranojmë këtë funksion Airy-it në koordinata karteziene për gjysmëplanin në studim:

$$\Phi(x, y) = \frac{P}{\pi} \cdot y \cdot \text{artag} \left(\frac{x}{y} \right) \quad (2.41)$$

Ku $\Phi(x, y)$ funksioni i Airy-it i cili plotëson kushtet e përmendura më sipër. Sforcimet normale dhe tangjenciale do të gjendeshin duke derivuar ekuacionin 2.41 sipas grup ekuacioneve 2.15 dhe këto sforcime do të jenë si në vijim:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{y^2 \cdot x}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{xy} &= \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{y \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Në koordinata polare duke shprehur sipas funksioneve të transformimit si $x = r \cdot \cos \theta$ dhe $y = r \cdot \sin \theta$, ekuacioni 2.41 do të transformohej në ekuacionin 2.43, për shpërndarjen e forcës në këto koordinata:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{-P \cdot r \cdot \sin \theta}{\pi} \cdot \theta \quad (2.43)$$

Si dhe aplikimi i derivateve tek ky funksion i Airy-it dhënë nga ekuacioni 2.43 në ekuacionin 2.34, na rrjedh se sforcimet në këtë sistem koordinativ do të jenë:

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= 0 \\ \sigma_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Për sa i përket zhvendosjeve në sistemet koordinativ respektive do të kemi:

- zhvendosjet në koordinata karteziene

$$\begin{aligned} Eu'(x, y) &= -\frac{P}{\pi} \cdot \left[\ln(x^2 + y^2) - (1 + \nu) \cdot \frac{y^2}{x^2 + y^2} \right] \\ Eu(x, y) &= Eu'(x, y) - Eu(0, d) \end{aligned} \quad (2.45)$$

$$Ev(x, y) = -\frac{P}{\pi} \cdot \left[(1 - \nu) \cdot \operatorname{artag} \left(\frac{y}{x} \right) - (1 + \nu) \cdot \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \right]$$

- zhvendosjet në koordinata polare

$$\begin{aligned} Eu &= -\frac{P}{\pi} \cdot [(1 - \nu) \cdot \theta \cdot \cos \theta + \sin \theta (\ln r^2 - 1 - \nu)] + c \cdot \sin \theta \\ Ev &= -\frac{P}{\pi} \cdot [(1 - \nu) \cdot \theta \cdot \sin \theta - \ln r^2 \cdot \cos \theta] + Ec \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (2.46)$$

2.6 PYKA ME GJYSMËKËNDIN α ME NJË FORCË TANGJENCIALE

Edhe në këtë rast, figura 2.5 (b), që të plotësohen kushtet statike në kontur menjëherë, pranojmë se mund të kemi një gjendje të sforcuar radiale të pastër. Gjithashtu zgjidhja për sforcimet këtë rast do të jetë me $\sigma_{rr} = \frac{C_1 \cdot \sin \varphi}{r}$, dhe dy sforcimet e tjera $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$ dhe $\sigma_{r\varphi} = 0$. Ekuilibri i copës së vogël me deformime elastike i marrë rreth majës, ku vepron forca, do të shkruhet:

$$\begin{aligned}\sum F_H &= T + \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_{rr} \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi = 0 \\ T + \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{C_1 \cdot \sin \varphi}{r} \cdot r \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi &= 0\end{aligned}\tag{2.47}$$

Në këtë mënyrë nxjerrim vlerën e konstantes $C_1 = \frac{-2 \cdot T}{2 \cdot \alpha - \sin(2 \cdot \alpha)}$

2.6.1 Shpërndarja e sforcimeve në raste të veçanta në koordinata karteziene me funksionin e Airy-it për forcën tangjenciale

Rasti i veçantë i pykës me gjysmëkënd α me një forcë tangjenciale është rasti i gjysmëplanit ku kemi gjysmëkëndin prej 90° , figura 2.8. Në këtë rast do të fitojmë ligjësitë përkatëse të shpërndarjes së sforcimeve. Nga teoria e elasticitetit dhe plasticitetit (Koça, 1998) po risjellim këtë funksion Airy-it për rastin tonë sipas ekuacionit 2.48.

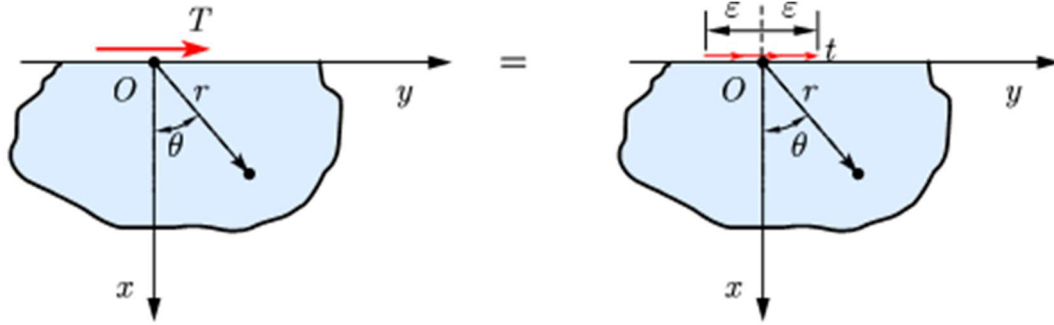


Figura 2.8 Skema për përcaktimin e sforcimeve dhe zhvendosjeve nga forca tangjenciale

Për këtë skemë do të pranojmë:

$$\Phi(x, y) = \frac{T}{\pi} \cdot x \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)\tag{2.48}$$

Dhe pas derivimit të këtij funksioni sipas ekuacioneve 2.15 dhe 2.34 do të kemi këto ekuacione për koordinatat karteziene dhe polare përkatësisht:

- Koordinata karteziene

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{y \cdot x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}\end{aligned}\tag{2.49}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \cdot \partial y} = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{y^2 \cdot x}{(x^2 + y^2)^2}$$

- Koordinata polare

Duke kaluar nga koordinatat karteziiane në koordinata polare për pikën M në studim do të kemi për sa i përket skemës së ngarkesës tangjenciale këtë funksion Airy-it:

$$\Phi(r, \theta) = \frac{T}{\pi} \cdot r \cdot \cos(\theta) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \quad (2.50)$$

Dhe sforcimet sipas drejtimeve polare do të jenë:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2T}{\pi} \cdot \frac{\sin(\theta)}{r}; \quad \sigma_{\theta\theta} = 0; \quad \sigma_{r\theta} = 0 \quad (2.51)$$

Zhvendosjet në rastin e ngarkesës tangjenciale T do të shprehen përkatësisht sipas ekuacionit 2.52

$$\begin{aligned} Eu'(x, y) &= -\frac{T}{\pi} \cdot \left[(1 - \nu) \cdot \tan^{-1} \frac{y}{x} - \frac{(1 + \nu) \cdot x \cdot y}{x^2 + y^2} \right] \\ Eu(x, y) &= Eu'(x, y) - \frac{Eu'(d, d)}{d} \cdot y \\ Ev'(x, y) &= -\frac{T}{\pi} \cdot \left[\ln(x^2 + y^2) - \frac{(1 + \nu) \cdot x^2}{x^2 + y^2} \right] \\ Ev''(x, y) &= Ev'(x, y) + \frac{Eu'(d, d)}{d} \cdot x \\ Ev(x, y) &= Ev''(x, y) - \frac{Eu'(d, d)}{d} \cdot y \end{aligned} \quad (2.52)$$

Në koordinata polare do të kemi:

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{T}{E \cdot \pi} \cdot [(1 - \nu) \cdot \theta \cdot \cos \theta - 2 \cdot \sin \theta \cdot \ln(r)] + u_0 \\ v_r &= -\frac{T}{E \cdot \pi} \cdot [-(1 - \nu) \cdot \theta \cdot \sin \theta - (1 + \nu) \cdot \cos \theta + 2 \cdot \cos \theta \cdot \ln(r)] - \\ &\quad (u_0 \cdot \cos \theta - \omega_0 \cdot r) \end{aligned} \quad (2.53)$$

2.7 ANALIZA E PYKËS ME GJYSMËKËNDIN α ME NJË MOMENT PËRKULËS

Rasti i fundit, si rast i veçantë teorik do të jetë rasti me një çift forcash në kulmin e pykës, figura 2.5 (c). Edhe në këtë rast si tek të tjerat do të bëjmë lëshimet për të gjetur funksionin biharmonik (Koça et al. 2018). Gjendjen e sforcuar do ta pranojmë si fillim polare anti-metrike dhe të marrim funksionin biharmonik të rekomanduar të sforcimeve për këtë rast por me dy konstante. Ekuacioni 2.45 do të transformohej, duke marrë vetëm dy konstante, sipas ekuacionit 2.54

$$\Phi(r) = C_3 \cdot \sin(2 \cdot \varphi) + C_4 \cdot \varphi \quad (2.54)$$

Sforcimet në këtë rast për këtë funksion të Airy-it do të jenë $\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = \frac{-4 \cdot C_3 \cdot \sin(2 \cdot \varphi)}{r^2}$ dhe $\sigma_{\varphi\varphi} = 0$. Për sa i përket sforcimeve të tjera ato do të jenë $\sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{2 \cdot C_3 \cdot \cos(2 \cdot \varphi) + C_4}{r^2} = 0$ nga ku rrjedh se $C_4 = -2 \cdot C_3 \cdot \cos(2 \cdot \alpha)$ dhe sforcimet përkatëse plotësohen automatikisht dhe na sjellin të njëjtën relacion për konstantet C_3, C_4 , kështu që fitojmë shprehjen:

$$\sigma_{r\varphi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = \frac{2 \cdot C_3 \cdot [\cos(2 \cdot \varphi) - \cos(2 \cdot \alpha)]}{r^2} \quad (2.55)$$

Ekulibri i copës ku fillojnë deformimet elastike i marrë rreth majës së pykës do të shprehet me tre ekuacionet e njohura të ekulibrit sipas ekuacionit 2.56.

$$\begin{aligned} \sum F_V &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_{rr} \cdot \sin \varphi + \sigma_{r\varphi} \cdot \cos \varphi) \cdot r \cdot d\varphi = 0 \\ \sum F_H &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_{rr} \cdot \cos \varphi - \sigma_{r\varphi} \cdot \sin \varphi) \cdot r \cdot d\varphi = 0 \\ \sum M_{KP} &= M + \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_{r\varphi} \cdot r) \cdot r \cdot d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (2.56)$$

$$\begin{aligned} M &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} (\sigma_{r\varphi} \cdot r) \cdot r \cdot d\varphi \\ &= - \int_{-\alpha}^{\alpha} \left(\frac{2 \cdot C_3 \cdot [\cos(2 \cdot \varphi) - \cos(2 \cdot \alpha)]}{r^2} \cdot r \right) \cdot r \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Që këndej nxjerrim konstantet e funksionit të Airy-it të tillë që:

$$C_3 = \frac{M}{2 \cdot [\sin(2 \cdot \alpha) - 2 \cdot \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)]}$$

$$C_4 = \frac{M \cdot \cos(2 \cdot \alpha)}{-\sin(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)}$$
(2.57)

Edhe këtu zëvendësimi i këtij gjysmëkëndi, sjell rastet e veçanta. Në rastin e çiftit të forcave në gjysmëplan kemi gjysmëkëndin prej 90^0 , si rast i veçantë i pykës do të fitojmë ligjësitë përkatëse të shpërndarjes së sforcimeve, kurse zhvendosjet do të jenë:

$$Eu'(x, y) = \frac{2M}{\pi} \cdot \left[\frac{y^2 + x^2(2 + \nu)}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$Eu(x, y) = Eu'(x, y) - Eu'(0, d)$$

$$Ev'(x, y) = \frac{2M}{\pi} \cdot \left[\frac{x(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right]$$

$$Ev(x, y) = Ev'(x, y) - \frac{Eu'(d, d)}{d} \cdot x$$
(2.58)

Ku me d është shënuar koordinata e lidhjes në të gjitha rastet e gjysmëplanit.

2.8 RASTI I VEPRIMIT TË NJË FORCE TË ÇFARËDOSHME NË KONTUR

Le të shohim rastin kur në kontur do të veprojë një forcë e çfarëdoshme R . Nga ana skematike do të kemi skemën e paraqitur në figurën 2.9.

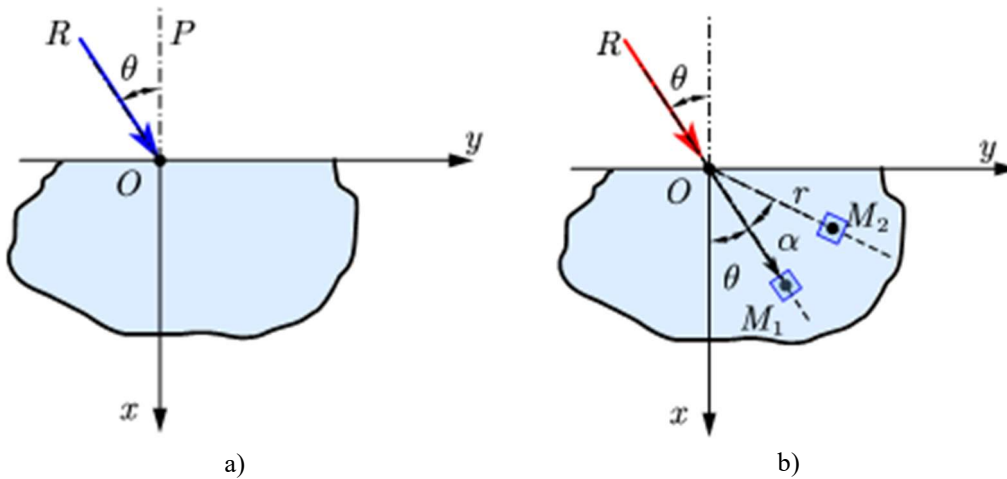


Figura 2.9 Skema e një force në gjysmëplan

a) Skema kur vepron një forcë e çfarëdoshme R , b) Shpërndarja e sforcimeve në drejtime të çfarëdoshme nga forca R

Nëse këtë forcë do ta zbërthejmë sipas dy drejtimeve, figura 2.10, atëherë ky problem do të kthehet në shumatoren të dy problemeve me forca normale **P** dhe tangjenciale **T**. Gjithashtu për të dy këto skema do të kemi këto shpërndarje sforcimesh.

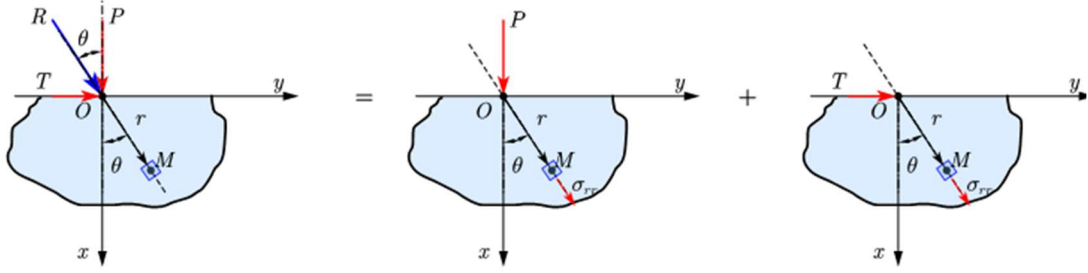


Figura 2.10 Skema llogaritëse për një forcë të pjerrët

Për secilin rast, si për forcën normale dhe për forcën tangjenciale do të kemi këto shpërndarje sforcimesh në një pikë M_1 në koordinata polare.

$$\sigma_{rr}^P(M_1) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r}$$

$$\sigma_{rr}^T(M_1) = -\frac{2 \cdot T}{\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

Për forcat **P** dhe **T**, duke qenë se janë komponente të forcës së çfarëdoshme **R**, ato do të shpreheshin përkatësisht me: $P = R \cdot \cos \theta$ dhe $T = R \cdot \sin \theta$. Atëherë shpërndarja e sforcimit do të ishte:

$$\sigma_{rr}(M) = \sigma_{rr}^P(M) + \sigma_{rr}^T(M) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} - \frac{2 \cdot T}{\pi} \cdot \frac{\sin \theta}{r}$$

$$\sigma_{rr}(M) = -\frac{2}{\pi \cdot r} \cdot (R \cdot \cos^2 \theta + R \cdot \sin^2 \theta) = -\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot r}$$

Pra nga formula duket qartë se shpërndarja e sforcimeve në drejtim të forcës së pjerrët është e lidhur me vetë forcën dhe largësinë e pikës, të cilës i kërkojmë sforcimin. Le të shohim se çfarë ndodhë me shpërndarjen e sforcimeve në një drejtim tjetër nga ai i forcës **R** dmth në një pikë tjetër M_2 , figura 2.19.

Ekuacione e sforcimeve do të jenë:

$$\sigma_{rr}(M_2) = \sigma_{rr}^P(M_2) + \sigma_{rr}^T(M_2) = -\frac{2 \cdot P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta + \alpha)}{r} - \frac{2 \cdot T}{\pi} \cdot \frac{\sin(\theta + \alpha)}{r} =$$

$$= -\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot r} \cdot [\cos \theta \cos(\theta + \alpha) - \sin \theta \sin(\theta + \alpha)] =$$
(2.59)

$$= -\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot r} \cdot \cos[(\theta + \alpha) - \theta] = -\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot r} \cdot \cos \alpha$$

Edhe në këtë rast del se sforcimet në një pikë çfarëdo me një kënd α përkundrejt drejtimit të veprimit të forcës do të jetë me shprehjen sipas ekuacionit 2.59, pra kemi shtesë termin e $\cos \alpha$.

2.9 ZGJIDHJA ANALITIKE E DISKUT NËN VEPRIMIN E DY FORCAVE DREJTË TË KUNDËRTA

Në analizën e bërë në paragrafët e mësipërm, rasti më i përhapur dhe që është analizuar me llogaritje matematikore është rasti i diskut, ku në të veprojnë një sistem forcash ekuivalente me zero ($P, -P$), në drejtimin e çfarëdoshëm, që bashkon dy pikat e aplikimit A dhe B të forcave në kontur, siç tregohet në figurën 2.11. Ideja e “**Metodës se Valës**” e ka zanafillën nga studimi i këtij disku, ndryshe njihet si “Disku i Brazilit” (Sgambitterra et al., 2018) apo të “problemit të Flamant-it” në rastin e një disku rrethor.

Veprimi i forcave ndiqet nga parimi i pavarësisë së tyre, dhe në skemën e treguar në figurën 2.11, shihet se në një pikë të çfarëdoshme të marrë në disk, sforcimet radiale jepen sipas ekuacionit 2.59 për secilën prej tyre. Në rastin e studimit, kemi marrë një pikë të çfarëdoshme në kontur, pikën M , pasi në konturin e diskut nga ana tjetër njohim kushtet statike në kontur $P_j = 0$, treguar në figurën 2.12.

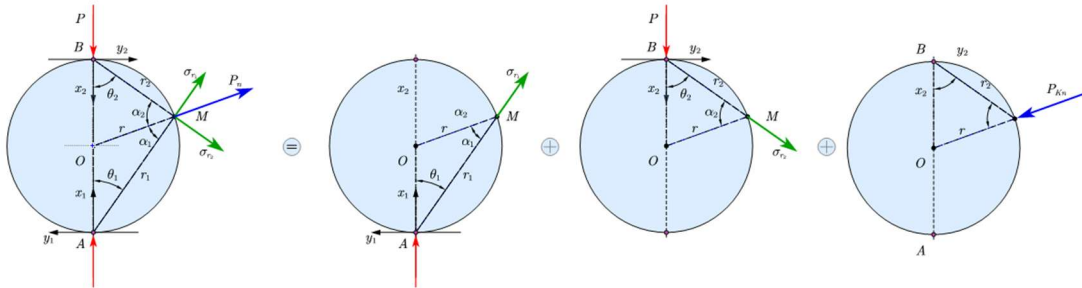


Figura 2.11 Skema llogaritëse e shpërndarjes së sforcimeve në kontur për rastin e parë të studimit (njëlloj si tek rasti i studimit tek Problemi i Flamant-it apo Disku i Brazilit)

Për këto dy forca do të kemi shpërndarjen e sforcimeve në pikën M , sipas dy drejtimeve të rrezeve r_1 dhe r_2 me:

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{r_1}$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{r_2}$$

σ_{r_1} dhe σ_{r_2} , në vijim do t'i quajmë përkatësisht **vala e parë** dhe **vala e dytë**, të shkaktuara nga ngarkesat e jashtme, duke futur kështu konceptin e valës në këtë metodë.

Këto dy valë shpërndahen dhe shkojnë deri në konturin e diskut rrethor. Nga gjeometria e skemës, figura 2.12, nxjerrim se $\frac{r_1}{\cos \theta_1} = 2 \cdot r = D$ dhe $\frac{r_2}{\cos \theta_2} = 2 \cdot r = D$. Kështu që sforcimet radiale të brendshme në pikën M të konturit, duke zëvendësuar marrëdhënien gjeometrike të nxjerrë $\frac{r_1}{\cos \theta_1} = \frac{r_2}{\cos \theta_2} = D$ në ekuacionet e sforcimeve radiale përkatësisht, ato do të transformoheshin në formën:

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{r_1} = -\frac{P}{\pi \cdot D}$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{r_2} = -\frac{P}{\pi \cdot D}$$

Kurse presioni i jashtëm radial ekuilibruet i atij radiali të brendshëm do të jetë:

$$p_{r_1} = \sigma_{r_1} \cdot \cos(\alpha_1) = -\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\alpha_1)$$

$$p_{r_2} = \sigma_{r_2} \cdot \cos(\alpha_2) = -\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\alpha_2)$$

Kështu që në pikën konturore të çfarëdoshme M në drejtimin normal me konturin d.m.th. sipas OM do të veprojë ky presion normal nga jashtë:

$$P_n = p_{r_1} \cdot \cos \alpha_1 + p_{r_2} \cdot \cos \alpha_2 = -\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot (\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_2) = -\frac{P}{\pi \cdot D}$$

$$= -p_K$$

Këtu kemi që $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^\circ$. Kurse presioni nga jashtë në pikën konturore të çfarëdoshme M në drejtimin tangjencial me konturin d.m.th. normal me OM do të jetë:

$$P_t = p_{r_1} \cdot \sin \alpha_1 - p_{r_2} \cdot \sin \alpha_2 =$$

$$= -\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot (\cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_2) = 0$$

Këto presione, të shprehura nga ekuacionet përkatëse, paraqesin **valën e tretë dhe të katërt**, e cila para se të kthehet duhet të plotësojë fillimisht një nga kushtet kryesore në kontur, që të jenë sa ngarkesa e jashtme e dhënë. Në rastin e paraqitur, në konturin e diskut rrethor, nuk kemi ngarkesë të jashtme të shpërndarë në kontur, dhe rrjedhimisht kjo do të jetë edhe kundërvala.

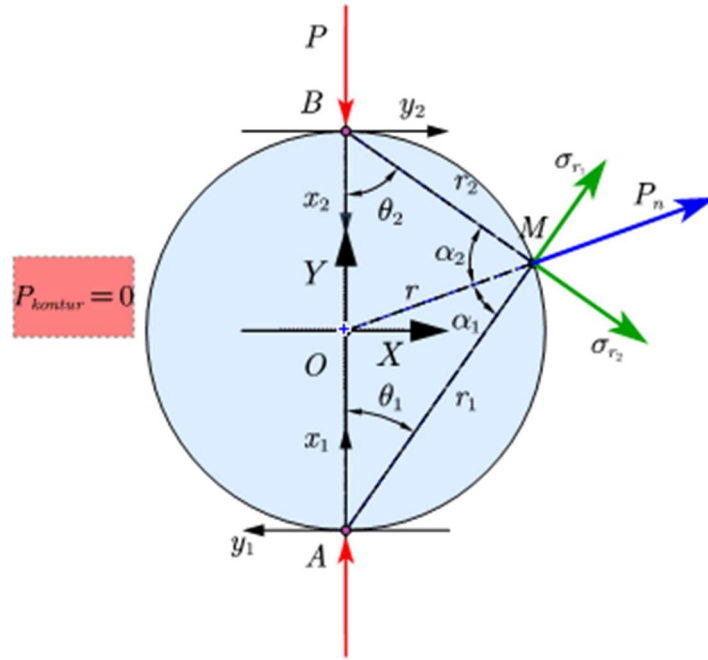


Figura 2.12 Skema llogaritëse e shpërndarjes së sforcimeve në kontur për rastin e parë

Ky është rasti i veçantë i shpërndarjes së presioneve në kontur, në të cilën na rezulton një presion normal me madhësi konstante. Pra vala e tretë dhe e katërt rrjedhimisht, paraqesin një presion hidrostatik me vlerë konstante. Kështu që nga kjo mund të përcaktojmë më pas sforcimet në një pikë të çfarëdoshme të diskut, të cilat janë me grup ekuacionet

$$\begin{aligned}\sigma_{xx_i} &= \sum_{j=1}^2 (\sigma_{rr_{j,i}} \cdot \sin^2(\theta_{j,i})) + p_K \\ \sigma_{yy_i} &= \sum_{j=1}^2 (\sigma_{rr_{j,i}} \cdot \cos^2(\theta_{j,i})) + p_K \\ \sigma_{xy_i} &= \sum_{j=1}^2 (\sigma_{rr_{j,i}} \cdot \sin(2 \cdot \theta_{j,i}))\end{aligned}\tag{2.60}$$

Pra sforcimet normale dhe tangjenciale, do të jenë si sforcime shumë të forcave të jashtme dhe të presionit hidrostatik p_K , shprehur me ekuacionin 2.60. Termi Σ do të konsiderohet si vala primare, ndërsa termat e tjerë do të konsiderohen si kundërvalë.

Në pothuajse të gjithë analizën e literaturës që bëmë nga ana jonë, duke qenë se zgjidhja e sforcimeve është me termin e sforcimeve nga ngarkesa e jashtme dhe nga presioni hidrostatik, nuk ka patur ndonjë analizë të thelluar për sa i përket rasteve të tjera të shpërndarjeve të çfarëdoshme në kontur. Për këtë arsye, në vijim në trajtimin teorik kemi bërë një analizë të funksioneve biharmonike sinusoidale dhe kosinusoidale me mundësinë e aplikimeve të tyre në çdo rast presioni konturor si kundërvalë.

2.10 GAMA E EKUACIONEVE BIHARMONIKE PËR KUNDËRVALËT

Në analizat e mësipërme, përcaktuam funksionet e Airy-it, të tilla që janë biharmonike dhe që plotësojnë kushtin e cituar. Përhapja e valës për rastin teorik të trajtuar në paragrafin 2.9, u morr me ekuacionet përhapjes së sforcimeve, rrjedhimi i analizave matematikore të ekuacioneve të teorisë së elasticitetit në koordinata polare apo karteziane. Megjithatë zgjidhja e mësipërme është një rast i veçantë, i zgjidhjeve më të gjëra, që do trajtohen në kapitujt në vijim. Natyrshëm, lind pyetja se çfarë funksione mund të jenë për kthimin e kundërvalëve nga konturi për të plotësuar kushtet e dhëna, ndaj ajo që ngelet në detyrën e zgjidhjes së këtyre problemeve, si edhe të Metodës së Valës për përcaktimin dhe optimizimin e gjendjes së sforcuar plane, është gjetja e funksioneve të **kundërvalës**, për të plotësuar kushtet në kontur apo kushte të tjera për problemet specifike. Gama e këtyre ekuacioneve sipas autorëve të Teorisë së Avancuar të Elasticitetit (**Timoshenko, 1951**), (**Sadd 2020**), (**Parton et al. 1984**), kërkohet në këto forma funksionesh biharmonike të tilla si $\phi(x, y) = f(r) \cdot \sin(\theta)$ ose $\phi(x, y) = f(r) \cdot \cos(\theta)$. Ekuacioni $f(r)$ do të kërkohet nga ekuacioni biharmonik dhe kemi këto zgjidhje (**Timoshenko, 1950**):

$$f(r) = A \cdot r^3 + B \cdot \frac{1}{r} + C \cdot r + D \cdot r \cdot \log r \quad (2.61)$$

Le ti marrim me radhë të gjitha këto funksione më vete, dhe të gjejmë shpërndarjen e sforcimeve për këto kundërvalë.

2.10.1 Funksionet sinusoidale dhe kosinusoidale të kundërvalës

Në tabelën e mëposhtme tregohen këto funksione dhe shpërndarja e sforcimeve në koordinata polare, si për rastin kur i kemi me përhapje sinusoidale dhe për rastin kur kemi kosinusoidale. Përhapja e sforcimeve gjenden duke derivuar këto funksione në ekuacionin 2.15. Gjithashtu, kemi marrë vetëm rastet kur shpërndarja e valëve do të varet vetëm sipas njërës prej konstantes së shpërndarjes së valës. Pra thënë ndryshe, ose sipas funksionit $A \cdot r^3$, ose sipas B/r , ose sipas $C \cdot r$, ose sipas $D \cdot r \cdot \log r$. Kjo e bën më të lehtë studimin e këtyre **kundërvalëve**. Marrja e dy ose më shumë prej këtyre funksioneve njëherazi në kundërvalë do ta vështirësonte shumë zgjidhjen matematikore të këtij problemi, ndaj në tabelën 2.2 kemi dhënë vetëm rastet kur ka një nga këto kundërvalët.

Tabela 2.2 Funksionet biharmonike dhe shpërndarja e sforcimeve për kundërvalët

Nr.	sinusoidale	kosinusoidale
1	$\phi(x, y) = f(r) \cdot \sin(\theta)$	$\phi(x, y) = f(r) \cdot \cos(\theta)$

$$2 \quad \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \\ -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \end{pmatrix}$$

$$3 \quad \begin{aligned} f(r) &= A \cdot r^3 & f(r) &= A \cdot r^3 \\ \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot A \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ 6 \cdot A \cdot r \cdot \sin(\theta) \\ -2 \cdot A \cdot r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 \cdot A \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ 6 \cdot A \cdot r \cdot \cos(\theta) \\ 2 \cdot A \cdot r \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4 \quad \begin{aligned} f(r) &= B/r & f(r) &= B/r \\ \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \sin(\theta) \\ \frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \cos(\theta) \\ \frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \cos(\theta) \\ -\frac{2 \cdot B}{r^3} \cdot \sin(\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$5 \quad \begin{aligned} f(r) &= C \cdot r & f(r) &= C \cdot r \\ \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$6 \quad \begin{aligned} f(r) &= D \cdot r \cdot \log r & f(r) &= D \cdot r \cdot \log r \\ \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{D \cdot \sin(\theta)}{r} \\ \frac{D \cdot \sin(\theta)}{r} \\ -\frac{D \cdot \cos(\theta)}{r} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{r\varphi} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{D \cdot \cos(\theta)}{r} \\ \frac{D \cdot \cos(\theta)}{r} \\ \frac{D \cdot \sin(\theta)}{r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

KAPITULLI 3

METODA E VALËS ANALITIKE

3 BAZA TEORIKE E METODËS KËRKUESE

Në problemet plan në ambientin elastik dhe diskutimi mbi to në aspektin teorik, u fut si koncept përhapja e sforcimeve si valë, duke hedhur kështu për herë të parë një metodë tjetër për përcaktimin e gjendjes së sforcuar dhe patjetër duke hapur rrugën për optimizimin nëpërmjet metodave ekzistuese ose duke i kombinuar (hibride). Por natyrisht, do duhet që këto zbatime të ishin në objekte konkrete dhe të “kapshëm” nga inxhinierët konstruktor e më gjerë. Në figurën 3.1, janë sjellë disa raste të ndryshme nga realiteti për përcaktimin e gjendjes së sforcuar në këto elemente dhe nëpërmjet kësaj metode. Këto raste gjithashtu janë sjellë edhe në mënyrë skematike për t’u analizuar më pas me këtë metodë.

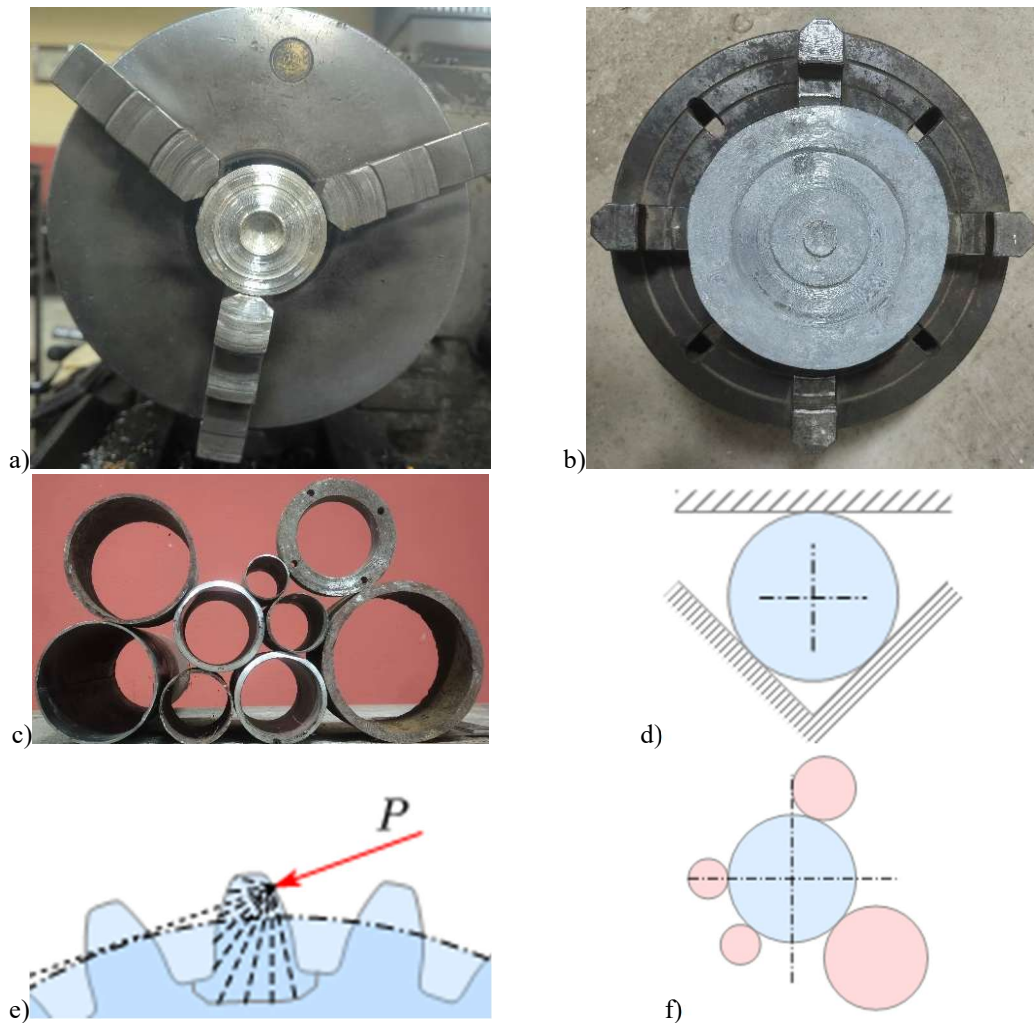


Figura 3.1 Skema të ndryshme të gjendjes të sforcuar në objekte studimi

- a) Kapja e një lingote në mandrinon me tre nofulla për përpunim mekanik, b) Kapja e një lingote në mandrinon me katër nofulla për tornim për përpunim mekanik, c) Rasti i magazinimit të lingotave apo tubacioneve, d) Kapja e disqeve në prizma, e) Ngarkesa në dhëmbët e rrotave, f) Skema e granulave

Në figurat e mësipërme janë sjellë disa prej këtyre rasteve, ku mund të përmendim diskun e kapur me mandrinon me nofulla kapëse për përpunime të mëtejshme mekanike, figura 3.1(a) dhe (b), apo rastet e prizma mbështetës të tyre, sidomos në proceset e frezimit, figura 3.1 (c), ku sipas mënyrës dhe mundësisë së kapjes së tyre kemi pozicione të shumta të pikave të kontaktit (raste që për analizën e **MV**), janë trajtuar gjerësisht në këtë kapitull. Raste të tjera mund të përmendim gjendjen e sforcuar të dhëmbit të rrotës me dhëmbë, qofshin këto me dhëmbë të drejtë apo të pjerrët, figura 3.1 (e) apo për raste të tjera studimi, mund të përmendim edhe problemat ku ngarkesa në cilindrat shkaktohen nga cilindra të tjerë në kontakt, figura 3.1 (c) ose siç janë rastet e elementeve me përmasa të vogla (granula), figura 3.1 (f), ku secila granulë është në kontakt me disa granula të tjera dhe përcaktimi i gjendjes së sforcuar në të bëhet pak i vështirë. Duke qenë se në përfundim të kapitullit 2, futëm për herë të parë konceptin e **MV**, valë primare dhe kundërvale, atëherë këtu do të bëjmë një analizë më të thelluar, sidomos të termave të valëve dhe kundërvaleve dhe për të dhënë bazën numerike të metodës dhe algoritmin përkatës.

3.1 METODA KËRKUESE NUMERIKE DHE ENERGJETIKE

Ideja e metodës së re kërkuese është konceptuar nga problemi plan i Flamant-it apo disku i Brazilit dhe shpërndarjes së sforcimeve të trajtuar në kapitullin 2, por në një hapësirë me të mëdha nga fusha e kërkimit të funksioneve biharmonike dhe numerike, si bazë e metodës së kundërvales dhe më gjerë. Fillimisht për efekt të studimit të mëtejshëm do të bëjmë përcaktimin e objektit të studimit, duke mbajtur në të gjitha rastet të njëjtat përmasa dhe karakteristika të materialit dhe më pas me analizën teorike dhe praktike të këtij objekti. Për këtë, le të marrim konkretisht një objekt studimi, rasti i figurës 3.1(a) dhe (b) i skematizuar tani në një disk, i cili përkon me rastin e studimit të gjendjes së sforcuar plane. Kështu që analiza e shpërndarjeve të sforcimeve, formulat përkatëse të nxjerra nga Teoria e Elasticitetit, do të përdoren në bazën teorike të Metodës së Valës, për ta ndërtuar atë dhe më pas për ta aplikuar më gjerë në objekte të ndryshme studimi.

3.1.1 Objekti i studimit i metodës

Për objektin e studimit të treguar në figurën 3.2, do të kemi këto përcaktime paraprake të paraqitura edhe në tabelën 3.1. Disku është rrethor homogjen me rreze $r = 25 \text{ mm}$ dhe me trashësi $t = 1 \text{ mm}$. Për sa i përket materialit kemi marrë çelik të markës S275, për ta krahasuar më pas me analizën që do të bëhet me Metodën e Elementëve të Fundëm, si një metodë krahasimi dhe vlerësimi me të vërtetën. Karakteristikat e përmasave dhe të materialit të objektit studimor për bazën teorike të **MV** janë dhënë në tabelën 3.1.

Tabela 3.1 Karakteristikat e përmasave dhe të materialit të objektit në studim

Përmasat	Materiali
Rrezja: $r = 25 \text{ mm}$	Çelik: S275
Trashësia: $t = 1 \text{ mm}$	Moduli i Elasticitetit: $E = 210 \cdot GPa$
	Koeficienti i Puasonit: $\nu = 0.3$

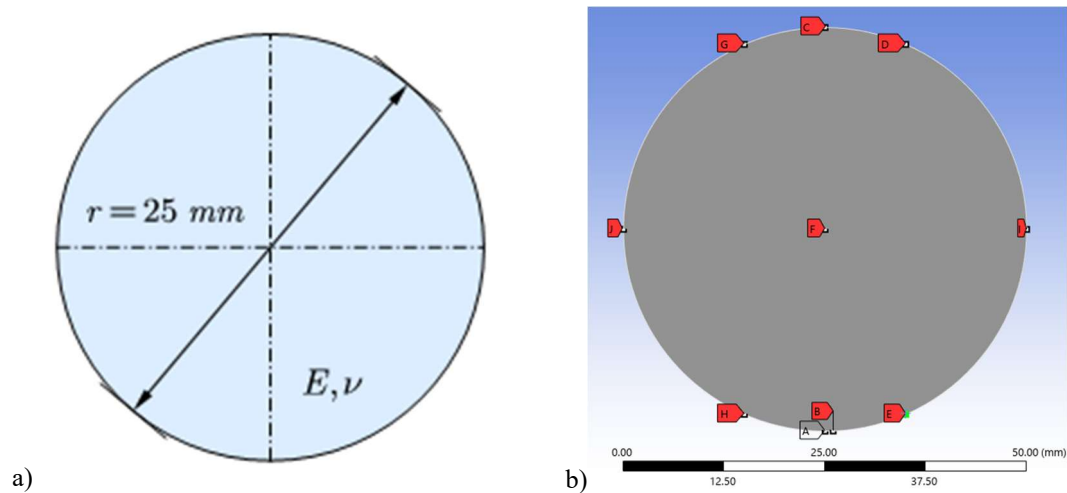


Figura 3.2 Disku rrethor si objekt studimi i metodës

a) Karakteristikat e objektit studimor për metodën e re optimizuese, b) Pikat në disk dhe ndarja në rrjetë me metodën e elementëve të fundëm

3.1.2 Raste skemash ngarkimi të objektit studimor

Mbi këtë objekt do të marrim në konsideratë, pothuajse në të gjitha rastet, veprimin e sistemit të forcave ekuivalente me zero (Sulejmani et al, 2024). Marrja parasysh e këtyre forcave ekuivalente me zero, na dëshmon se disku do të jetë në ekuilibër, dhe nuk do të kemi nevojë për veprimet fillestare të gjetjes së reaksioneve apo pozicionimin e lidhjeve kur t'i krahasojmë rezultatet me Metodën e Elementëve të Fundëm (Sulejmani et al. 2023), megjithëse ky konkluzion do të dalë edhe nga analiza me MEF. Në rastet në vijim, do të trajtojmë skema të ndryshme të këtyre forcave mbi këtë disk dhe për krahasimin e këtyre rezultateve me metodën e elementëve të fundëm kemi dhënë në formë tabelore pikat e studimit në diskut, tabela 3.2. Po kështu këto pika janë treguar edhe në figurën 3.2 (b), të ndërtuar për analizën me MEF dhe MV njëkohësisht, për t'i krahasuar dhe vlerësuar këto dy metoda me njëra tjetrën.

Tabela 3.2 Pikat e studimit në disk

Nr.	Pika	Koordinata X (mm)	Koordinata Y (mm)
1	A	0	-25
2	B	1	-25
3	C	0	25
4	D	10	22.9
5	E	10	-22.9
6	F	0	0
7	G	-10	22.9
8	H	-10	-22.9
9	I	25	0
10	J	-25	0

Pozicionet e këtyre pikave të treguar në tabelën 3.2, me koordinatat përkatëse të tyre janë paraqitur në figurën 3.2 (b).

3.2 ZGJIDHJA ANALITIKE E DISKUT NËN VEPRIMIN E DY FORCAVE DREJTË TË KUNDËRTA, RASTI I PËRGJITHSHËM

Në kapitullin 2, paragrafin 2.9, u dha një analizë e thjeshtë e një rasti të veçantë të diskut nën veprimin e dy forcave drejtë të kundërta që veprojnë diametralisht. Zgjidhjet analitike dhe eksperimentale janë dhënë nga një sërë autorësh të cilët i kemi cituar në kapitullin 2, gjatë rishikimit të literaturës. Nëse shohim figurën 3.1, 3.2 dhe 3.4, raste të ndryshme kombinimi të këtyre forcave drejtë të kundërta janë të shumta. Në vijim do të analizojmë rastet kur mbi këtë disk vepron një sistem forcash ekuivalente me zero ($P, -P$), sipas një korde, që bashkon dy pikat e aplikimit D dhe E të forcave në kontur. Skema e veprimit të këtyre forcave është treguar në figurën 3.4. Koordinatat e pikave D dhe E, jepen në tabelën 3.2, për rastin 4 dhe 5. Fillimisht do të trajtojmë në mënyrë analitike këtë problem duke gjetur funksione biharmonike nga familja e funksioneve të Airy-it, të trajtuara gjerësisht në kapitullin 2, të cilët do të japin zgjidhjet dhe më pas kontrolli nëpërmjet **MEF** të shpërndarjes së sforcimeve në drejtimet sipas koordinatave apo edhe në kontur. Duke qenë se do të fusim konceptin e metodës së valës, pranojmë se secila ngarkesë do të “fillojë” dhe do të sillet si shpërndarja e valës në një mjedis të caktuar homogjen. E kësaj natyre do të konsiderohet edhe shpërndarja e sforcimeve, vetëm se ndryshimi me shpërndarjen e valëve në një mjedis (p.sh. valët në fluid), me këto raste është që **koha** do të jetë e “ngrirë” dhe do të ndajë **vetëm** veprimin e ngarkesave nga njëra-tjetra (princi i pavarësisë së veprimit të ngarkesave), pra nuk do të jetë dinamike. Koncepti i kohës këtu do të jetë, hap pas hapi i lëshimit të ngarkesës, e njëjlojtë si tek principi i zhvendosjeve virtuale trajtuar në Mekanikën Teknike.

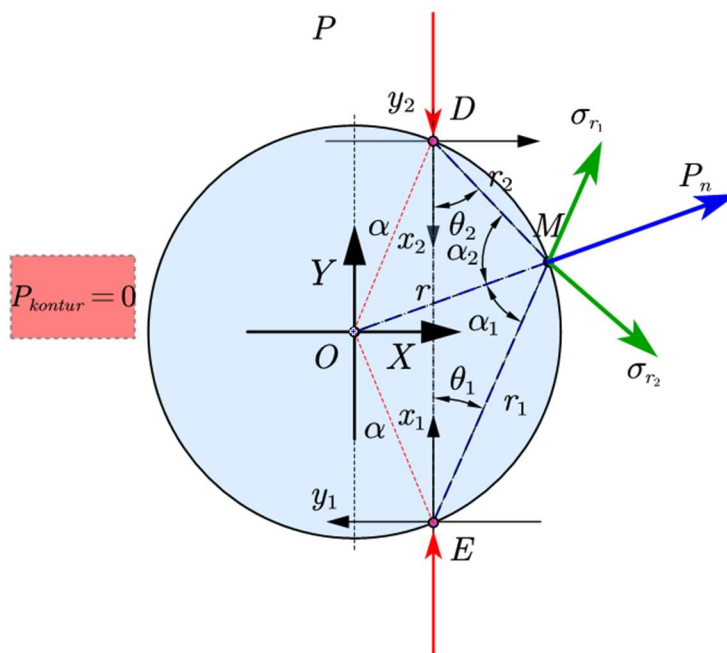


Figura 3.3 Skema e forcave ekuivalente me zero që veprojnë sipas kordës DE

Sic shihet nga figura 3.3, veprimet e këtyre ngarkesave janë të pavarura, por ajo që i lidh këto është që në kontur nuk kemi ngarkesë të jashtme, e dhënë me kushtin në kontur që $P_{kontur} = 0$. Rrjedhimisht presioni apo sforcimet shumare normale dhe tangjenciale në kontur janë të barabarta me zero. Për këto dy forca dhe për diskun do të kemi këtë tabelë të dhënash, e shprehur kjo në formë matricore sipas ekuacionit 3.1

$$Tabela_{pikave} = \begin{pmatrix} 1 & 270 \cdot deg + \alpha & 0 & 1 \\ 2 & 90 \cdot deg - \alpha & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Nga kjo tabelë nxjerrim koordinatat e pikave ku veprojnë forcat për $i = 2$ (numri i pikave) dhe nga matrica e këndeve të pozicionit të këtyre dy pikave $\varphi = \begin{pmatrix} 270 \cdot deg + \alpha \\ 90 \cdot deg - \alpha \end{pmatrix}$, ku këndi α lihet variabël, për të marrë të gjitha rastet e mundshme të forcave sipas pozicionit të kordës DE.

Koordinatat atëherë do të jenë të tilla: $x_{p_i} = r_R \cdot \cos(\varphi_i)$ dhe $y_{p_i} = r_R \cdot \sin(\varphi_i)$, ku x_{p_i} dhe y_{p_i} koordinatat në sistemin global koordinativ OXY sipas akseve OX dhe OY respektivisht dhe $r_R = 25 \text{ mm}$ rrezja e diskut në studim. Këtu me indeks “ i ” kemi indeksin e forcave 1 dhe 2 respektivisht në pikën E dhe D. Komponentët e vektorëve të forcave që veprojnë në këto dy pika nga tabela e të dhënave do të jenë: $P_x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dhe $P_y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Pra forcat janë forca vertikale, të dyja sipas drejtimit të njëra-tjetrës, në kordën DE, që rezultojnë ekuivalente me zero si sistem. Nga këto komponente nxjerrim forcën totale që vepron në kontur:

$$P_i = \sqrt{Px_i^2 + Py_i^2} \quad (3.2)$$

Duke qenë se forcat janë sipas kordës DE, atëherë këndi që formon drejtimi i forcave me normalen e konturit do të jetë i barabartë me αs_i i tillë:

$$\alpha s_i = \arcsin\left(\frac{x_{p_i} \cdot Py_i - y_{p_i} \cdot Px_i}{r_R \cdot P_i}\right) \quad (3.3)$$

Matrica e rrotullimit për çdo forcë përkatësisht do të jepet sipas ekuacionit 3.4

$$R_i = \begin{pmatrix} \frac{Px_i}{P_i} & \frac{Py_i}{P_i} \\ -\frac{Py_i}{P_i} & \frac{Px_i}{P_i} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

që për të dy forcat e studimit do të kemi $R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dhe $R_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Në funksion të këndit α të dhënë në tabelën e pikave, gjatësia e kordës DE që do të na duhet për të përcaktuar më pas presionin e jashtëm nga këto forca do të jetë me relacionin $DE = 2 \cdot r_R \cdot \cos \alpha = 45.825 \text{ mm}$.

Le të shohim shpërndarjen e sforcimeve në pikën M, sipas dy drejtimeve të rrezeve r_1 dhe r_2 si rrjedhim i ekuacionit 2.59 dhe konkretisht do të kishim:

$$\sigma_{r_1} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{r_1} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{r_2} = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{r_2} \quad (3.6)$$

Ekuacionet 3.5 dhe 3.6, janë përkatësisht **vala e parë** dhe **vala e dytë primare**, të shkaktuara nga ngarkesat e jashtme. Këto dy valë shpërndahen dhe shkojnë deri në konturin e diskut rrethor. Nga gjeometria e skemës, duke ditur se po realizojmë zgjidhjen analitike të problemit nxjerrim marrëdhëniet, $\alpha_1 + \theta_2 = \frac{\pi}{2}$ dhe $\alpha_2 + \theta_1 = \frac{\pi}{2}$, sepse mbështeten në harkun prej 180 gradësh. Si edhe $\alpha_1 + \theta_2 + \alpha_2 + \theta_1 = \pi$ nga mbledhja e tyre. Nga teorema e sinusit për trekëndëshin $\triangle DEM$ shkruajmë:

$$\frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_1} = \frac{DE}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \quad (3.7)$$

Dhe pas zëvendësimit, i transformojmë këto relacione në relacione më të përshtatshme sipas ekuacionit 3.8:

$$\frac{r_1}{\cos \alpha_1} = \frac{r_2}{\cos \alpha_2} = \frac{DE}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} = \frac{DE}{\sin(\theta_2 + \theta_1)} = D \quad (3.8)$$

Për arsye se kemi relacionet gjeometrike $D \cdot \cos(\alpha_2) = r_2$ dhe $D \cdot \cos(\alpha_1) = r_1$. Zëvendësimi i këtyre relacioneve të nxjerra nga ekuacioni 3.4 në ekuacionin 3.2, na sjell këtë presioni të jashtëm radial ekuilibruet i atij radiali të brendshëm, sipas ekuacioneve 3.5 dhe 3.6:

$$p_{r_1} = \sigma_{r_1} \cdot \cos(\alpha_1) = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_1)}{r_1} \cdot \cos(\alpha_1) \quad (3.9)$$

$$p_{r_2} = \sigma_{r_2} \cdot \cos(\alpha_2) = -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{r_2} \cdot \cos(\alpha_2) \quad (3.10)$$

Kështu që në pikën konturore të çfarëdoshme M në drejtimin normal me konturin d.m.th. sipas OM do të veprojë ky presion normal nga jashtë:

$$P_n = p_{r_1} \cdot \cos \alpha_1 + p_{r_2} \cdot \cos \alpha_2 = VP_{N1} + VP_{N2} \quad (3.11)$$

Ku VP_N dhe VP_{N2} – **vala e primare normale** nga forcat 1 dhe 2. I njëjti transformim matematikor do të bëhet edhe për presionin tangjencial nga jashtë, i cili do të jetë:

$$P_t = p_{r_1} \cdot \sin \alpha_1 - p_{r_2} \cdot \sin \alpha_2 = VP_{T1} + VP_{T1} \quad (3.12)$$

Ku VP_T dhe VP_{T2} – **vala e primare tangjenciale** nga forcat 1 dhe 2.

Ekuacionet 3.11 dhe 3.12, paraqesin ekuacionet e valëve primare normale dhe tangjenciale në kontur nga ngarkesat e jashtme. Paraqitja grafike e tyre shpreh më mirë nga ana vizuale konceptin e valës për të cilën po emërtohet edhe metoda. Për këtë arsye, po e ndajmë perimetrin e diskut në studim në pika dhe për secilën prej tyre do të gjejmë këto shpërndarje. Numri i ndarjeve për këtë rast studimi është pranuar i barabartë me $ndarjet = 360$, për të nxjerrë rezultate sa më afër realitetit të shpërndarjes së sforcimeve në të gjithë diskun. Atëherë “hapi” për përcaktimin e pothuajse të gjithë parametrave të tjerë të nevojshëm për algoritmin e metodës do të jetë sipas:

$$k_f = \frac{360}{ndarjet} = 1 \quad (3.13)$$

Për numër ndarjesh nga $i = 1, 2 \dots (ndarjet + 1)$ do të kemi këndet e tyre në formë vektoriale, $\varphi(i) = k_f \cdot (i - 1) \cdot deg$. Koordinatat e pikave të këtij konturi do të jenë të tilla që $x_i = r_R \cdot \cos(\varphi_i)$ dhe $y_i = r_R \cdot \sin(\varphi_i)$. Secila prej forcave do të japë kontributin e saj në pikat konturore duke u shpërndarë forcat e tyre në ngarkesë presioni radial dhe rrezja e secilës forcë në pikën konturore do të jetë,

$$rr_{j,i} = \sqrt{(xx_{j,i})^2 + (yy_{j,i})^2} \quad (3.14)$$

ku $rr_{j,i}$ është rrezja nga forca në pikën konturore ndërsa $xx_{j,i}$ dhe $yy_{j,i}$ koordinatat relative e këtyre pikave që jepen si në vijim me barazimin matricor, ekuacioni 3.15.:

$$\begin{pmatrix} xx_{j,i} \\ yy_{j,i} \end{pmatrix} = R_j \cdot \begin{pmatrix} x_i - xp_j \\ y_i - yp_j \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Nga analiza numerike, për shkak të ndarjeve të shumta, rastis që për rreze shumë afër zero, kemi shmangie të presioneve nga realiteti. Për këtë arsye kemi studiuar zonën rreth kësaj pike, e cila në fakt është zona e Sant-Venant-it. Këtë zonë e kemi “anashkaluar” duke ndërtuar një algoritëm për t’u larguar nga zona kur rrezja është e vogël dhe i afrohet zeros, që nga formula e sforcimeve na del raporti me të infinit. Këto rreze do të zgjedhim me relacionin sipas ekuacionit 3.16

$$ra_{j,i} = \begin{cases} 10^{10} & rr_{j,i} < 10^{-10} \\ rr_{j,i} & \text{përndryshe} \end{cases} \quad (3.16)$$

Paraqitja grafike e $1/ra_{j,i}$ jepet si në figurën 3.4, të cilën e kemi quajtur “zona plastike e Sant-Venant-it”.

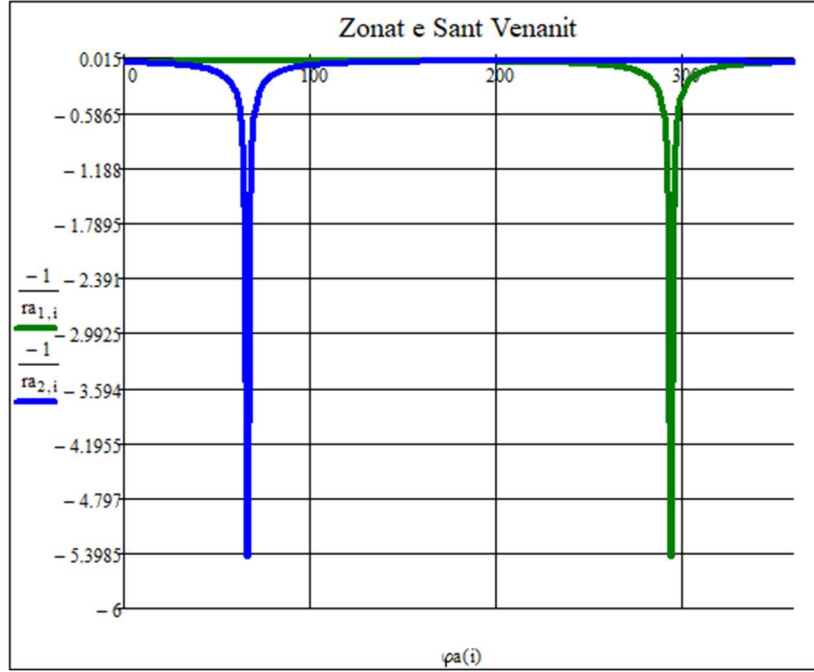


Figura 3.4 Paraqitja grafike e zonës së Sant-Venant-it

Secila forcë do të ketë këndin e hapjes së kësaj valë dhe, me përcaktimet e mësipërme dhe nga skema e këtij rasti, ky kënd do të jetë:

$$\theta_{j,i} = \begin{cases} \text{atan}\left(\frac{yy_{j,i}}{xx_{j,i}}\right) & n. q. s \ xx_{j,i} > 0 \\ \pi + \text{atan}\left(\frac{yy_{j,i}}{xx_{j,i}}\right) & n. q. s \ xx_{j,i} < 0 \\ \frac{\pi}{2} - \alpha s_i & \text{përndryshe} \end{cases} \quad (3.17)$$

dhe $\alpha_{j,i} = \alpha_{s,i} - \theta_{j,i}$. Përcaktimet e mësipërme në grup formulat 3.1-3.4 dhe 3.13 – 3.17, janë përcaktime të domosdoshme për ndërtimin e algoritmit të metodës dhe më pas me shpërndarjen e këtyre ngarkesave, si valë e parë në kontur. Shpërndarja e tyre, mund të bëhet në dy mënyra vizuale, rreth diskut dhe me perimetër të shpalosur.

3.2.1 Shpërndarja e valëve primare në kontur nga ngarkesat e jashtme

Ekuacionet 3.9-3.12, përfaqësojnë ligjësinë e shpërndarjes së sforcimeve radiale dhe në një pikë të çfarëdoshme në kontur presionin normal dhe tangjencial. Duke patur këto shprehjen në rastin e përgjithshme për çdo forcë, me sforcimin radial sipas, $\sigma r_{j,i} =$

$\frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot r_{a,j,i}} \cdot \cos(\theta_{j,i})$ dhe rrjedhimisht ligjësia e shpërndarjes së presionit sipas $pr_{j,i} = \sigma r_{j,i} \cdot \cos(\alpha_{j,i})$, do të kemi presionin normal dhe tangjencial në kontur me formulën: $p_{Normal_i} = \sum_{j=1}^2 (pr_{j,i} \cdot \cos(\alpha_{1,i}))$ dhe $p_{Tangencial_i} = \sum_{j=1}^2 (pr_{j,i} \cdot \sin(\alpha_{1,i}))$, ndërsa presioni i plotë me: $p_{Plote_i} = \sqrt{p_{Normal_i}^2 + p_{Tangencial_i}^2}$ (figura 3.6).

PNormal _i =		PTangencial _i =		Pplote _i =	
	1		1		1
1	-0.011669	1	0	1	0.011669
2	-0.011669	2	0	2	0.011669
3	-0.011669	3	0	3	0.011669
4	-0.011669	4	0	4	0.011669
5	-0.011669	5	0	5	0.011669
6	-0.011669	6	0	6	0.011669
7	-0.011669	7	0	7	0.011669
8	-0.011669	8	0	8	0.011669
9	-0.011669	9	0	9	0.011669
10	...	10	...	10	...

Figura 3.5 Presioni në kontur pas veprimit të forcës së parë dhe të dytë, respektivisht vala e parë dhe vala e dytë.

Shohim se presioni normal është madhësi konstante me vlerën **-0.011669**, e cila del edhe nga analiza matematikore pas transformimit të ekuacionit 3.11 si në vijim.

$$\begin{aligned}
 P_n &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(\theta_1)}{r_1} \cos^2 \alpha_1 + \frac{\cos(\theta_2)}{r_2} \cos^2 \alpha_2 \right) = -\frac{2P}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(\theta_1)}{D} \cos \alpha_1 + \right. \\
 &\quad \left. \frac{\cos(\theta_2)}{D} \cos \alpha_2 \right) = -\frac{2P}{\pi D} \cdot (\cos(\theta_1) \cos \alpha_1 + \cos(\theta_2) \cos \alpha_2) = -\frac{2P}{\pi D} \cdot \\
 &\quad (\cos(\theta_1) \sin \theta_2 + \cos(\theta_2) \sin \theta_1) = -\frac{2P}{\pi D} \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = -\frac{2P \cdot DE}{\pi D^2}
 \end{aligned} \quad (3.18)$$

I njëjti transformim matematikor do të bëhet edhe për presionin tangjencial nga jashtë, i cili do të jetë pas transformimit të ekuacionit 3.12 dhe konkretisht:

$$\begin{aligned}
 P_t &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \left(\frac{\cos(\theta_1)}{r_1} \cdot \cos(\alpha_1) \cdot \sin \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \frac{\cos(\theta_2)}{r_2} \cdot \sin \alpha_2 \right) = -\frac{2P}{\pi} \cdot \\
 &\quad \left(\frac{\cos(\theta_1)}{D} \cdot \sin \alpha_1 - \frac{\cos(\theta_2)}{D} \cdot \sin \alpha_2 \right) = -\frac{2P}{\pi D} \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \sin \alpha_1 - \cos(\theta_2) \cdot \\
 &\quad \sin \alpha_2) = -\frac{2P}{\pi D} \cdot (\cos(\theta_1) \cdot \cos \theta_2 - \cos(\theta_2) \cdot \cos(\theta_1)) = 0
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

Presioni tangjencial në kontur nga llogaritjet del që është i barabartë me zero. Këto dy presione, normale dhe tangjenciale, të cilat nga kushti fillestar i dhënë nuk janë, do të duheshin të balancoheshin me një valë të kundërt (**kundërvalë**), të cilat do të jepen

në vijim në paragrafët e mëposhtëm. Në grafikët 3.6 jepen pamje të qarta të këtij presioni konturor, ku me ngjyrë të **kuqe** tregohet disku me rreze 25 mm , ndërsa me ngjyrë **blu** tregohen presionet përkatëse, të cilat janë të “zmadhuara” me shkallë për t’u bërë vizualisht të dukshme. Edhe në këto pamje dallohet madhësia konstante e tyre në të gjithë konturin.

Deri këtu jemi si në rastin e kapitullit 2, por për ta bërë me të dukshme valën e përhapjes së këtyre ngarkesave, e kemi prerë perimetrin e disku dhe kemi bërë shpalosjen e valëve në aks. Shpalosja e tyre na tregon qartë natyrën valore të këtyre presioneve dhe ligjësitë e tyre sinusoidale apo kosinusoidale.

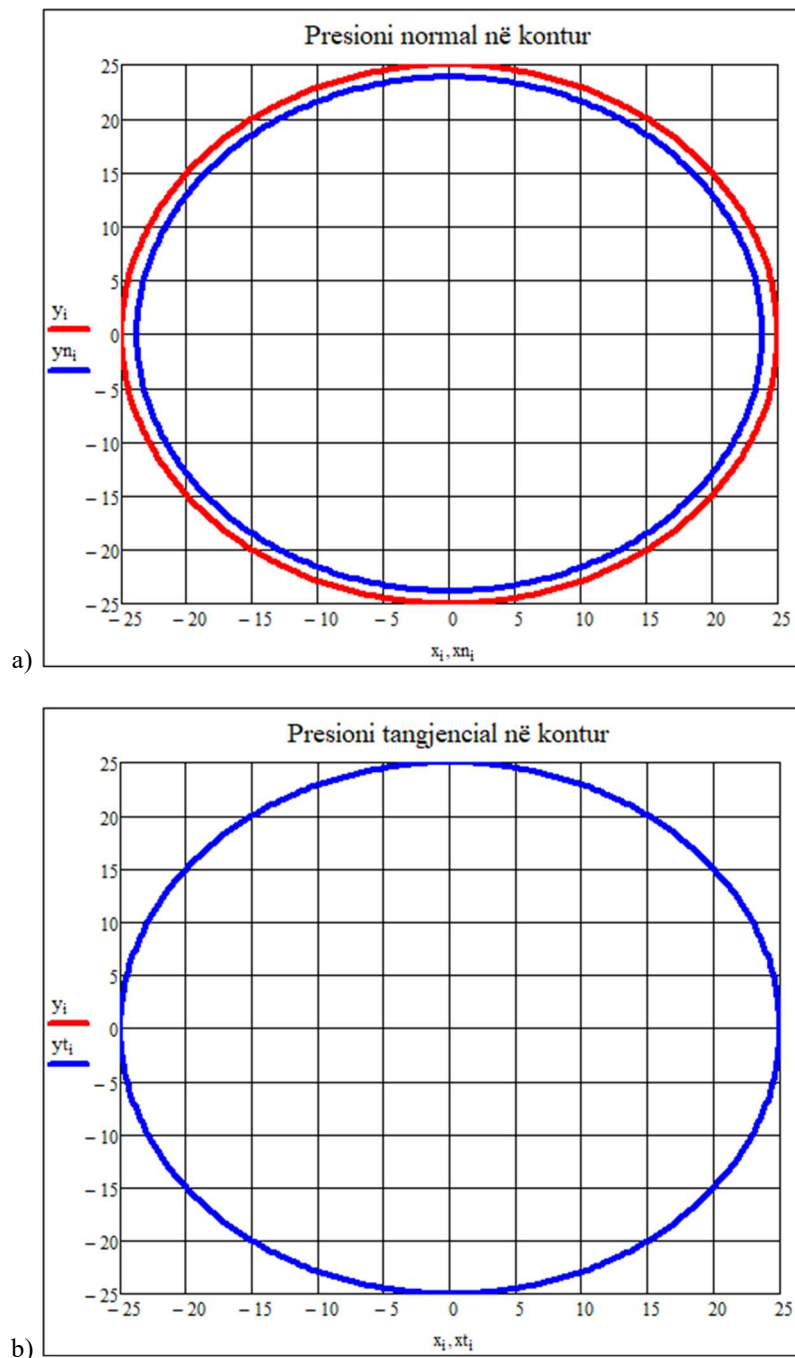


Figura 3.6 Shpërndarja e presionit në kontur
a) Presioni normal në kontur, b) Presioni tangjencial në kontur

Në figurat 3.7 (a) dhe (b) jepet paraqitja grafike valore e presionit në konturin e diskut rrethor.

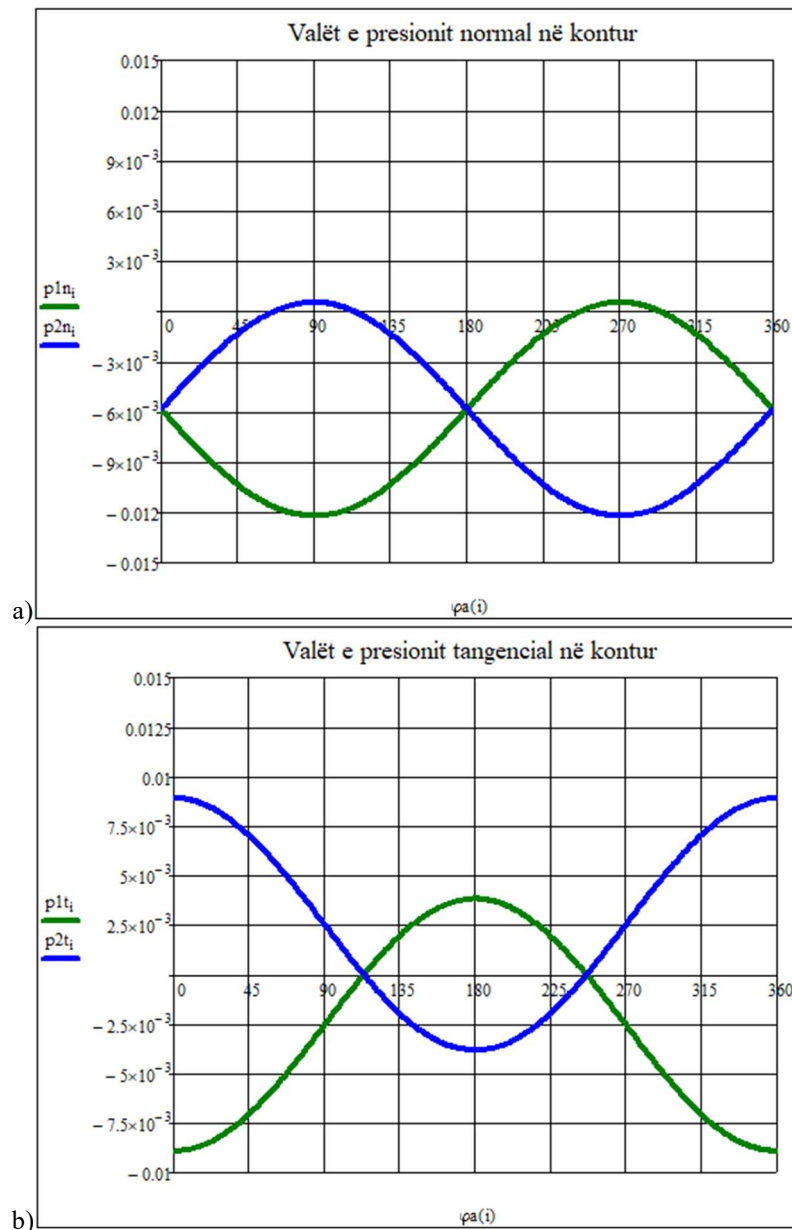


Figura 3.7 Paraqitja valore e presionit në kontur

a) Valët e presionit normal në kontur, b) Valët e presionit tangencial në kontur

Meqenëse këto valë kanë ligjësitë e përcaktuara, mundësia për gjetjen e zgjidhjeve nga funksionet biharmonike e dhënë në tabelën 2.2 është e madhe. Funksioni i sforcimeve do të ishte i formës $\Phi(x, y) = p \cdot \frac{x^2 + y^2}{2}$, dhe derivimit i tij do të na jepte sforcimet sipas akseve x dhe y, ekuacioni 2.15. Megjithatë, fokusi jonë është të gjenim një mënyrë për të përgjithësuar të gjitha rastet e mundshme, pra sikur të gjenim një funksion biharmonik që do të mundësonte që të paraqiste këto valë për çdo rast. Por para se të ndalemi tek ky rast i përgjithshëm, le të analizojmë me radhë këto valë në kontur për rastin e presionit normal dhe tangencial, figura 3.7.

- Figurat 3.7 (a) dhe (b), janë paraqitje grafike e ekuacionit 3.11 dhe 3.12, ku në fakt janë valët primare normale nga forca 1 dhe 2 dhe valët primare tangjenciale përkatësisht.
- Për sa i përket valëve nga presioni normal, të dyja këto valë janë në një anë të boshtit të konturit, pra presioni shumar normal do të këtë një madhësi të ndryshme nga zero.

Në këtë rast ky presion është përkatësisht me vlerën **-0.011669** dhe gjatë gjithë konturit një madhësi konstante. Kjo duket edhe nga figura 3.8 (a), ku është treguar shumatorja e këtyre valëve me grafikun me ngjyrë **jeshile**. I njëjti diskutim do të bëhej edhe për valët tangjenciale të treguara në figurën 3.7 (b), ku duket qartë, që ato eliminojnë njëra tjetrën dhe në kontur presioni tangjencial shumar nuk shfaqet në figurën 3.8 (b).

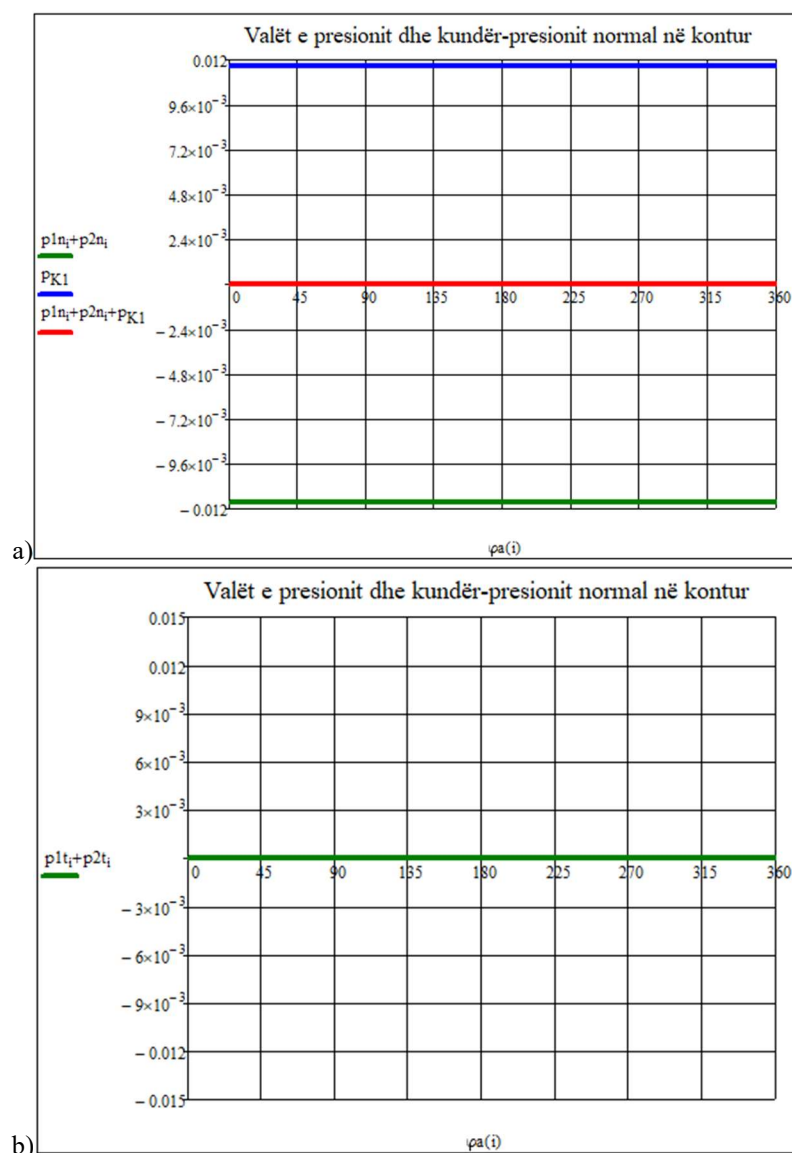


Figura 3.8 Valët shumare

- a) Valët primare 1 dhe 2, si edhe kundërvala b) Valët 1+2 tangjenciale të cilat eliminojnë njëra-tjetrën

Detyrimi, për plotësimin e kushtit në kontur është që ne ti eliminojmë këto ngarkesa vale që dalin nga ngarkesat e jashtme me kundërvalë. Për sa i përket valëve të presionit normal, atëherë madhësia e treguar me grafikun me ngjyre blu do të jetë një madhësi e kundërt. Ndërsa për ato tangjenciale nuk kemi një gjë të tillë pasi vet ngarkesa shumë është e barabartë me zero.

Në fakt, këto dy presione duke i shprehur në termat e valëve, janë kthimi i valës, **vala e trete dhe vala e katërt**, ose thënë ndryshe kundërvalët. Zgjidhjen analitike me funksionin e sforcimeve të formës $\Phi(x, y) = p \cdot \frac{x^2 + y^2}{2}$ do të na jepte sforcimet sipas akseve të tilla, ekuacioni 2.15:

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial y^2} = p \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x^2} = p \quad \text{dhe} \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x \partial y} = 0,$$

që në këtë rast plotësohen kushtet në kontur menjëherë meqë kemi vetëm presion normal, e shprehur kjo në formë matricore do të jetë:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_n \cdot \cos \alpha \\ p_n \cdot \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

Kështu që kemi edhe zgjidhjen analitike të sforcimeve në çdo pikë të brendshme për kundërvalën, sipas ekuacionit 3.9.

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \frac{2P \cdot DE}{\pi D^2} \\ \sigma_{yy} &= \frac{2P \cdot DE}{\pi D^2} \\ \sigma_{xy} &= 0 \end{aligned} \quad (3.21)$$

Zgjidhja e përgjithshme e sforcimeve në *brendësi* të diskut del nga kontributi i valëve primare, 1 dhe 2 të shprehura në ekuacionet 3.5 dhe 3.6, si edhe nga kundërvala e përfaqësuar nga ekuacionet 3.18 dhe 3.19. Zgjidhja e sforcimeve normale dhe tangjenciale në një pike të çfarëdoshme të diskut do të jepet me shprehjet e përgjithshme, ekuacioni 3.22. Kjo është një zgjidhje analitike e metodës numerike dhe energjetike të formësuar tashmë

$$\sigma = \sum \sigma_{VP} + \sum \sigma_{KV} \quad (3.22)$$

3.2.1.1 Sforcimet normale dhe tangjenciale në brendësi të diskut

Sforcimet në brendësi të diskut do të merren nga veprimi i të gjitha valëve respektive. Për efekt studimi por edhe krahasimi me metodën e elementëve të fundëm,

do të marrim rrafshin vertikal dhe atë horizontal për shpërndarjen e sforcimeve normale sipas dy drejtimeve dhe ato tangjenciale. Fillimisht do të bëjmë disa përcaktime paraprake të nevojshme për algoritmin e MV, ku me radhë do të japim ndarjet, rrezet nga forcat përkatësisht, matricat e rrotullimit dhe grup-ekuacionet e sforcimeve normale dhe tangjenciale.

- **Sforcimet sipas aksit vertikal**

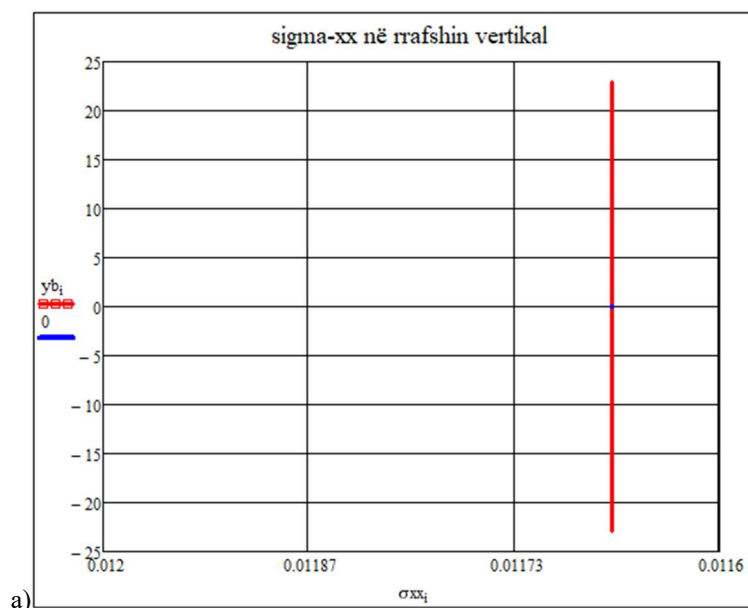
Numri i pikave për të gjetur shpërndarjen e sforcimeve është $i = 1 \dots 51$, dhe koordinatat e këtyre pikave do të jenë: $xb_i = 0$ dhe $yb_i = (i - 26) \cdot \frac{r_R}{i_{max}-1}$. Rrezja e shpërndarjes së ngarkesës nga forca me këtë vertikale do të jetë: $rr_{j,i} = \sqrt{(xx_{j,i})^2 + (yy_{j,i})^2}$, ndërsa $xx_{j,i}$ dhe $yy_{j,i}$ koordinatat e këtyre pikave që jepen nga barazimi matricor, sipas ekuacionit 3.15.

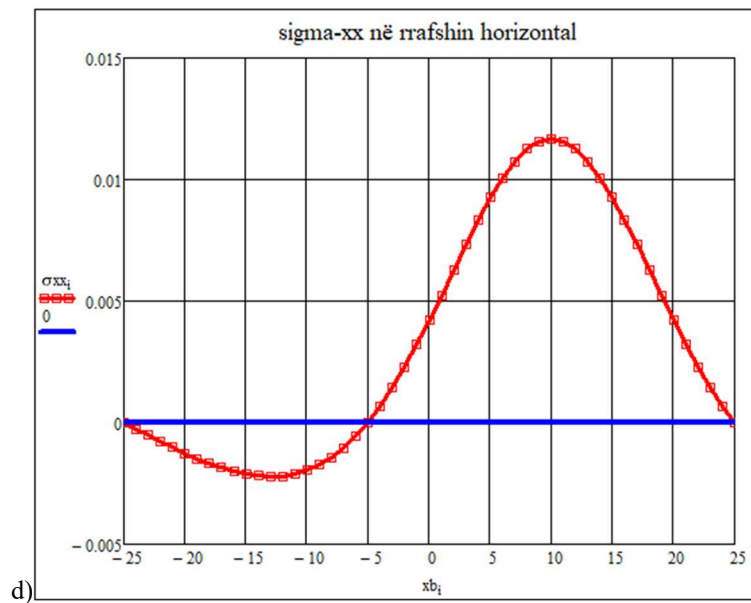
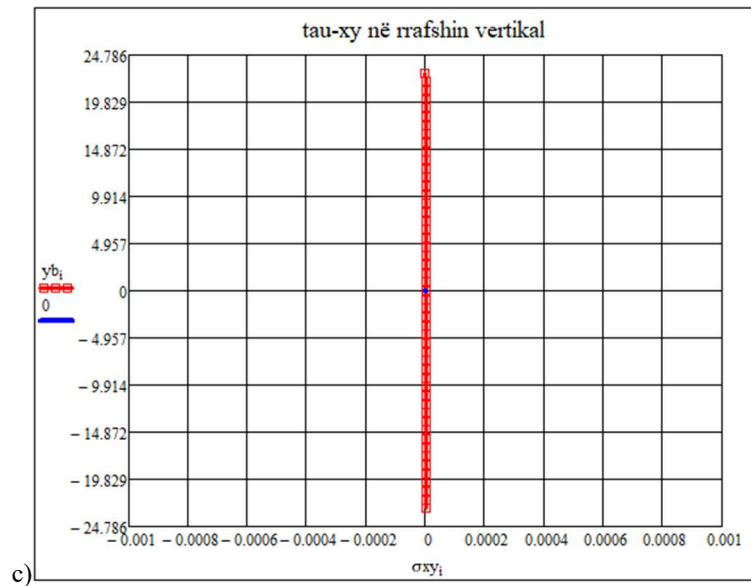
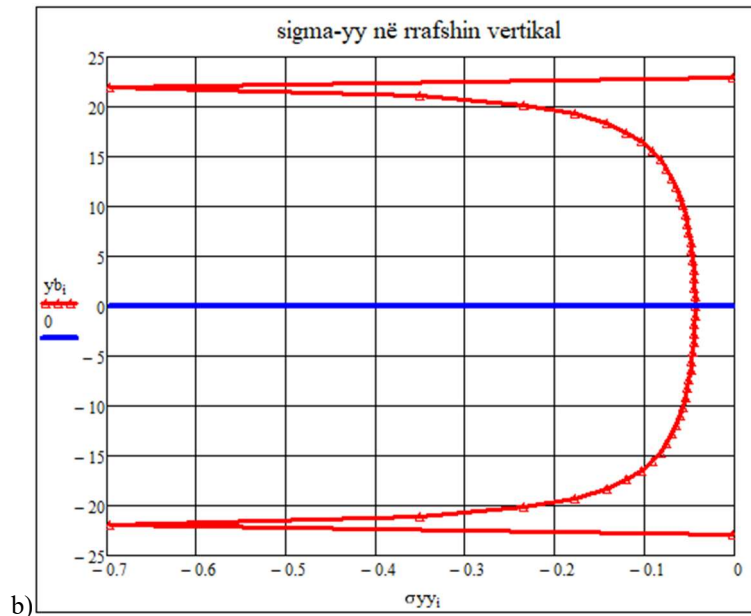
Këndi i hapjes së kësaj vale nga secila forcë do të jepet njëloj si me shprehjen e ekuacionit 3.17 dhe pas këtyre përcaktimeve kemi shpërndarjen e sforcimeve normale sipas aksit x dhe y , si edhe ato tangjenciale sipas ekuacionit 3.22 dhe ekuacioneve 2.59. Paraqitja grafike e këtyre sforcimeve jepen si në figurat 3.9 (a), (b) dhe (c) të cilat do të krahasohen në të njëjtin rrafsh edhe me MEF.

- **Sforcimet sipas aksit X (horizontales)**

Të njëjtin arsyetim do të ndjekim edhe për sforcimet në rrafshin horizontal dhe logjika e nxjerrjes së tyre do të jetë e njëjtë. Rezultate për këto sforcime do të jenë si në figurat 3.9 (d), (e) dhe (f). Të vetmet gjëra që ndryshojnë janë koordinatat: $xb_i = (i - 26) \cdot \frac{r_R}{i_{max}-1}$ dhe $yb_i = 0$.

Këndi i hapjes së kësaj vale përsëri sipas ekuacionit 3.17 dhe po në këtë rast studimor do të kemi këto shpërndarje të sforcimeve normale sipas aksit x dhe y , si edhe ato tangjenciale sipas grup ekuacionet 2.59 dhe 3.22.





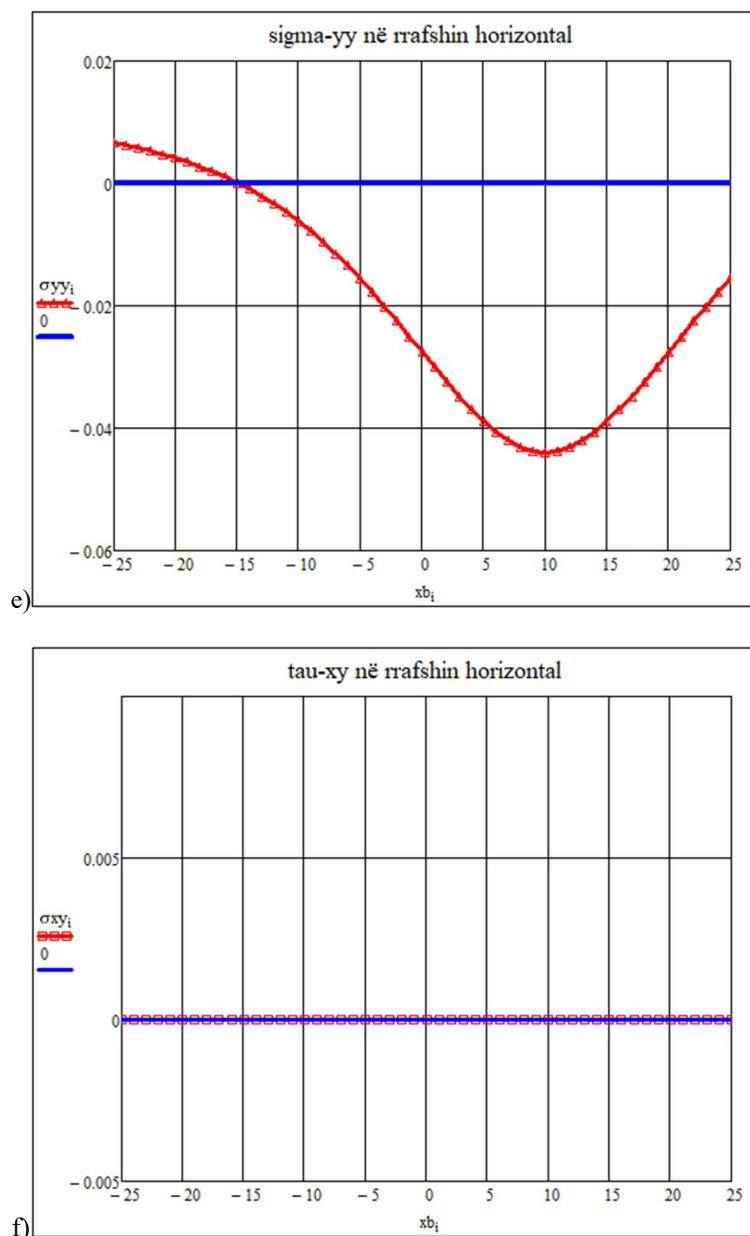


Figura 3.9 Shpërndarja e sforcimeve normale dhe tangjenciale në brendësi të diskut

a) Sforcimet normale në drejtimin x në rrafshin vertikal (MV), b) Sforcimet normale në drejtimin y në rrafshin vertikal (MV), c) Sforcimet tangjenciale në rrafshin vertikal (MV), d) Sforcimet normale në drejtimin x në rrafshin horizontal (MV), e) Sforcimet normale në drejtimin y në rrafshin horizontal (MV), f) Sforcimet tangjenciale në rrafshin horizontal (MV)

3.2.1.2 Krahassimi i rezultateve me metodën me elemente të fundëm.

Për të kontrolluar rezultate e mësipërme dhe për të vërtetuar saktësinë e metodës së valës, e cila në rastet e tjera të studimit do të jetë pak më e komplikuar, ne do t'i kontrollojmë këto rezultate, me rezultate e marra nga analiza me metodën e elementëve të fundëm. Në këtë paragraf ne do të tregojmë procedurën për nxjerrjen e këtyre sforcimeve në këtë rast dhe do të krahasojmë rezultatet. Kjo procedure do të jetë e njëjtë për të gjitha analizat e tjera, ndaj në këtë paragraf po jepet më e detajuar dhe në rastet e tjera vetëm me krahasimin e rezultateve të fituara nga të dyja metodat. Analiza është bërë me programin ANSYS 2024 R2, versioni akademik studentor. Fillimisht kemi dhënë përcaktimet e nevojshme të të dhënave inxhinierike në Ansys Workbench, të cilat

nuk ndryshojnë nga ajo e vetë programit. Më pas me ndërtimin gjeometrik të diskut, jepet struktura llogaritëse në Ansys e treguar në figurën 3.20.

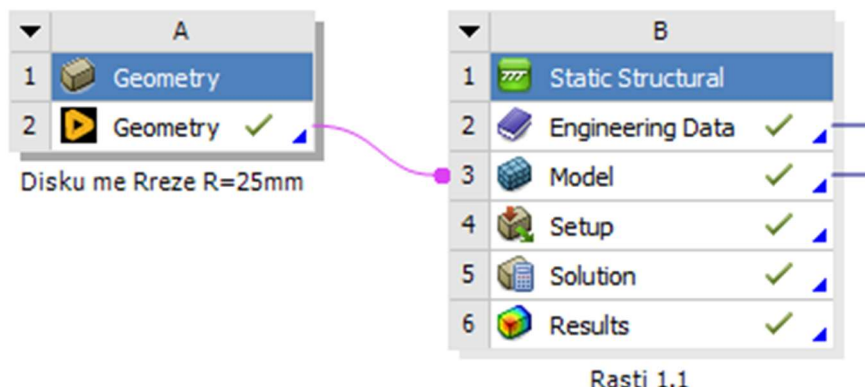


Figura 3.10 Struktura e zgjidhjes së problemit të diskut me Ansys Workbench, moduli “Static Structural”

Gjeometria e diskut është rrethi me rezen $R = 25\text{mm}$ dhe trashësi $t = 1\text{mm}$, për të plotësuar kushtet e gjendjes së sforcuar plane. Vlen të përmendim, se madhësitë e E - moduli të elasticiteti dhe ν – koeficienti i Puasonit do të mbahen të njëjta sipas tabelës 3.1. Në figurat 3.11 jepen gjeometria dhe pikat që do të studiohen për të gjitha rastet, si edhe rrjetëzimi i këtij diskut. Ky rrjetëzim do të përdoret për të gjitha rastet.

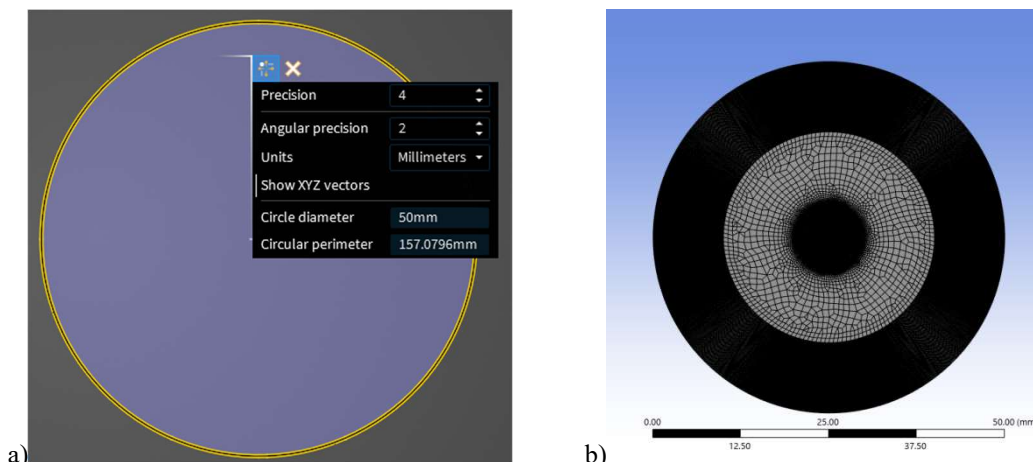


Figura 3.11 Disku në ambientin e MEF

a) Ndërtimi i gjeometrisë në Ansys Discovery të diskut dhe të pikave në disk, b) Rrjeta e diskut (Mesh)

Duke qenë se forcat janë në kontur dhe në qendër, atëherë fokusohemi për një rrjetë më të dendur, që të nxjerrim rezultatet më të sakta rreth këtyre zonave. Më pas shpërndarja e rrjetit bëhet automatikisht sipas programit. Për secilin rast ne vendosim forcat dhe lidhjet në pikat e paracaktuar më sipër. Meqenëse forcat janë të vetekulibruara, atëherë nuk ka rëndësi vendosja e pikave të reaksionit (e vërtetuar edhe me disa raste të trajtuar për diskun e Brazilit, ku bëhej vetëm ndryshimi i lidhjeve), megjithatë për rastin e parë në studim, ne po konsiderojmë forcat që veprojnë në pikat D dhe E, përkatësisht sipas të dhënave të tabelës 3.2 (të treguar në figurën 3.23 me A dhe D) dhe lidhje në pikën e poshtme me një sharnjerë dhe një shufër (treguar në figurën 3.23 me B dhe C).

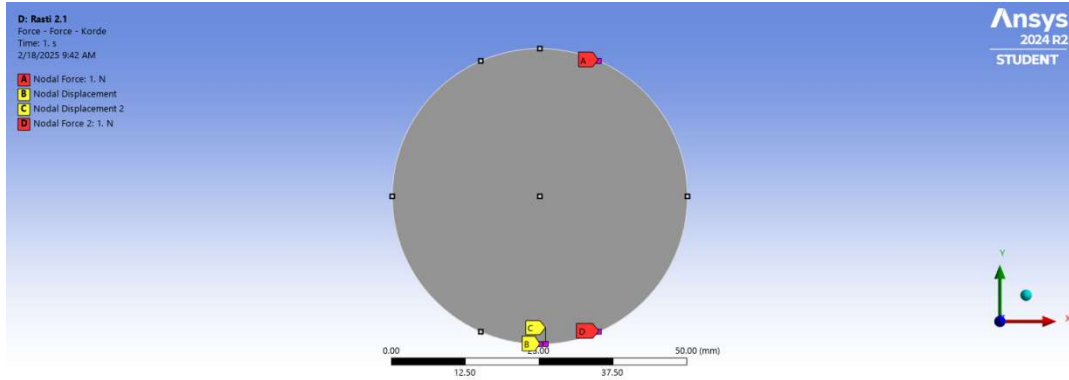


Figura 3.12 Pozicionet e forcave dhe lidhjeve në disk për rastin e studimit të kordës

Pas aplikimit të ngarkesave dhe vendosja e kushteve kinematike.

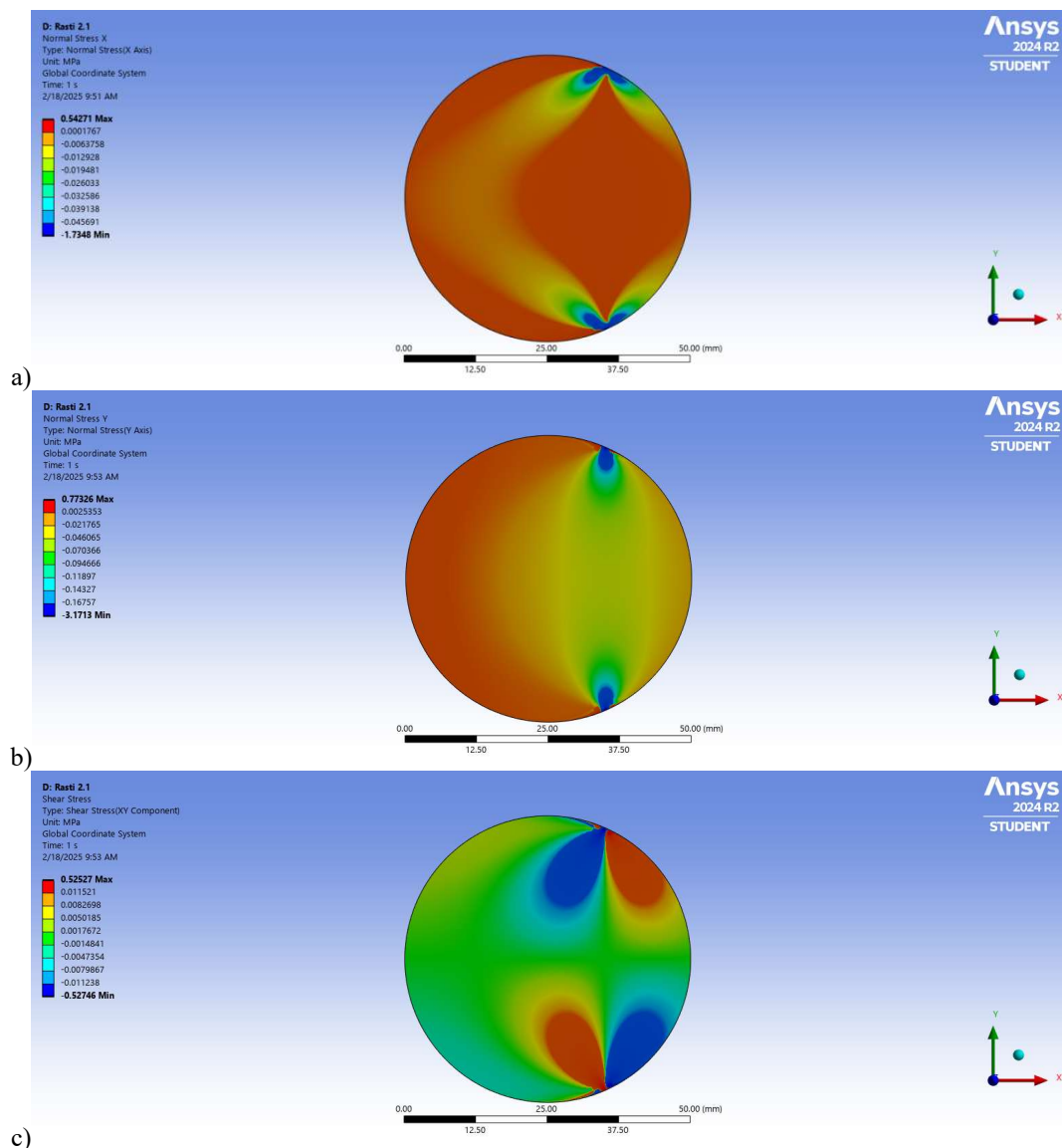
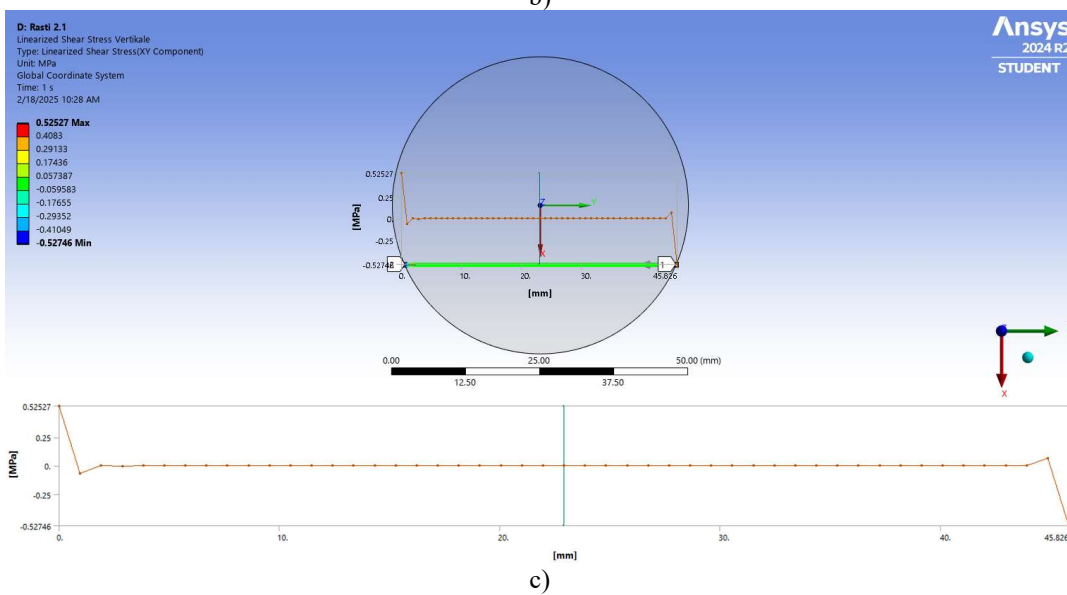
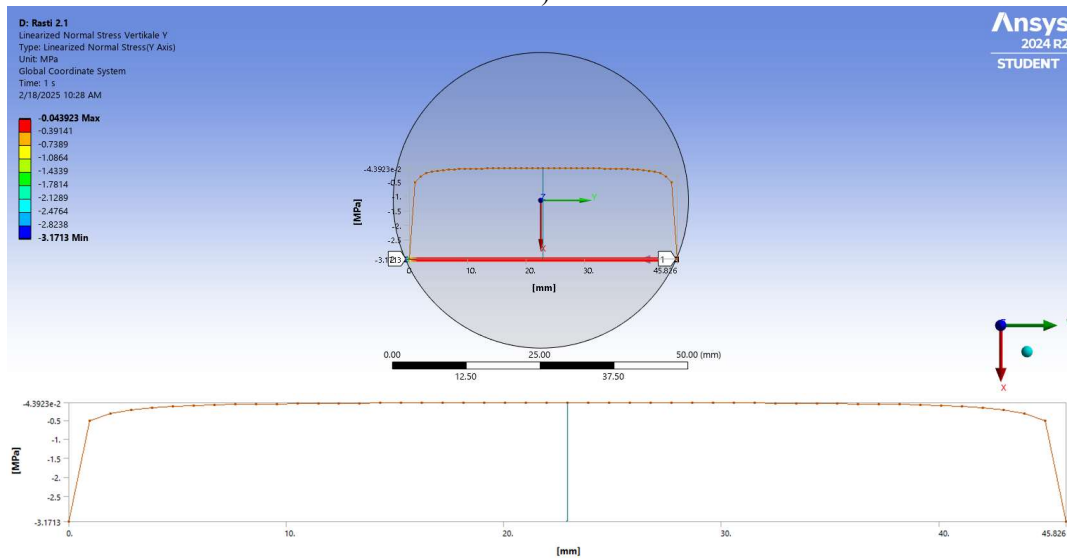
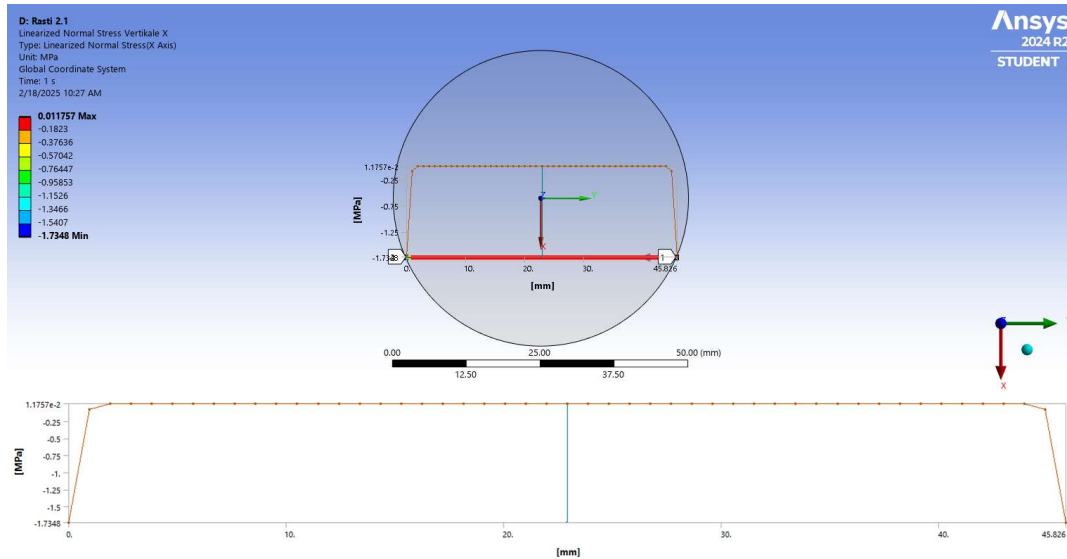


Figura 3.13 Shpërndarja e sforcimeve normale dhe tangjenciale

- a) Shpërndarja e sforcimeve normale σ_{xx} , b) Shpërndarja e sforcimeve normale σ_{yy} , c) Shpërndarja e sforcimeve tangjenciale τ_{xy}

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE



OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

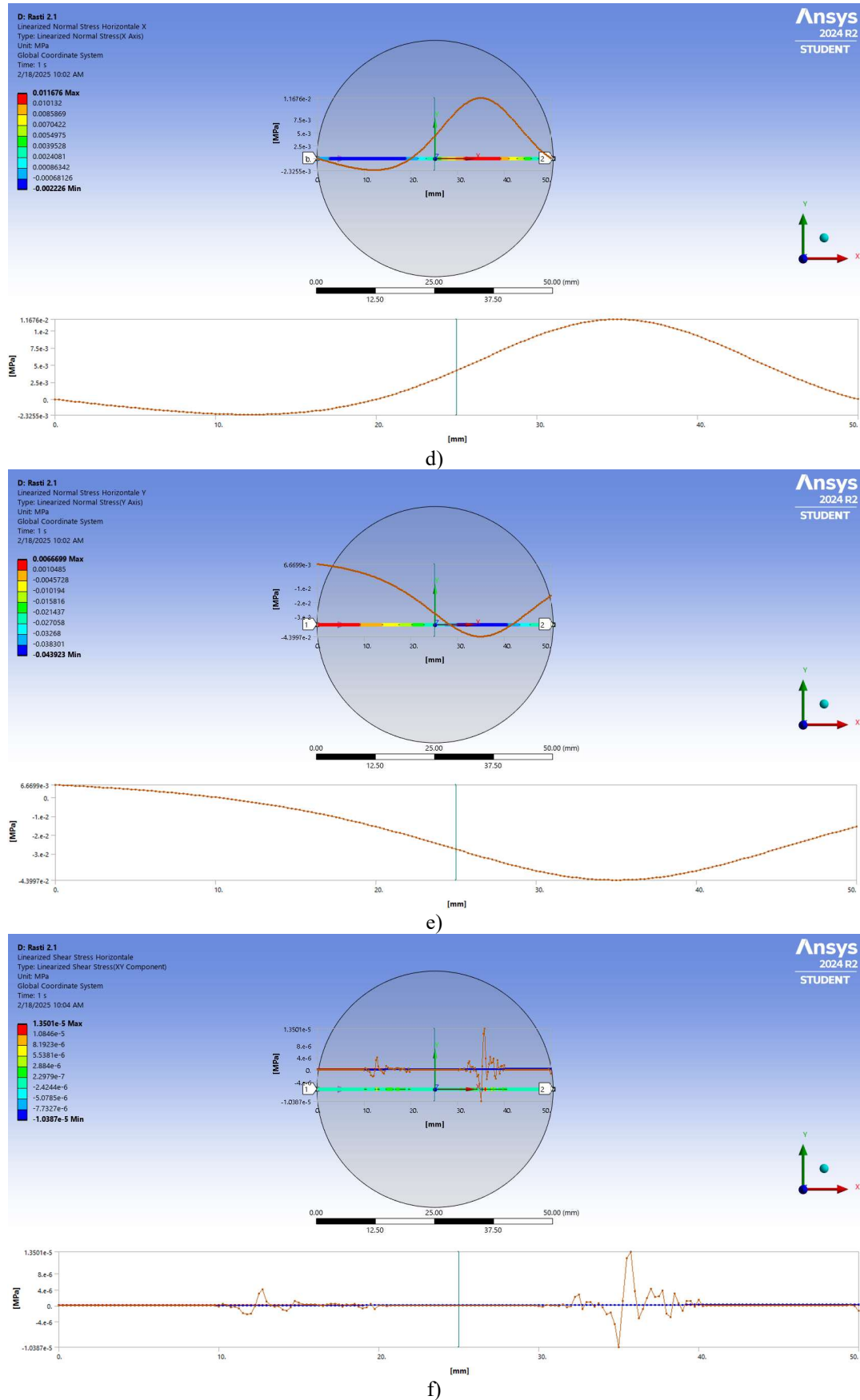


Figura 3.14 Sforcimet normale dhe tangjenciale me MEF

a) Sforcimet normale në drejtimin x në rafshin vertikal, b) Sforcimet normale në drejtimin y në rafshin vertikal, c) Shpërndarja e sforcimeve tangjenciale në rafshin vertikal, d) Sforcimet normale në

drejtimin x në rrafshin horizontal, e) Sforcimet normale në drejtimin y në rrafshin horizontal, f)
Sforcimet tangjenciale në rrafshin horizontal

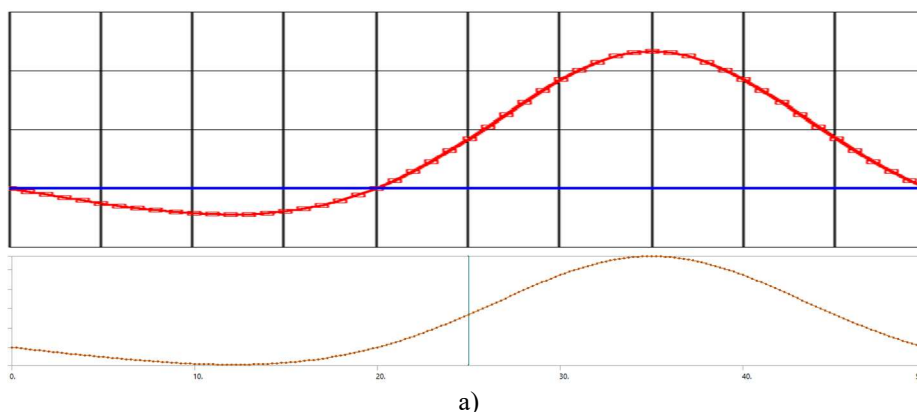
Rezultatet për rrafshin vertikal janë marrë tek korda DE, ndërsa drejtimi tjetër është për rrafshin horizontal sipas diametrit. Nëse do të krahasojmë figurën 3.14 (a) me rezultatin grafik 3.9 (a), shohim se shpërndarja e sforcimeve është e njëjtë. Vlera maksimale në qendër të diskut shkon në vlerën $\sigma_{xx} = 1.1757 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$ pra në dy kufijtë minimal dhe maksimal vlera e sforcimit është e barabartë me zero. Edhe ligjësia e shpërndarjes së këtyre sforcimeve është sipas valës sinusoidale. E njëjta procedurë do të ndiqet për të gjitha shpërndarjet e sforcimeve edhe në drejtimet e tjera dhe në rrafshin vertikal përkatësisht. Shohim se për sforcimet normale në drejtimin e aksit y për rrafshin horizontal vlera maksimale si në rastin të zgjidhjes analitike dhe në rastin e zgjidhjes me **MEF** është $\sigma_{yy} = -4.3923 \cdot 10^{-2} \text{ MPa}$, dhe në kontur i afrohet vlerës zero. Ndërsa për sforcimet tangjenciale në të gjithë gjatësinë e rrafshit horizontal në të dyja rastet, analitike dhe me metodën e elementeve të fundëm është e barabartë me zero. Për rastin e elementëve të fundëm shohim se në brendësi midis qendrës dhe konturit kemi prishje të uniformitetit të shpërndarjes së sforcimeve tangjenciale. Kjo vjen nga fakti se ndarja në elemente të fundëm në këtë zonë është më e vogël e krahasuar me zonat e tjera. Në tabelën 3.3 jepen të përmbledhura këto rezultate me **MV** dhe **MEF**

Tabela 3.3 Krahasimi i rezultateve me të dy metodat

Mënyra e studimit	Sipas drejtimit të kordës ED			Sipas rrafshit horizontal		
	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
Analitike	$1.1757 \cdot 10^{-2}$	$-4.3923 \cdot 10^{-2}$	0	$-4.3997 \cdot 10^{-2}$	$1.1676 \cdot 10^{-2}$	0
MEF	$1.1757 \cdot 10^{-2}$	$-4.3923 \cdot 10^{-2}$	0	$-4.3997 \cdot 10^{-2}$	$1.1676 \cdot 10^{-2}$	0

Nga krahasimi i rezultate sidomos në rrafshin horizontal kjo ngjashmëri duket edhe më qartë ku në figurat 3.15 (a) dhe (b) kemi të vendosura përbri njëra tjetrës rezultatet grafike të figurës 3.9 (d) dhe (e) të **MV** dhe figura 3.14 (d) dhe (e) të **MEF**. Ligjësia sinusoidale dhe kosinusoidale duket që janë në një ngjashmëri të madhe.

Sa u trajtua në paragrafin e mësipërm, ishin në rastin përgjithshëm kur mbi disk kemi dy forca ekuivalente me zero ose drejtë të kundërta. Por siç u përmendën edhe në fillim të këtij kapitulli mënyrat e ngarkimit të diskut mund të jenë të ndryshme, të sjella në figurën 3.1.



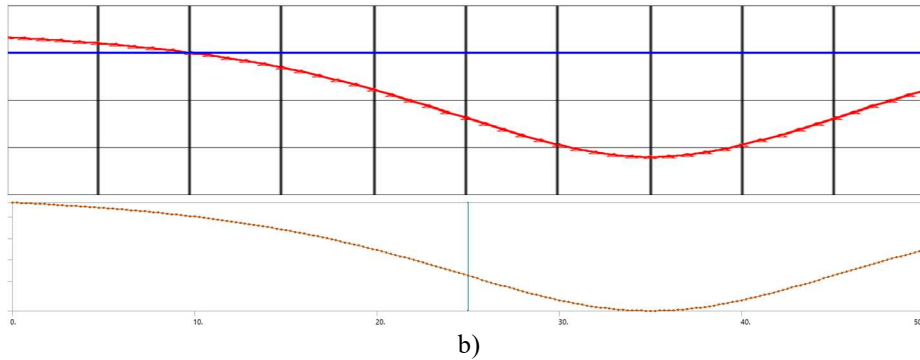


Figura 3.15 Krahاسimi i sforcimeve me MV dhe MEF

a) Krahاسimi i sforcimeve ne rrafshin horizontal të sforcimeve normale në drejtimin x, b) Krahاسimi i sforcimeve ne rrafshin horizontal të sforcimeve normale në drejtimin y

3.3 FORCA TË ÇFARËDOSHME NË KONTUR DHE ZGJIDHJA E GJENDJES SË SFORCUAR

Mund të ndodh që disku mund të jetë nën veprimin e dy çifte forcash drejtë të kundërta, siç tregohet në figurën 3.16, që vjen nga shtrëngimi i detalit me anën e dy prizmave. Zgjidhja në këtë rast mund të bëhet duke përdorur parimet e pavarësisë së veprimit të faktorëve, në rastin tonë të forcave, këtë skemë mund ta shohim si dy skema të veçanta me forca drejtë të kundërta në kordat AD dhe EF. Për çdo nga rastet përbërëse kemi nga dy valë dhe nga një kundërvalë, që rezulton të jetë presion i jashtëm normal me vlerën $P_{n1} = -\frac{2P \cdot AB}{\pi D^2}$ dhe $P_{n2} = -\frac{2P \cdot DE}{\pi D^2}$. Dhe meqë janë në një drejtim mbliidhen algjebrikisht dhe nxjerrim kundërvalën rezultante si presion normal me vlerën: $P_n = P_{n1} + P_{n2} = \frac{-2P \cdot AB}{\pi D^2} + \frac{-2P \cdot DE}{\pi D^2}$. Pra, algoritmi i metodës së valës në këtë rast do të jetë si tek rasti i parë por duke vepruar dy çifte ngarkesash të pavarura nga njëra tjetra, mjafton që edhe në këtë rast të japim tabelën e pikave, me koordinatat dhe madhësitë përkatëse dhe rezultatet që fitohen do të jenë të njëjta edhe me **MEF**.

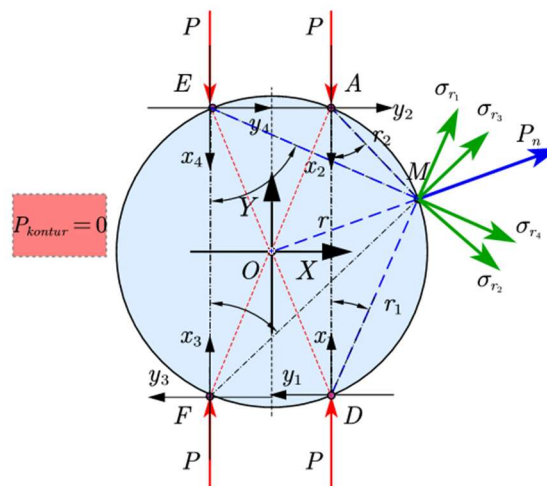


Figura 3.16 Skema llogaritëse për rastin e sistemit me nga dy forca drejtë të kundërta në kontur

Në rastet e studiura në këtë kapitull, pamë se forcat konturore, çojnë në konturin e diskut presione normale dhe tangjenciale konstante (kjo e fundit në pjesën dërmuese të rasteve është e barabartë me zero). Për të nxjerrë pse ndodh kjo, le të analizojmë dhe gjejmë zgjidhjen analitike për rastin e përgjithshëm të forcave të vet-ekuilibruara konturore. Supozojmë se jepet disku që do llogaritet dhe vendi ku do vendosen forcat

e vet-ekuilibruara. Po t'i bashkojmë pikat, ku veprojnë forcat dhe ky konstruksion do të shërbej si shumëkëndëshi i spangos, meqë forcat janë të vet-ekuilibruara, figura 3.41

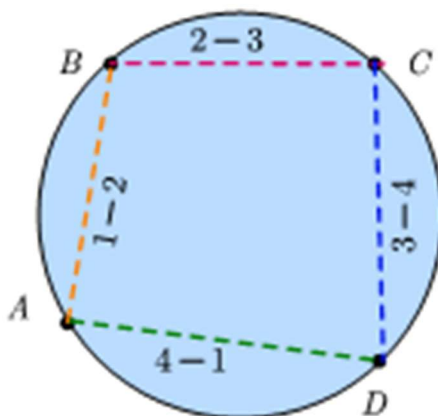


Figura 3.17 Shumëkëndëshi i spangos për zgjidhjen e gjendjes së sforcuar të diskut me forca të çfarëdoshme konturore

N.q.s. nga një pikë O e çfarëdoshme jashtë diskut, hiqen paralele me drejtëzat 1-2 etj, që përfaqësojnë shumëkëndëshin e spangos, ndërtohet poligoni i forcave, që duhet të jetë i mbyllur, meqë janë forca të vet-ekuilibruara. Forcat zgjidhen nga ana jonë, që të mbyllet shumëkëndëshi, pra përcaktojmë forcat në pikat A, B, C dhe D, figura 3.18.

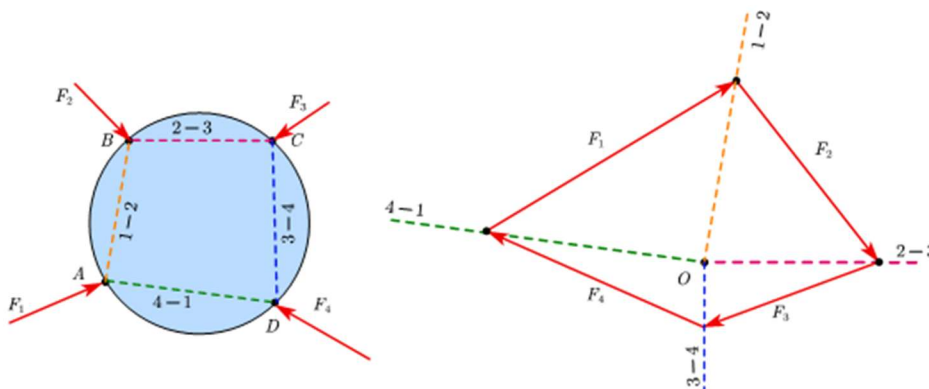


Figura 3.18 Zgjedhja e forcave në pikat A, B, C dhe D

Më pas i ndajmë forcat sipas degëve të shumëkëndëshit të spangos dhe llogarisim forcat respektive, figura 3.38.

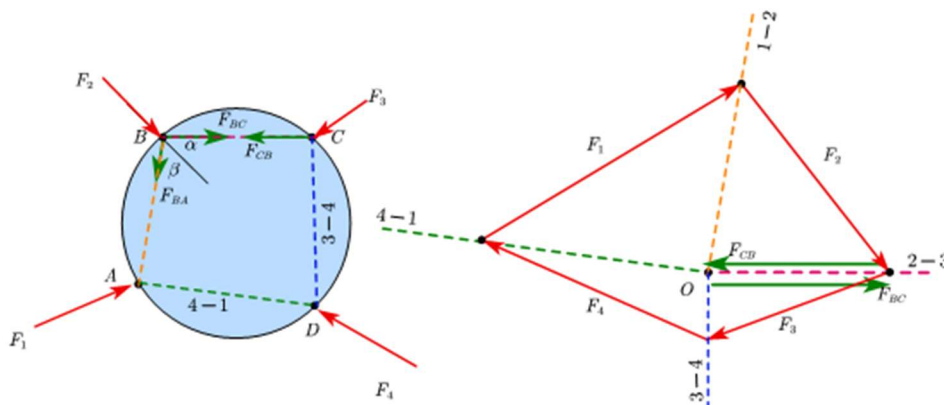


Figura 3.19 Ndarja e forcave sipas degëve

Për drejtimin BC do të kemi këtë barazim forcash sipas ekuacionit 3.23.

$$F_{BC} \cdot \cos \alpha + F_{BA} \cdot \cos \beta = F_2 \quad (3.23)$$

Dhe sipas drejtimit pingul me BC, shprehjen sipas ekuacionit 3.24.

$$F_{BC} \cdot \sin \alpha = F_{BA} \cdot \sin \beta \quad (3.24)$$

d.m.th:

$$F_{BC} \cdot \cos \alpha + \frac{F_{BC} \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = F_2 \quad (3.25)$$

$$\frac{F_{BC} \cdot \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \beta} + \frac{F_{BC} \cdot \sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = F_2 \quad (3.26)$$

Dhe pas transformimeve kemi përkatësisht këto forca konturore sipas drejtimeve të shprehura me ekuacionet 3.27-3.28:

$$F_{BC} = F_2 \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3.27)$$

$$F_{BA} = F_2 \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} \quad (3.28)$$

Nga parimi i superpozimit të forcave merret disku katër herë, me forcat drejtë të kundërta, siç tregohet në skemën në figurën 3.20.

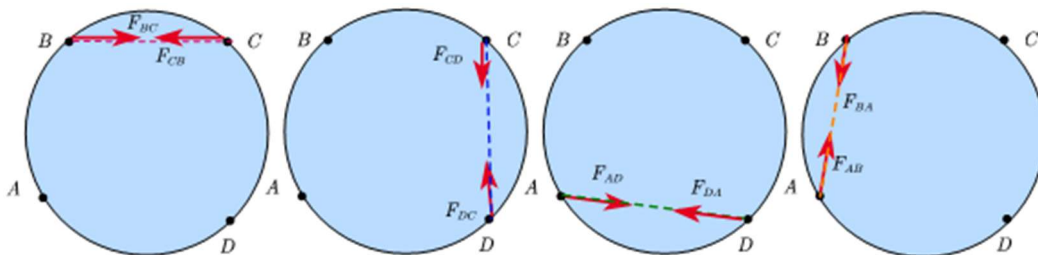


Figura 3.20 Ndarja e forcave sipas degëve të secilës kordë

Dhe zgjidhja është e qartë pasi shtojmë ngarkesën e shpërndarë, që paraqet kundërvalën rezultante q_p ku:

$$q_p = q_{BC} + q_{CD} + q_{DA} + q_{AB} \quad (3.29)$$

Ku p.sh. $q_{BC} = -\frac{2 \cdot F_{BC} \cdot \overline{BC}}{\pi \cdot D^2}$. Forcat në kontur, në drejtim të çfarëdoshëm mund të jenë më shumë se rasti që demonstruam prej katër forcash.

3.4 SKEMA TË TJERA LLOGARITJEJE DHE KRAHASIMI MEF

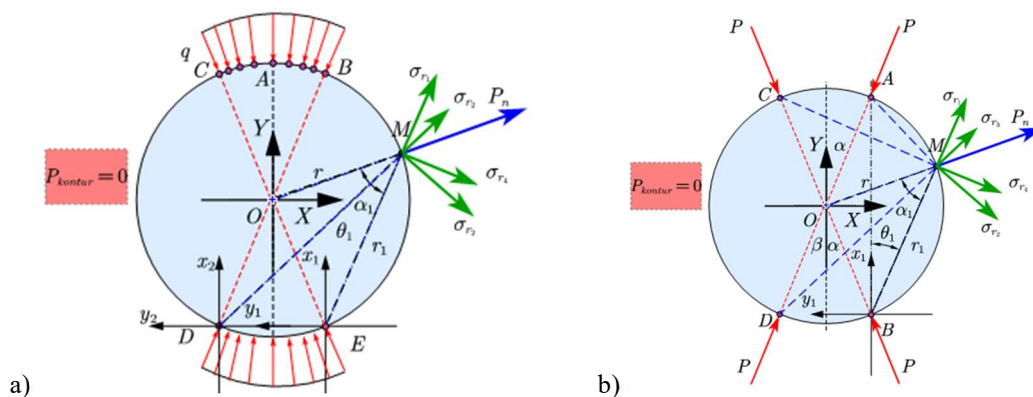
Nga analiza e skemave të mësipërme, shohim se presionet në kontur, ai normal dhe tangjencial, janë madhësi konstante. Kështu që për shpërndarjen e sforcimeve në brendësi të diskut duke analizuar edhe njëherë ekuacionin 3.23, që përveç sforcimeve nga ngarkesat e jashtme në këtë rast forcat e dhëna, kemi edhe sforcimet nga kundërvala e cila është një madhësi konstante (presioni i kundërt). Si për rastin e analizës për normale ashtu edhe për tangjenciale, ky presion duke qenë konstant (hidrostatik), do të këtë ndikim të njëjtë në çdo pikë të diskut. Ndaj analiza e mëtejshme e shpërndarjes së sforcimeve nga kundërvala nuk është bërë më e detajuar, siç do të jetë në kapitullin 4 dhe 5, ku shpërndarja e këtyre presioneve do të jetë e çfarëdoshme.

. Në tabelën e mëposhtme, tabela 3.4 po japim disa skema për zgjidhjen e tyre analitike dhe po ashtu skemat e ndërtuara në ambientin e metodës së elementeve të fundëm.

Tabela 3.4 Përmbledhje e skemave për analizën e diskut

Nr.	Llojet e ngarkesave dhe vendndodhja	Skema
1.	Dy forca diametrale në periferi	Trajtuar në kapitullin 2
2.	Dy forca në periferi sipas një korde	Trajtuar në kapitullin 3
3.	Katër forca paralele në periferi sipas dy kordave	Rasti i veçantë sipas 3.3
4.	Katër forca qëndrore të vet ekuilibruara konturore	Rasti i veçantë sipas 3.3
5.	Ngarkesë e shpërndarë qëndrore në kontur	Rasti i veçantë sipas 3.3
6.	Tre forca konkurrenente të vet ekuilibruara konturore	Rasti i veçantë sipas 3.3
7.	Tre forca qëndrore të vet ekuilibruara konturore	Rasti i veçantë sipas 3.3

Me poshtë, në figurën 3.21 (a) – (d), po japim skema të tjera llogaritëse, me shpërndarje të presionit hidrostatik konstant në kontur (vërtetim i bërë në paragrafin 3.7), të cilat gjejnë aplikime të ndryshme në fushën e inxhinierike dhe që hedhin hapat për të optimizuar ngarkesat, përmasat, materialin apo elemente të tjerë sipas kërkesave të ndryshme



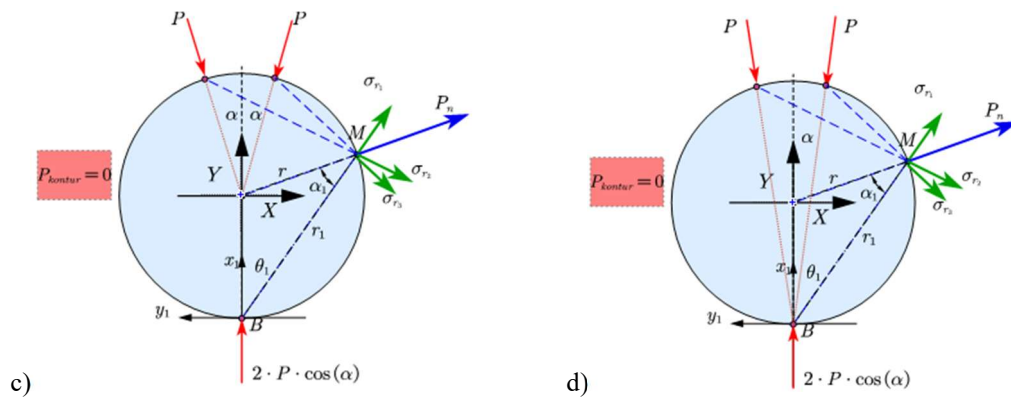


Figura 3.21 Skema të ndryshme llogaritëse për forca konturore

- a) skema llogaritëse për rastin e sistemit me nga dy forca drejt të kundërta në kontur, b) katër forca qëndrore të vet-ekuilibruara konturore, c) tre forca qëndrore të vet-ekuilibruara konturore, d) ngarkese e shpërndarë në periferi

Duke qenë se zgjidhja analitike dhe programuese e rasteve të treguara në tabelën 3.4 është pothuajse e njëjtë, rezultatet përkatëse të secilës prej tyre do të dilte si analizë e rastit të veçantë në paragrafin 3.3, analitikisht me Metodën e Valës (MV), duke marrë zgjidhjen nga grupi i funksioneve biharmonike.

KAPITULLI 4

METODA E VALËS PËR SHPËRNDARJE TË ÇFARËDOSHME TË PRESIONIT TË KUNDËRVALËS

4 SHPËRNDARJE JO-KONSTANTE E PRESIONEVE NË KONTUR

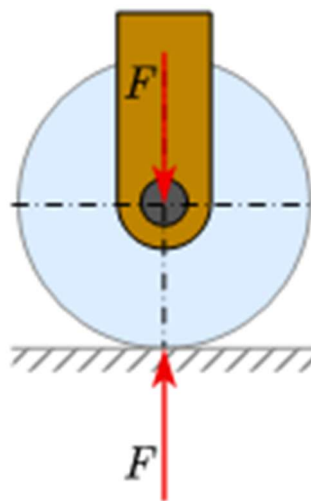
Në kapitullin 3, ne përcaktuam sforcimet analitikisht, me **MV** dhe me **MEF**. Kthimi i valëve ose e ashtuquajtura kundërvalë, që në rastet e trajtuara ishte gjithmonë një presion normal konstant, u bë me funksionin biharmonike $\Phi(x, y) = p \cdot \frac{x^2 + y^2}{2}$ të treguar në kapitullin 3, i cili jep zgjidhje analitike të **MV** dhe saktësia e tij u vërtetua me kontrollin me **MEF**. Në të gjitha rastet e trajtuara u morën nga forcat konturore, ku nga analiza matematikore e bërë, kundërvala normale është konstante, dhe u shënuan thjesht me termin e presionit konstant, q_k .

Por çfarë ndodh në rastet kur ky presion është i çfarëdoshëm?

Për t'i dhënë përgjigje kësaj pyetje, në këtë kapitull kemi trajtuar rastet e diskut kur njëra nga forcat vepron në brendësi të diskut rrethor. Si tek zgjidhja analitike e ndërtuar në kapitullin 3 edhe këtu, analiza matematikore e shpërndarjes së valëve dhe kundërvalëve, konstante ose jo, do të bëhet fillimisht me funksionet e shpërndarjes së valëve primare (funksionet e shpërndarjes së sforcimeve) dhe kthimi i valës pas “përplasjes” me konturin, e quajtur kundërvalë, do të bëhet sipas një apo më shumë funksioneve biharmonike të listuar më parë. Megjithatë për analizën më të detajuar dhe për të kompletuar të gjitha rastet e mundshme të zgjidhjeve nëpërmjet kundërvalëve jo uniforme, në këtë algoritëm është dhënë dhe kthimi i përgjithshëm i kundërvalëve nëpërmjet ngarkesave të çfarëdoshme të shpërndara në kontur, duke plotësuar kështu Metodën e Valës, si një nga objektivat për krijimin e metodës së re optimizues.

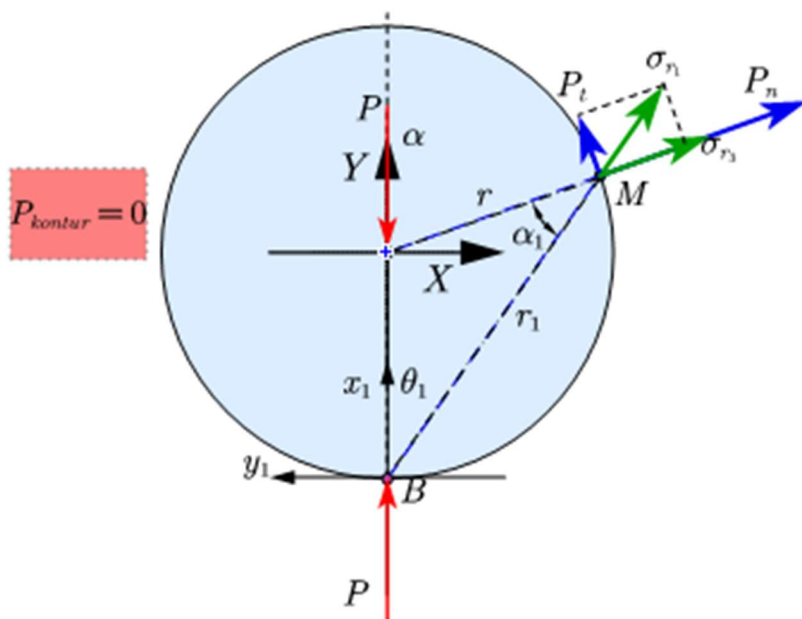


a)



b)

Figura 4.1 Skema llogaritëse për “Metodën e Valës” forca qëndrore – konturore
a) citi rrotë-shinë b) Paraqitja skematike e çiftit rrotë-shinë,



Për forcën në kontur do të kishim $\sigma_{r1} = \frac{-k_{\alpha1} \cdot P}{r_1} \cdot \cos(\theta_1)$ ku $k_{\alpha1} = \frac{2}{\pi}$ sepse gjysmëkëndi është $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Për forcën në qendër do të kishim $\sigma_{r2} = \frac{-k_{\alpha1} \cdot P}{r_2} \cdot \cos(\theta_2)$ ku $k_{\alpha2} = \frac{1}{\pi}$ sepse gjysmëkëndi është $\alpha = \pi$. Nga gjeometria nxjerrim relacionin $r_1 = D \cdot \cos \theta_1$ dhe $r_2 = \frac{D}{2}$, kështu që sforcimet radiale në pikat e konturit do të jenë $\sigma_{r1} = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot r_1}$. $\cos(\theta_1) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D}$ dhe $\sigma_{r2} = \frac{-P}{\pi \cdot r_2} \cdot \cos(\theta_2) = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2)$. Nga sforcimet radiale le të kalojmë tani në presionin në kontur, përkatësisht nga të dyja forcat, që në këtë rast do të jenë $p_{r1} = \sigma_{r1} \cdot \cos(\alpha_1)$ dhe $p_{r2} = \sigma_{r2} \cdot \cos(\alpha_2)$. Për sa i përket, këtyre dy këndeve α_1 dhe α_2 , që janë këndet e normales së konturit me drejtimin radial të sforcimit σ_{r1} dhe σ_{r2} , do të kemi për forcën qendrore, meqenëse normalja përputhet me drejtimin radial këndin e barabartë me $\alpha_2 = 0$. Ndërsa për sa i përket forcës në kontur, ky kënd do të jetë sa këndi i hapjes së drejtimit radial d.m.th. $\alpha_1 = \theta_1$. Në këtë mënyrë presionet radiale në kontur do të jenë: $p_{r1} = \sigma_{r1} \cdot \cos(\alpha_1) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_1)$ dhe $p_{r2} = \sigma_{r2} \cdot \cos(\alpha_2) = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2)$.

67

- **Presioni normal me konturin**

$$p_{Normal} = p_{r1} \cdot \cos(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \cos(\alpha_2)$$

- **Presioni tangjencial me konturin**

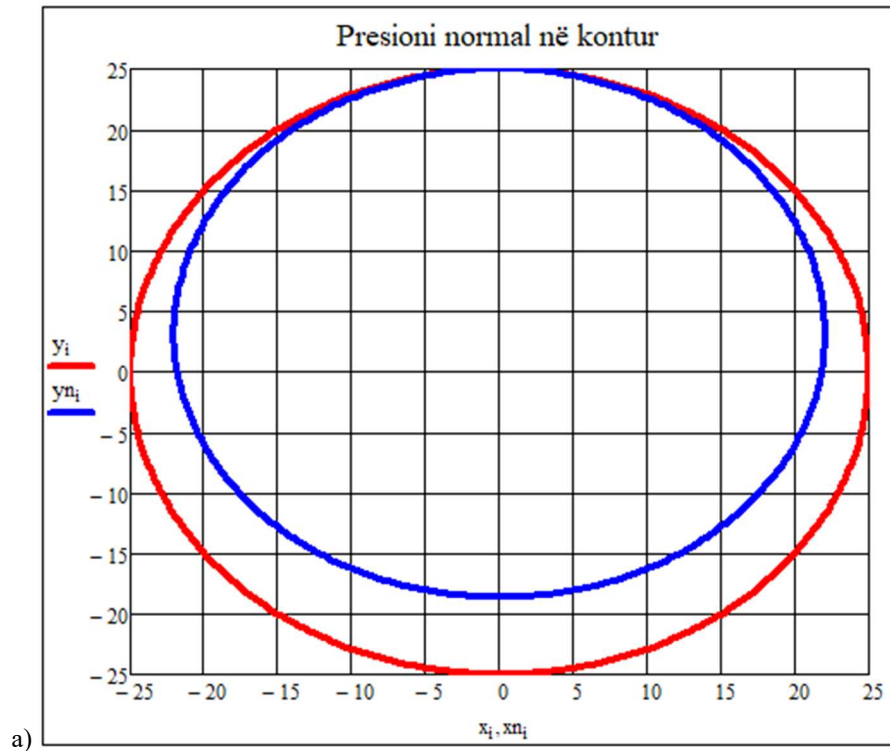
$$p_{Tangencial} = p_{r1} \cdot \sin(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \sin(\alpha_2)$$

Duke pasur parasysh nga gjeometria se: $\theta_2 + 2 \cdot \theta_1 = \pi$ dhe duke zëvendësuar konkretisht, do të nxirrim presionin normal:

$$\begin{aligned} p_{Normal} &= p_{r1} \cdot \cos(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \cos(\alpha_2) = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos^2(\theta_1) + \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2) \\ \cos(\theta_2) &= \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \frac{1 + \cos 2\theta_1}{2} + \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2) = \frac{-P}{\pi \cdot D} + \frac{-P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Po kështu edhe për presionin tangjencial të skemës së dhënë

$$\begin{aligned} p_{Tangencial} &= p_{r1} \cdot \sin(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \sin(\alpha_2) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) \\ &= \frac{-P}{\pi \cdot D} \cdot \sin(2\theta_1) = \frac{-P}{\pi \cdot D} \cdot \sin(\theta_2) \end{aligned} \quad (4.2)$$



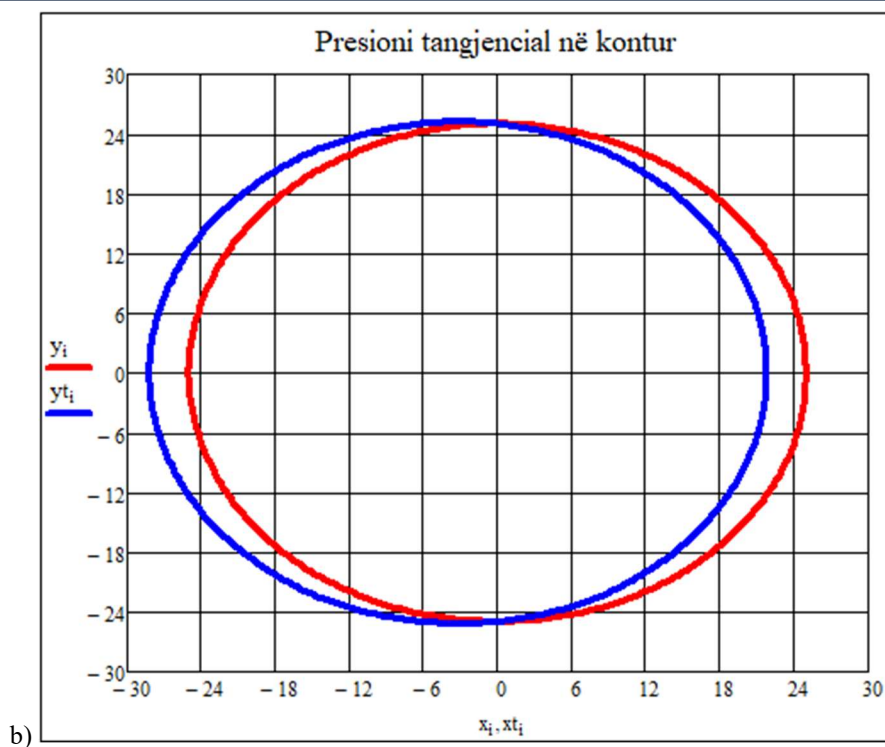


Figura 4.3 Shpërndarja e presionit në kontur
a) presioni normal, b) presioni tangjencial

Rezultatet grafike të këtyre funksioneve të shpërndarjes së presioneve normal dhe tangjencial në kontur jepen si në figurat 4.3 (a) dhe (b). Nga këto rezultate duket qartë se në kontur i kemi të dy presionet, normalin dhe tangjencialin, në ndryshim nga pjesa më e madhe e rasteve të diskutuara në kapitullin 3 dhe këto nuk janë uniformisht të shpërndara. Si për presionin normal dhe tangjencial, ligjësia është sipas funksioneve *kosinusoidale* dhe *sinusoidale*.

Zgjidhjet e kundërvalëve të tyre mund të gjenden:

- me metodën analitike të trajtuar në kapitullin 2 d.m.th. me funksionet e sforcimeve biharmonike,
- me metodën e elementeve të fundëm (në këtë shkojmë direkt në shpërndarjen e sforcimeve normale dhe tangjenciale)
- me “Metodën e Valës” (**metode e zbuluar në këtë studim**)

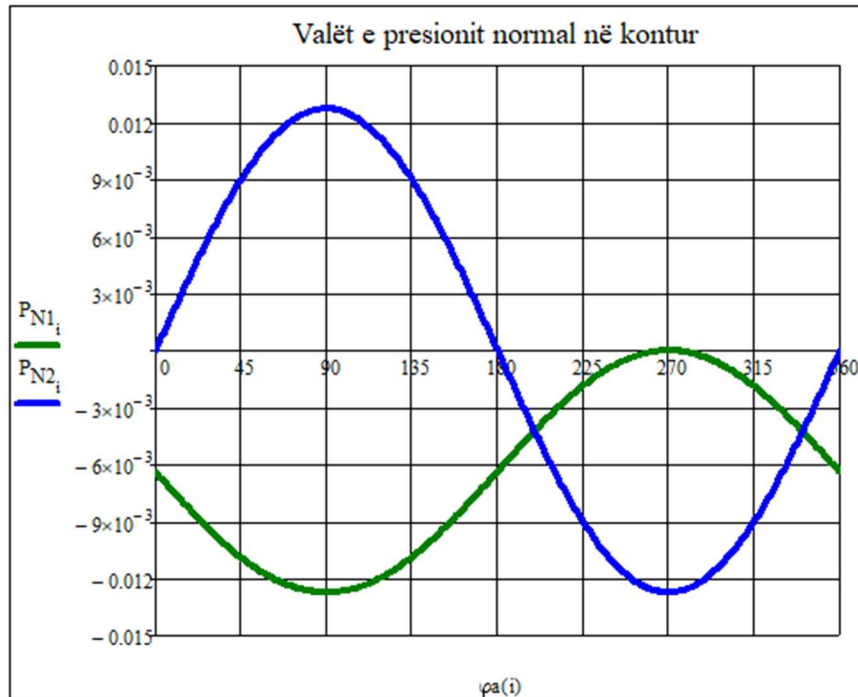
Të tria këto zgjidhje, për shpërndarjen e sforcimeve, do të krahasohen për të vërtetuar, saktësinë e zgjidhjes, sidomos të Metodës së Valës, dhe më pas mundësitë e aplikimeve të kësaj metode, që do të trajtohet në kapitullin pasardhës.

4.1 METODA ANALITIKE PËR FUNKSIONIN E KUNDËRVALËS

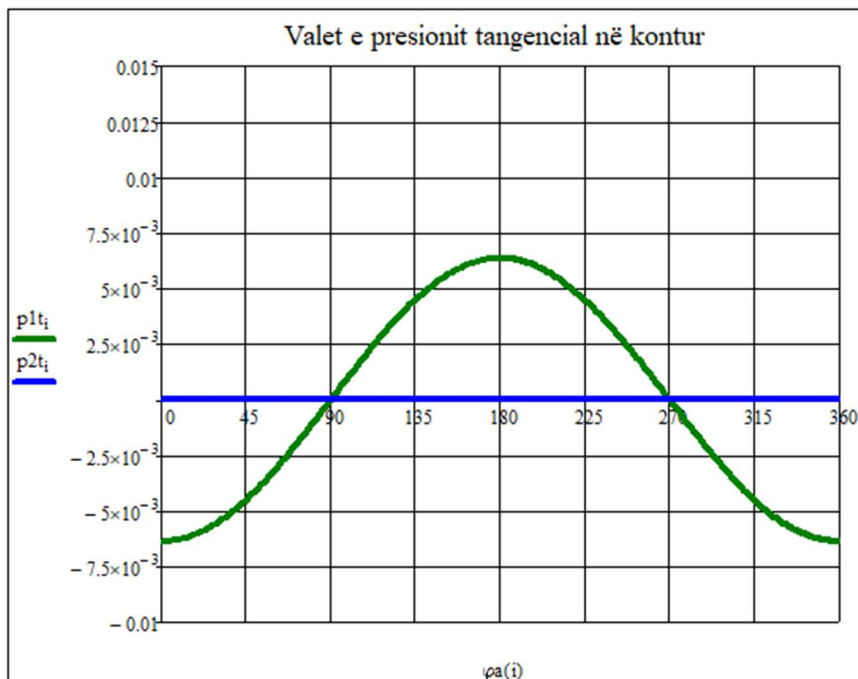
Nga analiza e grafikëve në figurat 4.3 dhe 4.4, shohim qartë se shpërndarja e presioneve normal dhe tangjencial në kontur, nuk është më një madhësi konstante (presion hidrostatik) dhe si rrjedhojë kthimi i kundërvalës është më e vështirë se në rastet e diskutuara. Për këtë na duhet të thellohem në teorinë e kthimi të valës, duke

analizuar funksionet biharmonike të trajtuar në kapitullin e dytë dhe të gjejmë funksionin biharmonik më të përshtatshëm dhe më të saktin për kundërvalën.

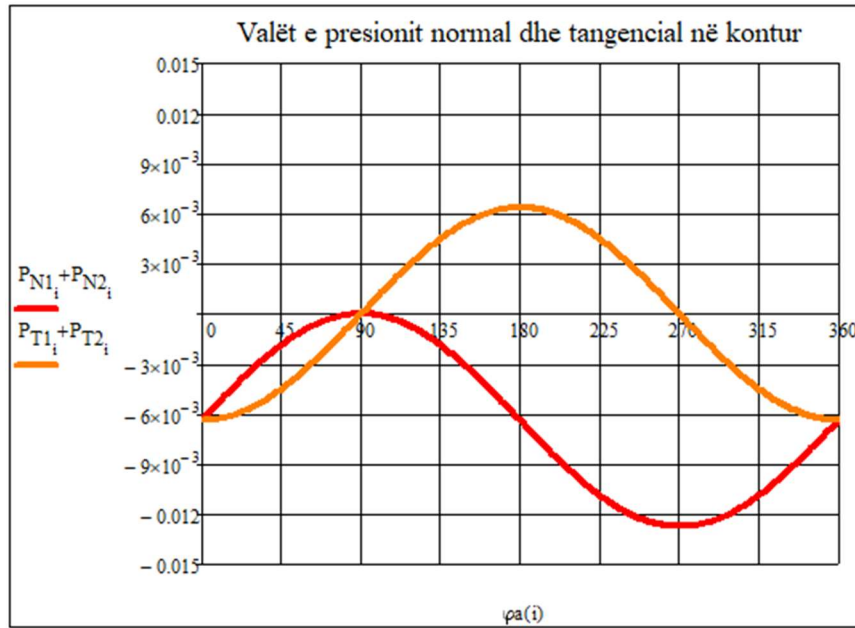
Forma e përhapjes së këtyre valëve për të dhënë një ide më të mirë të shpërndarjes dhe drejtimit të tyre do të jenë grafikët në figurat 4.4 (a), dhe (b), si për presionet e valëve veç e veç nga secila forcë ashtu edhe së bashku sipas drejtimit normal dhe tangjencial me konturin, figura 4.4 (c).



a)



b)



c)

Figura 4.4 Shpërndarja e valëve të hapura në kontur

a) valët e presionit normal, b) valët e presionit tangjencial, c) presionet shumare normale dhe tangjenciale

Figura 4.4 tregon qartë që dy presionet normale nga të dy forcat e ndryshme janë shpërndarje presionesh që nuk e “eliminohen” njëra-tjetrën, apo të “normalizojnë” duke rikthyer atë në një madhësi konstante siç silleshin tek rastet e forcave konturore. Edhe nëse ne do të shohim shumatoren e tyre, të treguar në figurën 4.4 (c), do të shohim se nuk është një madhësi konstante, por një madhësi e çfarëdoshme e shpërndarjes së presionit në kontur. E njëjta analizë dhe koment bëhet edhe për presionin tangjencial në kontur, ku njëra nga ngarkesat duke qenë qendrore dhe shpërndarja e sforcimeve është radiale, nuk ka një komponente tangjenciale të saj. E vetmja ngarkesë që jep presion tangjencial është nga forca konturore. Pra edhe tek grafiku shumë i treguar në figurën 4.6 (b), paraqitja e valës tangjenciale është një presion tangjencial jo konstante (e ndryshme nga zero krahasuar me rastet e kapitullit 3).

Pra në analizën e bërë në këtë rast studimor, duket qartë se pas “goditjes” nga **valët e para**, kemi në kontur të shpërndarë si presionin normal ashtu edhe tangjencial, me vlera që ndryshojnë sipas ligjeve kosinusoidale ose sinusoidale. Nëse për presionin tangjencial, kemi një luhajtje të kësaj vale rreth boshtit të x , për presionin normal kemi një spostim të kësaj vale poshtë boshtit koordinativ x . Analiza matematikore e tregon këtë, si në vijim.

$$p_{Normal} = \frac{-P}{\pi \cdot D} + \frac{-P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2) \quad (4.3)$$

$$p_{Tangencial} = \frac{-P}{\pi \cdot D} \cdot \sin(\theta_2) \quad (4.4)$$

Paraqitja e këtyre shpërndarjeve të presioneve në kontur do të jetë sipas skemës së treguar në figurën 4.5. Këto do të ndahen në **tre kundërvalë kryesore** të cilat janë:

- Kundërvala normale me presion konstant $\frac{P}{\pi \cdot D}$, figura 4.5 (a).
- Kundërvala normale kosinusoidale $\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2)$, figura 4.5 (b).
- Kundërvala tangjenciale sinusoidale $\frac{P}{\pi \cdot D} \cdot \sin(\theta_2)$, figura 4.5 (c).

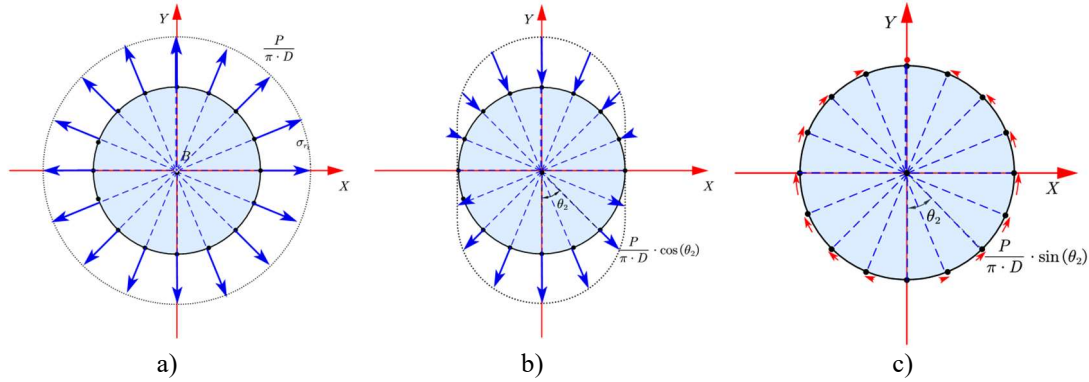


Figura 4.5 Shpërndarja e presioneve shumtar normal dhe tangjencial

a) Presion normal konstant, b) Presion normal kosinusoidal, c) Presion tangjencial sinusoidal

Vlen të përmendet se këto shpërndarje janë në varësi të këndit qendror të forcës në brendësi të konturit θ_2 , pra zgjidhja do të arrihet pas “goditjes” në kontur me kundërvalët të cilat do të jenë sipas zgjidhjes të treguara mësipërm, figura 4.5. Në këtë moment, pasi kënaqen kushtet në kontur, do të kemi më pas edhe shpërndarjen e sforcimeve në të gjithë diskun, që si në rastet e përcaktuara në kapitullin 3, edhe këtu do të kemi të njëjtën metodikë. Paraqitja hap pas hapi e zgjidhjeve me valët goditëse jepet në figurat 4.6(a) dhe (b), për të dy llojet e ngarkesave, normale dhe tangjenciale.

Nga familja e funksioneve biharmonike, duke përdorur si variabël këndin qendror θ_2 dhe që të plotësohen kushtet e mësipërme konturore të tre kundërvalëve, dy normal dhe një tangjenciale zgjedhim:

- $\Phi_1(x, y) = \frac{P}{\pi \cdot D} \cdot \frac{x^2 + y^2}{2}$ për kundërvalën normale konstante.
- $\Phi_2(x, y) = \frac{P}{\pi \cdot D} \cdot r \cdot \log r \cdot \cos \theta_2$ për kundërvalën normale dhe tangjenciale harmonike.

Për këto funksione biharmonike do të kemi sforcimet përkatëse:

- $\sigma_{rk} = \frac{P}{\pi \cdot D}$ dhe $\sigma_{rk2} = \frac{P}{2\pi} \frac{\cos(\theta_2)}{r}$, sforcimet sipas drejtimit radial
- $\sigma_{\theta k} = \frac{P}{\pi \cdot D}$ dhe $\sigma_{\theta k2} = \frac{P}{2\pi} \frac{\cos(\theta_2)}{r}$, sforcimi sipas drejtimit normal me radialin
- $\sigma_{r\theta k1} = 0$ dhe $\sigma_{r\theta k2} = \frac{P}{2\pi} \frac{\sin(\theta_2)}{r}$, sforcimi tangjencial

Tek të dyja rastet, pas kundërvalës, shohim që kënaqen kushtet statike në kontur dhe pas kësaj faze kemi të drejtën të depërtojmë në çdo pikë të brendshme të diskut për të gjetur sforcimet normale dhe tangjenciale.

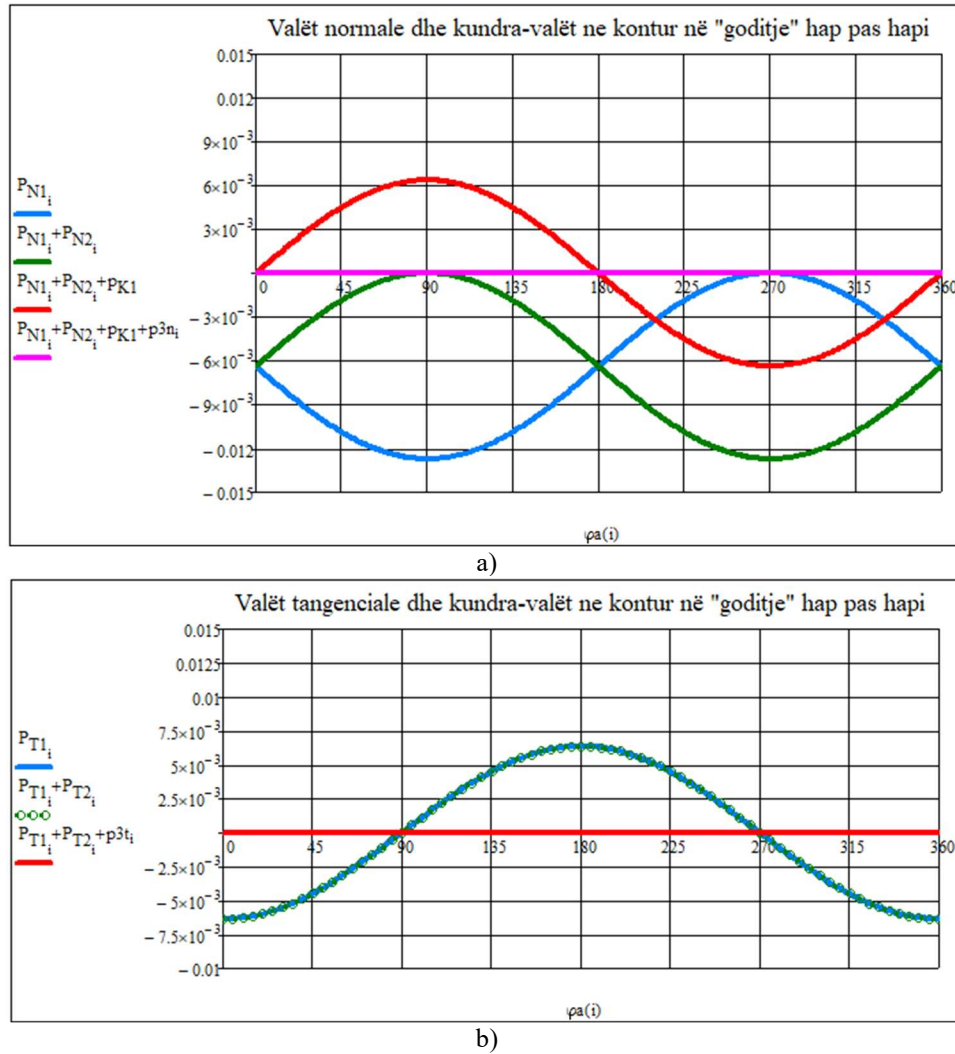


Figura 4.6 Valët në kontur në "goditje" hap pas hapi

a) Valët normale dhe kundërvalët në kontur, b) Valët tangjenciale dhe kundërvalët në kontur

Shpërndarja e sforcimeve në disk nga valët dhe kundërvalët, nga drejtimi radial në drejtimit e sistemit kartezyan të akseve me matricën përkatëse të rrotullimit do të jenë si në vijim:

- **sforcimet normale sipas drejtimit të x**

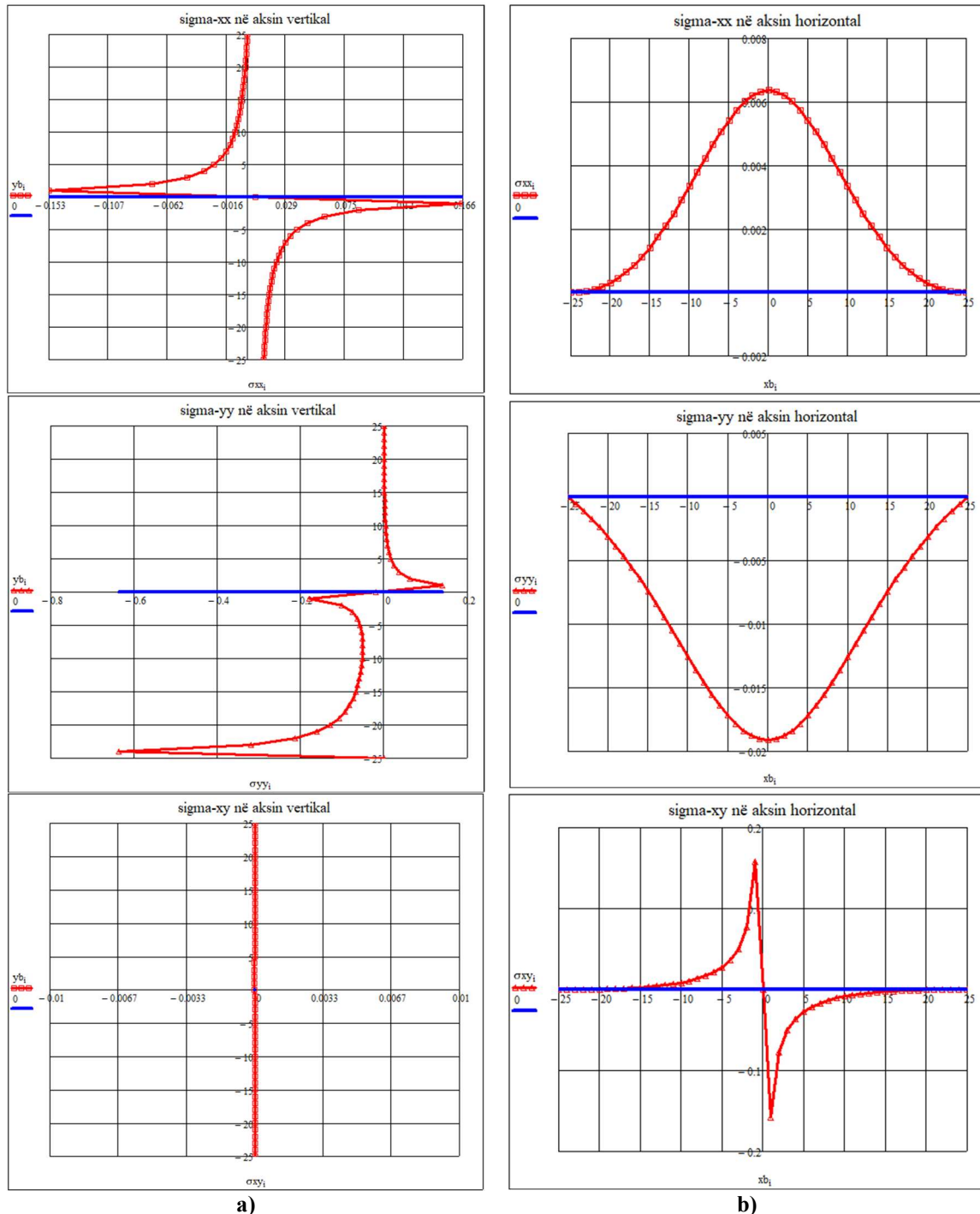
$$\sigma_{xx} = \sigma_{r1} \cdot \sin^2(\theta_1) + \sigma_{r2} \cdot \sin^2(\theta_1) + \frac{P}{\pi \cdot D} + \sigma_{rk2} \cdot \sin^2(\theta_2) + \sigma_{\theta k2} \cdot \cos^2(\theta_2) + \sigma_{r\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2) \quad (4.5)$$

- **sforcimet normale sipas drejtimit të y**

$$\sigma_{yy} = \sigma_{r1} \cdot \cos^2(\theta_1) + \sigma_{r2} \cdot \cos^2(\theta_1) + \frac{P}{\pi \cdot D} + \sigma_{rk2} \cdot \cos^2(\theta_2) + \sigma_{\theta k2} \cdot \sin^2(\theta_2) - \sigma_{r\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2) \quad (4.6)$$

• **sforcimet tangjenciale**

$$\sigma_{xy} = 0.5 \cdot \sigma_{r1} \cdot \sin^2(\theta_1) + 0.5 \cdot \sigma_{r2} \cdot \cos^2(\theta_1) + 0.5 \cdot \sigma_{rk2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2) - 0.5 \cdot \sigma_{\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2) + \sigma_{r\theta k2} \cdot \cos(2 \cdot \theta_2) \quad (4.7)$$



a) b)
Figura 4.7 Shpërndarja e sforcimeve në forcat qëndrore – konturore
a) në rrafshin vertikal, b) në rrafshin horizontal

Pra siç shikohet nga shpërndarja e sforcimeve, kemi disa valë që “lëshohen të parat” të cilat përcaktojnë gjendjen e sforcuar për diskun dhe pastaj kemi kundërvalët, që stabilizojnë gjendjen. Kjo tregohet e detajuar në tabelën 1.

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E
AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

Tabela 4.1 Valët dhe kundërvalët në përcaktimin e sforcimeve

Sforcimet natyra	Valët primare			Kundërvalët		
	nga P_1	nga P_2	konstante	σ_{rk2}	$\sigma_{\theta k2}$	$\sigma_{r\theta k2}$
σ_{xx}	$\sigma_{r1} \cdot \sin^2(\theta_1)$	$\sigma_{r2} \cdot \sin^2(\theta_1)$	$\frac{P}{\pi \cdot D}$	$\sigma_{rk2} \cdot \sin^2(\theta_2)$	$\sigma_{\theta k2} \cdot \cos^2(\theta_2)$	$\sigma_{r\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2)$
σ_{yy}	$\sigma_{r1} \cdot \sin^2(\theta_1)$	$\sigma_{r2} \cdot \sin^2(\theta_1)$	$\frac{P}{\pi \cdot D}$	$\sigma_{rk2} \cdot \sin^2(\theta_2)$	$\sigma_{\theta k2} \cdot \cos^2(\theta_2)$	$\sigma_{r\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2)$
σ_{xy}	$0.5 \cdot \sigma_{r1} \cdot \sin^2(\theta_1)$	$0.5 \cdot \sigma_{r2} \cdot \cos^2(\theta_1)$	0	$0.5 \cdot \sigma_{rk2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2)$	$-0.5 \cdot \sigma_{\theta k2} \cdot \sin(2 \cdot \theta_2)$	$\sigma_{r\theta k2} \cdot \cos(2 \cdot \theta_2)$

Pas përcaktimeve të këtyre funksioneve ndërtojmë grafikët e shpërndarjes së sforcimeve normale dhe tangjenciale sipas akseve vertikale dhe horizontale, si në paraqitjen grafike të bëre në kapitullin 3, treguar në figurën 4.7 (a) dhe (b) përkatësisht.

4.2 METODA E VALËS NË RASTIN E KUNDËRVALËVE TË ÇFARËDOSHME

Metoda MEF është tashme shumë popullore por kërkon kompjuter të fuqishëm dhe programe për të gjetur shpërndarjen e sforcimeve. Nga ana tjetër, metoda e valës me gjetjen e sforcimeve me funksionet biharmonike, ka kufizime dhe vështirësi për gjetjen e tyre në skema të ndryshme reale, ndaj do ta zgjerojmë këtë metodë edhe për raste të çfarëdoshme dhe me ngarkesa të ndryshme.

4.2.1 Metoda analitike e kundërvalës për presion uniformisht të shpërndarë

Në rastin e një skeme plane të çfarëdoshme dhe me një presion normal uniformisht të shpërndarë zgjidhjen me ekuacionet e teorisë së elasticitetit dhe me funksionet biharmonike është plotësisht e njohur.

Le të analizojmë këtë rast me anën e valëve primare në rastin e një skeme të çfarëdoshme me presion normal uniformisht të shpërndarë, figura 4.8. Kjo publikohet për herë të parë në këtë punim me anën e metodës së kundërvalës.

Ndajmë ngarkesën e shpërndarë në segmentet pmv me gjerësi ds , e cila do të jetë $dP = p \cdot ds$ dhe e drejtuar sipas normal me konturin. Sforcimi në një pikë të brendshme të çfarëdoshme të skemës sipas metodës së valës primare, ku kemi vetëm sforcim radial do të jetë sipas ekuacionit 4.8:

$$d\sigma_r = \frac{-2 \cdot dP}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} \quad (4.8)$$

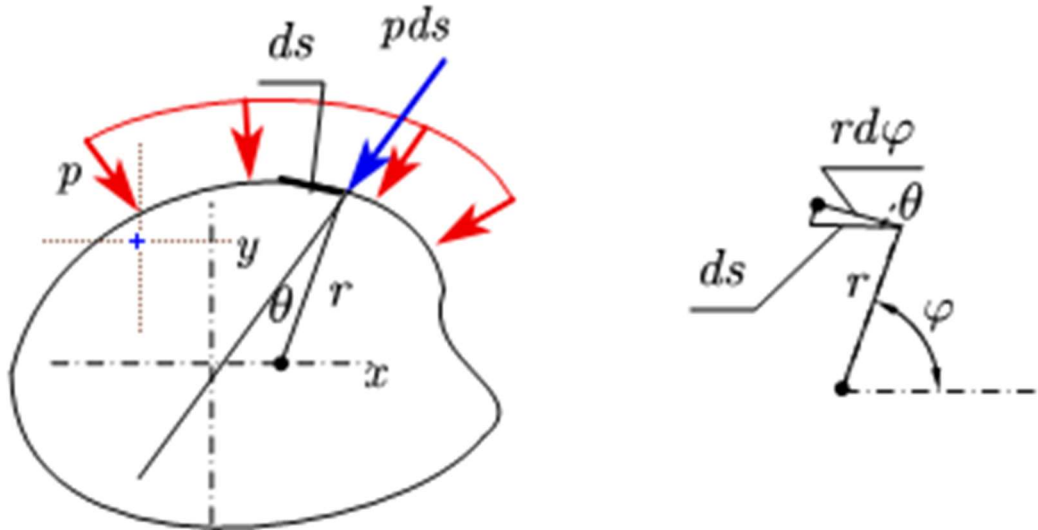


Figura 4.8 Metoda e kundërvalës për presionin normal uniformisht të shpërndarë

Duke vendosur sistemin e akseve në pikën e brendshme dhe duke përdorur koordinata polare, përcaktojmë pozicionin e forcës dP me anën e këndit të ri φ . Kur këndi φ rritet me shtesën $d\varphi$, pika e zbatimit e forcës zhvendoset normal me rezen r në madhësinë $rd\varphi$ dhe po kaq do të jetë edhe projeksioni i segmentit pmv ds sipas këtij drejtimi d.m.th. nxjerrim relacionin, sipas ekuacionit 4.9

$$r \cdot d\varphi = ds \cdot \cos \theta \quad (4.9)$$

Përfundimisht sforcimi nga kjo forcë pmv i pikës së brendshme në drejtimin radial sipas valës primare do të jetë:

$$\begin{aligned} d\sigma_r &= \frac{-2 \cdot dP}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} = \frac{-2 \cdot p \cdot ds}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} = \frac{-2 \cdot p}{\pi} \cdot \frac{r \cdot d\varphi}{r} \\ &= \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ndërsa sforcimet sipas akseve koordinatave karteziat do të jenë:

$$\begin{aligned} d\sigma_x &= d\sigma_r \cdot \cos^2 \varphi \\ d\sigma_y &= d\sigma_r \cdot \sin^2 \varphi \\ d\sigma_{xy} &= d\sigma_r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.11)$$

Nga presioni në komplet konturin, duke ditur se akset x dhe y nuk ndryshojnë drejtimin si drejtimi radial, duke kaluar në integral, marrim sforcimin në këtë pikë të brendshme nga komplet ngarkesa:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x &= \int_0^{2\pi} d\sigma_x = \int_0^{2\pi} d\sigma_r \cdot \cos^2 \varphi = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \cos^2 \varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} = \frac{-p}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi \\
 &= -p \\
 \sigma_y &= \int_0^{2\pi} d\sigma_y = \int_0^{2\pi} d\sigma_r \cdot \sin^2 \varphi = \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \sin^2 \varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \frac{-p}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi \\
 &= -p \\
 \sigma_{xy} &= \int_0^{2\pi} d\sigma_{xy} = \int_0^{2\pi} d\sigma_r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{-p}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin 2\varphi d\varphi \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

4.2.2 Metoda analitike e kundërvälës për presion jo-uniformisht të shpërndarë

Në rastin e një skeme plane të çfarëdoshme dhe me një presion normal dhe tangjencial jo uniformisht të shpërndarë zgjidhjen duhet ta kërkojmë me ekuacionet e teorisë së elasticitetit dhe me funksionet biharmonike, që po publikohet për herë të parë në këtë punim. Duke ndarë presionin normal dhe tangjencial më vete mund t'i zgjidhim me metodën e pavarësisë. Siç u përmend në paragrafin e mëparshëm për presionin normal gjetëm zgjidhjen $d\sigma_{rN} = \frac{-2 \cdot p(\varphi) \cdot d\varphi}{\pi}$. Analizojmë presionin tangjencial jo uniformisht të shpërndarë.

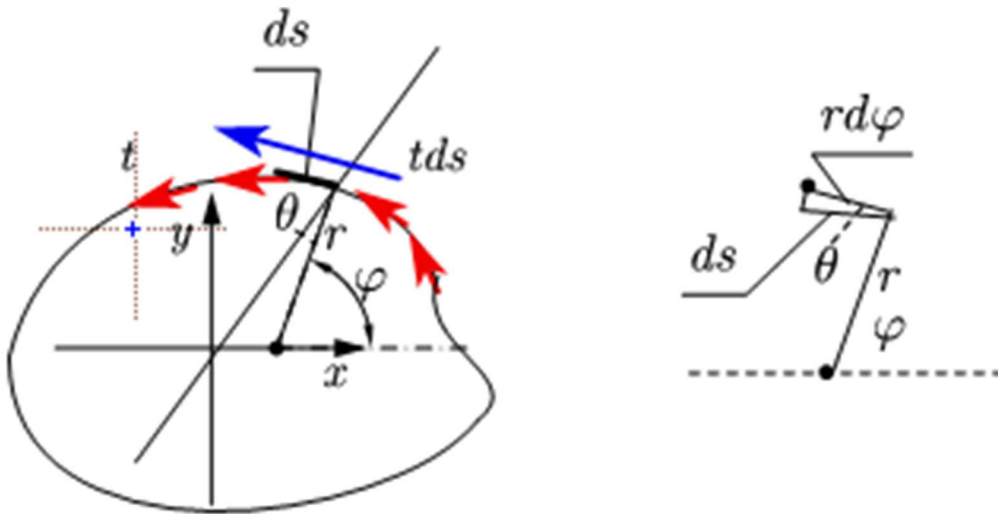


Figura 4.9 Metoda e kundërvälës për presionin tangjencial uniformisht të shpërndarë

Nga gjeometria kemi:

$$r \cdot d\varphi = ds \cdot \cos(90^\circ - \theta) = ds \cdot \sin \theta \quad (4.13)$$

Dhe qe këndej nxjerrim ekuacionin për sforcimet radiale nga presioni tangjencial

$$\begin{aligned} d\sigma_r &= \frac{-2 \cdot dT}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} = \frac{-2 \cdot t \cdot ds}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r} = \frac{-2 \cdot t \cdot r \cdot d\varphi}{\pi} \cdot \frac{\cos \theta}{r \cdot \sin \theta} \\ &= \frac{-2 \cdot t(\varphi) \cdot d\varphi}{\pi \cdot \tan \theta} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Ndërsa sforcimet sipas akseve koordinatave karteziat do të jenë:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= d\sigma_r \cdot \cos^2 \varphi \\ d\sigma_y &= d\sigma_r \cdot \sin^2 \varphi \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$d\sigma_{xy} = d\sigma_r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi$$

Në këtë rast për zgjidhjen analitike me metodën e valës duhet të njihet shpërndarja e presionit $t(\varphi)$ dhe këndit θ midis forcave të shpërndara dhe drejtimit radial të pikës, të cilës i kërkojmë sforcimet.

4.2.3 Metoda numerike e kundërvalës për presion jo-uniformisht të shpërndarë

Nëse marrim sërish në studim rastin e diskut të mësipërm, shpërndarja e presionit në kontur do të jetë si figura 4.8 dhe 4.9 (të hapur në gjithë gjatësinë e konturit). Meqenëse, detyra është për të gjetur ligjësinë e presionit e cila do të plotësoj kushtin në kontur, atëherë duke mos kërkuar më në tabelën e funksioneve funksionet biharmonike, le ta “gjuajmë” konturin me kundërvalë me të njëjtin presion të jashtëm. Pra sikur të jetë “pasqyrë” dhe e gjitha valë të reflektohet. Ky presion i kundërt grafiksht në figurat 4.13 dhe 4.14 jepet nga grafiku me ngjyrën blu. Për një pjesë të kontur do të kemi ketë forcë kthimi, e cila do të ketë një shpërndarje të ngarkesës në brendësi të diskut.

Kështu që kjo metodë ka një përparësi, pasi:

- Plotëson kushtin statik në kontur sepse “goditet” me presionin e kundërt
- Pas rikthimit të kundërvalës së bashku me valën primare, gjendet direkt shpërndarja e sforcimeve normale dhe tangjenciale në çdo pikë të diskut.

Kjo procedurë, do të zvogëloj kohën e përcaktimit të ngarkesës, si dhe vështirësitë matematikore për të gjetur kundërvalët nga funksionet biharmonike.

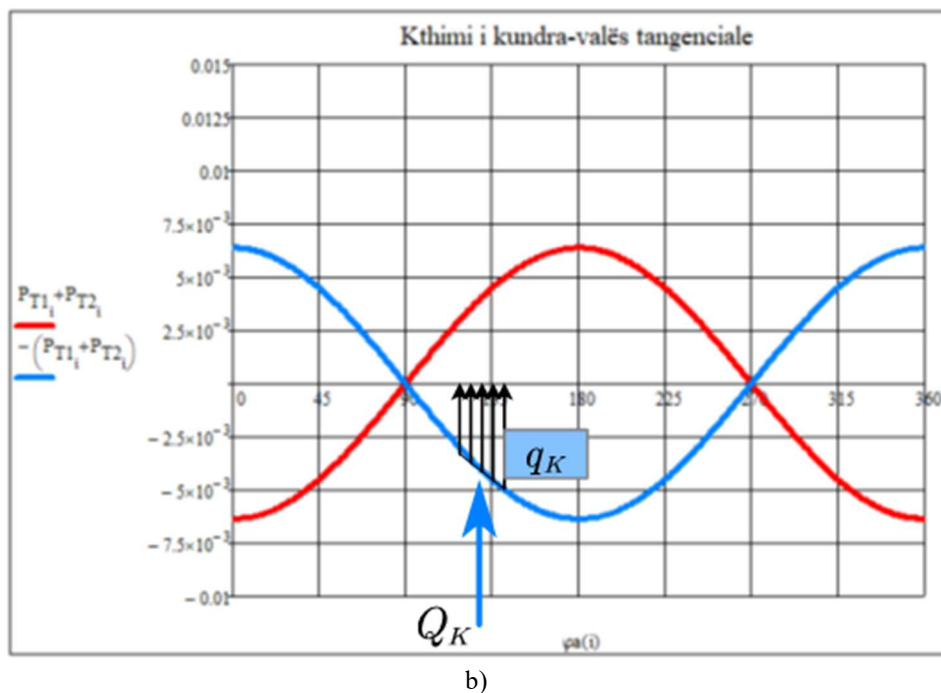
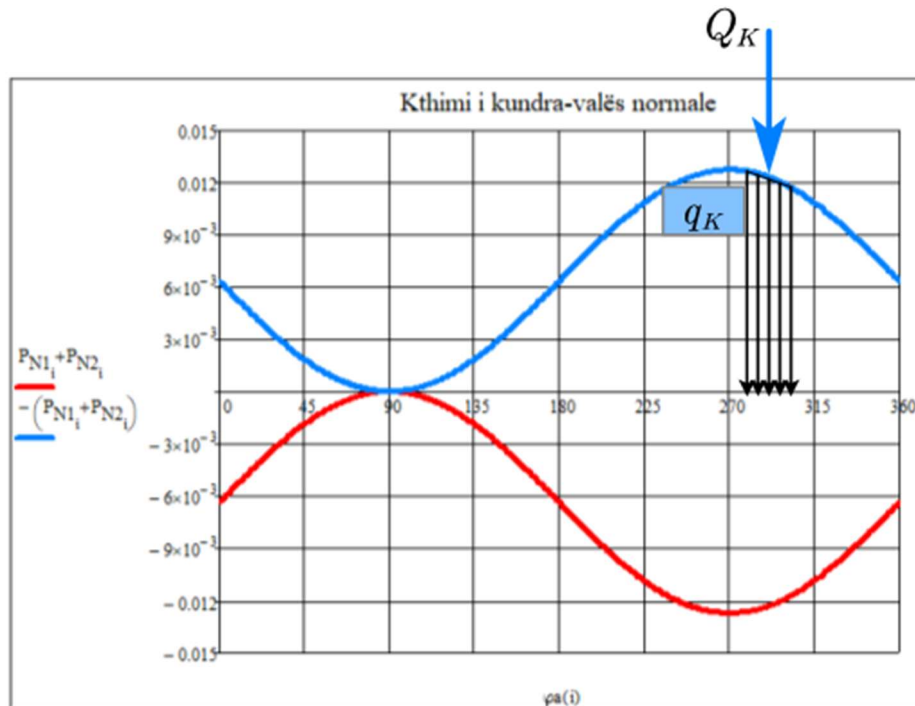


Figura 4.10 Kundërvala dhe ngarkesa elementare
a) rasti për ngarkesën normale, b) rasti për ngarkesën tangenciale

Le të shohim hap pas hapi, këtë metodë vale duke ndërtuar algoritmin për përcaktimin e shpërndarjes së sforcimeve normale dhe tangenciale në këtë disk. Nga presioni në kontur do të kemi këto forcë elementare ku secila prej tyre do të ketë pjesën e vetë të ndikimi, figura 4.15 Presioni në kontur normal do të jetë:

$$P_{KN} = -p_{normal} \quad (4.16)$$

Forcat elementare të kësaj kundërvalë për një kënd $d\varphi$ do të jetë:

$$dP_k = P_{KN} \cdot dS \quad (4.17)$$

ku: $dS = r \cdot d\varphi$

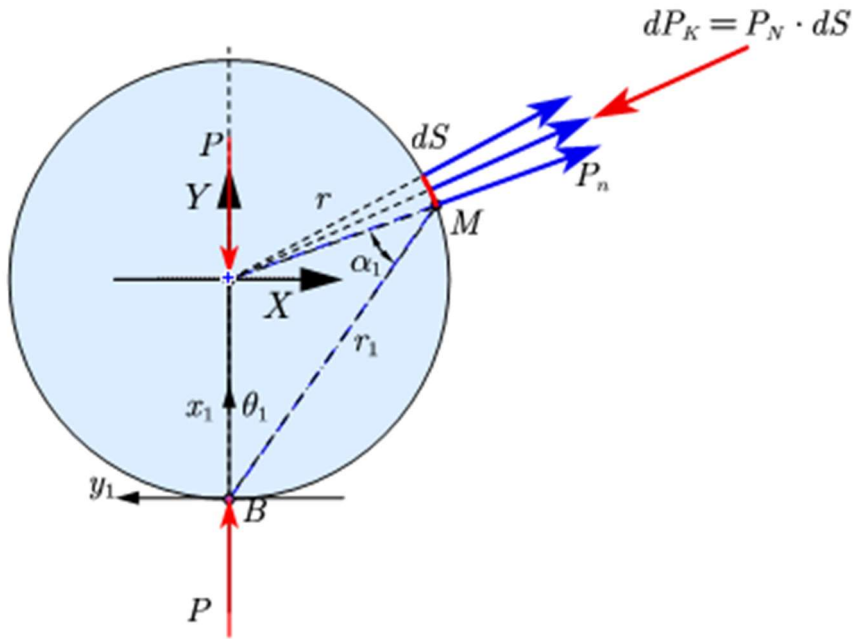


Figura 4.11 Forca elementare e kundërt si pjesë e kundërvalës

Kjo mikro-kundërvalë, do të shpërndahet në disk, duke shkaktuar sforcime normale dhe tangjenciale të cilat së bashku me valën primare do të jetë gjendja reale e sforcuar e diskut tonë, figura 4.11.

Le të shohim në një pikë të çfarëdoshme N në disk, përveç asaj M ku vepron forca, figura 4.12, e cila ka koordinatat x_N dhe y_N . Në trekëndëshin OMN, ku kemi të njohur $OM = r_R$, $ON = r_N = \sqrt{x_N^2 + y_N^2}$, si dhe këndin $\beta_k = \alpha_k - \varphi_k$, duke qenë se gjeometrikisht kemi 2 brinjë dhe një kënd të dhënë atëherë ky trekëndësh është plotësisht i përcaktuar dhe çdo përmasë tjetër apo kënd është e varur. Ajo që ne na intereson, për shpërndarjen e sforcimeve normale dhe tangjenciale është rrezja ρ dhe ε_k , që për rastin e çfarëdoshëm do të shpreheshin si në vijim:

$$\rho = \sqrt{r_R^2 + r_N^2 - 2 \cdot r_R \cdot r_N \cdot \cos(\beta_k)} \quad (4.18)$$

Ndërsa për sa i përket këndit do të kemi:

$$\varepsilon_k = \varphi_k - \vartheta_k \quad (4.19)$$

ku $\vartheta_k = \sin^{-1} \left(\frac{r_N}{\rho} \cdot \sin(\beta_k) \right)$

Kështu që pas këtij përcaktimi do të gjejmë shpërndarjen e sforcimeve në çdo pikë të diskut siç tregohet në figurën 4.13:

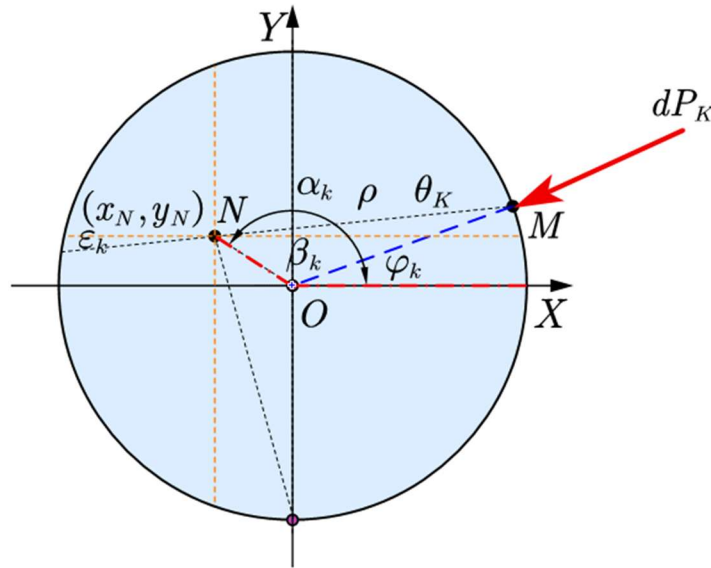


Figura 4.12 Analiza gjeometrike e pikave në disk për një force elementare në kontur

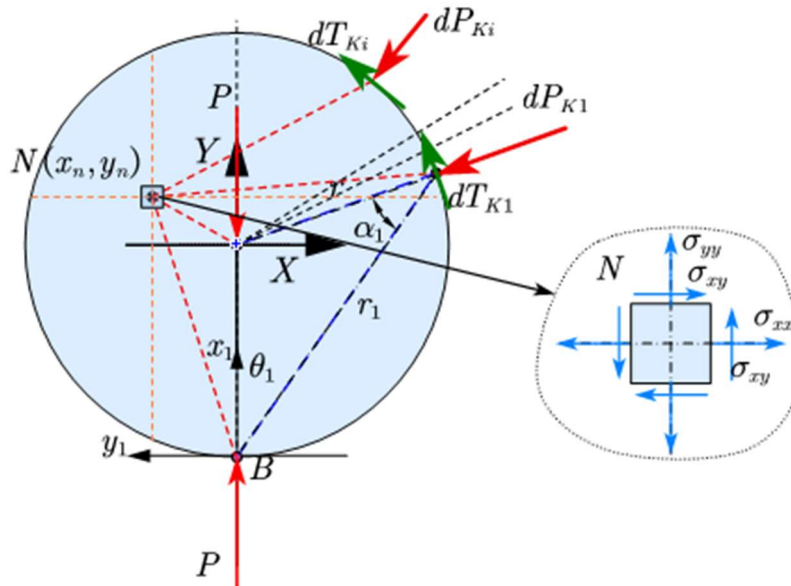


Figura 4.13 Sforcimi në një pikë nga vala primare dhe nga kundërvalët

Ekuacionet për të përcaktuar këto sforcime, në drejtimin vertikal, që kalon sipas pikës N, do të jenë grup ekuacionet 4.20-4.22 :

- **Sforcimet në planin vertikal**

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^V &= \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin \theta_j^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \sin \varepsilon_k^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \sin \varepsilon_k^2\end{aligned}\quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{yy}^V &= \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin \theta_j^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \cos \varepsilon_k^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \cos \varepsilon_k^2\end{aligned}\quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{xy}^V &= \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin(2 \cdot \theta_j) \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \sin(2 \cdot \varepsilon_k) \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \sin(2 \cdot \varepsilon_k)\end{aligned}\quad (4.22)$$

Ekuacionet për të përcaktuar këto sforcime, në drejtimin horizontal, që kalon sipas pikës N, do të jenë grup ekuacionet 4.23-4.25 :

- **Sforcimet në planin horizontal**

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^H &= \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin \theta_j^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \cos \varepsilon_k^2 \\ &+ \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \cos \varepsilon_k^2\end{aligned}\quad (4.23)$$

$$\sigma_{yy}^H = \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin \theta_j^2 + \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \sin \varepsilon_k^2 + \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \sin \varepsilon_k^2 \quad (4.24)$$

$$\sigma_{xy}^H = \sum_{j=1}^n \frac{-KF_j \cdot P_j}{\pi \cdot r_j} \cdot \cos \theta_j \cdot \sin(2 \cdot \theta_j) + \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKx_i \cdot dP_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \cos \vartheta_k \cdot \sin(2 \cdot \varepsilon_k) + \sum_{i=1}^{ndarje} \frac{-KKy_i \cdot dT_{Ki}}{\pi \cdot \rho_i} \cdot \sin \vartheta_k \cdot \sin(2 \cdot \varepsilon_k) \quad (4.25)$$

Ku $KF = 1$ për forcat në brendësi, dhe $KF = 2$ për forcat që veprojnë në kontur.

Ndërsa për sa i përket faktorit të forcës së kundërvalës duke qenë se ajo është një ngarkese e shpërndarë që vjen nga masivi atëherë ky faktor do të jetë $KKx_i = 1$. Ndërsa në rastet kur në kontur do të kemi kusht tjetër, siç janë në rastin e plani horizontal dhe vertikal, që presioni në drejtimin radial është zero, atëherë edhe sforcimi në këtë rast në këtë drejtim do të jetë zero. Kështu që për të korrigjuar këtë sforcim kemi marrë këtë faktor që plotëson këtë kusht statik.

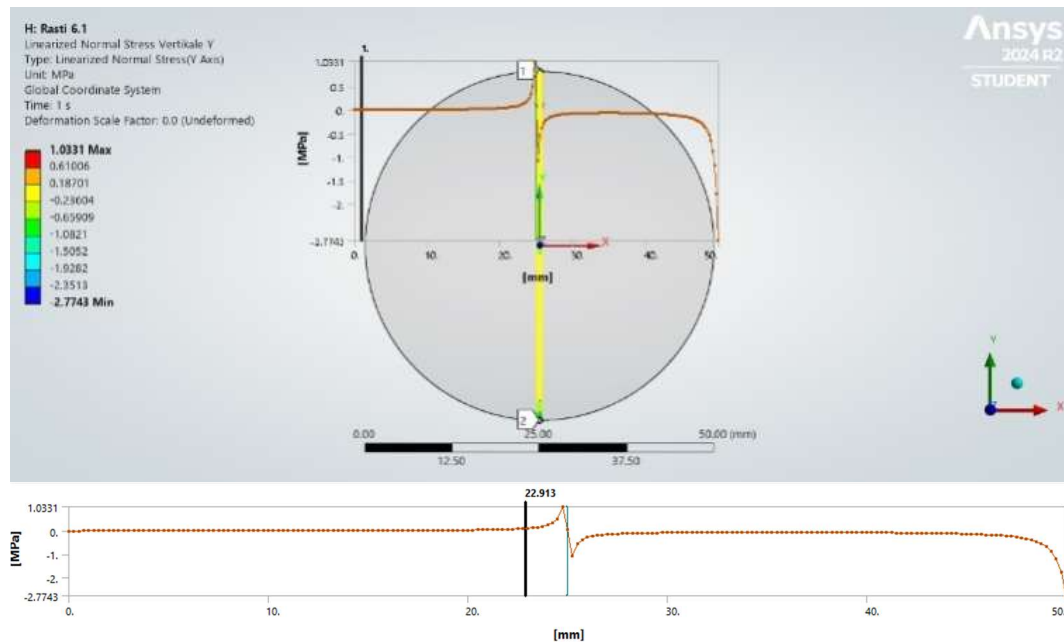


Figura 4.14 Zgjidhja me MEF dhe krahasimi i metodave

Le të krahasojmë të treja metodat për rezultatet e shpërndarjes së sforcimeve, ku në fokus tani është Metoda e Valës e krijuar në këtë paragraf, figurat 4.14 dhe 4.15

Në figurën 4.14 është paraqitur rezultati me **MEF** dhe tregon shpërndarjen e këtij sforcimi në planin vertikal. Ndërsa në figurën 4.15, është treguar rezultati grafik për **MV** me zgjidhjen me funksionet biharmonike dhe **MV** me zgjidhjen e përgjithshme. Duket qartë që paraqitja grafike e zgjidhjes së **MV** për çdo rast është me saktësi të madhe si me zgjidhjen analitike të **MV** (pikat) dhe me **MEF**.

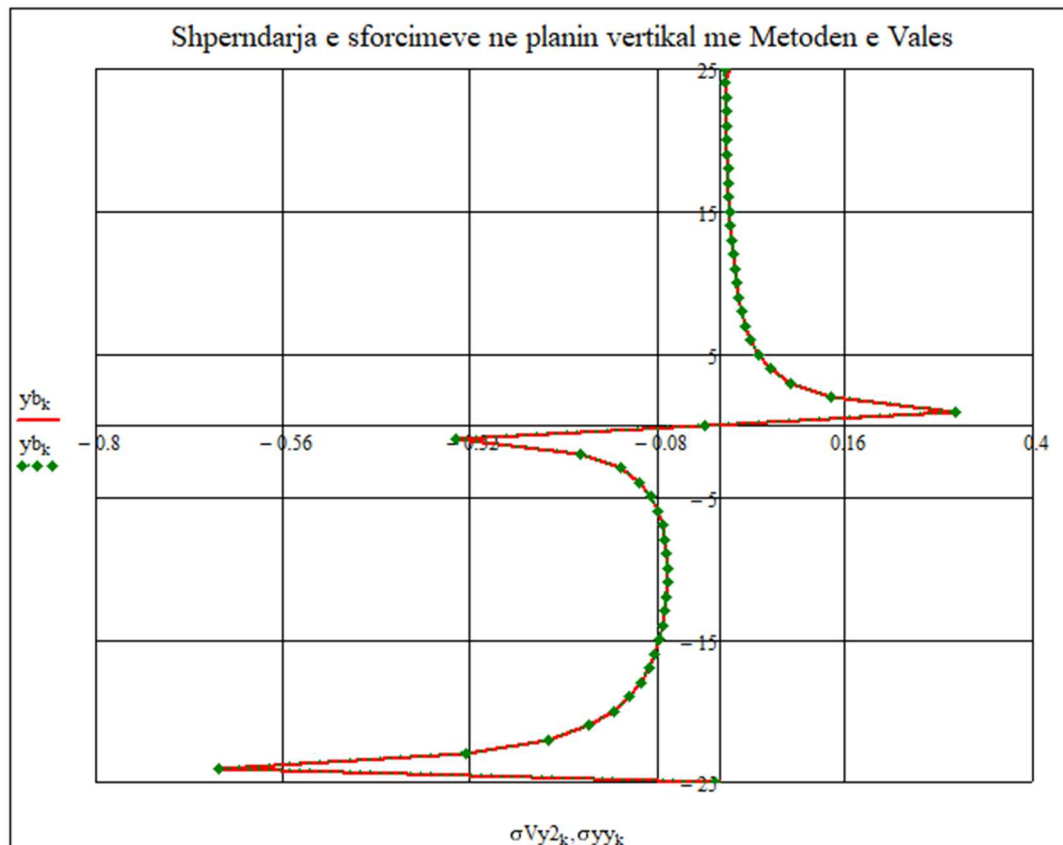


Figura 4.15 Shpërndarja e sforcimeve me Metodën e Valës në planin vertikal

Kjo zgjidhje algoritmike është përfundimisht zgjidhja e çdo problemi, për gjetjen e sforcimeve në çdo pike të tij me Metodën e Valës.

4.3 RASTI I NJË SISTEMI EKUVALENT ME ZERO PREJ TRE FORCAVE, NJË FORCË QËNDRORE DY KONTURORE

Analizojmë diskun rrethor me tre forca, ku njëra qëndrore dhe dy konturore, me një kënd të njohur shmangie nga drejtimi vertikal α . Siç nxorëm konkluzionet e përgjithshme për forcat brenda konturit dhe në kontur mund të shprehemi për valët primare nga të tre forcat sipas radhës.

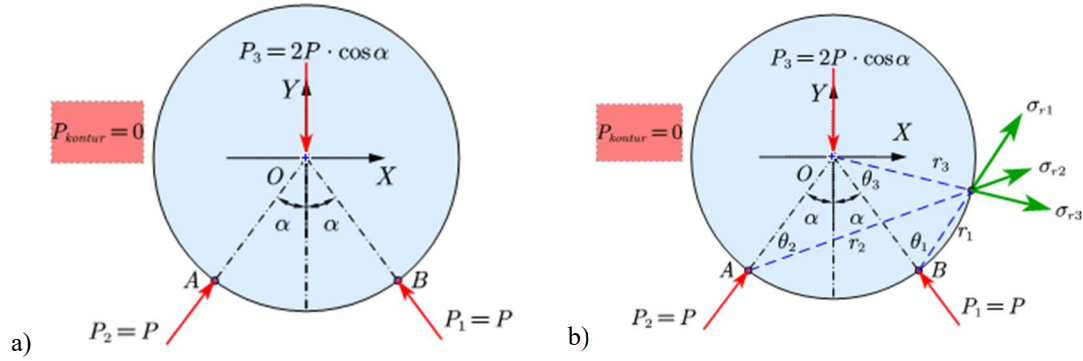


Figura 4.16 Skema llogaritëse për “Metodën e Valës” rasti i tre forcave qëndrore-konturore
a) Ngarkesat dhe ndarja e tyre, b) sforcimet radiale nga secila ngarkesë

Shpërndarja e valëve në këtë rast do të jetë si vijon:

- **Për forcat në kontur:**

$$\sigma_{r1} = \frac{-2 \cdot P_1}{\pi \cdot r_1} \cdot \cos(\theta_1) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot r_1} \cdot \cos(\theta_1)$$

$$\sigma_{r2} = \frac{-2 \cdot P_2}{\pi \cdot r_2} \cdot \cos(\theta_2) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot r_2} \cdot \cos(\theta_2)$$

- **Për forcën në qendër:**

$$\sigma_{r3} = \frac{-P_3}{\pi \cdot r_3} \cdot \cos(\theta_3) = \frac{-P \cos \alpha}{\pi \cdot r_3} \cdot \cos(\theta_3)$$

Nga gjeometria kemi këto relacione $r_1 = D \cdot \cos \theta_1$, $r_2 = D \cdot \cos \theta_2$ dhe $r_3 = \frac{D}{2}$, kështu që sforcimet radiale respektive në pikën e konturit do të jenë:

$$\sigma_{r1} = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot r_1} \cdot \cos(\theta_1) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D}$$

$$\sigma_{r2} = \frac{-P}{\pi \cdot r_2} \cdot \cos(\theta_2) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D}$$

$$\sigma_{r3} = \frac{-4P \cos \alpha}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_3)$$

Nga sforcimet radiale kalojmë në presionin radial respektive në kontur, nga të treja forcat, duke ditur nga gjeometria e këndeve se $\alpha_1 = \theta_1$, $\alpha_2 = \theta_2$, $\alpha_3 = 0$ d.m.th.:

$$p_{r1} = \sigma_{r1} \cdot \cos(\alpha_1) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_1)$$

$$p_{r2} = \sigma_{r2} \cdot \cos(\alpha_2) = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2)$$

$$p_{r3} = \sigma_{r3} \cdot \cos(\alpha_3) = \frac{-4P \cos \alpha}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_3)$$

Pas projektiveve të këtyre dy presioneve në drejtimin normal dhe tangjencial të konturit, përfundimisht do të kemi këto presione normal dhe tangjencial me konturin:

- Presioni norma dhe tangjencial në kontur

$$p_{Normal} = p_{r1} \cdot \cos(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \cos(\alpha_2) + p_{r3} \cdot \cos(\alpha_3)$$

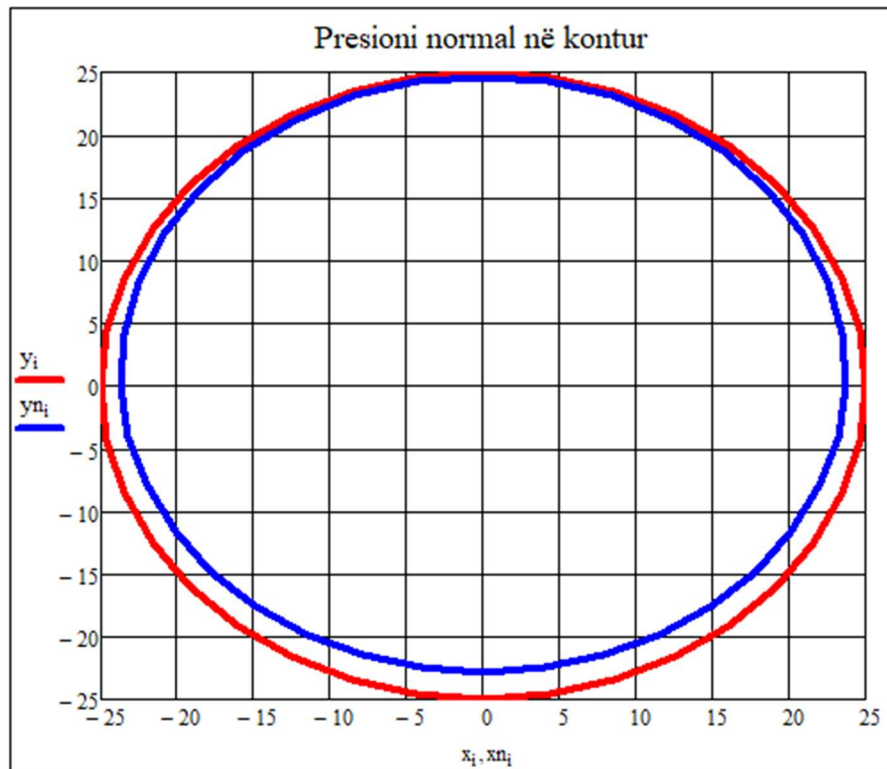
$$p_{Tangjencial} = p_{r1} \cdot \sin(\alpha_1) + p_{r2} \cdot \sin(\alpha_2) + p_{r3} \cdot \sin(\alpha_3)$$

Duke pasur parasysh nga gjeometria se: $(\theta_3 - \alpha) + 2 \cdot \theta_1 = \pi$ dhe $(\theta_3 + \alpha) + 2 \cdot \theta_2 = \pi$, pas zëvendësimit konkretisht, do të nxirrnim presionin normal dhe tangjencial të skemës së dhënë:

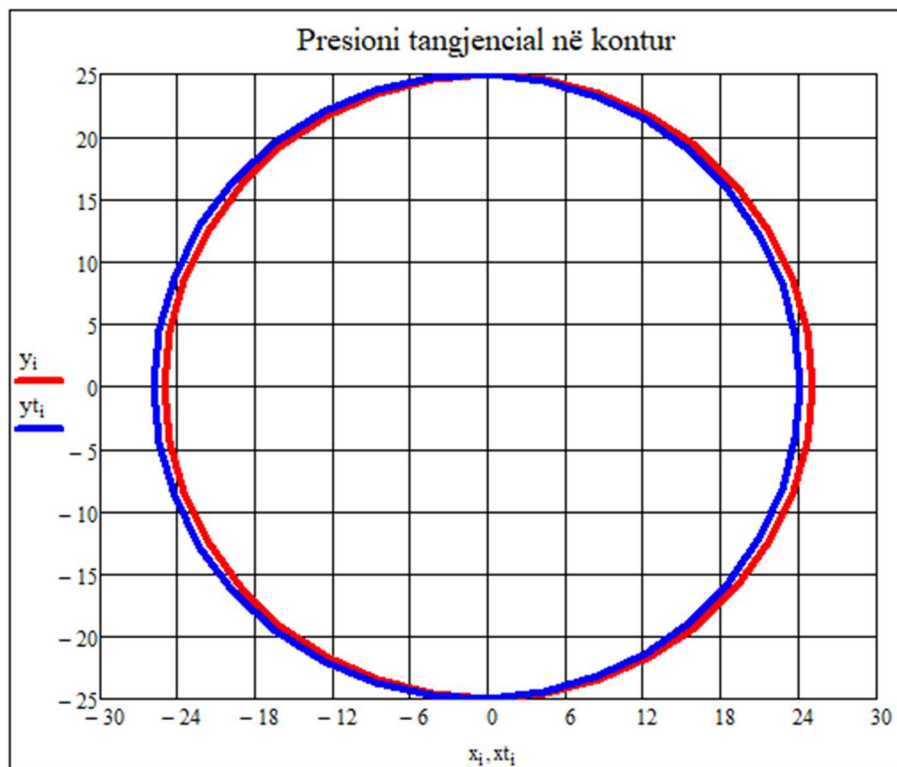
$$\begin{aligned} p_{Normal} &= \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos^2(\theta_1) + \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \cos^2(\theta_2) + \frac{-4P \cos \alpha}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_3) = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \\ &\left[\frac{1+\cos \theta_1}{2} + \frac{1+\cos \theta_2}{2} + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\theta_3) \right] = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \left[1 + \frac{\cos 2\theta_1 + \cos 2\theta_2}{2} + 2 \cdot \right. \\ &\left. \cos \alpha \cdot \cos(\theta_3) \right] = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \left[1 - \frac{\cos(\alpha - \theta_3) + \cos(\alpha + \theta_3)}{2} + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos(\theta_3) \right] = \\ &\frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot \left[1 - \frac{\cos \alpha \cos \theta_3 + \sin \alpha \sin \theta_3 + \cos \alpha \cos \theta_3 - \sin \alpha \sin \theta_3}{2} + 2 \cdot \cos \alpha \cdot \right. \\ &\left. \cos(\theta_3) \right] = \frac{-2P}{\pi \cdot D} \cdot [1 + \cos \alpha \cdot \cos(\theta_3)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{Tangjencial} &= \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_1) \cdot \sin(\theta_1) + \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \cos(\theta_2) \cdot \sin(\theta_2) = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \\ &\left[\frac{\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2)}{2} \right] = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \left[\frac{\sin(\theta_3 - \alpha) + \sin(\theta_3 + \alpha)}{2} \right] = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \\ &\left[\frac{\sin \theta_3 \cos \alpha - \cos \theta_3 \sin \alpha + \sin \theta_3 \cos \alpha + \cos \theta_3 \sin \alpha}{2} \right] = \frac{-2 \cdot P}{\pi \cdot D} \cdot \sin \theta_3 \cos \alpha \end{aligned}$$

Rezultatet grafike të këtyre funksioneve të shpërndarjes së presioneve normal dhe tangjencial në kontur jepen si në figurat 4.17(a) dhe (b). Nga këto rezultate duket qartë se në kontur i kemi të dy presionet, normalin dhe tangjencialin, në ndryshim nga pjesa më e madhe e rasteve të diskutuara në kapitullin 3 dhe këto nuk janë uniformisht të shpërndara. Si për presionin normal dhe tangjencial, ligjësia është sipas funksioneve *kosinusoidale* dhe *sinusoidale*.



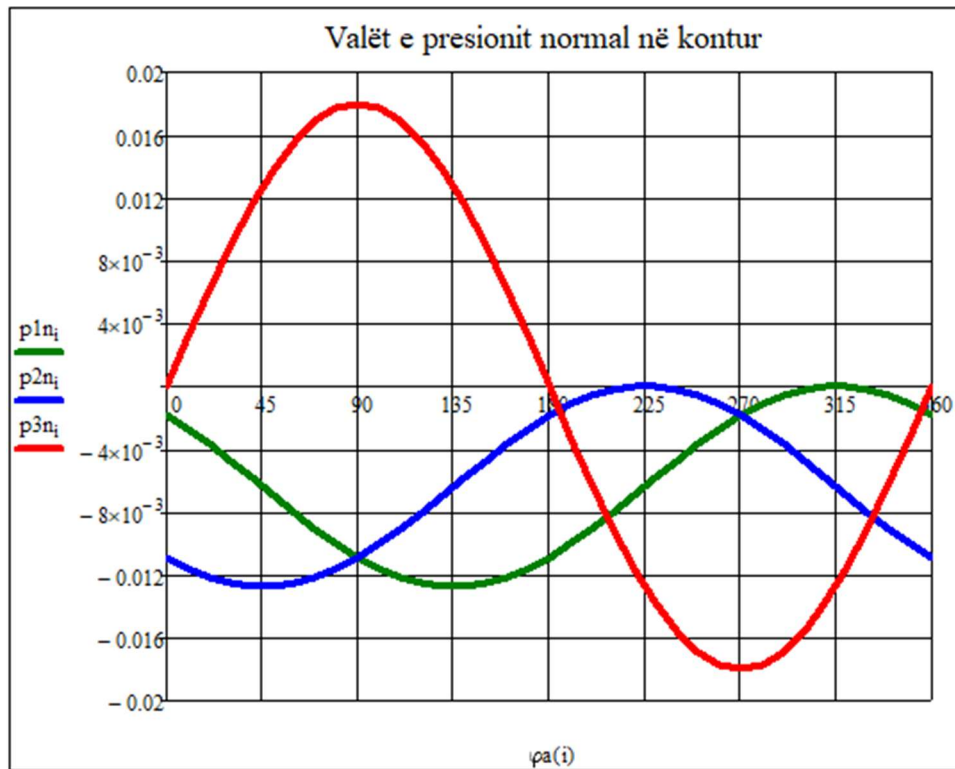
a)



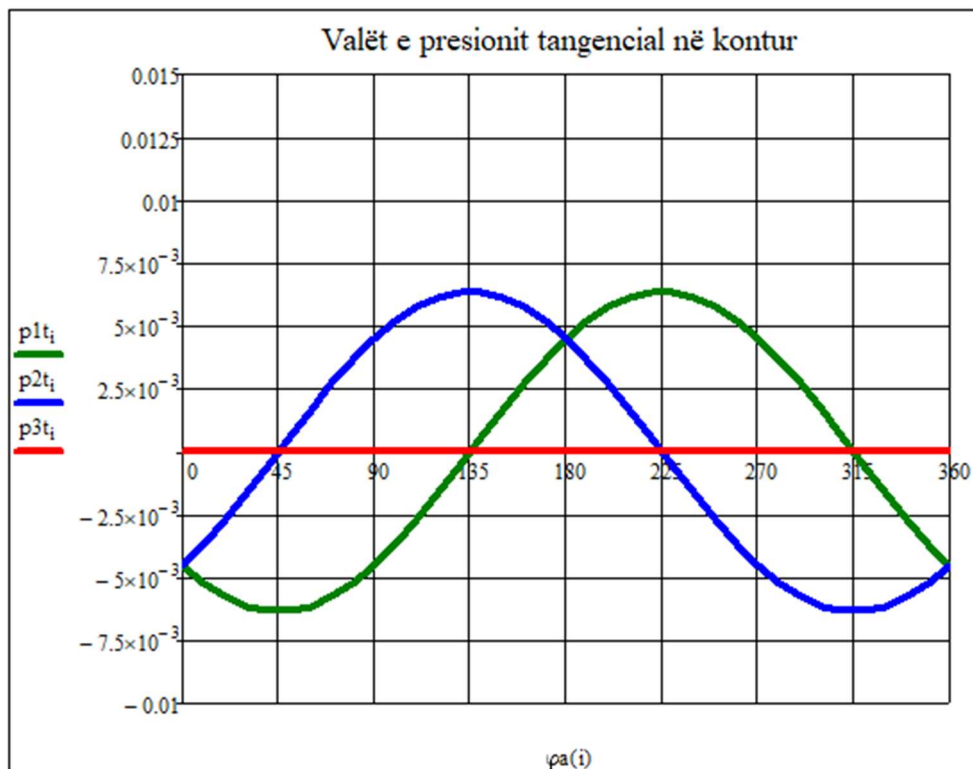
b)

Figura 4.17 Shpërndarja e presionit në kontur
a) presioni normal, b) presioni tangjencial

Këta presione normal dhe tangjencial të hapur në kontur do të ishin në formë si në figurën 4.18 (a) dhe (b).



a)



b)

Figura 4.18 Shpërndarja e presionit në konturin i hapur
a) presioni normal në konturin, b) presioni tangjencial në konturin

Kjo skemë mund të studiohet edhe me parimin e pavarësisë së forcave, figura 4.19, dhe të shihet si shumë e dy skemave të rastit të parë.

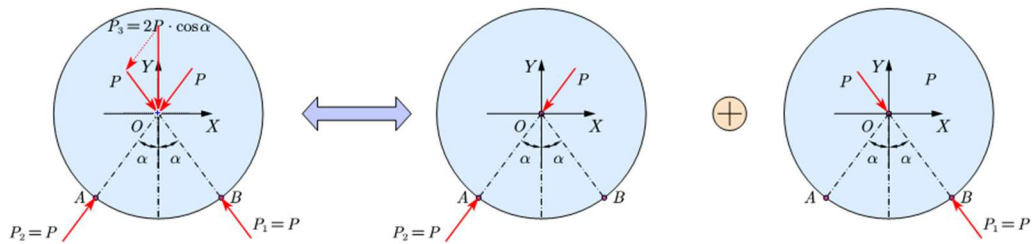


Figura 4.19 Shpërndarja e presionit tangjencial në konturin e hapur

Edhe shumë skema të tjera me forca ekuivalente me zero, me forca brenda konturit dhe në kontur mund të zgjidhen me parimin e **pavarësisë** duke u mbështetur te rasti i parë me dy forca drejtë të kundërta.

KAPITULLI 5

APLIKIMI INXHINIERIK I METODËS SË VALËS

5 PËRDORIMI I METODËS SË VALËS NË TRAUN ME SEKSION TËRTHOR DREJTKËNDËSH

5.1 METODA E VALËS NË TRA NË KOORDINATA POLARE

Në kapitujt 3 dhe 4, u përdor metoda e valës për përcaktimin e shpërndarjes së sforcimeve në çdo pikë të diskut rrethor. Në studimin e hollësishëm të këtij objekti, gjetëm metodën e kthimit të kundërvalës, e cila tashmë mund të aplikohet për çdo rast. Në vijim do të shohim këtë metodë të re, të aplikuar në traun e Rezistencës Materiale por në kufijtë midis hipotezave të Rezistencës së Materialeve dhe zonës së plasticitetit, duke depërtuar edhe brenda zonës së Saint-Venant-it. Këto probleme janë probleme që mund të zgjidhen me **MEF**, por nëpërmjet kësaj metode ne do të japim zgjidhje, të cilat i afrohen zgjidhjes reale dhe për pika që interesohemi, pika të veçanta të objektit në studimit.

Le të konsiderojmë, një tra me këto përmasa, $l_t = 50$ dhe $h_t = 10$, që është i ngarkuar nga një forcë e përqendruar në mes dhe i mbështetur në dy skajet e tij, siç tregohet në figurën 5.1.

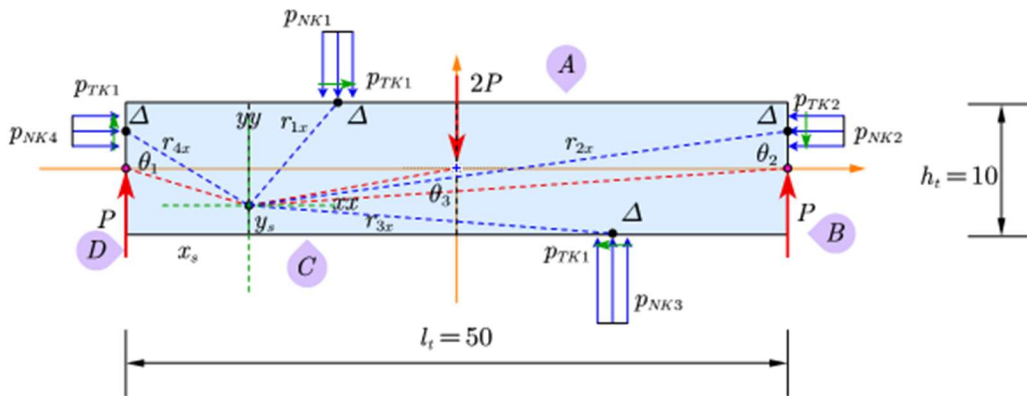


Figura 5.1 Përmasat e traut dhe skemat e ngarkesave

Forca **2P** në tra do të konsiderohet një forcë që vepron në qendër të simetrisë, siç tregohet në figurë. Si rezultat i saj në dy skajet në aksin x do të kemi dy reaksionet të cilat nga mekanika teorike janë forcat **P**. Siç e kemi përmendur edhe në zgjidhjen me **MV** në paragrafin 4.3 edhe këtu, kjo metodë do zhvillohet në dy faza kryesore.

- Me valën primare nga forcat e jashtme të cilat do të shpërndajnë ngarkesën deri në kontur.
- Dhe me kthimin e kundërvalës sipas ligjesisë së shpërndarjes së ngarkesës së çfarëdoshme të shpërndarë në kontur.

5.1.1 Vala primare nga ngarkesat e jashtme

Figura gjeometrike, në këtë rast drejtkëndësh, do të ndahet në katër konture me ligjësi gjeometrike të përcaktuara siç tregohen në figurën 5.1.

- **Konturi A**

Për konturin A, kemi bërë ndarjen e tij në pika sipas ligjesisë:

$$x1_i = \frac{-l_t}{2} + (i - 1) \cdot \Delta_s \quad (5.1)$$

ku i – numri i ndarjeve dhe Δ_s – ndarja në kontur. Skema e shpërndarjes së valëve të sforcimeve radiale në këtë kontur do të jetë si në figurën 5.2

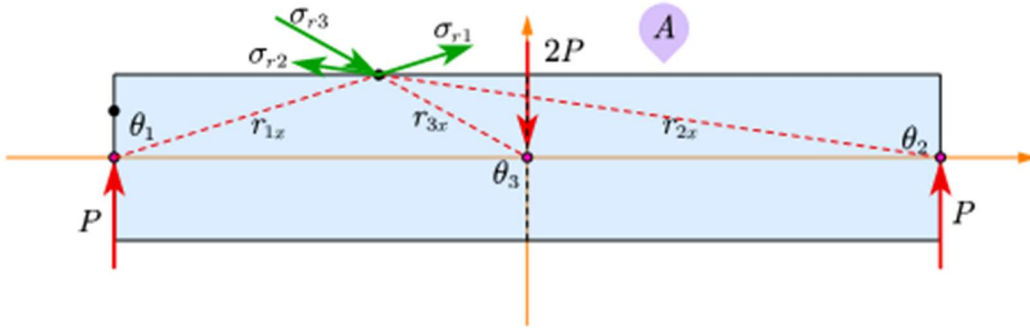


Figura 5.2 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin A

Këndet e përhapjes së valëve primare për çdo pikë të konturit do të jenë

$$\begin{aligned} \theta_{11i} &= \text{atan}\left(\frac{\frac{l_t}{2} + x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right) \\ \theta_{12i} &= \text{atan}\left(\frac{-\frac{l_t}{2} + x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right) \\ \theta_{13i} &= \begin{cases} \pi - \left|\text{atan}\left(\frac{x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right)\right| & \text{n. q. s. } \text{atan}\left(\frac{x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right) < 0 \\ -\pi + \left|\text{atan}\left(\frac{x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right)\right| & \text{n. q. s. } \text{atan}\left(\frac{x1_i}{\frac{h_t}{2}}\right) \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.2)$$

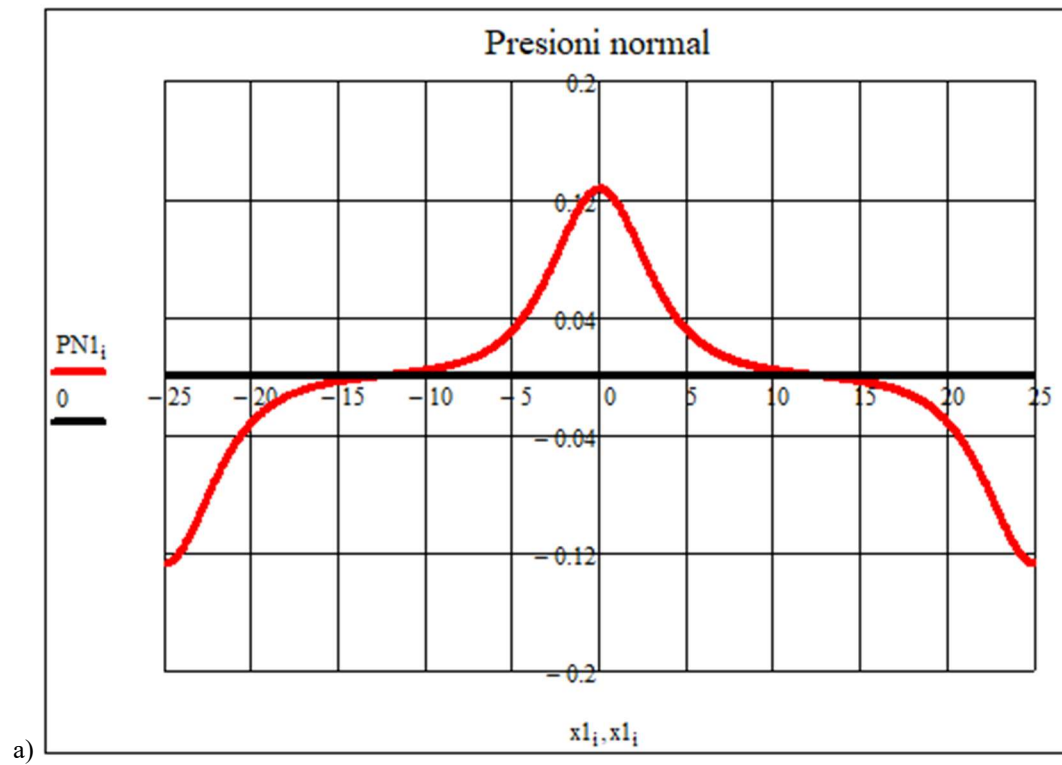
Në funksion të këtyre këndeve kemi shpërndarjen e presioneve normale dhe tangjenciale në kontur si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 5.1 Shpërndarja e presioneve në konturin A

Presioni	Presioni normal	Presioni tangjencial
p_1	$pn_{11} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{11}^4$	$pt_{11} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{11} \cdot \cos \theta_{11}^3$
p_2	$pn_{12} = \frac{-k \cdot P2}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{12}^4$	$pt_{12} = \frac{-k \cdot P2}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{12} \cdot \cos \theta_{12}^3$
p_3	$pn_{13} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{13}^4$	$pt_{13} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{13} \cdot \cos \theta_{13}^3$
Presioni i plotë	$p_{N1} = pn_{11} + pn_{12} + pn_{13}$	$p_{T1} = pt_{11} + pt_{12} + pt_{13}$

ku: $k = 2$ për forcat në kontur dhe $k = 1$ për forcat në brendësi (në masiv).

Rezultatet grafike për këto presione në konturin A, paraqiten në figurën 5.3 (a) dhe (b):



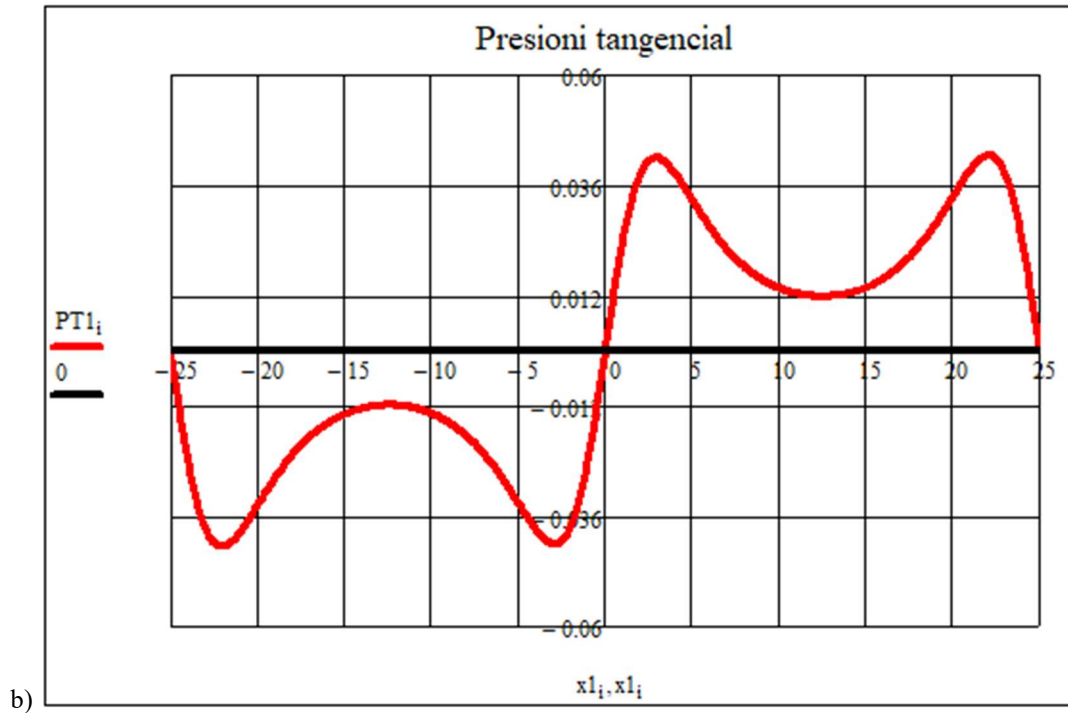


Figura 5.3 Shpërndarja e presionit në konturin A
a) presioni normal në konturin A, b) presioni tangjencial në konturin A

Rezultantja e këtyre presioneve në drejtimin normal dhe tangjencial do të jenë:

$$Ay = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{N1i} + p_{N1i+1}}{2} \cdot \Delta_s = -0.00282 \quad (5.3)$$

$$Ax = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{T1i} + p_{T1i+1}}{2} \cdot \Delta_s = 0 \quad (5.4)$$

I njëjti arsyetim do të ndiqet edhe për konturet e tjerë.

- **Konturi B**

Për konturin B siç tregohet në figurë, kemi realizuar ndarjen e tij në pika sipas ligjesisë:

$$x2_i = \frac{h_t}{2} - (i - 1) \cdot \Delta_p \quad (5.5)$$

ku i – numri i ndarjeve dhe Δ_p – ndarja në kontur. Skema e shpërndarjes së valëve të sforcimeve radiale në këtë kontur do të jetë si në figurën e mëposhtme 5.4.

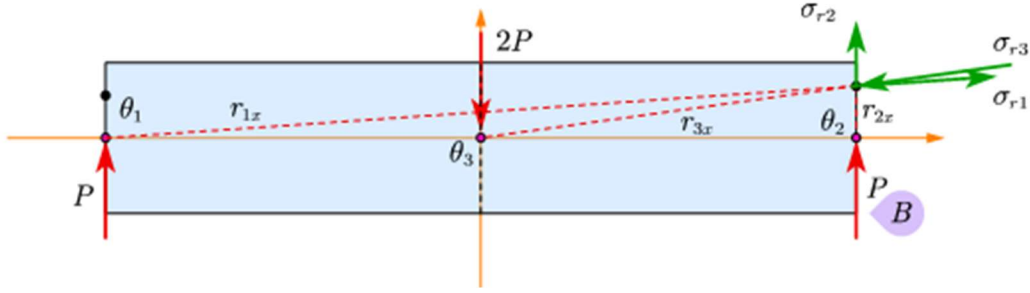


Figura 5.4 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin B

Këndet e përhapjes së valëve primare për çdo pikë të konturit do të jenë:

$$\begin{aligned}\theta_{21i} &= \text{acotan}\left(\frac{x_{2i}}{l_t}\right) \\ \theta_{22i} &= 0 \\ \theta_{23i} &= -\text{acotan}\left(\frac{-x_{2i}}{\frac{l_t}{2}}\right)\end{aligned}\quad (5.6)$$

Në funksion të këtyre këndeve kemi shpërndarjen e presioneve normale dhe tangjenciale në kontur si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 5.2 Shpërndarja e presioneve në konturin B

Presioni	Presioni normal	Presioni tangjencial
p₁	$pn_{21} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot l_t} \cdot \cos \theta_{21} \cdot \sin \theta_{21}^3$	$pt_{21} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot l_t} \cdot \sin \theta_{21}^2 \cdot \cos \theta_{21}^2$
p₂	$pn_{12} = 0$	$pt_{12} = 0$
p₃	$pn_{23} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{l_t}{2}} \cdot \cos \theta_{23} \cdot \sin \theta_{23}^3$	$pt_{23} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{l_t}{2}} \cdot \sin \theta_{23}^2 \cdot \cos \theta_{23}^2$
Presioni Total	$p_{N2} = pn_{21} + pn_{22} + pn_{23}$	$p_{T2} = pt_{21} + pt_{22} + pt_{23}$

Forcat e këtyre presioneve në drejtimin normal dhe tangjencial do të jenë:

$$Bx = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{N2i} + p_{N2i+1}}{2} \cdot \Delta_s = 0 \quad (5.7)$$

$$B_y = \sum_{i=1}^{N_{darje}} \frac{p_{T2i} + p_{T2i+1}}{2} \cdot \Delta_s = 0.00282 \quad (5.8)$$

Rezultatet grafike për presionet në konturin B, paraqiten në figurën 5.5 (a) dhe (b).

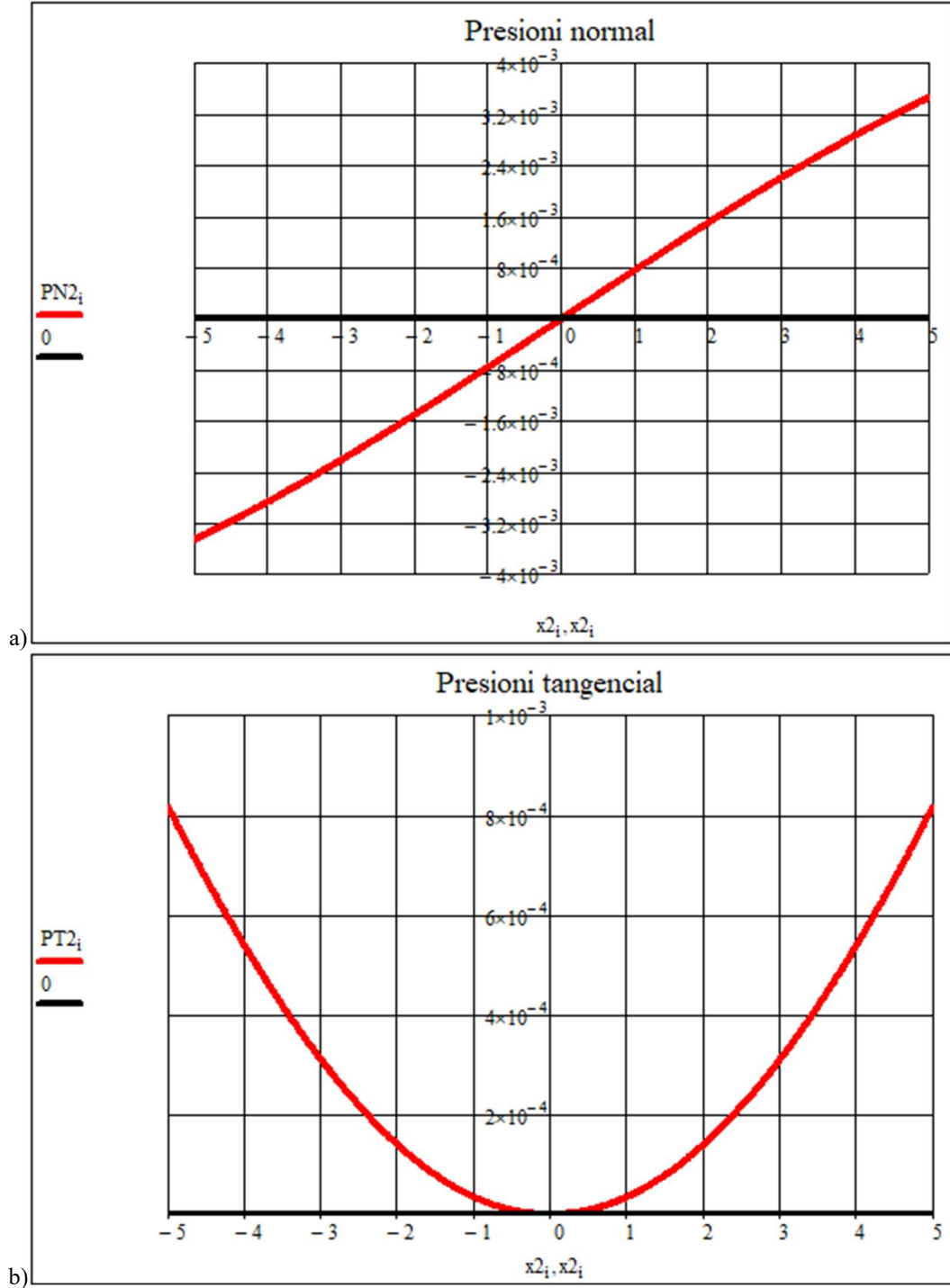


Figura 5.5 Shpërndarja e presionit në konturin B
a) presioni normal në konturin B, b) presioni tangjencial në konturin B

Konturi C

Procedura e kërkimit të shpërndarjes së sforcimeve, do të jetë njëloj si në konturin A dhe B, të bëra në pikat e mësipërme. Për konturin C figura 5.6, kemi realizuar ndarjen e tij në pika sipas ligjesisë, shprehur në ekuacionin 5.9.

$$x_{3i} = \frac{l_t}{2} - (i - 1) \cdot \Delta_s \quad (5.9)$$

ku edhe këtu kemi me i – numri i ndarjeve dhe Δ_s – ndarja në kontur. Skema e shpërndarjes së valëve të sforcimeve radiale në këtë kontur do të jetë si në figurën 5.6.

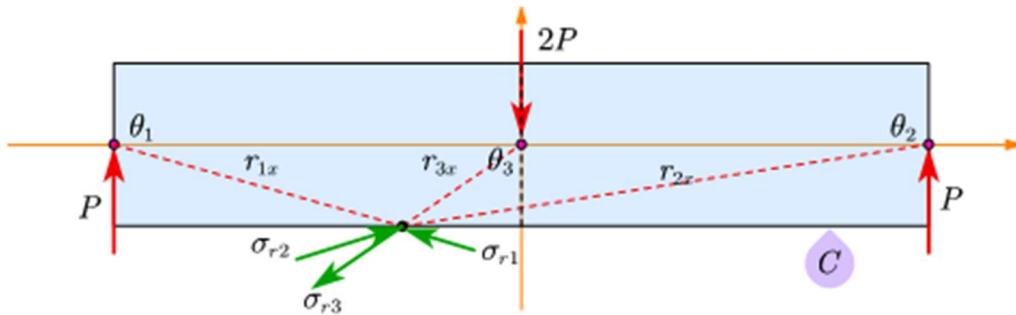


Figura 5.6 Shpërndarja e valëve të sforcimeve radiale në konturin C

Këndet e përhapjes së valëve primare për çdo pikë të konturit do të jenë:

$$\begin{aligned} \theta_{21i} &= \pi - \operatorname{atan}\left(\frac{\frac{l_t}{2} + x_{3i}}{\frac{h_t}{2}}\right) \\ \theta_{22i} &= -\pi - \operatorname{atan}\left(\frac{-\frac{l_t}{2} + x_{3i}}{\frac{h_t}{2}}\right) \\ \theta_{23i} &= -\operatorname{atan}\left(\frac{-x_{3i}}{\frac{h_t}{2}}\right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Në funksion të këtyre këndeve kemi shpërndarjen e presioneve normale dhe tangjenciale në kontur si në tabelën 5.3. Gjithashtu rezultatja këtyre presioneve sipas ekuacioneve 5.11 dhe 5.12.

Tabela 5.3 Shpërndarja e presioneve në konturin C

Presioni	Presioni normal	Presioni tangjencial
p_1	$pn_{31} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{31}^4$	$pt_{31} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{31} \cdot \cos \theta_{31}^3$

$$p_2 \quad pn_{32} = \frac{-k \cdot P2}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{32}^4 \quad pt_{32} = \frac{-k \cdot P2}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{32} \cdot \cos \theta_{32}^3$$

$$p_3 \quad pn_{33} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \cos \theta_{33}^4 \quad pt_{33} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{h_t}{2}} \cdot \sin \theta_{33} \cdot \cos \theta_{33}^3$$

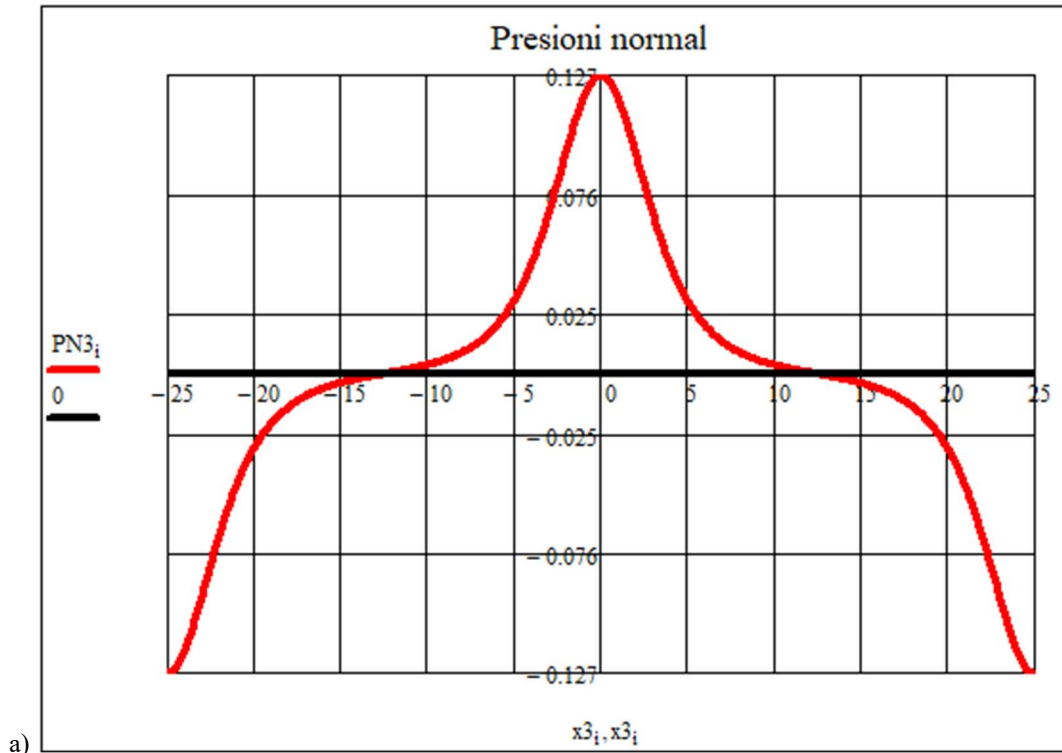
$$\text{Presioni Total} \quad p_{N3} = pn_{31} + pn_{32} + pn_{33} \quad p_{T3} = pt_{31} + pt_{32} + pt_{33}$$

Forcat e këtyre presioneve në drejtimin normal dhe tangjencial do të jenë

$$Cy = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{N3i} + p_{N3i+1}}{2} \cdot \Delta_s = -0.00282 \quad (5.11)$$

$$Cx = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{T3i} + p_{T3i+1}}{2} \cdot \Delta_s = 0 \quad (5.12)$$

Rezultatet grafike për këto presione në konturin D do të jenë sipas figurës 5.7 (a)dhe (b).



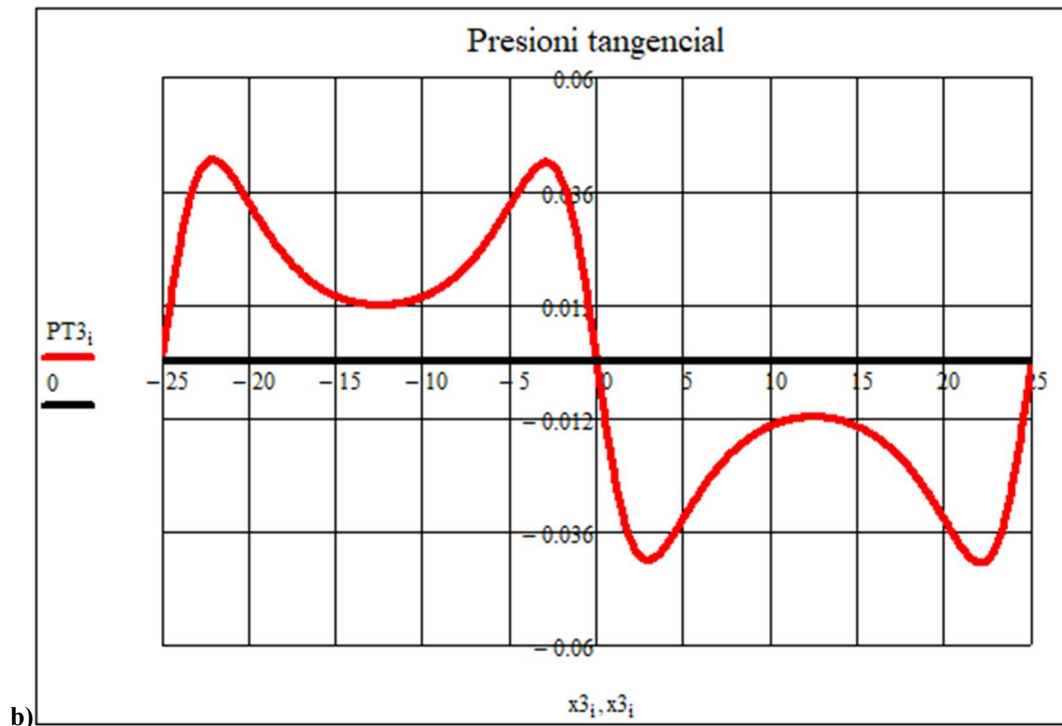


Figura 5.7 Shpërndarja e presionit në konturin C
a) presioni normal në konturin C, b) presioni tangjencial në konturin C

- **Konturi D**

Dhe për të përfunduar shpërndarjen e valëve primare, kemi këtë shpërndarje për konturin D, ku si në rastet e mësipërme kemi bërë ndarjen e tij në pika sipas ligjësisë:

$$x4_i = -\frac{h_t}{2} - (i - 1) \cdot \Delta_p \quad (5.13)$$

ku: i – numri i ndarjeve dhe Δ_p – ndarja në kontur. Skema e shpërndarjes së valëve të sforcimeve radiale në këtë kontur do të jetë si në figurën 5.8.

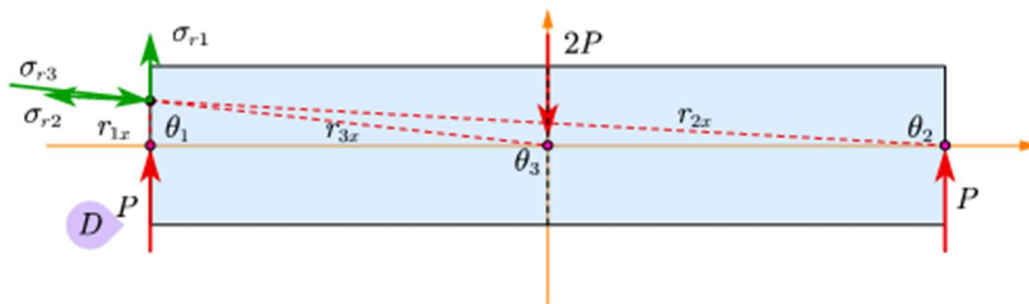


Figura 5.8 Shpërndarja e sforcimeve radiale në konturin D

Këndet e përhapjes së valëve primare në kontur do të jenë, sipas ekuacionit 5.14.

$$\begin{aligned}\theta_{41_i} &= 0 \\ \theta_{42_i} &= -\operatorname{acotan}\left(\frac{x_{4_i}}{l_t}\right) \\ \theta_{23_i} &= \operatorname{acotan}\left(\frac{-x_{4_i}}{\frac{l_t}{2}}\right)\end{aligned}\tag{5.14}$$

Në funksion të këtyre këndeve kemi shpërndarjen e presioneve normale dhe tangjenciale në kontur si në tabelën e mëposhtme:

Tabela 5.4 Shpërndarja e presioneve në konturin D

Presioni	Presioni normal	Presioni tangjencial
p₁	$pn_{41} = 0$	$pt_{41} = 0$
p₂	$pn_{42} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot l_t} \cdot \cos \theta_{42} \cdot \sin \theta_{42}^3$	$pt_{42} = \frac{-k \cdot P1}{\pi \cdot l_t} \cdot \sin \theta_{42}^2 \cdot \cos \theta_{42}^2$
p₃	$pn_{43} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{l_t}{2}} \cdot \cos \theta_{43} \cdot \sin \theta_{43}^3$	$pt_{43} = \frac{-k \cdot P3}{\pi \cdot \frac{l_t}{2}} \cdot \sin \theta_{43}^2 \cdot \cos \theta_{43}^2$
Presioni Total	$p_{N4} = pn_{41} + pn_{42} + p_{43}$	$p_{T4} = pt_{41} + pt_{42} + pt_{43}$

Forcat e këtyre presioneve në drejtimin normal dhe tangjencial do të jenë:

$$Dx = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{N4_i} + p_{N4_{i+1}}}{2} \cdot \Delta_s = 0 \tag{5.15}$$

$$Dy = \sum_{i=1}^{Ndarje} \frac{p_{T4_i} + p_{T4_{i+1}}}{2} \cdot \Delta_s = 0.00282 \tag{5.16}$$

Rezultatet grafike për këto presione në konturin D do të jenë sipas figurës 5.9 (a) dhe (b).

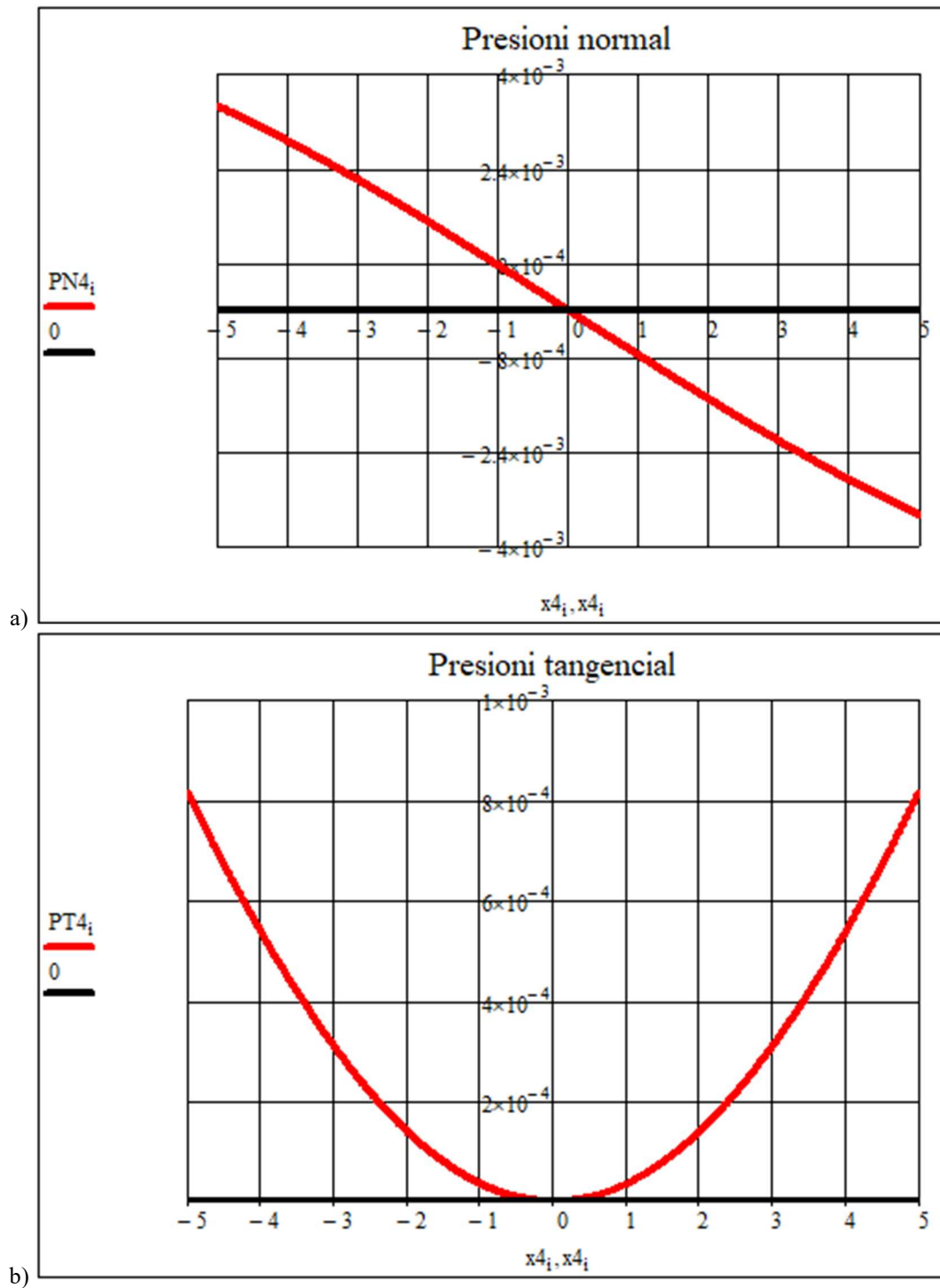


Figura 5.9 Shpërndarja e presionit në konturin D
a) presioni normal në konturin D, b) presioni tangencial në konturin D

- **Ekuilibri i forcave nga presioni në kontur**

Për të vazhduar më tej, le të bëjmë kontrollin e forcave në kontur të cilat duhet të plotësojnë ekuacionet e ekuilibrit. Shumatorja e forcave në drejtimin e x , do të jenë:

$$Ax + Bx + Cx + Dx = 0 \quad (5.17)$$

Ndërsa për shumatoren e forcave në drejtimin e y do të kemi:

$$Ay + By + Cy + Dy = -0.00282 + 0.00282 - 0.00282 + 0.00282 = 0 \quad (5.18)$$

Ekuacioni i fundit i momentit është i vërtetuar, pasi nga grafikët e presioneve shumë, shohim që ata kanë simetri përkundrejt akseve të figurës, dhe rrjedhimisht qendrat e këtyre forcave do të jenë tek akset, çka plotëson edhe ekuacionin fundit.

5.1.2 Kundërvalët dhe sforcimet normale në drejtimin e x

Sforcimet do të kontrollohen në mesin e traut, figura 5.10, nga ku do të krahasohen edhe me dy metodat e tjera të njohura, të cilat janë a) zgjidhja teorike nga Rezistenca e Materialeve dhe b) Metoda e Elementeve të Fundëm.

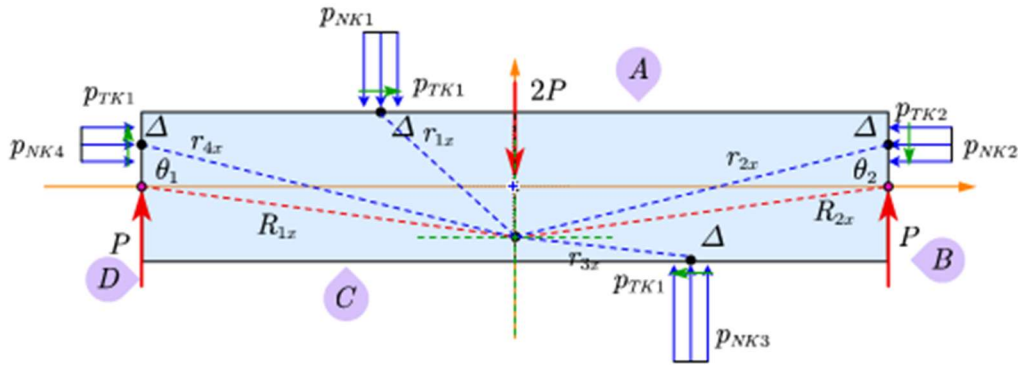


Figura 5.10 Skema për përcaktimet e sforcimeve normale nga valët primare dhe kundërvalët

Fillimisht e ndajmë këtë aks me pika sipas ligjësisë së ndarjes vertikale të shprehur me ekuacionin 5.13 dhe përcaktojmë sforcimet nga vala primare.

5.1.3 Sforcimet nga vala primare

Dy forcat në kontur do të japin ndikimin e tyre në sforcimet normale sipas aksit x , në planin vertikal në mesin e traut. Për secilën prej këtyre forcave do të kemi këto përcaktime të rrezeve dhe të këndeve të përhapjes së sforcimeve radiale sipas ekuacioneve 5.19 dhe 5.20 respektivisht dhe rrjedhimisht sforcimeve normale sipas aksit x . Për këndet e secilës forcë do të kemi:

$$\theta_{P1j} = \frac{\pi}{2} - \text{atan}\left(\frac{2 \cdot xs_j}{l_t}\right) \quad (5.19)$$

$$\theta_{P2j} = -\frac{\pi}{2} + \text{atan}\left(\frac{2 \cdot xs_j}{l_t}\right) \quad (5.20)$$

Ndërsa për sa i përket rrezeve të secilës forcë duke qene se kemi simetri:

$$r_{P1j} = r_{P2j} = \sqrt{(xs_j)^2 + \left(\frac{l_t}{2}\right)^2} \quad (5.21)$$

Atëherë sforcimet do të jenë përkatësisht, të shprehura me ekuacionet 5.22 - 5.23.

$$\sigma_{x_{P1j}} = \frac{-2 \cdot P1}{\pi \cdot r_{P1j}} \cdot \cos(\theta_{P1j}) \cdot \sin(\theta_{P1j})^2 \quad (5.22)$$

$$\sigma_{x_{P2j}} = \frac{-2 \cdot P2}{\pi \cdot r_{P2j}} \cdot \cos(\theta_{P2j}) \cdot \sin(\theta_{P2j})^2 \quad (5.23)$$

Sforcimet totale normale sipas aksit x, vetëm nga vala primare do të jenë me:

$$\sigma_{x_{VPj}} = \sigma_{x_{P1j}} + \sigma_{x_{P2j}} \quad (5.24)$$

Grafikisht këto sforcime do të jepeshin nga figura 5.11.

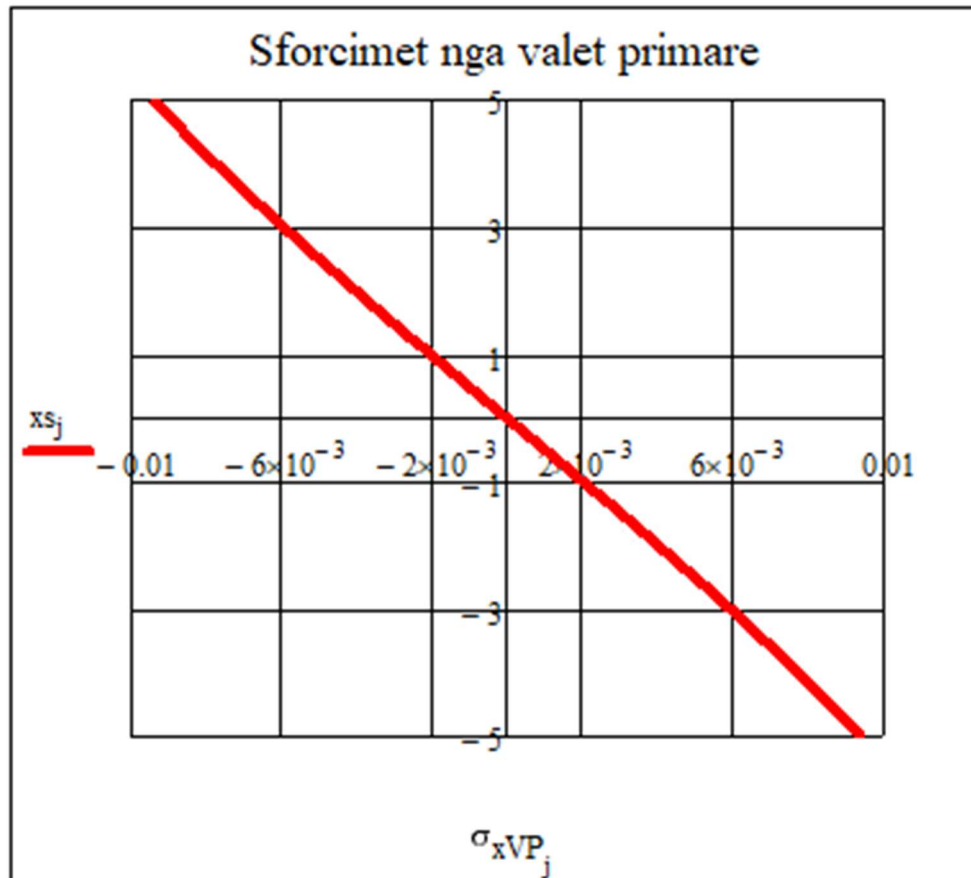


Figura 5.11 Sforcimet normale sipas aksit x nga vala primare VP

5.1.4 Sforcimet nga kundërvala

Nga figura 5.11, shohim se në secilin kontur kemi kundërvalë nga presioni normal dhe tangjencial, pra gjithsej 8 kundërvalë. Për secilën prej tyre ne do të kemi një shpërndarje të sforcimeve në planin e përcaktuar, pra në total 8 sforcime normal nga kundërvalët. Nga ana tjetër, këto kundërvalë janë ngarkesa të shpërndara të çfarëdoshme dhe kthimi i tyre do të bëhet sipas teorisë së trajtuar në kapitullin 4, por meqenëse ajo është e ndryshueshme ne do ta ndajmë në elemente të vegjël për ta konsideruar konstante. Le të trajtojmë secilën prej kundërvalëve në kontur. Fillimisht si edhe tek shpërndarja e sforcimeve nga forcat, shikojmë lidhjen gjeometrike të një ngarkese elementare në kontur dhe këndin që formon përkundrejt një pike në planin e sforcimeve.

a) Për konturin A do të kemi:

$$\theta_{1_{i,j}} = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{x_{1_i}}{\frac{h_t}{2} - xs_j}\right) & nqs \frac{h_t}{2} - xs_j \neq 0 \\ \pi & nqs \left(\frac{h_t}{2} - xs_j = 0\right) \wedge (x_{1_i} > 0) \\ 0 & nqs \left(\frac{h_t}{2} - xs_j = 0\right) \wedge (x_{1_i} \leq 0) \end{cases} \quad (5.25)$$

Si edhe kushti, që $\theta_{1_{NDarje+2,j}} = \theta_{1_{NDarje+1,j}}$ për të shmangur mos funksionimin e programit të MV. Për sa i përket termit të raportit në logaritëm, si pjesë e formulës së kthimit të kundërvalës, na duhet ky algoritëm për të anashkaluar pjestimin me zero, si dhe dy pikat e veçanta në logaritëm 0 dhe 1. Ky algoritëm jepet si në vijim me raportin sipas ekuacionit 5.26.

$$Rap1_{i,j} = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta_{1_{i+1,j}})}{1 - \cos(2 \cdot \theta_{1_{i,j}})} & nqs \quad 1 - \cos(2 \cdot \theta_{1_{i,j}}) \neq 0 \\ 1 & nqs \quad 1 - \cos(2 \cdot \theta_{1_{i+1,j}}) = 0 \\ 0 & përndryshe \end{cases} \quad (5.26)$$

Atëherë sforcimet normale dhe tangjenciale sipas x , nga presioni normal sipas ekuacionit 5.27-5.28, derivatat i 4.11 dhe 4.15.

$$\sigma_{x_{KV1n}} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PN1_i + PN1_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot [2 \cdot (\theta_{1_{i+1,j}} - \theta_{1_{i,j}}) + (\sin(2 \cdot \theta_{1_{i+1,j}}) - \sin(2 \cdot \theta_{1_{i,j}}))] \quad (5.27)$$

$$\sigma x_{KV1t} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PT1_i + PT1_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(Rap1_{i,j}) + \left(\frac{\cos(2 \cdot \theta1_{i+1,j}) - \cos(2 \cdot \theta1_{i,j})}{4} \right) \right] \quad (5.28)$$

b) Për konturin B do të kemi:

Këndi i shpërndarjes së kësaj kundërvale për konturin B, do të jetë:

$$\theta2_{i,j} = -atan\left(\frac{2}{l_t} \cdot (x2_i - xs_j)\right) \quad (5.29)$$

dhe sforcimet normale dhe tangjenciale sipas aksit x , nga dy kundërvalët të konturit B do të jenë përkatesisht ekuacionet 5.30 dhe 5.31.

$$\sigma x_{KV2n} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PN2_i + PN2_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot \left[2 \cdot (\theta1_{i+1,j} - \theta1_{i,j}) - (\sin(2 \cdot \theta1_{i+1,j}) - \sin(2 \cdot \theta1_{i,j})) \right] \quad (5.30)$$

$$\sigma x_{KV2t} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PT2_i + PT2_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot (\cos(2 \cdot \theta1_{i+1,j}) - \cos(2 \cdot \theta1_{i,j})) \quad (5.31)$$

c) Për konturin C do të kemi:

Këndi i shpërndarjes sipas ekuacionit 5.32,

$$\theta3_{i,j} = \begin{cases} atan\left(\frac{x3_i}{\frac{h_t}{2} + xs_j}\right) & \text{if } \frac{h_t}{2} + xs_j \neq 0 \\ \pi & \text{if } \left(\frac{h_t}{2} + xs_j = 0\right) \wedge (x3_i > 0) \\ 0 & \text{if } \left(\frac{h_t}{2} + xs_j = 0\right) \wedge (x3_i \leq 0) \end{cases} \quad (5.32)$$

Si edhe kushtu i $\theta 3_{NDarje+2,j} = \theta 3_{NDarje+1,j}$, për të shmangur mosfunksionim të programit të MV. Për sa i përket termit të raportit në logaritëm, si pjesë e formulës së kthimit të kundërvalës, na duhet ky algoritëm për të anashkaluar pjestimin me zero, si dhe dy pikat e veçanta në logaritëm 0 dhe 1. Ky raport do të jetë me të anasjelltin krahasuar me raportin e konturit A, pasi kemi drejtim të ri të këndit, ekuacioni 5.33.

$$Rap3_{i,j} = \begin{cases} \frac{1 - \cos(2 \cdot \theta 3_{i,j})}{1 - \cos(2 \cdot \theta 3_{i+1,j})} & nqs \quad 1 - \cos(2 \cdot \theta 3_{i+1,j}) \neq 0 \\ 1 & nqs \quad 1 - \cos(2 \cdot \theta 3_{i,j}) = 0 \\ 0 & përndryshe \end{cases} \quad (5.33)$$

Atëherë sforcimet normale sipas x , nga presioni normal dhe tangjencial i konturit C do të jetë sipas ekuacionit 5.34-5.35. Në këtë rast duhet të kemi kujdes me këndin e drejtimit të forcës dhe përhapjes së tyre e marrë parasysh të Rap3 dhe indeksit i me $i + 1$, krahasuar me konturin A.

$$\sigma_{x_{KV3n}} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PN3_i + PN3_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot [2 \cdot (\theta 1_{i+1,j} - \theta 1_{i,j}) + (\sin(2 \cdot \theta 1_{i+1,j}) - \sin(2 \cdot \theta 1_{i,j}))] \quad (5.34)$$

$$\sigma_{x_{KV3t}} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PT3_i + PT3_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \ln(Rap1_{i,j}) + \left(\frac{\cos(2 \cdot \theta 1_{i,j}) - \cos(2 \cdot \theta 1_{i+1,j})}{4} \right) \right] \quad (5.35)$$

d) Për konturin D do të kemi:

E njëjta kthim vale edhe për këtë kontur njëlloj si tek B. Këndi sipas ekuacionit 5.36 dhe konkretisht.

$$\theta 4_{i,j} = atan \left(\frac{2}{l_t} \cdot (x 4_i - x s_j) \right) \quad (5.36)$$

dhe sforcimet normale dhe tangjenciale sipas aksit x , nga dy kundërvalët të konturit D do të jenë:

$$\sigma_{KV4n} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PN4_i + PN4_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot \left[2 \cdot (\theta_{1_{i+1,j}} - \theta_{1_{i,j}}) - (\sin(2 \cdot \theta_{1_{i+1,j}}) - \sin(2 \cdot \theta_{1_{i,j}})) \right] \quad (5.37)$$

$$\sigma_{KV4t} = \sum_{i=1}^{Ndarje} - \left(\frac{PT4_i + PT4_{i+1}}{4 \cdot \pi} \right) \cdot (\cos(2 \cdot \theta_{1_{i,j}}) - \cos(2 \cdot \theta_{1_{i+1,j}})) \quad (5.38)$$

5.2 KOEFICENTI I NDIKIMIT GJEOMETRIK NË SHPËRNDARJEN E SFORCIMEVE

Secila prej kundërvalëve në konturet e mësipërm kanë pjesën e tyre përkatëse në sforcimin normal nga kundërvalët. Pra sforcimi nga kundërvala do të jetë me shumatoren e sforcimeve nga secila kundërvalë. Nga ana tjetër nëse shohim rezultatin, ose nëse ne do të kishim ndryshime të përmasave, atëherë edhe rezultati do të jetë i ndryshëm. Për këtë arsye kthimi nga kundërvalët do të merret parasysh nepërmjet koeficientit gjeometrik të korrigjimit. Ky koeficient merr parasysh gjeometrinë, në këtë rast kemi drejtkëndësh me brinjë l_t dhe h_t . Nga ana jonë është përcaktuar ky koeficient dhe është i barabartë me shprehjen 5.39:

$$K_G = 2 \cdot \pi \cdot \frac{l_t}{h_t} \quad (5.39)$$

Sic shikohet, ky koeficient është i varur plotësisht nga përmasat gjeometrike të traut në studim, dhe me ndryshimin e këtyre përmasave edhe madhësia e koeficientit të ndikimit gjeometrik ndryshon. Paraqitja grafike e tij jepet në figurën 5.12.

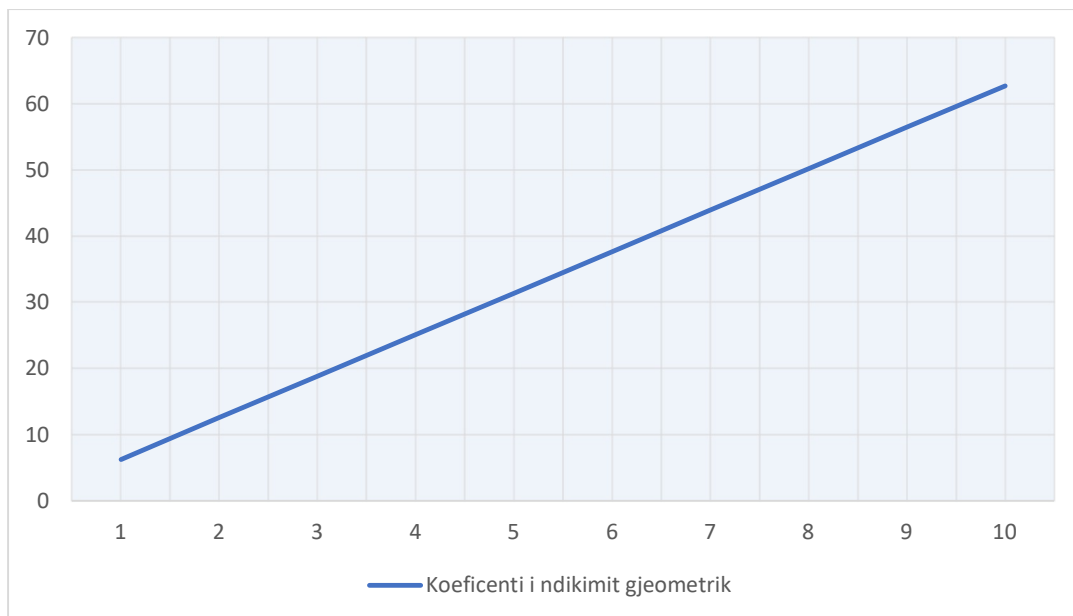


Figura 5.12 Koeficienti i ndikimit gjeometrik

Në paragrafin e mëposhtëm do të shohim që rezultatet janë të sakta dhe të krahasueshme me zgjidhjet teorike dhe me metodën e elementëve të fundëm. Përfundimisht nga kundërvala do të kishim këto sforcime normale sipas aksit x :

$$\sigma_{xKV} = K_G \cdot (\sigma_{xKV1n} + \sigma_{xKV1t} + \sigma_{xKV2n} + \sigma_{xKV2t} + \sigma_{xKV3n} + \sigma_{xKV3t} + \sigma_{xKV4n} + \sigma_{xKV4t}) \quad (5.40)$$

Zgjidhja grafike nga kjo formulë për rastin në studim do të jetë si në figurën 5.13

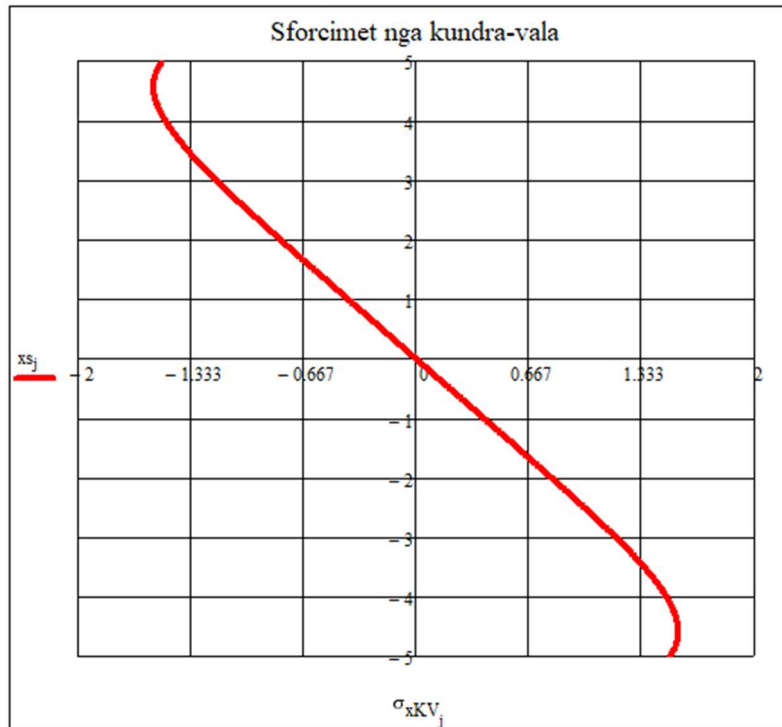


Figura 5.13 Sforcimet normale nga kundërvalët

Grafiku i mësipërm ka një trend si zgjidhja teorike e traut kur punon në përkulje (megjithëse nuk jemi në përkuljen e rastit kur studiohet nga **Shkenca e Konstruksioneve**).

Natyrisht na duhen sforcimet totale normale sipas këtij aksi, pra edhe nga valët primare edhe nga kundërvalët dhe për këtë rast do të kemi zgjidhjen sipas figurës 5.14.

5.3 KRAHASIMI I MV ME METODAT E TJERA

Nëse do ta krahasojmë me zgjidhje teorike sipas rezistencës (megjithatë nuk jemi në rastin që plotësohen hipotezat e rezistencës materiale), do të kemi që:

$$\sigma_{xRez} = \frac{P \cdot \frac{l_t}{2}}{\frac{b \cdot h^2}{6}} = \frac{1 \cdot \frac{50}{2}}{\frac{1 \cdot 100}{6}} = 1.5 \quad (5.41)$$

Për sa i përket këtij rezultatit $\sigma_{xRez} = 1.5$, është i njëjtë me rezultatin e **MV** që ka vlerën $\sigma_{xMV} = 1.51$ (me metodën e re të valës). Si në çdo rast, rezultatet e marra me këtë metodë, i kemi krahasuar edhe me metodën e elementëve të fundëm, dhe në vijim po tregojmë vetëm shpërndarjen e sforcimeve.

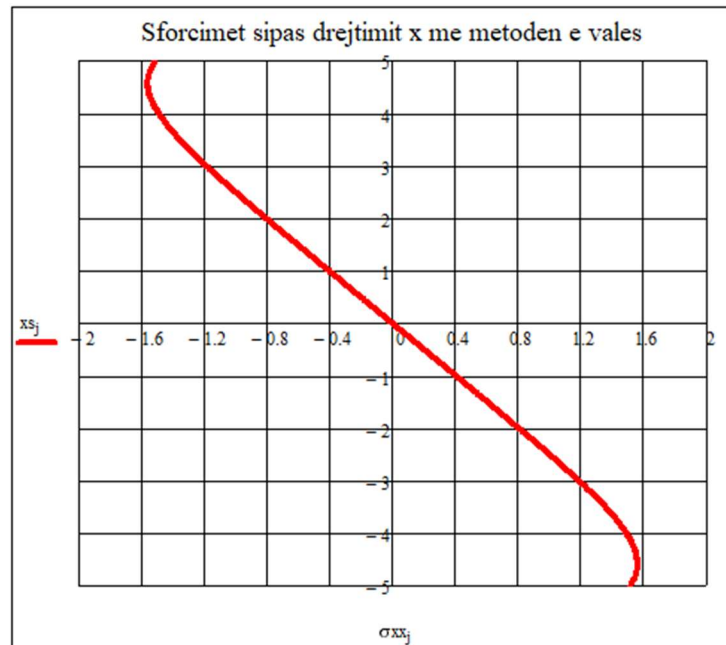
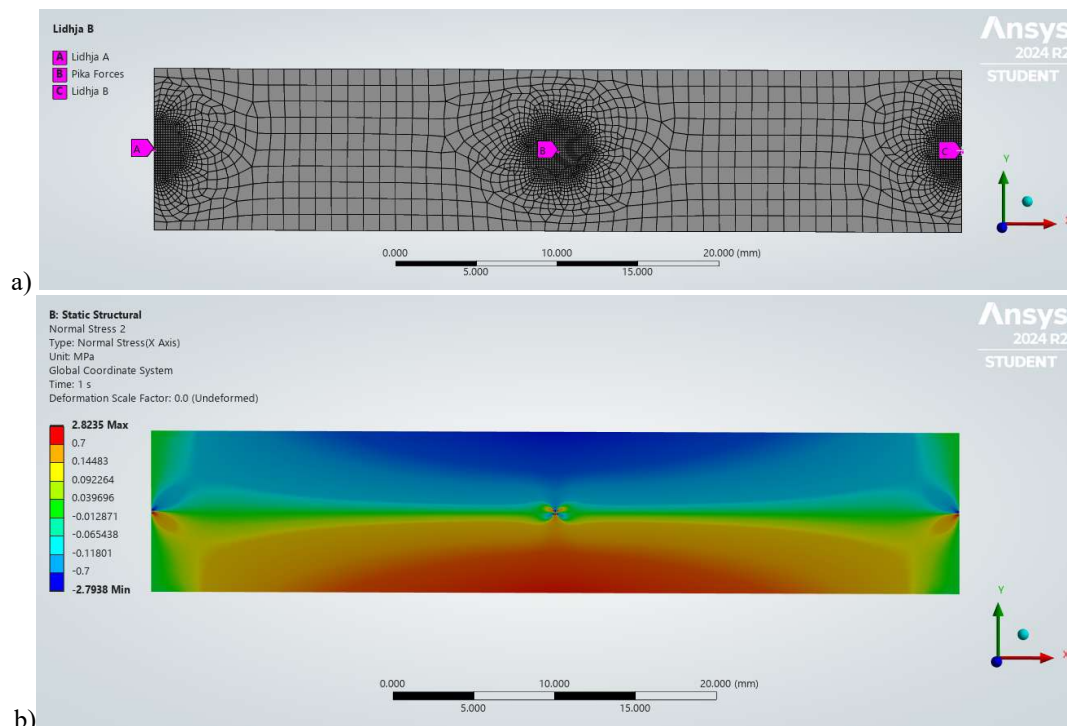


Figura 5.14 Zgjidhja e traut me metodën e valës.

Në figurën 5.15 (a), kemi treguar ndarjen e objekt studimit me rrjetën e elementeve të fundëm. Për saktësi të rezultatit, në zonat ku veprojnë forcat, kemi bërë ndarje të objektit në elemente më të vegjël, krahasuar me zonat që kanë shpërndarje konstante të sforcimeve. Rezultatet e shpërndarjeve të sforcimeve në të gjithë trautin jepen në figurat 5.15 (b) deri (d).



OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

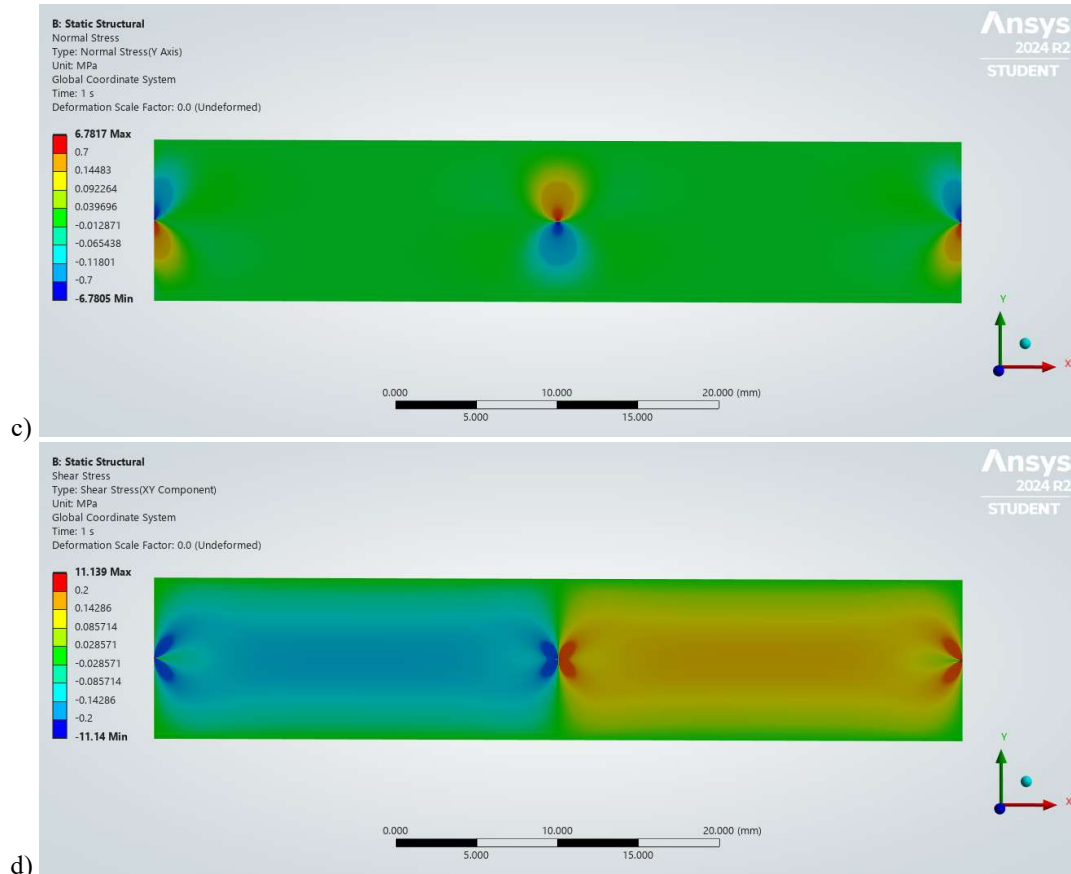


Figura 5.15 Rezultatet e traut drejtkëndor me MEF

- a) Skema në programin e elementëve të fundëm, b) Shpërndarja e sforcimeve normale sipas x , b) Shpërndarja e sforcimeve normale sipas y , c) Shpërndarja e sforcimeve tangjenciale

Për të krahasuar këto rezultate kemi nxjerrë shpërndarjen e sforcimeve në mesin e traut, në planin ku edhe u krahasuan MV dhe rezultati teorik i marrë në formulën 5.15.

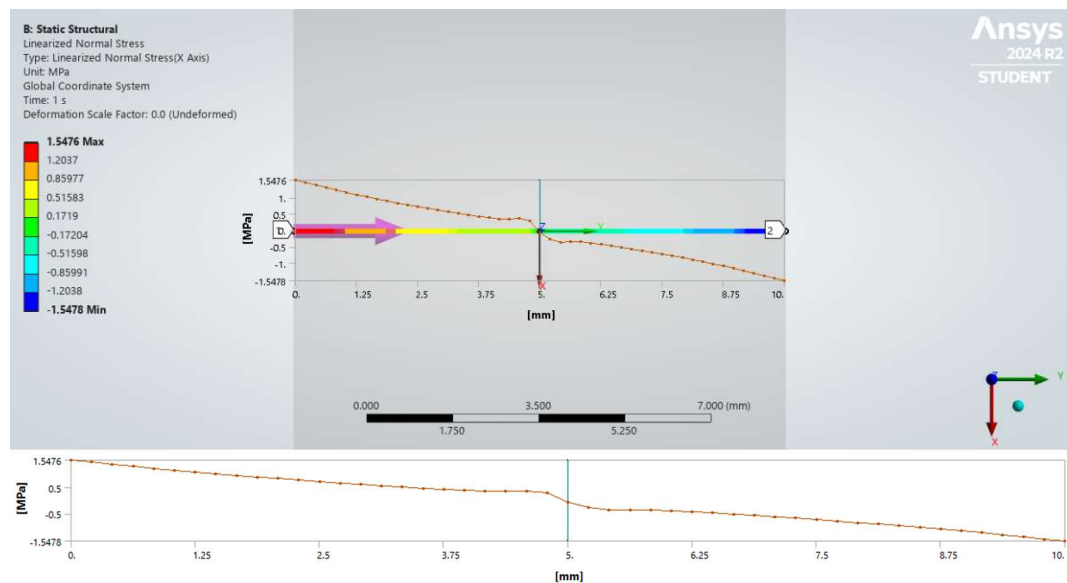


Figura 5.16 Shpërndarja e sforcimeve normale sipas x në mesin e traut.

Edhe me këtë metodë, shohim që rezultatet janë të krahasueshme me saktësi të lartë. Për të vërtetuar këtë, në tabelën 5.5 kemi sjellë rezultatet nga zgjidhja teorike e

OPTIMIZIMI I KONSTRUKSIONEVE MEKANIKE ME METODAT E AVANCUARA ENERGJETIKE DHE NUMERIKE

rezistencës materiale, që në këto raste ka kufizimet e veta pasi nuk plotësohet hipoteza e seksionit tërthor plan edhe pas deformimit, nga metoda e elementëve të fundëm si edhe nga metoda jonë e re, e krijuar si metodë optimizuese dhe një nga objektivat e këtij studimit.

Tabela 5.5 Krahasoni i rezultateve me metoda të ndryshme, zgjidhja teorike e rezistencës materiale, Metoda e Elementëve të Fundëm (MEF), Metoda e Valës (MV)

Eksperimenti	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{l_t}{h_t}$	1	1.5	2	3	4	6	8	10
Rezistenca	0.3	0.45	0.6	0.9	1.2	1.8	2.4	3
MEF	0.3124	0.493	0.6467	0.947	1.247	1.847	2.447	3.047
MV	0.301	0.485	0.689	0.969	1.226	1.79	2.382	2.983

Po të shohim me kujdes, metoda jonë e valës është një metodë novative, që jep zgjidhje të sakta për raportet e brinjëve të traht nga $1 \div 10$, raporte për të cilat zgjidhja teorike ka pasaktësi. Grafikisht kjo metodë e krahasuar me dy të tjerat për këtë objekt studimi është si në figurën 5.17:

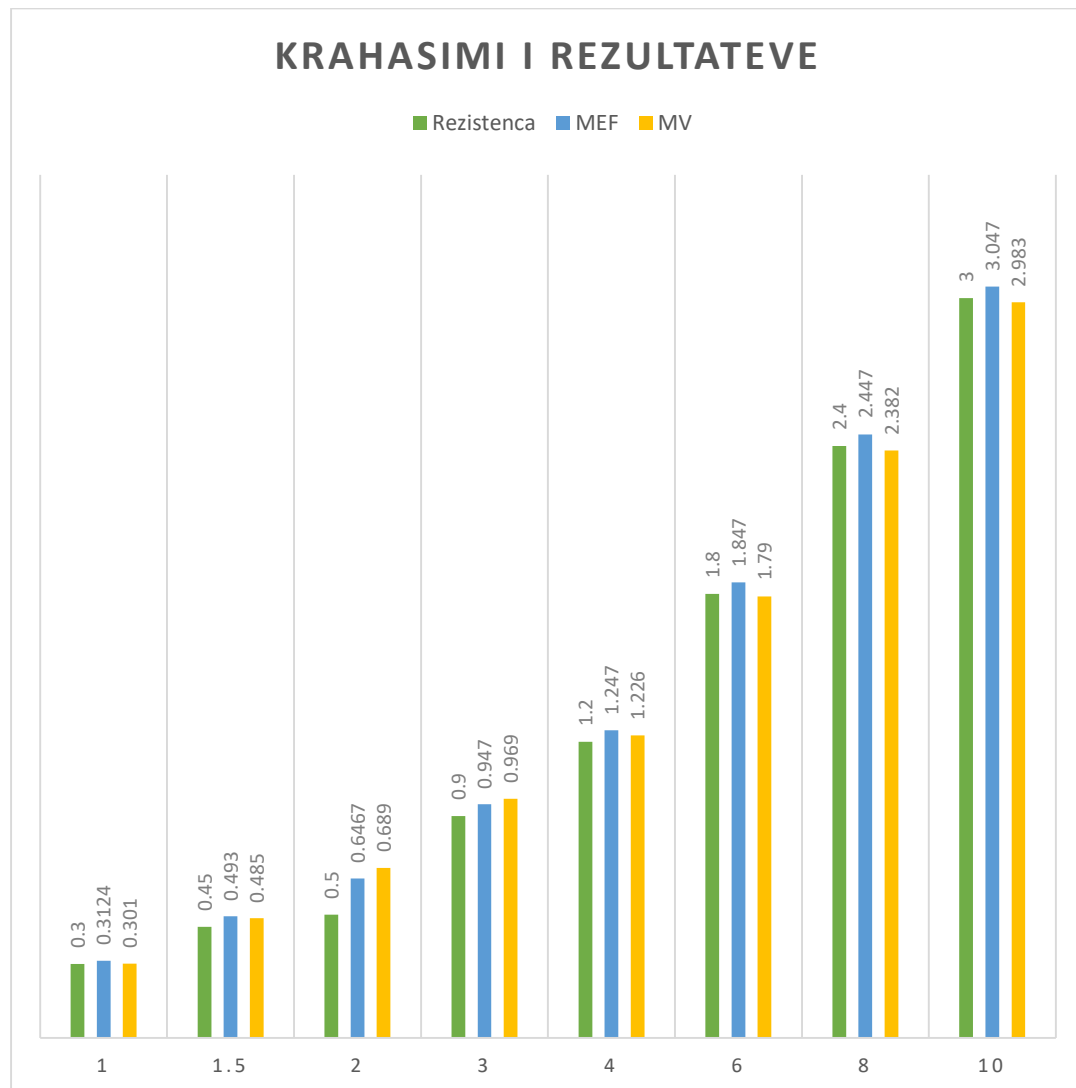


Figura 5.17 Krahasoni i rezultateve Teorike, MEF dhe MV

5.4 GJETJA OPTIMALE NËPËRMJET PROCESIT TË OPTIMIZIMIT

Nga rezultatet e nxjerra nga **MV**, shohim se ato afrohen shumë me zgjidhjen reale të objektit. Kjo rrugë e re është një rrugë që na mundëson për gjetjen e zgjidhjeve optimale, që e përmbledhur shprehet nga bllok-skema e paraqitur në figurën 5.18. Nëpërmjet kësaj procedure gjenden zgjidhje të sakta, të vërtetuar në kapitujt e mësipërm, si edhe në kërkimin algoritmik të ciklit, gjenden zgjidhje të cilat plotësojnë kushtet e vendosura për të arritur tek ajo optimalja.

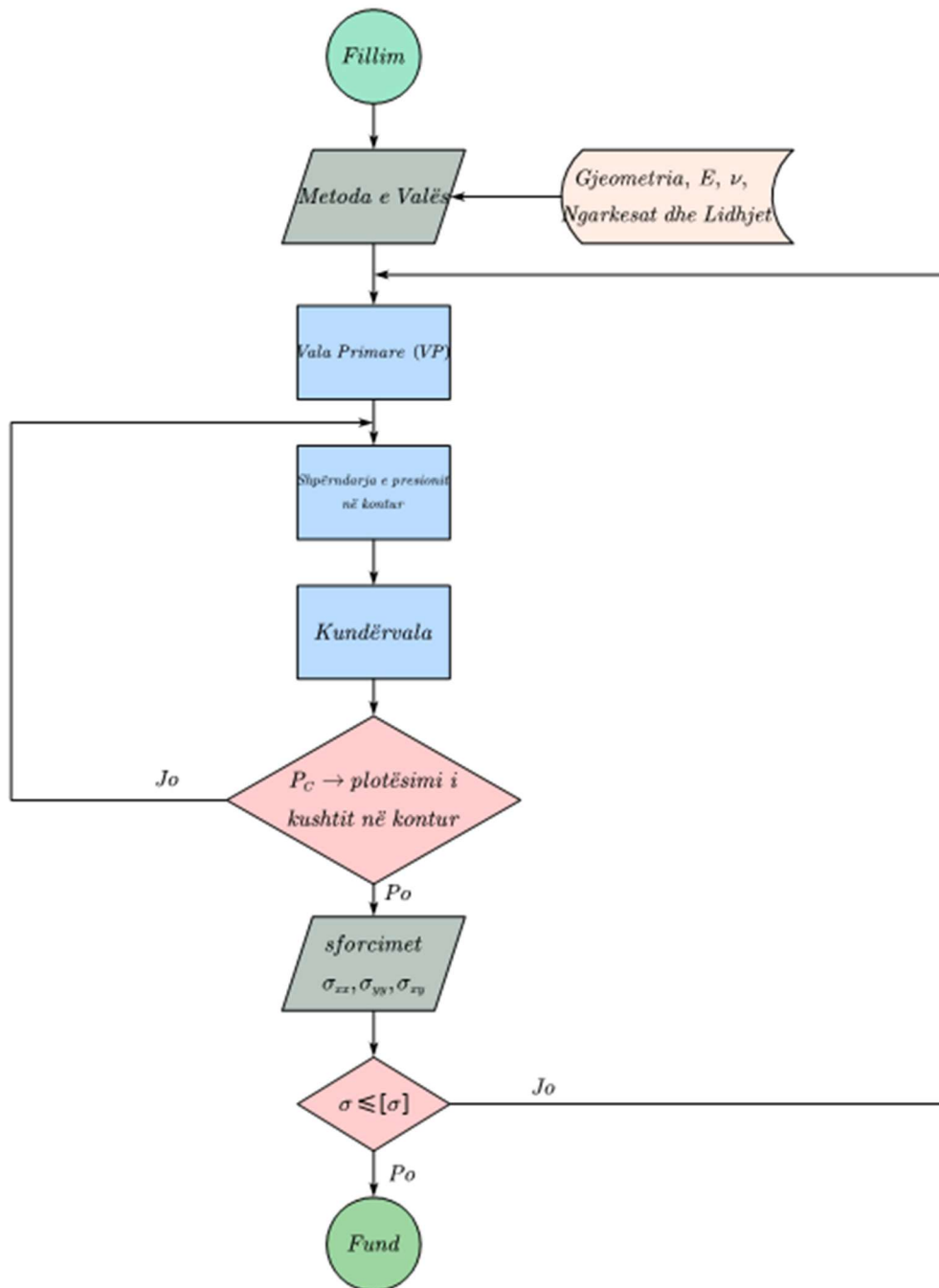


Figura 5.18 Bllok-skema për gjetjen optimale

Karakteristikat e materialit të marra nga metoda eksperimentale, futen nëpërmjet tabelës së materialeve të cilat janë E – moduli i elasticitetit, ν – koeficienti i Poisson-it. Gjithashtu në këtë tabelë, në formë vektoriale ose si funksion, futet edhe gjeometria e objektit të studimit. Nëpërmjet gjeometrisë, pikave konturore të trupit, përcaktohet edhe kufiri i këtij “mjedisi” për shpërndarjen e valëve. Si përfundim tek të dhënat janë forcat dhe lidhjet në këtë objekt me koordinatat përkatëse, si dhe drejtimet e tyre për rastin e forcave dhe drejtimin e pengesave për rastin e lidhjeve.

Faza e dytë ka të bëjë me “lëshimin e valës” primare nëpërmjet ekuacionit 2.59. Lëshimi i valëve primare bëhet nga një sistem forcash ekuivalente me zero ose në ekuilibër (ngarkesa e jashtme dhe reaksionet). Duke qenë se ky sistem forcash është në ekuilibër, atëherë edhe presionet në kontur nga këto vale primare do të jenë në ekuilibër, të analizuar dhe të trajtuar në zgjidhjet e kapitujve të mësipërm. Këto **valë** në kontur do të shuhem nga **kundërvalë** me të njëjtën madhësi dhe drejtim por me shenjë të kundërt, duke plotësuar kushtin statik në kontur dhe vazhduar më tej me shpërndarjen e sforcimeve.

- Meqenëse kjo valë është në ekuilibër, “shuarja” bëhet me tentativën e parë pasi edhe nëse do të bëhej rishpërndarja do të pasqyrohej identike.
- Nëse do të bëhej vetëm nga një forcë pa “hapur” reaksionet, atëherë vala primare **nuk** do të ishte në ekuilibër dhe, një pjesë e saj, do të “akumulohej” nga lidhjet. Kjo do të sillte që rishpërndarja do të duhet të bëhej me tentativa deri sa të arrihet kushti i ekuilibrit statik, megjithatë këtë pikë e kemi lënë për të ardhmen dhe kërkuesit e tjerë. Ky arsyetim vlen edhe për problemet statikisht të pacaktuara, ku ekuacione shtesë të zhvendosjes do të duhet për të plotësuar kushtet statike në kontur me koeficientat e ngurtësisë përkatëse.

Pasi plotësohet kushti statik në kontur nga kundërvala, përcaktohen shpërndarja e sforcimeve në brendësi të objektit për të realizuar optimizimin. Nëse kushti i vendosur nga projektuesi nuk plotësohet, atëherë bëhet rikthimi tek pika fillestare, ku ndryshohet tabela e të dhënave. Kjo formë ciklike është një mënyrë për të gjetur zgjidhjen optimale. Metoda e valës, megjithëse bën përcaktime të sakta të sforcimeve në brendësi të objektit, ka edhe ajo kufizimet e veta dhe mundësitë për tu zgjeruar më tej, të cilat po i listojmë për tu zhvilluar më tej nga ne apo kërkues të tjerë.

- Ndërtimin e katalogut të zgjidhjeve për çdo lloj skeme nëpërmjet kësaj **MV**, **valë – funksion i Airy-t**.
- **Koeficienti gjeometrik i korrigjimit** do të duhet të përcaktohet edhe për figura të tjera gjeometrike, vetëm në rastin e kundërvalës dhe duke ndërtuar për të tabelën ose grafiket përkatës, për analogji me tabelën 5.5 dhe figurën 5.17.
- **Kohën** si parametër nuk e kemi marrë parasysh, ndaj një shteg për të hulumtuar është duke e futur këtë parametër në llogaritjen ciklike dhe zgjeruar më tej ekuacionet e **MV**.
- Gjithashtu, nuk kemi marrë parasysh edhe shpejtësinë e vendosjes së forcës, që hyn të Rezistenca Dinamike.

Këto janë disa nga kufizime që nuk u morën në konsideratë në këtë temë studimi dhe që lihen si mundësi për studim në të ardhmen.

KAPITULLI 6

6 KONKLUZIONE DHE REKOMANDIME

Për sa i përket konkluzioneve të fituara në këtë punim të disertacionit ndër më të rëndësishmet, ku përfshijnë edhe objektivat e përmendura qysh në fillimi të punimit, janë:

- Krijimi metodës së re numerike dhe energjetike inovative të cilën e kemi quajtur **Metoda e Valës (MV)**. Në rastin e studimit të temës sonë, jemi inspiruar nga problemet e “**përhapjes së valës**”, në këtë rast përhapjes së sforcimeve në konstruksionin mekanik dhe tentimin për ta “**shuar**” atë me kundërvalë për të imituar shuarjen e valëve në një mjedis, duke bërë të mundur përcaktimet e gjendjes së sforcuar në elementin tonë. Pasja e kësaj gjendje të sforcuar është një objektivi, të cilin duhet ta optimizojmë duke plotësuar edhe kushtet e tjera të soliditetit, qëndrueshmërisë, ngurtësisë, lodhjes, thyerjes, avancimit të krisjes dhe të tjera.
- Në momentin që ne përcaktuam gjendjen e sforcuar të saktë të objektit, kemi në dorë ekuacionin $\sigma_{logaritur} \leq [\sigma]$. Kështu që realizuam optimizimin e objekt studimit, e dhënë kjo në programin ciklik të treguar në bllok-skemën figurës 5.18.
- Po kështu nga ky punim kemi nxjerrë konkluzionin se, përveç rastit kur koeficienti i shpërndarjes së valës në gjysmëplanin do të ishte me $k_\alpha = 2/\pi$, për raste të tjera ky koeficient do të merrte vlera si: a) për shufrën në tërheqje $k_\alpha = 1/(2 \cdot \alpha)$ dhe b) kur kemi një shpërndarje në plan (forcë qendrore) ku koeficient duhet të merret $k_\alpha = 1/\pi$. Këta koeficientë përdoren për shpërndarjen e valëve primare deri në konturin e objektit të cilat janë valë që kanë sforcime radiale të pastër, sipas shprehjes $\sigma_{rr}(M) = -\frac{2 \cdot R}{\pi \cdot r} \cdot \cos \alpha$ apo $\Phi(x, y) = \frac{P}{\pi \cdot D} \cdot r \cdot \log r \cdot \cos \theta_2$, kur kemi forca në brendësi (të treja sforcimet janë prezentë).
- Në rastin e një skeme plane të çfarëdoshme dhe me një presion normal, kemi vërtetuar zgjidhjen e njohur me $d\sigma_r = \frac{-2 \cdot p \cdot d\varphi}{\pi}$, të vendosur tek pika e brendshme, ku kërkojmë sforcimin radial dhe presionin normal në kontur. E njëjta rrugë edhe për rastin e një skeme plane të çfarëdoshme me një presion tangjencial ku kemi gjetur zgjidhjen $d\sigma_{rT} = \frac{-2 \cdot p(\varphi) \cdot d\varphi}{\pi \cdot \tan \theta}$.
- Valët primare të forcave ekuivalent me zero konturore në diskun rrethor, shkaktojnë vetëm presione normale uniforme ndërsa në rastin e forcave ekuivalente me zero kur njëra do të jetë në brendësi, valët normale dhe tangjenciale do të jenë jo-uniforme. Kundërvala mund të shpërndahet sipas funksioneve biharmonike ose si vetë vala primare me korrigjimin gjeometrik nëpërmjet faktorit gjeometrik korrigjues, që për rastin e traut me seksion tërthor drejtkëndor në përkulje **u zbulua** sipas relacionit $K_G = 2 \cdot \pi \cdot \frac{l_t}{h_t}$. Ky faktor si madhësi pa njësi por që varet nga gjeometria e traut, **i korrigjon** shpërndarjet e sforcimeve duke sjelle që rezultatet të jenë shumë me të sakta krahasuar me zgjidhjen teorike për zonën studimore dhe diferencë shumë të vogël me metoda të tjera numerike të dhëna dhe në tabelat krahasuese.
- Algoritmi i metodës së valëve dhe ciklit optimizues jepet sipas figurës 5.18.

7 REFERENCA

- A.I. Lurie, *Non-Linear Theory of Elasticity Elsevier Science*, **2012**
- Abd Elaziz, M., Elsheikh, A.H., Oliva, D. *et al. Advanced Metaheuristic Techniques for Mechanical Design Problems: Review. Arch Computat Methods Eng* **29**, 695–716 (2022). <https://doi.org/10.1007/s11831-021-09589-4>
- Abramovici, M., Gerhard, D., and Langenberg, L., Application of PDM technology for product life cycle management, Proceedings of the 4th CIRP International Seminar on Life Cycle Engineering, Berlin, Germany, pp. 17-31, **1997**.
- Abramovici, M., Gerhard, D., Langenberg, L. (1998). Application of Product Data Management Technology for Enterprise-wide Distributed Product Development. In: Jacucci, G., Olling, G.J., Preiss, K., Wozny, M.J. (eds) Globalization of Manufacturing in the Digital Communications Era of the 21st Century. PROLAMAT 1998. IFIP - The International Federation for Information Processing, vol 4. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-35351-7_16
- Abramowitz and Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, **1964**
- Ahmad, M. (2018). Study on Techniques for Solving Constrained Optimization Problem. *IJRDO -JOURNAL OF MATHEMATICS*, 4(3), 09-17. <https://doi.org/10.53555/m.v4i3.1923>
- Ahmed M. Ebid, Mohamed Y. Abdel-Kader, Ibrahim M. Mahdi, Ibrahim Abdel-Rasheed, Ant Colony Optimization based algorithm to determine the optimum route for overhead power transmission lines, Ain Shams Engineering Journal, Volume 15, Issue 1, **2024**, 102344, ISSN 2090-4479, <https://doi.org/10.1016/j.asej.2023.102344>
- Alan R. Parkinson, R. J. Balling and John D. Hedengreen(2013). Optimization Methods for Engineering Design. Brigham Young University.
- Altenbach, H. (2020). Airy, George Biddell. In: Altenbach, H., Öchsner, A. (eds) Encyclopedia of Continuum Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-662-55771-6_304
- Armenàkas, A.E. (2016). Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity. United Kingdom: CRC Press.
- Baker, Lauren L. Beghini William F. "Structural innovation: combining classic theories with new technologies." Engineering Journal 52.3 (2015): 203-217.
- Bochenek, B. and Forys, P., **2006**. Structural optimization for post-buckling behavior using particle swarms. Structural and Multidisciplinary Optimization, 32 (6), 521– 531.
- Chen, Y.F.; Guo, X.Y.; Chai, H.D.; Lin, Y.T.; Zhu, Y.W.; Huang, J.H.; Zhang, Y.H.; Lee, Z.J. A building safety inspection system with modified ResNet50. In Proceedings of the Third International Conference on Signal Image Processing and Communication (ICSIPC 2023), Kunming, China, 26–28 May 2023; SPIE: Philadelphia, PA, USA, **2023**; Volume 12916, pp. 241–246. [Google Scholar]
- Chinonso Kenneth Udokporo (2021), Understanding the Stages of the Product Life Cycle, DOI: 10.5772/intechopen.99036

D.G. Luenberger, Linear and Nonlinear Programming (Addison-Wesley, MA, **1984**).

Deb, K. . *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*. John Wiley & Sons, **2001**

Debashis Dutta, Biswajit Mahanty, Numerical Optimization in Engineering and Sciences, Volume 979, **2019**, <https://doi.org/10.1007/978-981-15-3215-3>

Dorigo, M. Optimization, Learning and Natural Algorithms. Ph.D. Thesis, Politecnico di Milano, Italian, **1992**

Du, DZ., Pardalos, P.M., Wu, W. (**2008**). History of Optimization . In: Floudas, C., Pardalos, P. (eds) Encyclopedia of Optimization. Springer, Boston, MA. https://doi.org/10.1007/978-0-387-74759-0_268

Dzierżanowski, G., Wójcik-Grząba, I. (**2023**). Optimal Design of Trusses: The Force Density Perspective. In: Kale, I.R., Sadollah, A. (eds) Optimization Methods for Structural Engineering. Engineering Optimization: Methods and Applications. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-99-2378-6_2

Geem, Z.W., Kim, J.H. and Loganathan, G.V., **2001**. A new heuristic optimization algorithm: harmony search. simulation, 76(2), pp.60-68.

Goldberg, D. E., Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. Addison-Wesley, **1989**

Hendrik Richter, Shengxiang Yang (auth.), Ivan Zelinka, Václav Snášel, Ajith Abraham (eds.), Handbook of Optimization: From Classical to Modern Approach, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Year: **2013**

History of Optimization, mitrikitti.fi/opthist.html#linx, Studentd of HUT/Alto

Holland, J. H. (**1975**). Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence. U Michigan Press.

Isaac Todhunter (**2005**), A history of the progress of the calculus of variations during the nineteenth century, Adamant Media Corporation

Iuga, A., Popa, V., Popa, L. (**2017**). Industrial Product Life Cycle Stages and Lifecycle Eco-design. In: Majstorovic, V., Jakovljevic, Z. (eds) Proceedings of 5th International Conference on Advanced Manufacturing Engineering and Technologies. NEWTECH 2017. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56430-2_27

J.S. Arora, Introduction to Optimum Design, Elsevier Academic Press, Boston, **2017**

John Stark (**2023**) Product Lifecycle Management (Volume 1) 21st Century Paradigm for Product Realisation Fifth Edition, <https://doi.org/10.1007/978-3-030-98578-3>

Jörg Niemann, Serge Tichkiewitch, Engelbert Westkämper, Design of Sustainable Product Life Cycles Springer-Verlag Berlin Heidelberg **2009**, <https://doi.org/10.1007/978-3-540-79083-9>

Joseph Fiksel (2009), Design for Environment: A Guide to Sustainable Product Development, 2nd Edition, The McGraw-Hill Companies, Inc. ISBN978-0071605564

K. Bode, O. Koça, A. Sulejmani Genetic Algorithms for Optimum Machine Elements, International Journal of Engineering Innovation & Research Volume 4, Issue 1, Pages 151-157, (2015)

Koca, O., Kontaktanalyse an Klemmrollenfreilaufen, Paderborn ,1993

Koça, Odhise, Anis Sulejmani, and Klodian Dhoska. "Pressure distribution on rolling-slide contact problem." *Pollack Periodica* 16.1 (2021): 71-76.

Koça. O, Lumi. D, Sulejmani. A, Shkence Konstruksiione 2, Tirane 2018

Kurt Marti, Stochastic Optimization Methods Applications in Engineering and Operations Research, 2015, 10.1007/978-3-662-46214-0

M. Dorigo & T. Stützle (2004). Ant Colony Optimization. MIT Press

M. Gandomi, A. & Alavi, A. (2013), "Krill Herd: A New Bio-Inspired Optimization Algorithm." *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 18(7), 1837-1846.DOI: 10.1016/j.cnsns.2012.12.004

Manolis Papadrakakis, Nikos D. Lagaros, Yiannis Tsompanakis, Structural optimization using evolution strategies and neural networks, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Volume 156, Issues 1–4, 1998, Pages 309-333, ISSN 0045-7825, [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00215-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00215-6),

Martin H. Sadd Ph.D, Elasticity: Theory, Applications, and Numerics 4th Edition, 978-0128159880, 2020

Miljenko Lapaine (2016), George Biddell Airy And His Contribution To Map Projections Theory, Proceedings, 6 th International Conference on Cartography and GIS, 13-17 June 2016, Albena, Bulgaria ISSN: 1314-0604, Eds: Bandrova T., Konecny M.

Padio Guidugli P. & Favata A. (2014). The Cerrutti Problem: Elasticity for Geotechnicians. Solid Mechanics and its Applications SMIA 2014. Springer International Publishing, Switzerland. Pp 149 – 157.10.1007/978-3-319-01258-2_8

Park, H. Structural Design and Numerical Analysis of Hoisting Device of Test Bed for Aircraft Engine. Appl. Mech. 2023, 4, 407–420. [Google Scholar] [CrossRef]

QB41 .K362X "Nova stereometria doliiorvm vinariorvm, in primis Austriaci, figurũ omnium aptissimũ; et usus in eo virgũ cubicũ compendiosissimus & plane singularis. Accessit stereometriũ Archimedeyũ supplementum. Authore Ioanne Kepplero ...", "Kepler, Johannes, 1571-1630."

R. Kale and A. Sadollah (eds.), Optimization Methods for Structural Engineering, Engineering Optimization: Methods and Applications, 978-9819923779, 2023rd Edition, 2023

R. Storn & K. Price (1997). "Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for Global Optimization over Continuous Spaces". *Journal of Global Optimization*, 11(4), 341-359.

Ravipudi Venkata Rao, Jan Taler Advanced Engineering Optimization Through Intelligent Techniques, 2023

Roberto Cardil (MatematicasVisuales), "Kepler: The Volume of a Wine Barrel - Solving the Problem of Maxima: Wine Barrel Design," *Convergence* (January **2012**), DOI:10.4169/loci003499

S G Davison and M L Glasser, Laplace transforms of Airy functions **1982***J. Phys. A: Math. Gen.***15** L463

S.K.Rajesh Kanna And K.C.Udaiyakumar, Ant Colony Optimization Algorithm For The Identifying The Optimal Parameters For Worm Gear Design, *International Journal of Pure and Applied Mathematics* Volume 119 No. 13 **2018**

Selvadurai A.P.S, Partial Differential Equations in Mechanics 2, The Biharmonic Equation, Poisson's Equation, **2000**

Selvadurai A.P.S. Partial Differential Equations in Mechanics 1: Fundamentals, Laplace's Equation, Diffusion Equation, Wave Equation, **2000**

Sgambitterra, E., Lamuta, C., Candamano, S. *et al.* Brazilian disk test and digital image correlation: a methodology for the mechanical characterization of brittle materials. *Mater Struct* **51**, 19 (**2018**). <https://doi.org/10.1617/s11527-018-1145-8>

Sörensen, Kenneth & Sevaux, Marc & Glover, Fred. (**2017**). A History of Metaheuristics. *Handbook of Heuristics*. to appear.

Spura, C., Fleischer, B., Wittel, H., Jannasch, D. (**2023**). Konstruktive Grundlagen, Normzahlen. In: Roloff/Matek Maschinenelemente. Springer Vieweg, Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-40914-2_1

Stark, J. (**2024**). Introducing Product Lifecycle Management (PLM). In: *Product Lifecycle Management (Volume 6)*. Decision Engineering. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53521-5_1

Steven, G. Evolutionary algorithms for single and multicriteria design optimization. A. Osyczka. Springer Verlag, Berlin, 2002, ISBN 3-7908-1418-01. *Struct Multidisc Optim* **24**, 88–89 (**2002**). <https://doi.org/10.1007/s00158-002-0218-y>

Sulejmani, A., Koça, O., Cejku, M. (**2024**). Graphical and Analytical Analysis in the Field of Mohr's Circles. In: Guxho, G., Kosova Spahiu, T., Prifti, V., Gjeta, A., Xhafka, E., Sulejmani, A. (eds) *Proceedings of the Joint International Conference: 10th Textile Conference and 4th Conference on Engineering and Entrepreneurship. ITC-ICEE 2023. Lecture Notes on Multidisciplinary Industrial Engineering*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-48933-4_17

Sulejmani, A. and Koça, O. (**2021**) "Development of Optimal Transmission Rate of the Kinematic Chain by using Genetic Algorithms Coded in Mathcad", *International Journal of Innovative Technology and Interdisciplinary Sciences*, 4(4), pp. 792–803. doi: 10.1515/IJITIS.2021.4.4.792-803.

Sulejmani, A.; Koça, O.; Dhoska, K.; Gheibi, M.; Moezzi, R. A Novel Method of Jacobian Contours to Evaluate the Influence Line in Statically Determinate Structures. *Appl. Mech.* **2023**, 4, 1172-1187. <https://doi.org/10.3390/applmech4040060>

Sulejmani, Anis, Odhisea Koça, and Parid Milo. "Analyzation of General Displacements of Mechanical Structures Using Self-equilibrated Forces." *International Conference on Textile Conference & Conference on Engineering and Entrepreneurship*. Cham: Springer Nature Switzerland, **2023**.

Sulejmani, P. Milo, K. Dhoska, M. Çejku and O. Koça, IMPLEMENTATION OF A SYSTEM OF FORCES EQUIVALENT TO ZERO IN MECHANICAL STRUCTURES, International Journal of Mechanics and Control, Vol. 25, No. 01, pp. 21-27, **2024**, <https://doi.org/10.69076/jomac.2024.0004>

Tartibu, L.K. (2025). Engineering Optimization. In: Multi-objective Optimization Techniques in Engineering Applications. Studies in Computational Intelligence, vol 1184. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-81237-8_1

Timoshenko & J. N. Goodier, Theory of Elasticity 2nd Edition, New York Toronto London, McGRAW-HILL BOOK COMPANY **1951**

K. Bhaskar, T. K. Varadan, (2022) Theory of Isotropic/Orthotropic Elasticity, Textbook, <https://doi.org/10.1007/978-3-031-06345-9>

Thiébat, F. (2019). Defining an Innovative Design Method Based on the Life Cycle Approach. In: Life Cycle Design. PoliTO Springer Series. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-11497-8_4

Parton V. Z., Perlin P., Mathematical Methods of the Theory of Elasticity, Volume 2, **1984** Moscow

Wittel, H. M. (2015). *Allgemeine und konstruktive Grundlagen*. In: Roloff/Matek *Maschinenelemente*. Wiesbaden: Springer Vieweg.

Wu, J., Su, Z. Improved Artificial Rabbit Optimization Algorithm Fused with Particle Swarm Optimization for Wireless Sensor Network Coverage Optimization. J. Shanghai Jiaotong Univ. (2024). <https://doi.org/10.1007/s12204-024-2574-x>

Xin-She Yang (2010). "A New Metaheuristic Bat-Inspired Algorithm". *Nature Inspired Cooperative Strategies for Optimization (NISCO 2010)*, 65-74. DOI: 10.1007/978-3-642-12538-6_6

Xin-She Yang, Gebrail Bekdaş, Sinan Melih Nigdeli , Metaheuristics and Optimization in Civil Engineering, **2016**, 978-3-319-26243-7

Yukitaka Murakami, Theory of Elasticity and Stress Concentration, , Wiley; 1st edition (2016), 978-1119274094